ΤΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ

90
907.

ΣΤΕΦ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΔΟΜΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΩΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΝΙΚΟΛΑΙΔΗ

ΣΤΑΛΗΜΕΡΟΥ ΣΕΡΑΦΕΙΜ

με Σπανό Γ.

ΤΙΤΛΟΣ: Ζηταμε να προσδιορισουμε τις ανηγμενες παραμορφωσεις ε,γ που θα αναπτυχθουν σε σημειο σωματος που τελει υπο δυαξονικη ενταση,εαν μας ειναι γνωστα οι ανηγμενες παραμορφωσεις σε δυο καθετες αναμεταξυ τους διευθυνσεις.

1) ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1α) Ορθη ταση σε σημειο σωματος

Εστω σωμα που εχει μαζα M και εμβαδο S. Στο σωμα αυτο,εξασκουμε δυναμη F. Αρα στην απειροστη επιφανεια εμβαδου dS του σωματος, θα εξασκηθει στοιχειωδεις δυναμη dF. Το πηλικο της εξασκουμενης ανα μοναδα επιφανειας δυναμης dF, προς την στοιχειωδη επιφανεια dS, στην οποια εξασκειται θα καλουμε ορθη η καθετος ταση, στο εν λογω σημειο του σωματος που εξεταζουμε. Η ταση ειναι διανυσματικο μεγεθος, ως εκ τουτου για τον προσδιορισμο της απαιτειται μετρο, διευθυνση και φορα. Εχει δε μοναδες, δυναμεως ανα μοναδα επιφανειας. Η ταση εκφραζει την ποσοτητα της δυναμης σε ενα σημειο, αλλιως την ενταση της δυναμεως.

$$\sigma = dF/dS$$

1β) Ενταση–Παραμορφωσεις και ειδη αυτων

Ενα στερεο σωμα ειναι ενα συνολο μοριων, που συγκρατουνται μεταξυ τους απο ισχυρες ηλεκτροστατικες δυναμεις (δυναμεις Van der Waals). Τα μορια αυτα, λογω των ισχυρων αυτων ηλεκτροστατικων (εσωτερικων) δυναμεων, εχουν καθορισμενες στο χωρο θεσεις, σχηματιζουν δε, απλα γεωμετρικα σχηματα που επαναλαμβανονται περιοδικα καθ ολη την εκταση της μαζας του σωματος. Οταν εμεις θελησουμε να μεταβαλλουμε τις καθορισμενες αυτες αποστασεις των μοριων αναπτυσσονται αφ ενος μεν πολυ ισχυρες ηλεκτροστατικες δυναμεις που τεινουν να αντιταχθουν στην επιφερομενη αυτη μεταβολη (σσ η δυναμη που αποτελει το εξωτερικο αιτιο), αφ ετερου δε μακροσκοπικα αλλαζει το σχημα του σωματος . Στην περιπτωση αυτη, δηλαδη οταν ενα σωμα καταπονειται απο καποιες εξωτερικες δυναμεις, λεγουμε οτι το σωμα ευρισκεται σε εντατικη κατασταση. Η εντατικη κατασταση ενος σωματος μπορει να ειναι μονοαξονικη, δυαξονικη η και τριαξονικη αναλογα αν οι εξασκουμενες δυναμεις δρουν γραμμικα, επιπεδα η και χωρικα. Εντελως αναλογα και η παραμορφωσιακη κατασταση διακρινεται σε γραμμικη, επιπεδη και χωρικη. Το αποτελεσμα της εντατικης καταστασεως ειναι η παραμορφωση του σωματος. Οι παραμορφωσεις γενικα μπορουν να διακριθουν σε δυο κατηγοριες. Στις ελαστικες και στις πλαστικες παραμορφωσεις. Οταν το σωμα που βρισκεται σε εντατικη κατασταση επανερχεται στο αρχικο του σχημα μετα την παυση του αιτιου, δηλαδη των δυναμεων που εξασκουνται στο σωμα, εχουμε ελαστικο σωμα και η δε ιδιοτητα αυτη καλειται ελαστικοτητα. Εαν μετα την παυση του αιτιου το σωμα δεν επανερχονταν στο αρχικο του σχημα θα ειχαμε εντελως αναλογα ενα πλαστικο σωμα και η ιδιοτητα αυτη κατ αναλογια θα ονομαζονταν πλαστικοτητα. Ενα υλικο το οποιο ειναι απολυτως ελαστικο ακομα και για ακαριαιες παραμορφωσεις δεν εμφανιζει παραμενουσες τασεις η παραμορφωσεις, και κατα τις φορτισεις / αποφορτισεις του ακολουθει την ιδια ακριβως πορεια. Τα απολυτως πλαστικα υλικα εχουν μετρο ελαστικοτητος πρακτικα απειρο, δηλαδη στην ελαστικη περιοχη παρουσιαζουν αποτομη αυξηση των παραμορφωσεων. Πρακτικα δεν υπαρχει 100% αμιγως ελαστικο η πλαστικο σωμα, καθως ενα σωμα χαρακτηριζεται σε καποιο βαθμο και απο τις δυο αυτες ιδιοτητες, αναλογα παντα και με την δεινοτητα της καταπονησης. Ετσι εχουμε ανελαστικα, ελαστοπλαστικα υλικα. Υπαρχει ομως και δευτερη διακριση των ειδων των παραμορφωσεων. Διακρινουμε τις ορθες παραμορφωσεις, οι οποιες ειναι βραχυνσεις η μηκηνσεις, και τις διατμητικες η ολισθαινουσες παραμορφωσεις, οι οποιες ειναι γωνιακες μεταβολες.

1γ) Ομογενη,ισοτροπα και συνεχη σωματα

Η ολη θεωρια της ελαστικοτητας βασιζεται πανω στις τρεις αυτες προτασεις, χαρη στις οποιες κατεστηθη δυνατον η δημιουργια των μαθηματικων μας μοντελων που περιγραφουν την παραμορφωσιακη κατασταση των σωματων που τελουν υπο ενταση.

Ονομαζουμε ενα σωμα ισοτροπο οταν εχει τις ιδιες μακροσκοπικες ιδιοτητες προς ολες τις διευθυνσεις μεσα στη μαζα του. Σε αντιθετη περιπτωση το υλικο θα καλειται ανισοτροπο (πχ το ξυλο η τα συνθετικα υλικα).

Ονομαζουμε ομογενες ενα σωμα οταν αυτο παρουσιαζει σε ολα τα σημεια της μαζας του τις ιδιες ιδιοτητες.

Ονομαζουμε συνεχες ενα σωμα οταν δεν παρουσιαζει κενα η ασυνεχειες στη μαζα του.

1δ) Μετρο ελαστικοτητος–Νομος Hooke

Εστω μια ραβδος μηκους L και σταθερας διατομης S, η οποια εφελκυεται απο αξονικη δυναμη F. Η εφαρμογη της αξονικης δυναμεως επι της ραβδου αποτελει την αιτια για την παραμορφωση, δηλαδη την επιμηκηνση, αυτης. Το φαινομενο αυτο, δηλαδη της μεταβολης του μηκους της ραβδου κατα ΔL, καλειται εφελκυσμος. Εν γενει ειναι το φαινομενο που λαμβανει χωρα οταν τα γειτνιαζοντα μορια ενος ομογενους, ισοτροπου σωματος απομακρυνονται. Η παραμορφωση ΔL της ραβδου ειναι αναλογη του μηκους της ραβδου και της εξασκουμενης δυναμεως, και αντιστροφως αναλογη της διατομης της ραβδου S και μιας σταθερας E χαρακτηριστικης του υλικου της ραβδου..Η σταθερα E καλειται μετρο ελαστικοτητας η μετρο του Young, και για παραμορφωσεις εντος των ελαστικων οριων ισουται με την κλιση του διαγραμματος τασεων–ανηγμενων παραμορφωσεων στο ευθυγραμμο τμημα αυτης. Αρα λοιπον ισχυει:

$E=\tan\phi=\Delta\sigma/\Delta\varepsilon$ (1)

Οριζουμε επισης ως ανηγμενη γραμμικη επιμυκηνση, ε, το πηλικο της μεταβολης ΔL του μηκους της ραβδου, προς το αρχικο μηκος της ραβδου. Ουσιαστικα το ε ειναι ενα ποσοστο του μηκους της ραβδου.

$\varepsilon=\Delta L/L$ (2)

Με βασει τα προαναφερθεντα προχωρουμε σε μετασχηματισμο του νομου του Hooke (3). Αρα λοιπον θα εχουμε:

$\Delta L=F\,L\,/\,S\,E$ (3)

(3)$\Rightarrow \Delta L\,/\,L=F\,/S\,E$ (4)

Εξ ορισμου ομως ισχυει οτι $\sigma=F/S$ (5). Αρα λοιπον ειναι:

(4),(5),(2)$\Rightarrow \varepsilon=\sigma/E$ **(6)**

Απο την σχεση **(6)** συμπεραινουμε οτι η οιαδηποτε εν γενει παραμορφωση ειναι αναλογη της τασεως. Αυτος ειναι και ο νομος της αναλογιας, ο οποιος ονομαζεται ετσι επειδη εκφραζει αναλογικα τα σ, ε. Ισχυει δε εντος και μεχρις των οριων ελαστικοτητος. Εκτος της ελαστικης περιοχης παυει η ισχυς του νομου του Hooke, δηλαδη δεν εχουμε ελαστικες παραμορφωσεις. Στον νομο της αναλογιας υπεισερχεται το μετρο ελαστικοτητος του υλικου, το οποιο ειναι εξαρτωμενο απο την φυση του υλικου.

1ε) Γενικευση νομου Hooke, λογος Poisson.

Εστω απειροστο σημειο ομογενους και ισοτροπου σωματος που ευρισκεται σε εντατικη κατασταση, οπως η ραβδος της παραγραφου 1δ).Υποβαλλοντας την ραβδο σε εφελκυσμο κατα την εννοια xx, παρατηρουμε οτι κατα την εννοια αυτη εχουμε αξονικη επιμηκηνση, εστω αυτη ΔL_{xx} αρα και ανηγμενη επιμηκηνση ε_{xx}, ενω κατα τις εννοιες yy, zz παρατηρειται μια πλευρικη συστολη ε_{yy}, ε_{zz}. Αποδεικνυεται για ομογενες και ισοτροπο υλικο που καταπονειται στην ελαστικη περιοχη οτι το πηλικο της πλευρικης βραχυνσεως προς την αξονικη επιμηκηνση ειναι σταθερος αριθμος και συμβολιζεται με μ.

$\mu=-\varepsilon_{yy}/\varepsilon_{xx}=-\varepsilon_{zz}/\varepsilon_{xx}$ (7)

Η σταθερα μ ονομαζεται λογος του Poisson, η λογος εγκαρσιας συστολης. Για ομογενη και ισοτροπα υλικα ο λογος του Poisson δεν ξεπερνα την οριακη τιμη 0.5, στην οποια τεινει ασυμπτωτικα οταν το υλικο εχει εισχωρησει αρκετα στην πλαστικη περιοχη. Για την τιμη αυτη το υλικο ειναι ασυμπιεστο (ισοσυμπιεστο). Μονο αν το υλικο ειναι εντονα ανισοτροπο δυναται να υπαρξει υπερβαση τις οριακης αυτης τιμης. Ο αντιστροφος του λογου του Poisson καλειται συντελεστης του Poisson και συμβολιζεται με ν.

Γνωριζοντας τον λογο του Poisson προχωρουμε σε διατυπωση της γενικευσης του νομου του Hooke. Αρα σε σημειο σωματος που ευρισκεται εν γενει σε τριαξονικη εντατικη κατασταση οι παραμορφωσεις που θα παρατηρηθουν θα διδονται συναρτησει των τασεων, απο τις παρακατω σχεσεις.

$\varepsilon_{xx}=1/E\ [\sigma_{xx}-\mu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})]$ (8α)

$\varepsilon_{yy}=1/E\ [\sigma_{yy}-\mu(\sigma_{zz}+\sigma_{xx})]$ (8β)

$\varepsilon_{zz}=1/E\ [\sigma_{zz}-\mu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})]$ (8γ)

$\gamma_{xy}=\tau_{xy}\ /\ G$ (8δ)

$\gamma_{yz}=\tau_{yz}\ /\ G$ (8ε)

$\gamma_{zx}=\tau_{zx}\ /\ G$ (8στ)

Στις σχεσεις (8) ευρισκονται οι ορθες, γωνιακες παραμορφωσεις συναρτησει των ορθων, διατμητικων τασεων και των ελαστικων σταθερων E, G. Η σταθερα G καλειται μετρο διατμησεως η μετρο ολισθησεως. Μεταξυ των ελαστικων σταθερων E, G, μ ισχυει η παρακατω σχεση.

$$G=E\ /\ 2(\ 1+\mu\ )\quad (\ 9\ )$$

1στ) Καθαρη διατμηση

Καθαρη διατμηση εχουμε οταν σε ενα σημειο σωματος που βρισκεται σε δυαξονικη εντατικη κατασταση ενεργουν εφελκυστικες, θλιπτικες τασεις κατα δυο καθετες μεταξυ τους διευθυνσεις, ενω εχουν το ιδιο μετρο. Αρα θα ισχυει κατ αρχας οτι $\sigma_{xx}=-\sigma_{yy}$. Στις εδρες του απειροστου αυτου παραλληλογραμμου, που προκυπτει δια στροφης του επιπεδου μας κατα γωνια $\phi=45°$, επενεργει μονον διατμητικη ταση τ. Αυτη η εντατικη κατασταση κατα την οποια υπαρχουν μονο διατμητικες τασεις ονομαζεται καθαρη διατμηση, και ζητουμε να βρουμε τις παραμορφωσεις που προκυπτουν απο μια τετοια παραμορφωσιακη κατασταση.

Εαν σχεδιασουμε τον κυκλο του Mohr,βασει των αντιπροσωπευτικων σημειων των επιπεδων (xx) και (yy), ειναι προφανες οτι ισχυει $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=R=\tau_{max}$ οπως φαινεται και απο το σχημα 1.1. Η τ_{max} προκυπτει δια στροφης του επιπεδου (xx) κατα γωνια $\phi=45°$. Στο καθετο σ αυτο επιπεδο δρα η τ_{min}.

Για τις δυο αυτες τιμες τασεων ισχυει οτι $\tau_{max}=|\tau_{min}|$ (οπως φαινεται στο σχημα 1.2.

Στην περιπτωση της καθαρης διατμησης, οπως αυτη απεικονιζεται στο σχημα 1.3, παρατηρουμαι οτι δεν υπαρχουν μηκηνσεις η βραχυνσεις, λογω της μη υπαρξης ορθων τασεων. Υπαρχει ομως καποια γωνιακη παραμορφωση. Η γωνια γ καλειται γωνια διατμησεως η γωνια ολισθησεως και εκφραζει την αμοιβαια ολισθηση δυο επιπεδων που βρισκονται σε αποσταση ιση με την μοναδα. Επειδη ομως η γωνια γ ειναι απειροστη θα ισχυει οτι: $\gamma=\tan\gamma=AA'/A\Delta$

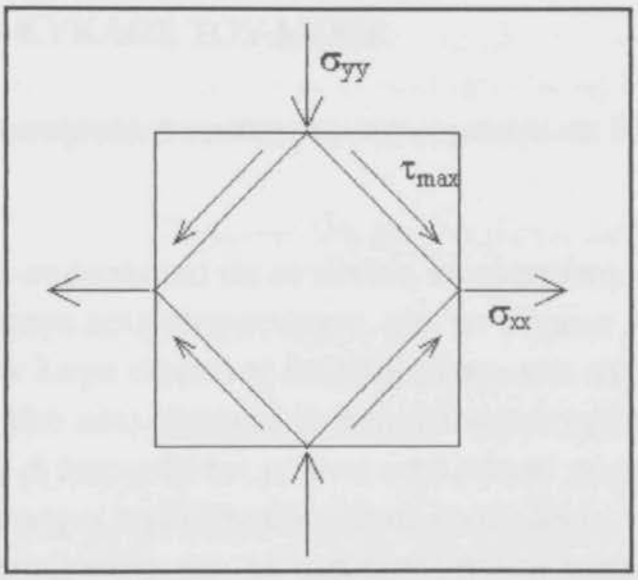
Εαν θεσουμε οτι $O\Delta=L$, και $O\Delta'=L_1$ εχουμε:

$$L_1=L+\Delta L=L+\varepsilon L=L\,(1+\varepsilon) \quad (10)$$

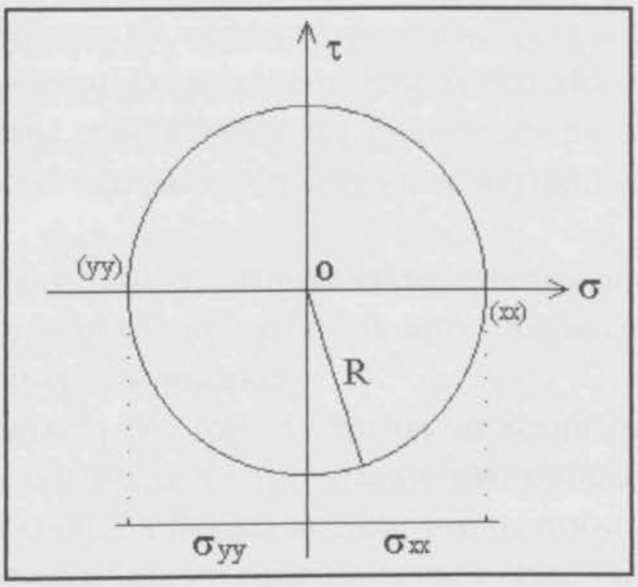
Αρα απο την σχεση (10) θα εχουμε οτι:

$$OA\,(1+\varepsilon_{yy})=OA' \qquad O\Delta\,(1+\varepsilon_{xx})=O\Delta'$$

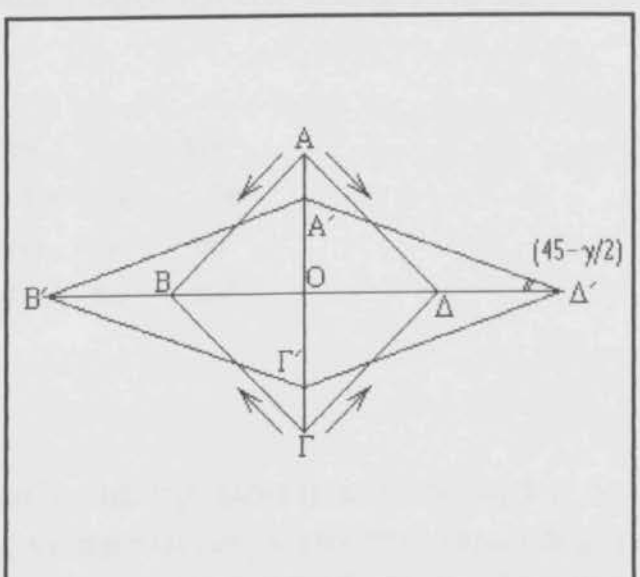
Δηλαδη $\tan(45-\gamma/2)=OA'/O\Delta'=(1+\varepsilon_{yy})/(1+\varepsilon_{xx}) \quad (11)$



Σχημα 1.1



Σχημα 1.2



Σχημα 1.3

2) ΠΕΡΙ ΤΑΣΕΩΝ–ΚΥΚΛΟΣ ΤΟΥ MOHR

2α) Τασεις στο εσωτερικο σωματος ευρισκομενου σε δυαξονικη αξονικη κατασταση

Εστω σωμα που ευρισκεται σε εντατικη κατασταση λογω συστηματος εξωτερικων δυναμεων που ισορροπουν, και το σημειο Α της μαζας του. Το σημειο Α του εν λογω σωματος θα ισορροπει και αυτο υπο την επιδραση των τασεων που εξασκει το σωμα στο στοιχειωδες αυτο σημειο. Το εν λογω σημειο Α παρισταται με ενα απειροστο παραλληλεπιπεδο (σχημα 2.1). Το ανυσμα της εξασκουμενης ανα εδρας τασης αναλυεται σε μια ορθη (καθετος) ταση και σε μια διατμητικη ταση υπο τυχουσα γωνια, η οποια διατμητικη ταση αναλυεται σε αλλες δυο συνιστωσες, κατα τους αντιστοιχους αξονες του τρισορθογωνιου συστηματος αναφορας που εκλεξαμε. Οι τασεις αυτες ονομαζονται με την βοηθεια δυο δεικτων και προσημαινονται κατα τον ακολουθο τροπο:

–Ο πρωτος δεικτης, η δεικτης εδρας, δηλωνει σε ποια εδρα ανηκει (καθετη στον εν λογω αξονα του συστηματος αναφορας) η προς συζητηση ταση.

–Ο δευτερος δεικτης που χρησιμοποιειται για την προσημανση των τασεων δηλωνει παραλληλια με καποιον απο τους αξονες του εκλεγμενου συστηματος αναφορας.

Για την προσημανση των τασεων πρεπει να πουμε οτι οι δε ορθες τασεις θεωρουνται θετικες οταν προκαλουν εφελκυσμο, και αρνητικες οταν προκαλουν θλιψη. Οι δε διατμητικες τασεις προσημαινονται ως θετικες οταν το σχηματιζομενο τμητικο ζευγος ειναι δεξιοστροφο.

Αρα στην γενικη περιπτωση (της τριαξονικης εντατικης καταστασεως), αναπτυσσονται στο απειροστο μας παραλληλεπιπεδο οι εξης τασεις.

σ_{xx} τ_{xy} τ_{xy}' τ_{zy}

σ_{yy} τ_{xz} τ_{xz}' τ_{zx}

σ_{zz} τ_{yx} τ_{yx}' τ_{zx}'

σ_{xx}' τ_{yz} τ_{yz}' τ_{zy}'

σ_{yy}'

σ_{zz}'

Εμεις ομως εξεταζουμε την ειδικη περιπτωση της δυαξονικης η επιπεδης εντατικης καταστασεως κατα την οποια δεχομαστε τη υπαρξη ορθων και διατμητικων τασεων κατα δυο μονο διευθυνσεις, εστω αυτες οι (xx), (yy). Ως και εκ τουτου οι αναπτυσσομενες κατα την διευθυνση (zz) τασεις ειναι μηδενικες, δηλαδη ολες οι τασεις αυτες που η δρουν επι των εδρων (z) του απειροστου εν λογω παραλληλεπιπεδου, η που οι φορεις των ανυσματων των ειναι παραλληλες με τον αξονα (zz) του τρισορθογωνιου συστηματος αναφορας που εκλεξαμε, ειναι μηδενικες. Για την μεν πρωτη περιπτωση ειναι προφανες οτι:

$$\sigma_{zz}=\sigma_{zz}'=\tau_{zy}=\tau_{zx}=\tau_{zy}'=\tau_{zx}'=0$$

Μας μενει λοιπον να δειξουμε οτι και:

$$\tau_{yz}=\tau_{xz}=\tau_{yz}'=\tau_{xz}'=0$$

Εξεταζουμε την ισορροπια των ροπων των δυναμεων που ασκουνται επι των εδρων του απειροστου αυτου παραλληλεπιπεδου ως προς τον αξονα (xx). Ως θετικη φορα στις ισορροπιες των δυναμεων οριζεται αυτη των θετικων ημιαξονων του συστηματος αναφορας, ενω ως θετικη φορα των ροπων νοειται αυτη των δεικτων του ωρολογιου. Το ιδιο βαρος δεν λαμβανεται υποψη στους υπολογισμους μας ως απειροστο ανωτερας ταξεως ($B=\gamma_o\, d_x\, d_y\, d_z$). Αρα λοιπον ισχυει:

$$\tau_{yx}\, S_y\, d_y/2+\tau_{yx}'\, S_y\, d_y/2=0 \Rightarrow \tau_{yx}=-\tau_{yx}' \quad (1\alpha)$$

Ενεργουμε το ιδιο ως προς τον αξονα (yy) και βρισκουμε οτι:

$$\tau_{xy}=\tau_{xy}' \quad (1\beta)$$

Η ιδια διαδικασια επαναλαμβανεται θεωρωντας το επιπεδο (yz) και εξεταζοντας επι αυτου την ισορροπια των ροπων περι του αξονος (zz):

$\tau_{yz}=-\tau_{yz}'$ (1γ)

Εν τελει θεωρουμε και το επιπεδο (xz),της οποιας παλι εξεταζουμε την ισορροπια των ροπων των δυναμεων περι του αξονος (zz):

$\tau_{xz}=-\tau_{xz}'$ (1δ)

Οι σχεσεις (1α) μεχρι και (1δ) ειναι οι λεγομενες συνθηκες του Le Cauchy και μας επεξηγουν οτι οι διατμητικες τασεις που αναπτυσσονται σε δυο απειροστα επιπεδα, καθετα μεταξυ τους, ειναι κατ απολυτη τιμη ισα.

Εξεταζουμε την ισορροπια των δυναμεων κατα τον αξονα (zz) και εχουμε:

$\sum F_{zz}=0 \Rightarrow -\tau_{yz}\, S_y-\tau_{xz}\, S_x+\tau_{yz}'\, S_y+\tau_{xz}'\, S_x=0 \Rightarrow$ (1γ),(1δ)$\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\ \tau_{yz}'\ S_y + 2\ \tau_{xz}'\ S_x = 0$ (2)

Ισχυει ομως οτι: $S_y = d_x\, d_z$ (3) $S_x = d_y\, d_z$ (4)

Αρα λοιπον,εχουμε:

$$(2) \Rightarrow (3),(4) \Rightarrow 2d_z[\ \tau_{yz}'\ d_x + \tau_{xz}'\ d_y\ ] = 0 \quad (5)$$

Η σχεση (5) πληρειται σε καθε περιπτωση αν και μονο αν $\tau_{yz}' = \tau_{xz}' = 0$ (6)
Αρα απο τις σχεσεις (1γ), (1δ), (6) εχουμε τελικα οτι:

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}' = \tau_{xz} = \tau_{xz}' \quad (7)$$

Απομενει,για τον καθορισμο των παραμετρων του προβληματος μας να δειχθει οτι:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}' \qquad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}'$$

Πραγματι, εαν εξετασουμε συμφωνα με τα νεα δεδομενα μας, τις υπαρχουσες παραμετρους τασεων, και συγκεκριμενα εξετασουμε την ισορροπια των δυναμεων, περι του αξονος (xx) εχουμε οτι:

$$\Sigma F_{xx} = 0 \Rightarrow -\sigma_{xx}'\ S_x + \sigma_{xx}\ S_x + \tau_{yx}\ S_y - \tau_{yx}'\ S_y = 0 \quad (8)$$

Λογω ομως της σχεσης (1α) απο την (8) εχουμε οτι: $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}'$
Εργαζομενοι με ομοιο τροπο (δηλαδη εξεταζοντας την ισορροπια δυναμεων περι του αξονος (yy)) εχουμε οτι $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}'$.

Αρα στην ειδικη περιπτωση της δυαξονικης εντατικης καταστασεως οι τασικοι παραμετροι που αρκουν για την περιγραφη της ειναι, τελικα,,οι εξης (σχημα 2.2):

$$\sigma_{xx} \qquad \sigma_{yy} \qquad \tau_{xy}$$

Απομενει λοιπον να δειξουμε για την περιπτωση αυτη (δυαξονικη εντατικη κατασταση) τι τασεις αναπτυσσονται σε σημειο A σωματος που βρισκεται σε δυαξονικη εντατικη κατασταση, οταν αυτο στραφει κατα γωνια φ. Εστω λοιπον το επιπεδο Φ, της εντατικης καταστασης που παρισταται στο σχημα 2.3, το οποιο σχηματιζει γωνια φ με το επιπεδο (xx). Θα προσδιορισουμε τις τασεις σ_ϕ, τ_ϕ που αναπτυσσονται επι του επιπεδου αυτου.

Εστω το απειροστο στοιχειο του σχηματος 2.4. Τουτο θα ισορροπει υπο την επιδραση των ολικων δυναμεων που ενεργουν στο στοιχειο αυτο. Επισης οριζουμε τους βοηθητικους αξονες z_1 και z_2.. Η προσημανση των ορθων και διατμητικων τασεων γινεται κατα τα μεχρι τουδε γνωστα της παραγραφου 2α). Επειδη ομως ισχυει οτι $\tau_{xy}=-\tau_{yx}$ στους συμβολισμους μας γραφουμε τ_{xy} ασχετα με τον συμβατικο τροπο γραφης τ_{yx} χαρακτηριζοντας ετσι παλι τα αριστεροστροφα τμητικα ζευγη θετικα. Εξεταζουμε την ισορροπια κατα των αξονα z_1 και εχουμε:

$$\sum F_{z1}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_\phi dS_\phi-(\sigma_{xx}\cos\phi)dS_x-(\sigma_{yy}\sin\phi)dS_y+\tau_{xy}dS_x\cos(90-\phi)+\tau_{xy}dS_y\cos\phi=0 \quad (1)$$

$$dS_x=\cos\phi\ dS_\phi \quad (2)$$
$$dS_y=\sin\phi\ dS_\phi \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \sigma_\phi=\sigma_{xx}\cos^2\phi+\sigma_{yy}\sin^2\phi-2\tau_{xy}\cos\phi\sin\phi \quad (4)$$

$$\sin 2\phi=2\cos\phi\sin\phi \quad (5)$$
$$\cos^2\phi=(1+\cos 2\phi)/2 \quad (6)$$
$$\sin^2\phi=(1-\cos 2\phi)/2 \quad (7)$$

$$(4),(5),(6),(7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_\phi=(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})/2+(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos 2\phi/2-\tau_{xy}\sin 2\phi \quad (8)$$

Με ομοιο τροπο εξεταζουμε την ισορροπια των δυναμεων περι του αξονα z_2 και θα εχουμε:

$$\sum F_{z2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_\phi dS_\phi+\tau_{xy}dS_y\cos(90-\phi)-\tau_{xy}dS_x\cos\phi-\sigma_{xx}dS_x\cos(90-\phi)+\sigma_{yy}dS_y\cos\phi=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_\phi=\tau_{xy}(\cos^2\phi-\sin^2\phi)+\sigma_{xx}\cos\phi\sin\phi-\sigma_{yy}\sin\phi\cos\phi \quad (9)$$

$$\cos 2\phi=\cos^2\phi-\sin^2\phi \quad (10)$$

$$(9),(10) \Rightarrow \tau_\phi=(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\sin 2\phi/2+\tau_{xy}\cos 2\phi \quad (11)$$

Δηλαδη δειξαμε οτι τελικα ισχυουν οι τυποι:

$$\sigma_\phi=(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})/2+(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos 2\phi/2-\tau_{xy}\sin 2\phi \quad (12)$$

$$\tau_\phi=(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\sin 2\phi/2+\tau_{xy}\cos 2\phi \quad (13)$$

Εαν δηλαδη σε σημειο Α σωματος ευρισκομενου σε δυαξονικη εντατικη κατασταση θεωρησω δυο καθετα αναμεταξυ τους επιπεδα, που διερχονται απο το σημειο Α, τοτε οταν το απειροστο αυτο σημειο στραφει κατα γωνια ϕ, οι τασεις, ορθες και διατμητικες, που θα αναπτυχθουν στο επιπεδο Φ, θα διδονται απο τις σχεσεις (12) και (13). Αν δηλαδη γνωριζω τις τασεις σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy}, τοτε οι τασεις σ_ϕ, τ_ϕ παριστουν τις τασεις που δρουν επι του απειροστου επιπεδου που σχηματιζει γωνια ϕ με το επιπεδο (xx).

2β) Διερευνηση των σχεσεων (12) και (13)

Οπως παρατηρουμε απο τους τυπους (12) και (13) οι τασεις σ_ϕ, τ_ϕ ειναι συναρτησεις που εχουν ως μεταβλητη την γωνια ϕ. Αρα για την ευρεση των ακροτατων τιμων των δυο αυτων τασικων συναρτησεων φτανει να εξετασουμε για ποια τιμη της γωνιας κλισεως ϕ μηδενιζεται η πρωτη παραγωγος. Πραγματι εχουμε οτι:

$$d\sigma_\phi/d\phi=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})/2 \sin2\phi\ 2 - 2\ \tau_{xy} \cos2\phi=0 \Rightarrow (\sigma_{xx}-\sigma_{yy}) \sin2\phi=-2\tau_{xy} \cos2\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan2\phi=-2\tau_{xy} / (\sigma_{xx}-\sigma_{yy}) \quad (14)$$

Με τον ιδιο τροπο εχουμε οτι:

$$d\tau_\phi/d\phi=0 \Rightarrow (\sigma_{xx}-\sigma_{yy})/2 \cos2\phi\ 2-2\ \tau_{xy} \sin2\phi=0 \Rightarrow \tan2\phi'=(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}) / 2\tau_{xy} \quad (15)$$

Απο την σχεση (1) λοιπον εχουμε οτι:

$$\tan2\theta = \tan2\phi \Rightarrow 2\theta = 2\phi+\kappa\pi \quad , \kappa \varepsilon N \Rightarrow \theta = \phi + \kappa\pi / 2 \quad , \kappa \varepsilon N \quad (16)$$

Απο την σχεση (16) και για διαφορες τιμες του κ εχουμε διαφορετικα επιπεδα:

- –Για $\kappa=0$ εχουμε $\theta=\phi$
- –Για $\kappa=1$ εχουμε $\theta=\phi + \pi/2$
- –Για $\kappa=2$ εχουμε $\theta=\phi + \pi$, το οποιο συμπιπτει με το πρωτο επιπεδο, δηλαδη ($\kappa=0$)

Παρατηρουμε οτι για ολες τις δυνατες τιμες του κ,αναγομαστε σε δυο καθετα μεταξυ τους επιπεδα. Αρα υπαρχουν δυο και μονο δυο επιπεδα, τα οποια διερχονται απο το Α και ειναι αναμεταξυ τους καθετα, και εμφανιζουν ακροτατες τιμες τις ορθης τασεως. Στο μεν ενα επιπεδο η ορθηταση λαμβανει μεγιστη τιμη, στο δε αλλο ελαχιστη τιμη. Επι των επιπεδων αυτων δεν αναπτυσσεται διατμητικη ταση. Ονομαζονται δε κυρια επιπεδα, οι δε τασεις σ_{max}, σ_{min} ονομαζονται κυριες τασεις.

Με απαλοιφη της γωνιας 2φ απο την σχεση (12) εχουμε οτι:

$$\sigma_{(max,min)} = (\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) / 2 \; (+-) \sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2 / 4 + \tau_{xy}^2}$$

Η υποριζη ποσοτητα παριστα την $\sqrt{R}$, δηλαδη την τετραγωνικη ριζα της επιβατικης ακτινας του κυκλου του Mohr οπως αυτη θα αναπτυχθει παρακατω.

$$\tan 2\theta' = \tan 2\phi' \Rightarrow 2\theta' = 2\phi' + \kappa\pi \quad , \kappa \in N \Rightarrow \theta' = \phi' + \kappa\pi / 2 \quad , \kappa \in N \quad (17)$$

Παλι απο την σχεση (17) για διαφορετικες τιμες του κ εχουμε και διαφορετικα επιπεδα:

–Για κ=0 εχουμε $\theta'=\phi'$
–Για κ=1 εχουμε $\theta'=\phi' + \pi/2$
–Για κ=2 εχουμε $\theta'=\phi' + \pi$, το οποιο συμπιπτει με το πρωτο επιπεδο, δηλαδη (κ=0)

Παρατηρουμε λοιπον οτι για ολες τις δυνατες τιμες του κ αναγομαστε σε δυο καινουργια επιπεδα, τα οποια ειναι καθετα μεταξυ τους και διερχονται απο το σημειο Α. Τα επιπεδα αυτα προκυπτουν δια στροφης της επιβατικης ακτινος απο καποιο κυριο επιπεδο κατα γωνια 45°.Αρα αν γνωριζω τα κυρια επιπεδα, οι διχοτομοι των διεδρων γωνιων οριζουν τα επιπεδα επι των οποιων αναπτυσσεται η μεγιστη διατμητικη ταση. Στα επιπεδα αυτα εκτος της διατμητικης τασεως αναπτυσσεται και ορθη ταση. Στο μεν ενα επιπεδο δρα η τ_{max}, στο δε αλλο επιπεδο δρα η τ_{min}. Αρα οι δυο, κατ απολυτη τιμη, διατμητικες τασεις ανηκουν σε δυο διευθυνσεις που σχηματιζουν με τις κυριες διευθυνσεις γωνια 45.° Επισης, η μεγιστη διατμητικη ταση που διερχεται απο σημειο σωματος που βρισκεται σε δυαξονικη εντατικη κατασταση, ισουται με την ημιδιαφορα των κυριων τασεων στο σημειο αυτο:

$$\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2 \quad (18) \qquad \tau_{(max,min)} = (+-) \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 + \tau_{xy}^2} \quad (19)$$

Εαν τυχει και οι αρχικες διευθυνσεις ειναι κυριες, δηλαδη οταν μας δινεται οτι $\tau_{xy} = 0$, οι τασεις που αναπτυσσονται δια στροφης του απειροστου επιπεδου θα δινονται απο τους τυπους (20) και (21) αντιστοιχα:

$$\sigma_\phi = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2 + (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \cos 2\phi / 2 \quad (20)$$

$$\tau_\phi = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \sin 2\phi / 2 \quad (21)$$

2γ) Κυκλος του Mohr – Γραφικη παρασταση τασεων

Ο κυκλος του Mohr ειναι μια γραφικη μεθοδος προσδιορισμου της εντατικης καταστασεως σε σημειο σωματος που τελει υπο ενταση, δυαξονικη η και τριαξονικη. Συμφωνα με την μεθοδο αυτη καθε εντατικη κατασταση (για την περιπτωση μας, της δυαξονικης εντατικης καταστασης, καθε ζευγος συντεταγμενων σ, τ) παρισταται με ενα σημειο του επιπεδου, κατα απλο και εποπτικο τροπο. Για την γραφικη παρασταση της εντατικης καταστασεως χρησιμοποιουμε ορθογωνιο συστημα συντεταγμενων στο οποιο οι ορθες τασεις σημειωνονται στον αξονα των τετμημενων, ενω οι διατμητικες τασεις σημεινωνται στον αξονα των τεταγμενων. Καθε σημειο του επιπεδου αντιστοιχει σε καρτεσιανο ζευγος αποτελουμενο απο μια ορθη και μια διατμητικηταση που αντιστοιχει σε μια συγκεκριμενη εντατικη κατασταση. Η προσημανση των τασεων γινεται οπως αυτη ειχε αναπτυχθει στην ενοτητα 2β).

Εστω το σημειο Α του σωματος που ευρισκεται σε επιπεδη εντατικη κατασταση συμφωνα με τα μεχρι τουδε γνωστα. Στην προηγουμενη ενοτητα δειξαμε την ισχυ των τυπων (12) και (13), τους οποιους και θα μετασχηματισουμε στη συνεχεια.

$$\sigma_\phi = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2 \cos 2\phi - \tau_{xy} \sin 2\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_\phi - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\phi / 2 - \tau_{xy} \sin 2\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\sigma_\phi - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2]^2 = [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\phi / 2 - \tau_{xy} \sin 2\phi]^2 \quad (22)$$

$$\tau_\phi - 0 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\phi / 2 + \tau_{xy} \cos 2\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_\phi^2 = [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\phi / 2 + \tau_{xy} \cos 2\phi]^2 \quad (23)$$

Προσθετοντας κατα μελη τις σχεσεις (22) και (23),και αναπτυσσοντας τις ταυτοτητες θα εχουμε:

$$[\sigma_\phi - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2]^2 + \tau_\phi^2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 + \tau_{xy}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\sigma_\phi - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2]^2 + \tau_{xy}^2 = \left(\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 + \tau_{xy}^2}\right)^2 \quad (24)$$

Η σχεση (24) παριστα την εξισωση περιφερειας κυκλου κεντρου K [($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$) / 2 , 0] και ακτινας

$$R = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 + \tau_{xy}^2}$$

Αρα καθε ζευγος συντεταγμενων σ, τ που επαληθευουν την (24) παριστα σημειο της περιφερειας του κυκλου του Mohr και αντιστροφα (καθε σημειο της περιφερειας του κυκλου του Mohr επαληθευει την σχεση (24)). Δηλαδη το τυχαιο επιπεδο που διερχεται απο το σημειο Α εχει συντεταγμενες (σ_ϕ, τ_ϕ) καποιο σημειο της περιφερειας του κυκλου του Mohr. Αρα το προβλημα μετατιθεται στο να βρουμε το σημειο του κυκλου του Mohr που αντιπροσωπευει το επιπεδο που περναει απο το σημειο Α και σχηματιζει με το επιπεδο (xx) τυχαια γωνια φ.

Αρα εστω η παραμορφωσιακη κατασταση του σχηματος 2.3 οπου ειναι σ_{xx} , $\sigma_{yy} > 0$ και $\tau_{xy} > 0$. Με διαμετρο την αποσταση μεταξυ των δυο ορθων τασεων εγγραφω κυκλο, κεντρου Κ και ακτινας R. Για να ειναι ο εγγραφεις κυκλος, κυκλος του Mohr, πρεπει και αρκει να δειξω οτι:

α) Εχει ακτινα $R = \sqrt{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + \tau_{xy}^2}$

β) Εχει κεντρο K = [($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$) / 2 , 0)

Θα ειναι:

$$\overline{OK} = \overline{OA} - \overline{KA} = \sigma_{xx} - \overline{KA} \quad (10)$$

$$\overline{OK} = \overline{OB} + \overline{BK} = \sigma_{yy} + \overline{BK} \quad (11)$$

Προσθετοντας τις σχεσεις (10) , (11) κατα μελη εχουμε οτι:

$$2\,\overline{OK} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \Rightarrow \overline{OK} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 \quad (12)$$

Επισης ισχυει οτι

$$\overline{BA} = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \text{ αρα } \overline{KA} = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2$$

Με εφαρμογη του πυθαγορειου θεωρηματος στο ορθογωνιο τριγωνο ΑΚ(xx) εχουμε οτι:

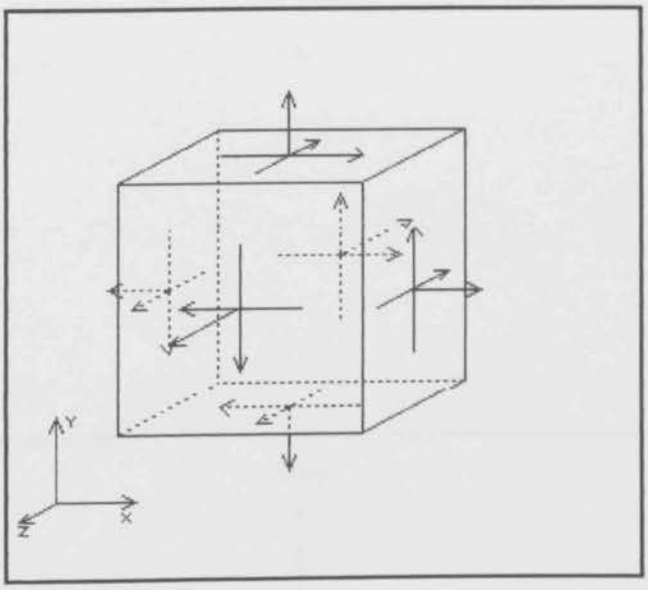
$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 + \tau_{xy}^2 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 + \tau_{xy}^2}$$

Πρεπει να παρατηρησουμε οτι τα αντιπροσωπευτικα σημεια των επιπεδων (xx) και (yy) ειναι σημεια αντιδιαμετρικα. Αρα αν στραφει το επιπεδο (xx) κατα γωνια φ προκειμενου να ταυτισθει με δοθεν σημειο (επιπεδο), πρεπει και το επιπεδο (yy) να στραφει κατα γωνια φ. Αρα θα παιρνουμε το αντιπροσωπευτικο σημειο του επιπεδου (xx) και θα στρεφουμε την επιβατικη ακτινα κατα γωνια διπλασια της δοθεισης γωνιας (2φ). Πρεπει επισης να αναφερουμε οτι τα σημεια Λ, Μ αποτελουν τα κυρια επιπεδα γιατι ισχυει οτι:

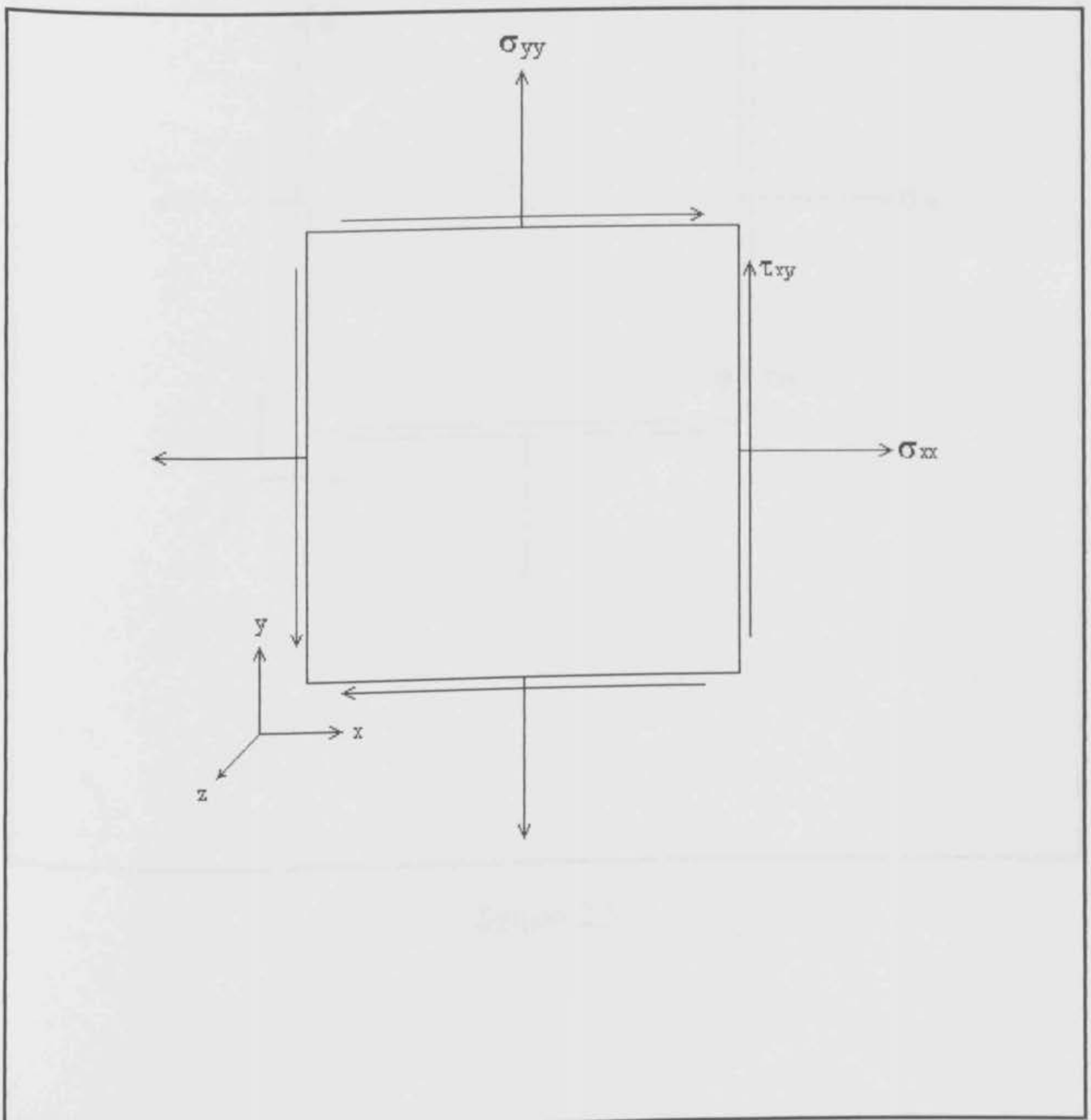
$$\overline{O\Lambda} = \sigma_{max} \qquad \overline{OM} = \sigma_{min}$$

Τελος αγοντας την καθετο στο κεντρο του κυκλου του Mohr, K, προκυπτουν τα αντιπροσωπευτικα σημεια των επιπεδων εκεινων επι των οποιων δρουν οι τ_{max} και τ_{min}. Ισχυει δε οτι:

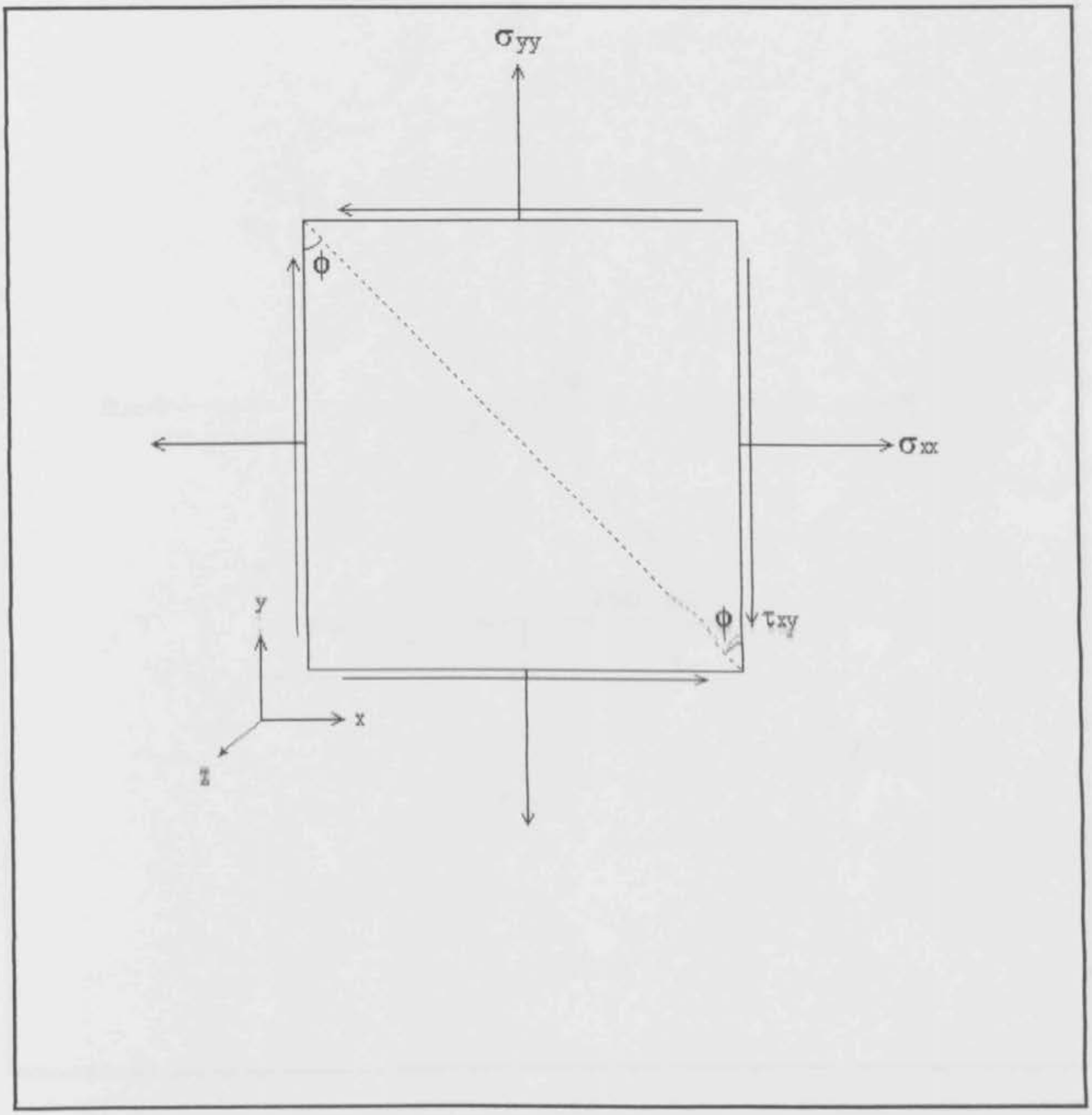
$$\tau_{max} = |\,\tau_{min}\,| = |\,R\,|$$



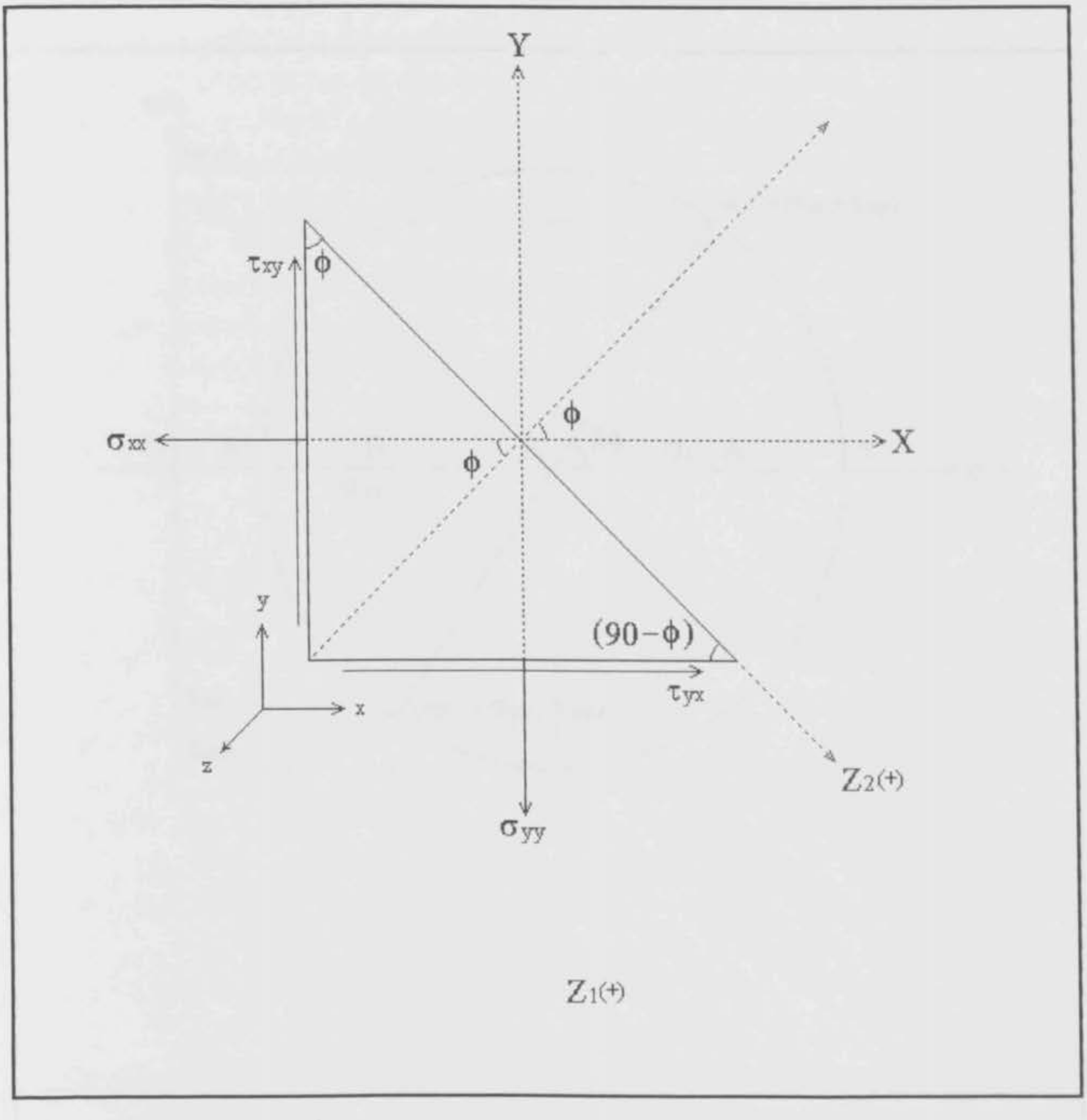
Σχημα 2.1



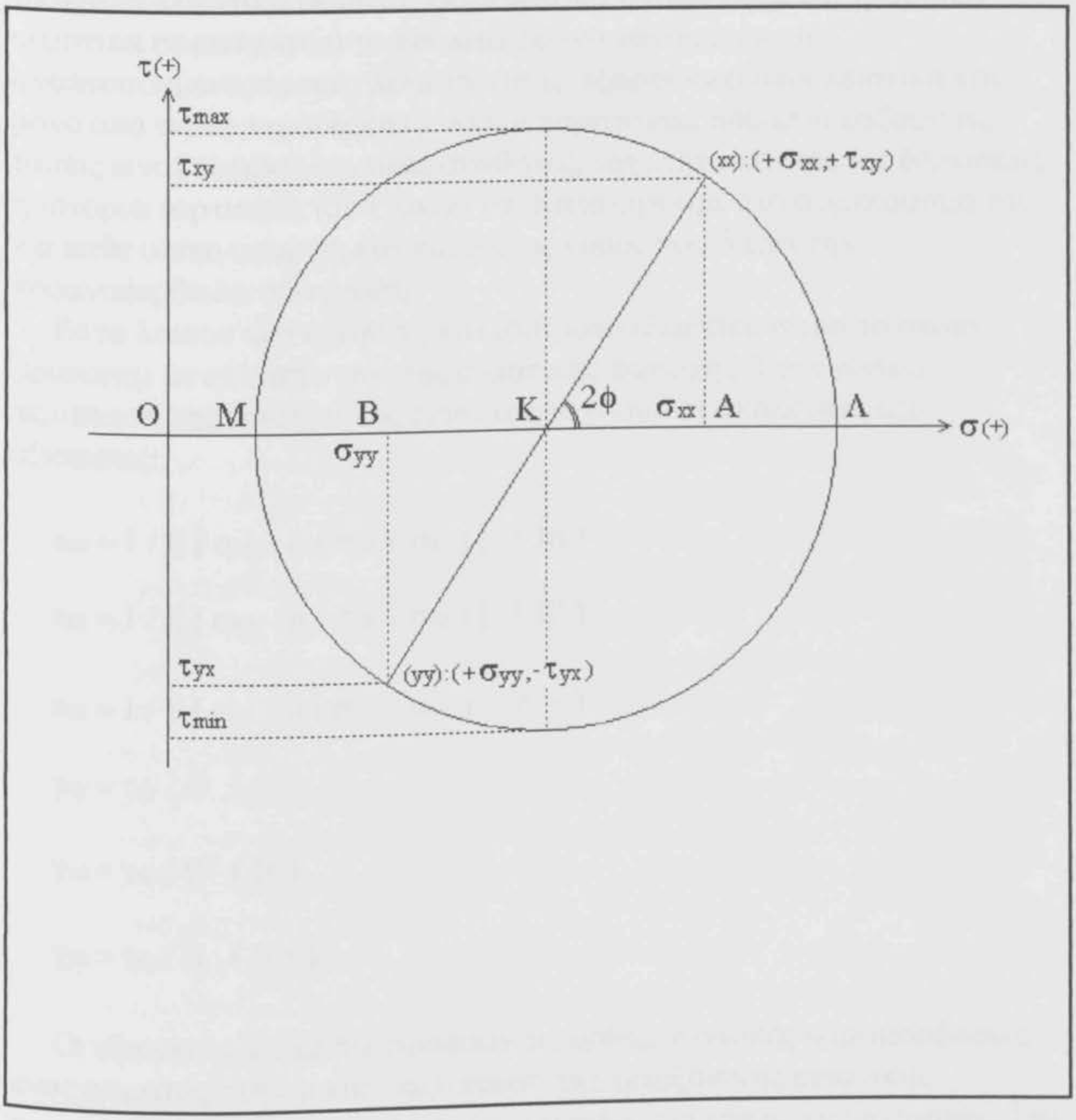
Σχημα 2.2



Σχημα 2.3



Σχημα 2.4



Σχημα 2.5

3) ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ – ΚΥΚΛΟΣ ΤΟΥ MOHR

3α) Παραμορφωσεις υπο τυχαια γωνια σωματος που βρισκεται σε επιπεδη εντατικη κατασταση

Σε προηγουμενη παραγραφο αναφεραμε την γενικευση του νομου του Hooke, ο οποιος για τα ομογενη και ισοτροπα σωματα συσχετιζει ανηγμενες παραμορφωσεις και τασεις, για ελαστικες παραμορφωσεις και γραμμικα ελαστικα σωματα. Παρενθετικα αναφερουμε οτι γραμμικα ελαστικα σωματα ειναι τα σωματα εκεινα των οποιων οι αναπτυσσομενες τασεις, λογω εντασης, εξαρτωνται αποκλειστικα και μονο απο τις παραμορφωσεις. Αλλοι παραγοντες που επηρεαζουν τις τασεις ειναι περιβαλλοντικες συνθηκες, ταχυτητα και τροπος φορτισεως, η ιστορια φορτισεως του υλικου κα. Καταληγουμε στο συμπερασμα οτι για καθε υλικο υπαρχει και και αλλος νομος που διεπει την προαναφερθεισα συσχετιση.

Εστω λοιπον ενα ομογενες και ισοτροπο ελαστικο σωμα το οποιο βρισκεται σε ενταση εντος της ελαστικης περιοχης. Στην γενικη περιπτωση της τριαξονικης εντασεως ισχυουν οι ακολουθες εξι εξισωσεις:

$$\varepsilon_{xx} = 1 / E \, [\, \sigma_{xx} - \mu \, (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \,] \quad (1\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = 1 / E \, [\, \sigma_{yy} - \mu \, (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \,] \quad (1\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 / E \, [\, \sigma_{zz} - \mu \, (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \,] \quad (1\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \quad (1\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \tau_{xz} / G \quad (1\varepsilon)$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G \quad (1\sigma\tau)$$

Οι εξισωσεις αυτες περιγραφουν τις ορθες, γωνιακες παραμορφωσεις ενος σωματος στην γενικη περιπτωση της τριαξονικης εντατικης καταστασεως, η οποια διαφερει της επιπεδης εντατικης καταστασεως. Για να αναχθουμε σε αυτη κατ αρχας θετουμε στις ως ανω σχεσεις $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, οποτε και προκυπτει οτι:

$$\varepsilon_{xx} = 1 / E \, (\sigma_{xx} - \mu \, \sigma_{yy}) \quad (2\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = 1 / E \, (\sigma_{yy} - \mu \, \sigma_{xx}) \quad (2\beta)$$

$\varepsilon_{zz} = -\mu / E\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (2γ)

$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$ (2δ)

Παλι ομως οι εξισωσεις αυτες αναφερονται σε καποια στην εν γενει δυαξονικη εντατικη κατασταση και οχι σε καποια εντατικη κατασταση του επιπεδου. Για τον λογο αυτο θεωρουμε οτι το στοιχειωδες παραλληλεπιπεδο που εξεταζουμε δεν μεταβαλλεται κατα μια εννοια, εστω αυτη η (zz), δηλαδη θα ισχυει οτι $\varepsilon_{zz} = 0$. Συνεπως οι εξισωσεις που περιγραφουν την επιπεδη παραμορφωσιακη κατασταση που εξεταζουμε θα διδονται απο τις ακολουθες σχεσεις:

$\varepsilon_{xx} = 1 / E\,(\sigma_{xx} - \mu\,\sigma_{yy})$ (3α)

$\varepsilon_{yy} = 1 / E\,(\sigma_{yy} - \mu\,\sigma_{xx})$ (3β)

$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$ (3γ)

Οι εξισωσεις (3α),(3β) περιγραφουν τις ανηγμενες γραμμικες παραμορφωσεις κατα τις εννοιες (xx) και (yy) αντιστοιχα, περιγραφεται δηλαδη η αλλαγη διαστασεων κατα τις προαναφερθεισες εννοιες, ενω η εξισωση (3γ) περιγραφει την ανηγμενη γωνιακη παραμορφωση, δηλαδη την μεταβολη της (ορθης) γωνιας μεταξυ των επιπεδων (xx) και (yy). Εμεις θα δειξουμε εξισωσεις που να περιγραφουν σε οποιοδηποτε σημειο σωματος που βρισκεται σε επιπεδη παραμορφωσιακη κατασταση. Αξιζει παντως να σημειωθει οτι η επιπεδη παραμορφωσιακη κατασταση δεν εχει σημαντικες εφαρμογες, παρα μονο σε περιπτωσεις επιφανειακων στοιχειων που βρισκονται υπο ενταση (πχ καταπονηση λεπτης πλακας), λογο του οτι η εγκαρσια εννοια ειναι κατα πολυ μικροτερη των αλλων δυο, ετσι ωστε καθε μεταβολη της να μην επιφερει σημαντικες αλλαγες στην γεωμετρια του σχηματος.

Σε προηγουμενη ενοτητα ειχε αποδειχθει οτι δια στροφης κατα τυχαια γωνια φ του απειροστου επιπεδου Α που θεωρησαμε, αναπτυσσονται ορθες και διατμητικες τασεις που δινονται απο τις σχεσεις (4α) και (4β). Εστω λοιπον η επιπεδη παραμορφωσιακη του σχηματος 3.1. Κατ αντιστοιχια των συνθηκων Le Cauchy που αποδειξαμε στο προηγουμενο κεφαλαιο ισχυει οτι $\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx}$. Να αναφερουμε εδω οτι οι ανηγμενες γραμμικες παραμορφωσεις νοουνται ως θετικες οταν εφελκυουν την αντιστοιχη υλικη ινα, δηλαδη οταν ειναι επιμηκηνσεις, ενω οι ανηγμενες γωνιακες παραμορφωσεις, με αλλα λογια οι ολικες γωνιακες μεταβολες προσημαινονται ως θετικες οταν προκαλουν μειωση της αντιστοιχης ορθης γωνιας:

$\sigma_\phi = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos2\phi / 2 - \tau_{xy} \sin2\phi$ (4α)

$\tau_\phi = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin2\phi / 2 + \tau_{xy} \cos2\phi$ (4β)

Πολλαπλασιαζουμε και τα δυο μελη της εξισωσεως (3α) με μ και προσθετουμε κατα μελη με την εξισωση (3β), οποτε και παιρνουμε οτι:

$\sigma_{yy} = (\mu \, \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) E / (1 - \mu^2)$ (5)

Με ομοιο τροπο,δηλαδη πολλαπλασιαζοντας και τα δυο μελη της σχεσης (3β) με μ και προσθετοντας κατα μελη με την (3α), εχουμε:

$\sigma_{xx} = (\varepsilon_{xx} + \mu \, \varepsilon_{yy}) E / (1 - \mu^2)$ (6)

Βασει του νομου του Hooke, ισχυει σε καθε περιπτωση οτι $\sigma = \varepsilon E$, αρα λοιπον και στην περιπτωση μας ισχυει οτι $\sigma_\phi = \varepsilon_\phi E$, οπου ϕ η γωνια που προκυπτει δια στροφης του επιπεδου μας που περιγραφεται απο τους τελεστες της παραμορφωσιακης μας καταστασης ε_{xx}, ε_{yy}, γ_{xy}. Οποτε εχουμε οτι:

$\sigma_\phi = \varepsilon_\phi E$ (7)

Θα μπορουσαμε ισως να αναλυσουμε την τελικη μας διευθυνση της ορθης ανηγμενης παραμορφωσης σε δυο ξεχωριστες συνιστωσες κατα το αρχικο μας συστημα αξονων, δηλαδη ε_{xx}', ε_{yy}'. Τουτο ομως δεν πραγματοποιειται για λογους αντιστοιχησης με τους τυπους ορθων και διατμητικων τασεων, (4α) και (4β) της αυτης παραγραφου. Αρα λοιπον ισχυει:

(7) , (4α) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon_\phi E = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos2\phi / 2 - \tau_{xy} \sin2\phi$ (8)

Εντελως αναλογα η εξισωση (3γ) μας δινει οτι:

$\tau_{xy} = G \, \gamma_{xy}$ (9)

Το μετρο διατμησεως ομως συνδεεται με τις λοιπες ελαστικες σταθερες με την πιο κατω σχεση:

$G = E / 2 (1 + \mu)$ (10)

Αρα λοιπον θα ισχυει: (9) , (10) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \tau_{xy} = (E\, \gamma_{xy}) / 2 (1 + \mu) \quad (11)$

Δια της αντικαταστασεως εχουμε οτι: (5) , (6) , (8) , (11) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon_\phi = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) A / 2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\phi\, B / 2 - \gamma_{xy} \sin 2\phi\, B / 2 \quad (12)$

Οι ποσοτητες Α και Β ειναι αντιστοιχα:

$A = 1 / (1 - \mu) \qquad B = 1 / (1 + \mu)$

Ειχαμε ομως ορισει στο πρωτο κεφαλαιο τον λογο του Poisson ως τον λογο της πλευρικης βραχυνσεως προς την αξονικη επιμηκηνση. Οπως ομως ειπαμε στην αρχη του κεφαλαιου θεωρησαμε την εγκαρσια εννοια, δηλαδη την εννοια (zz) ως αμεταβλητη. Συνεπως θα ισχυει οτι $\varepsilon_{zz} = 0$. Αρα λοιπον και:

$\mu = - 0 / \varepsilon_{xx} = - 0 / \varepsilon_{yy} = 0$, συνεπως οι ποσοτητες Α και Β τεινουν στην μοναδα. Ετσι η τελικη μορφη της σχεσεως (12) ειναι η εξης:

$\varepsilon_\phi = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) / 2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\phi / 2 - \gamma_{xy} \sin 2\phi / 2 \quad (13)$

Με ομοιο τροπο εχουμε οτι: (4β) , (5) , (6) , (11) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_\phi = (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin 2\phi + \gamma_{xy} \cos 2\phi \quad (14)$

Οι σχεσεις (13) και (14) μας δινουν τις ορθες, γωνιακες παραμορφωσεις που θα προκυψουν αν στρεψουμε δεδομενη επιπεδη παραμορφωσιακη κατασταση, σε σημειο σωματος που τελει υπο ενταση, κατα γωνια ϕ, συναρτησει των τελεστων της αρχικης παραμορφωσιακης καταστασης ε_{xx}, ε_{yy}, γ_{xy}, τα οποια ανηκουν σε δυο επιπεδα καθετα μεταξυ τους.

Οριζουμε επισης την ημιγωνιακη μεταβολη ε_{xy} για την οποια ισχυει οτι:

$2\, \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} \quad (15)$

Τουτο αποδεικνυεται απο το σχημα 3.2.

$\gamma_{xy} = AOA' + BOB' \quad (16)$

Λογω ομως οτι οι αναφερομενες γωνιες ειναι απειροστες, με ανεκτη προσσεγιση θεωρουμε οτι τα τριγωνα OBB′ και OAA′ ειναι ορθογωνια,και αφου αναφερομαστε σε απειροστες γωνιες αυτες θα ειναι ισες με τις εφαπτομενες τους. Αρα η σχεση (16) μεταβαλλεται ως εξης:

$$\gamma_{xy} = \tan AOA' + \tan BOB' = AA'/\alpha + BB'/\beta = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = 2\,\varepsilon_{xy} \quad (17)$$

Με αντικατασταση της σχεσης (17) στις σχεσεις (13) και (14) εχουμε:

$$\varepsilon_{\phi} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})/2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})\cos 2\phi/2 - \varepsilon_{xy}\sin 2\phi \quad (15)$$

$$\gamma_{\phi} = (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})\sin 2\phi + 2\,\varepsilon_{xy}\cos 2\phi \quad (16)$$

Οι τυποι (15) και (16) μας δινουν την ορθη ανηγμενη παραμορφωση και την ολικη γωνιακη παραμορφωση, που θα καταγραφουν σε σημειο σωματος που βρισκεται σε επιπεδη παραμορφωσιακη κατασταση, οταν στραφει το αρχικο συστημα, που περιγραφεται απο τις συνιστωσες ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}, κατα γωνια ϕ. Υπενθυμιζουμε οτι στην περιπτωση των τυπων (15) και (16) παιρνουμε στην νεα διευθυνση την ολικη γωνιακη μεταβολη συναρτησει της ημιγωνιακης μεταβολης του αρχικου συστηματος αναφορας.

3β) Διερευνηση των σχεσεων (15) και (16)

Οι σχεσεις (15) και (16) ειναι τασικες συναρτησεις που εχουν ως μεταβλητη την γωνια ϕ. Επομενως, οπως και στην παραγραφο 2β), η ευρεση των ακροτατων τιμων των δυο αυτων τασικων συναρτησεων θα εξαρτηθει απο τα σημεια μηδενισμου της πρωτης παραγωγου. Αρα με αντιστοιχη παραγωγιση των σχεσεων (15) και (16) και εξισωση τους με το μηδεν εχουμε:

$$d\varepsilon_{\phi}/d\phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sin 2\phi\,(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) - 2\,\varepsilon_{xy}\cos 2\phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan 2\phi = -2\,\varepsilon_{xy}/(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \quad (17)$$

Με την ιδια διαδικασια εχουμε οτι:

$$d\gamma_{\phi}/d\phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})\cos 2\phi - 4\,\varepsilon_{xy}\sin 2\phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan 2\phi' = (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})/2\,\varepsilon_{xy} \quad (18)$$

Απο την σχεση (17) λαμβανουμε:

$$\tan 2\theta = \tan 2\phi \Rightarrow 2\theta = 2\phi + \kappa\pi \quad , \kappa \varepsilon N \Rightarrow \theta = \phi + \kappa\pi / 2 \quad , \kappa \varepsilon N \quad (19)$$

Αντικαθιστοντας διαφορες τιμες του κ στη σχεση (19) οριζουμε καποια επιπεδα επι των οποιων εχουμε σημαντικη ορθη παραμορφωση:

–Για κ=**0** εχουμε οτι $\theta = \phi$
–Για κ=1 εχουμε οτι $\theta = \phi + \pi / 2$
–Για κ=2 εχουμε οτι $\theta = \phi + \pi$,το οποιο συμπιπτει με το πρωτο επιπεδο δηλαδη **(κ=0)**

Αρα για ολες τις δυνατες τιμες του κ, παρατηρουμε οτι αναγομαστε σε δυο και μονο επιπεδα, καθετα μεταξυ τους, που διερχονται απο το σημειο που βρισκεται σε επιπεδη παραμορφωσιακη κατασταση. Αρα οριζονται δυο κυριες διευθυνσεις ορθων παραμορφωσεων, οι οποιες διαφερουν μεταξυ τους κατα **90°**. Σε καθε μια απο τις δυο αυτες διευθυνσεις, αναπτυσσεται και μια ακροτατη τιμη της παραμορφωσης, δηλαδη στην μια διευθυνση δρα η ε_{max} και στην αλλη δρα η ε_{min}. Στις διευθυνσεις αυτες δεν εχουμε γωνιακες παραμορφωσεις. Με απαλοιφη της γωνιας 2φ απο την σχεση (15) προκυπτει η σχεση (20) που μας προσδιοριζει τις μεγιστες τιμες της ορθης παραμορφωσης.

$$\varepsilon_{(max,min)} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) / 2 \; (+-) \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 / 4 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (20)$$

Συνεχιζουμε την αναλυση μας και εχουμε:

$$\tan 2\theta' = \tan 2\phi' \Rightarrow 2\theta' = 2\phi' + \kappa\pi \quad ,\kappa \varepsilon N \Rightarrow \theta' = \phi' + \kappa\pi / 2 \quad \kappa \varepsilon N \quad (21)$$

Για ολο το ευρος των τιμων της μεταβλητης μας κ προκυπτουν αλλα δυο επιπεδα, παλι καθετα μεταξυ τους:

–Για κ=**0** εχουμε $\theta'=\phi'$
–Για κ=1 εχουμε $\theta'=\phi' + \pi / 2$
–Για κ=2 εχουμε $\theta'=\phi' + \pi$,το οποιο συμπιπτει με το αρχικο μας επιπεδο **(κ=0)**

Αρα ορισαμε δυο καινουργια επιπεδα, καθετα μεταξυ τους, που ταυτιζονται για ολες τις πιθανες τιμες της μεταβλητης μας κ, επι των οποιων επιπεδων λαμβανει μεγιστη και ελαχιστη τιμη αντιστοιχα η γωνιακη παραμορφωση. Οι δυο διευθυνσεις αυτες ευρισκονται μετα στροφης κατα 45° απο κυρια παραμορφωσιακη κατασταση, και επι του ενος επιπεδου συνανταται η γ_{max} και επι του αλλου επιπεδου η γ_{min}. Η μεγιστη δυνατη (ολικη) γωνιακη παραμορφωση θα διδεται απο την σχεση (22):

$$\gamma_{(max,min)} = (+-)\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 / 4 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (22) \qquad \gamma_{max} = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min} \quad (23)$$

Τελος,αναφερουμε οτι αν οι αρχικες διευθυνσεις των παραμορφωσεων ηταν κυριες, αν δηλαδη δεν υπηρχαν διατμητικες παραμορφωσεις ,οποτε και θα ισχυε $\gamma_{xy} = 0$, τοτε η προκυπτουσα παραμορφωσιακη κατασταση θα περιγραφεται απο τις εξισωσεις (24α) και (24β).

$$\varepsilon_\phi = (\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min}) / 2 + (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}) \cos 2\phi / 2 \quad (24\alpha)$$

$$\gamma_\phi = (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}) \sin 2\phi \quad (24\beta)$$

3γ) Γραφικη παρασταση παραμορφωσεων – Κυκλος του Mohr

Θα προσπαθησουμε να δημιουργησουμε την παραμετρικη εξισωση περιφερειας κυκλου με διαδοχικες απαλοιφες της γωνιας 2φ απο τις σχεσεις (15) και (16) ως εξης:

$$(15) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\varepsilon_\phi - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) / 2]^2 = [(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\phi / 2 - \varepsilon_{xy} \sin 2\phi]^2 \quad (25)$$

$$(16) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_\phi / 2 = (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin 2\phi / 2 + \varepsilon_{xy} \cos 2\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_\phi^2 / 4 = [(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin 2\phi / 2 + \varepsilon_{xy} \cos 2\phi]^2 \quad (26)$$

Προσθετοντας τις σχεσεις (25) και (26) κατα μελη εχουμε οτι:

$$[\varepsilon_\phi - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) / 2]^2 + \gamma_\phi^2 / 4 = (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 / 4 + \varepsilon_{xy}^2 \quad (27)$$

Εαν θεσουμε στην σχεση (27) οτι $\gamma_\phi = 2\,\varepsilon_{xy}'$ θα εχουμε:

$$(27) \Rightarrow [\varepsilon_\phi - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) / 2]^2 + \varepsilon_{xy}^{2\prime} = [\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 / 4 + \varepsilon_{xy}^2}]^2 \quad (27)$$

Η σχεση (27) παριστα παραμετρικη εξισωση περιφερειας κυκλου, διοτι ειναι της μορφης:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Συνδεει μια παραμορφωσιακη κατασταση που αντιπροσωπευεται απο τους τελεστες της ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy} με μια αγνωστη παραμορφωσιακη κατασταση που εχει προκυψει απο την προαναφερθεισα κατασταση μετα στροφης (τελεστες ε_ϕ, ε_{xy}') Συνεπως καθε ζευγος παραμορφωσεων ε_ϕ, ε_{xy}' που επαληθευουν την εξισωση (27)παριστουν σημειο της περιφερειας του κυκλου του Mohr και αντιστροφα. Δηλαδη το τυχαιο απειροστο επιπεδο που διερχεται απο το σημειο σωματος που βρισκεται σε επιπεδη παραμορφωσιακη κατασταση, και που περιγραφεται απο τα ανυσματα ε_ϕ, ε_{xy}' περιγραφεται απο καποιο σημειο της περιφερειας του κυκλου του Mohr, το οποιο και καλουμαστε να βρουμε. Για να παριστα η σχεση (27) κυκλο του Mohr, δυο τινα πρεπει να δειχθουν:

α) Οτι ο κυκλος αυτος εχει κεντρο Κ $[(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) / 2 , 0]$

β) Οτι ο κυκλος αυτος εχει ακτινα $R = \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 / 4 + \varepsilon_{xy}^2}$

Θα ειναι:

$\overline{OK} = \overline{O\Delta} - \overline{K\Delta} = \varepsilon_{xx} - \overline{K\Delta}$ (28)

$\overline{OK} = \overline{O\Gamma} + \overline{\Gamma K} = \varepsilon_{yy} + \overline{\Gamma K}$ (29)

Προσθετοντας τις σχεσεις (28) και (29) κατα μελη εχουμε οτι:

$2\,\overline{OK} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \Rightarrow \overline{OK} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) / 2$ (30)

Εφαρμοζουμε το πυθαγορειο θεωρημα στο τριγωνο ΚΔ(ΧΧ) εχουμε:

$K\Delta^2 + \Delta(xx)^2 = K(xx)^2 \Rightarrow (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 / 4 + \varepsilon_{xy}^2 = R^2 \Rightarrow$

$R^2 = \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 / 4 + \varepsilon_{xy}^2}$

Πρεπει να παρατηρησουμε οτι τα αντιπροσωπευτικα σημεια των επιπεδων (xx):($+\varepsilon_{xx}$,$+\varepsilon_{xy}$) και (yy):($+\varepsilon_{yy}$,$-\varepsilon_{yx}$) ειναι σημεια αντιδιαμετρικα. Αρα αν στραφει το επιπεδο (xx) κατα γωνια φ προκειμενου να ταυτισθει με δοθεν σημειο (επιπεδο), πρεπει και το επιπεδο (yy) να στραφει κατα γωνια φ, κατα την ιδια φορα. Αρα κατα την γραφικη επιλυση του κυκλου του Mohr, θα παιρνουμε το αντιπροσωπευτικο σημειο του επιπεδου (xx) και θα στρεφουμε την επιβατικη ακτινα κατα διπλασια γωνια της δοθεισης, δηλαδη κατα γωνια (2φ). Πρεπει επισης να αναφερουμε οτι τα σημεια Α,Β αποτελουν επιπεδα κυριας παραμορφωσης,,για τα οποια μαλιστα ισχυει:

$\overline{OB} = \sigma_{max}$ $\overline{OA} = \sigma_{min}$

Πραγματι ισχυει οτι:

$\overline{OB} = \overline{O\Gamma} + \overline{\Gamma K} + \overline{KB} = \varepsilon_{yy} + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) / 2 + R$ (32)

Απο την σχεση (32) εχουμε:

$\varepsilon_{max} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) / 2 + R$ οπου R η ακτινα του κυκλου του Mohr.

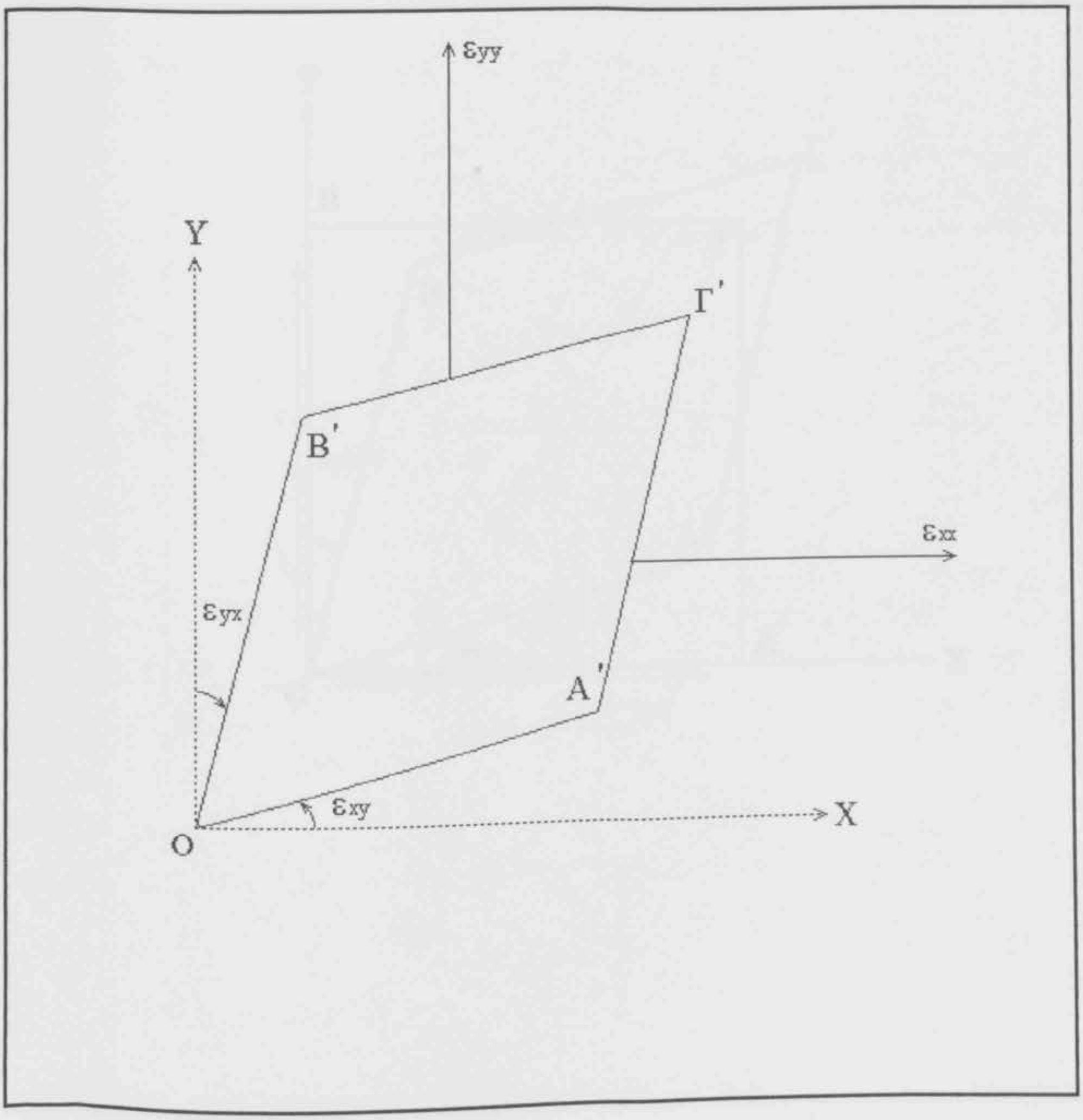
Με αναλογο τροπο βρισκουμε οτι $\varepsilon_{min} = -(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) / 2 + R$

Τελος, ισχυει οτι η απολυτως μεγιστη δυνατη ημιγωνιακη παραμορφωση ε_{xy} που μπορει να αναπτυχθει θα ισουται με:

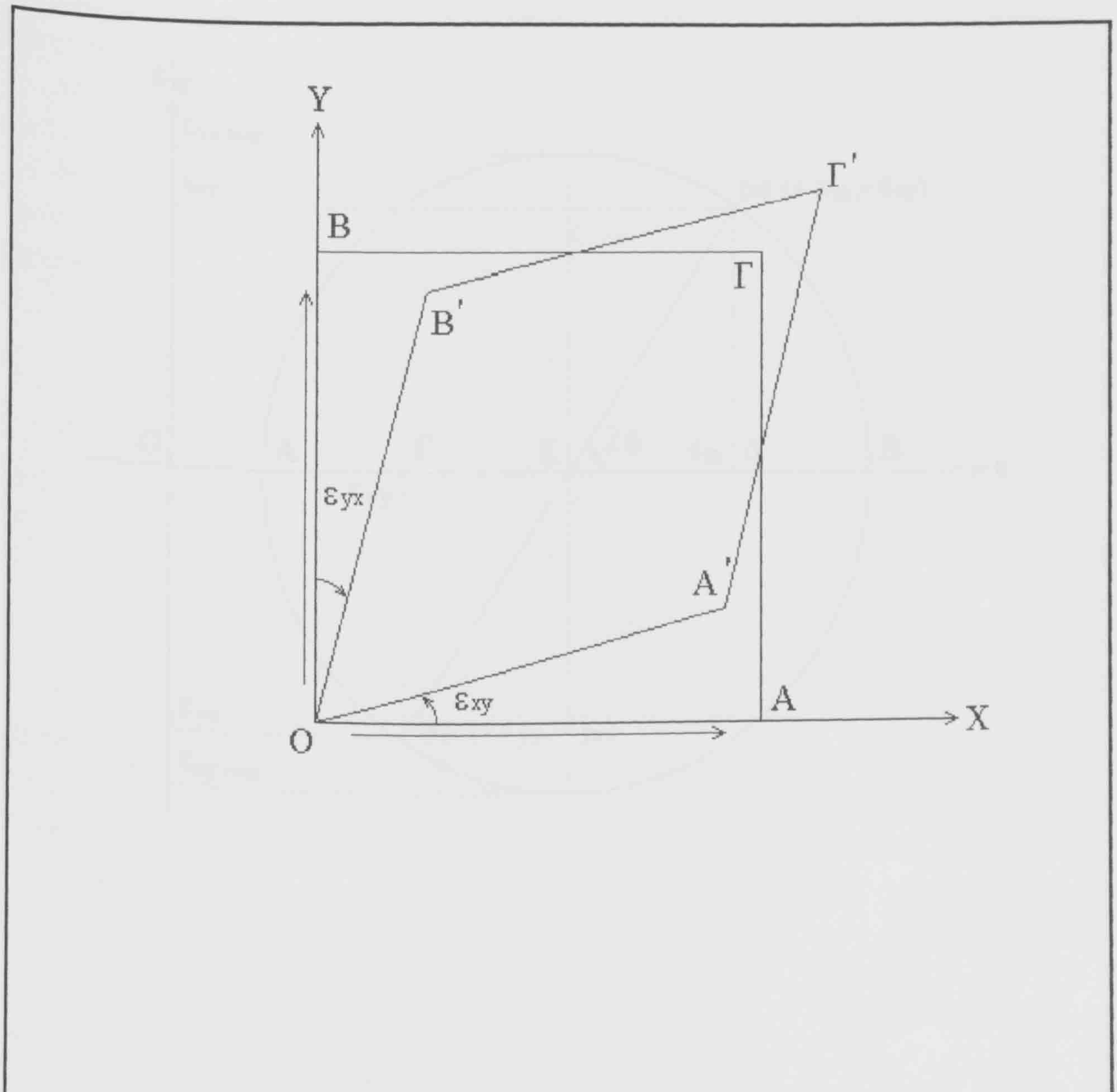
$\varepsilon_{xymax} = R$ (33)

Ισχυει ομως οτι $\gamma_{max} = 2\ \varepsilon_{xymax}$ (34)

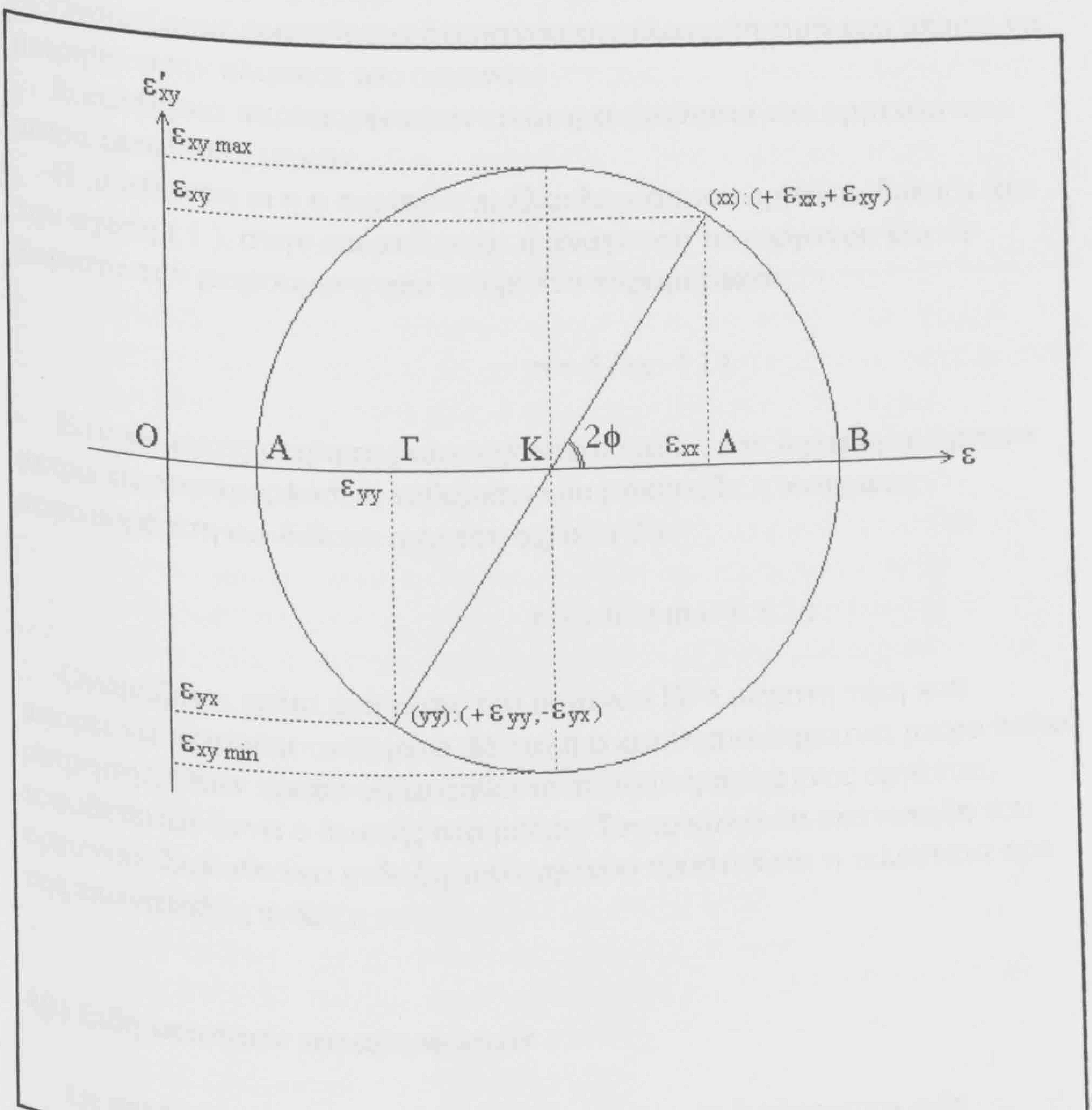
Δηλαδη $\gamma_{max} = 2\ R = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$ (35)



Σχημα 3.1



Σχημα 3.2



ε'xy
εxy max
εxy
(xx):(+ εxx,+ εxy)
O
A
Γ
K
2φ
εxx
Δ
B
ε
εyy
εyx
(yy):(+ εyy,- εyx)
εxy min

Σχημα 3.3

4) ΜΕΤΡΗΤΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

4α) Εισαγωγικες γνωσεις

Μετρητης παραμορφωσεων ονομαζεται καθε οργανο που χρησιμοποιειται για την μετρηση της γραμμικης παραμορφωσης, σ ε δεδομενο μηκος μετρησης.

Ονομαζουμε ευαισθησια e οργανου την ελαχιστη τιμη που μπορει να μετρηθει στην κλιμακα του οργανου.

Ευαισθησια παραμορφωσεων ειναι η ευαισθησια του οργανου που μετρα μεταβολες μηκων.

Η μεγεθυνση m η ο παραγων πολλαπλασιασμου οργανου διδεται απο την σχεση (1), στην οποια δ ειναι η αναγνωση του οργανου και ε_π παριστα την μετρουμενη απο το οργανο παραμορφωση.

$$m = \delta / \varepsilon_\pi \quad (1)$$

Εαν το μηκος μετρησης του οργανου ειναι L , εαν δηλαδη το οργανο μετρα τις παραμορφωσεις καθορισμενου μηκους L, η ανηγμενη παραμορφωση $\varepsilon_{\alpha\pi}$ διδεται απο την σχεση (2):

$$\varepsilon_{\alpha\pi} = \delta / (m L) \quad (2)$$

Ονομαζεται πεδιο μετρησης του οργανου Π, η μεγιστη τιμη που μπορει να μετρησει το οργανο. Μεγαλη ευαισθησια σημαινει μικρο πεδιο μετρησης. Οταν πρεπει να αυξηθει το πεδιο μετρησης ενος οργανου, τοποθετειται ξανα ο δεικτης στο μηδεν. Τουτο καλειται επαναταξη του οργανου. Σε καθε νεα ενδειξη του οργανου προστιθεται η τελευταια προ της επαναταξης ενδειξη του.

4β) Ειδη μετρητων παραμορφωσεων

Οι μετρητες παραμορφωσεων διακρινονται σε διαφορετικα ειδη αναλογα με το χρησιμοποιουμενο συστημα μεγεθυνσης:

1)Μηχανικα μηκηνσιομετρα

2)Μηχανικα – Οπτικα μηκηνσιομετρα

3)Οπτικα μηκηνσιομετρα

4)Ακουστικα μηκηνσιομετρα

5)Ηλεκτρικα μηκηνσιομετρα

Τα μηχανικα μηκηνσιομετρα διακρινονται σε μηκηνσιομετρα που χρησιμοποιουν συστημα μοχλων, σε μηκηνσιομετρα που χρησιμοποιουν συστημα οδοντωτων τροχων και κανονων. Τα μηκηνσιομετρα που χρησιμοποιουν συστημα μοχλων, χωριζονται σε αλλες δυο υποκατηγοριες, στα απλου συστηματος μοχλων και στα συνθετου συστηματος μοχλων. Χαρακτηριστικος τυπος του πρωτου τυπου ειναι το μηκηνσιομετρο Kennedy - Krupp του οποιου η βασικη εφαρμογη ειναι ο προσδιορισμος του οριου διαρροης υλικων. Ενα χαρακτηριστικο της δευτερης υποκατηγοριας ειναι το μηκηνσιομετρο Huggenberger που χρησιμοποιειται ευρητατα για την μετρηση των παραμορφωσεων. Η ευαισθησια του φθανει μεχρι e=0.0005 cm, ενω η βαση μετρησης μεταβαλλεται μεταξυ L_0 = 20 mm και L_0=1.00 m. Το πεδιο μετρησης με επαναταξη φθανει μεχρι Π=0.03 cm και οι συντελεστες μεγεθυνσης m απο 300 μεχρι 2000. Τα μηκηνσιομετρα που χρησιμοποιουν συστημα οδοντωτων τροχων και κανονων, αλλως ωρολογιακα μηκηνσιομετρα,οι απλοι μοχλοι εχουν αντικατασταθει απο οδοντωτους τροχους και κανονες. Ολο το συστημα κλεινεται μεσα σε πυξιδα μορφης ωρολογιου, του οποιου ο δεικτης δειχνει την παραμορφωση. Ειναι καταλληλες για περιπτωσεις εφελκυσμου και θλιψης και διατιθονται σε μορφες με διαφορετικους συντελεστες μεγεθυνσης, ευαισθησιας και πεδιων μετρησης.

Τα συστηματα μεγεθυνσης των μηχανικων – οπτικων μηκηνσιομετρων αποτελουνται απο συνδυασμο μηχανικων και οπτικων μοχλων. Στρεφομενο τμημα του μηκηνσιομετρου που ερχεται σε επαφη με την παραμορφουμενη κατασκευη φερει ανακλωσα επιφανεια που αποτελει τον οπτικο μοχλο. Παραλληλη δεσμη φωτος πεφτει στην ανακλωσα επιφανεια και ανακλωμενη μπορει να δωσει την παραμορφωση με οποιαδηποτε παραμορφωση με οποιαδηποτε μεγεθυνση, αναλογα με την αποσταση που εχει τοποθετηθει καταλληλη κλιμακα. Αναλογα με τον αριθμο των κατοπτρων εχουμε τρεις τυπους με απλα (μηκηνσιομετρο Martens), διπλα (οπτικο μηκηνσιομετρο με συστημα δυο καταπτρων Martens) και τριπλα κατοπτρα (οπτικος μετρητης Tuckerman).

Τα μονα αμιγως οπτικα μηκηνσιομετρα ειναι τα συμβολομετρα. Αποτελουνται απο δυο οπτικα επιπεδα προσαρμοσμενα ειτε απευθειας, ειτε με μοχλους στην παραμορφουμενη κατασκευη. Με την βοηθεια δεσμης μονοχρωματικου φωτος παιρνουμε ενα συνολο κροσσων συμβολης. Με την παραμορφωση του σωματος οι κρωσσοι κινουνται και ο αριθμος των διερχομενων κροσσων απο σταυρονημα, δινει τη μεταβολη του μηκους. Περασμα ενος κροσσου αντιστοιχει σε μετακινηση των δυο οπτικων επιπεδων κατα το μισο του μηκους κυματος του μονοχρωματικου φωτος. Η ευαισθησια φθανει μεχρι και e=0.000008 in.

Ενα ακουστικο μηκηνσιομετρο αποτελειται απο μια τεταμενη μεταλλικη χορδη προσαρμοσμενη καταλληλα στην κατασκευη. Η χορδη ταλαντευεται με την φυσικη της συχνοτητα διεγερομενη ηλεκτρικα. Με την παραμορφωση ομως της κατασκευης η συχνοτητα της μεταβαλλεται. Η μεταβολη της συχνοτητας δινει την παραμορφωση. Ο τονος της χορδης αυτης, μετα την χορδη αναφορας, ρυθμιζονται με καταλληλα ακουστικα, ετσι ωστε να συμπιπτουν. Η ευαισθησια ειναι της ταξης e=0.000002 mm, με βαση μετρησης L_0=141.4 mm.

Στην κατηγορια των ηλεκτρικων μηκηνσιομετρων κατατασσονται τα μηκηνσιομετρα με ωμικη, επαγωγικη, χωριτικη, αντισταση, καθως και τα πιεζοηλεκτρικα μηκηνσιομετρα. Τα ηλεκτρικα μηκηνσιομετρα με επαγωγικη αντισταση αποτελουνται απο μεταβλητο πυρηνα σιδηρου. Με την παραμορφωση της κατασκευης μεταβαλλεται η επαγωγη του κυκλωματος. Ο μετρητης αποτελει τον ενα κλαδο καταλληλης γεφυρας Wheatstone, ο πεμπτος της οποιας ειναι καταλληλα βαθμονομημενο βολτομετρο η παλμογραφος ωστε να δινεται η μετρουμενη παραμορφωση. Στην περιπτωση των ηλεκτρικων μηκηνσιομετρων με χωριτικη αντισταση ο μετρητης ειναι επιπεδος πυκνωτης του οποιου μεταβαλλεται ειτε η επιφανεια, ειτε η αποσταση των πλακων του. Τα πιεζοηλεκτρικα μηκηνσιομετρα στηριζουν την λειτουργια τους στο πιεζοηλεκτρικο φαινομενο ορισμενων κρυσταλλων, οπως ο χαλαζιας, μετατρεποντας τις τασεις και τις παραμορφωσεις σε ηλεκτρικα σηματα. Τα μηκηνσιομετρα που χρησιμοποιουν ωμικη αντισταση θα αντιμετωπισθουν σαν ξεχωριστη κατηγορια.

4γ) Ηλεκτρικοι μετρητες παραμορφωσεων

Στην κατηγορια αυτη ανηκουν τα μηκηνσιομετρα εκεινα των οποιων το μετρητικο στοιχειο ειναι μια ωμικη αντισταση και ειναι τα πιο διαδεδομενα. Χωριζονται σε δυο υποκατηγοριες. Στα ηλεκτρομηκηνσιομετρα εκεινα που το μετρητικο στοιχειο ειναι ηλεκτρικο συστημα του οποιου η αντισταση ρυθμιζεται απο την κινηση των μεταλλικων μερων του μετρητη, και σε εκεινα του οποιου το μετρητικο στοιχειο προσκολλαται επανω στο ελεγχομενο υλικο. Στην πρωτη υποκατηγορια ηλεκτρομηκηνσιομετρων ο μετρητης οπως ειπαμε δεν προσκολλαται επανω στο δοκιμιο προς μετρηση, αποτελειται δε απο ωμικη αντισταση που μεταβαλλεται μεσω συστηματος μοχλων, λογω της παραμορφωσης του εξεταζομενου υλικου. Η μεταβολη της αντιστασης επηρεαζει καταλληλο κυκλωμα στο οποιο υπαρχει γεβενομετρο καταλληλα βαθμονομημενο ετσι ωστε να μετραται κατευθειαν η παραμορφωση. Στην δευτερη υποκατηγορια ο μετρητης ειναι μια λεπτη εσχαρα, κατασκευασμενη απο λεπτο συρμα ειδικου κραματος μεταλλων, διαμετρου 0.001 in.Οι μετρητες αυτοι προσκολλωνται με ειδικη κολλα επανω στο δοκιμιο.

Ονομαζουμε συντελεστη ευαισθησιας σε παραμορφωση του αγωγου του μετρητη, Kα, τον λογο:

$$K_\alpha = (\Delta R\, L) / (\Delta L\, R) \quad (3)$$

Στην σχεση (3) το R παριστα την ωμικη αντισταση του αγωγου του μετρητη, και L το μηκος του αγωγου. Ο συντελεστης ευαισθησιας για τα περισσοτερα μεταλλα ειναι κατα κανονα θετικος.

4γ) Συμπλεγματα ηλεκτρομηκηνσιομετρων

Για την περιγραφη της μονοαξονικης εντατικης καταστασης ενας μετρητης ειναι αρκετος για την μετρηση της παραμορφωσεως. Στην γενικη ομως περιπτωση ειναι απαραιτητο οι παραμορφωσεις να μετρωνται κατα τρεις τουλαχιστον διευθυνσεις, ωστε να καθορισθουν οι κυριες παραμορφωσεις, οπως και οι διευθυνσεις τους. Οταν οι διευθυνσεις των κυριων τασεων ειναι γνωστες επαρκουν δυο μονο μετρητες παραμορφωσεων, τοποθετημενοι στις διευθυνσεις αυτες. Με τα συμπλεγματα ηλεκτρομηκηνσιομετρων μπορει να γινει πληρως ο καθορισμος επιπεδης εντατικης καταστασης. Η θεωρια των συμπλεγματων μετρητων παραμορφωσης , στηριζεται στις εξης δυο παραδοχες:

α) Δεχομαστε οτι ολα τα υλικα ειναι ομογενη και ισοτροπα, καθως τα μ,Ε περιεχονται στις σχεσεις με τασεις και ανηγμενες παραμορφωσεις.

β) Δεχομαστε οτι το ανυσμα της κλισης των παραμορφωσεων στα εξεταζομενα σημεια ειναι πολυ μικρο, ετσι ωστε οι προκυπτουσες παραμορφωσεις να μπορουν να θεωρηθουν ενιαιες σε ολη την επιφανεια του μετρητη.

Οι γωνιες μεταξυ των μετρητων στα συμπλεγματα δεν πρεπει να ειναι μικρες, διοτι εισαγονται ετσι σημαντικα σφαλματα. Επισης, κατα των υπολογισμο των κυριων τασεων, για τον οποιο χρειαζονται οι παραμορφωσεις κατα τρεις διευθυνσεις, υπαρχουν ορισμενες διευθυνσεις οι οποιες διευκολυνουν σημαντικα τον υπολογισμο τους. Μεταξυ των γωνιων αυτων οι καλυτερες ειναι αυτες των 45°, 60°. Ετσι υπαρχουν δυο κυριως τυποι συμπεγματων ηλεκτρομηκηνσιομετρων, το ορθογωνιο και το ισογωνιο η δελτα συμπεγμα. Οταν εχουμε να καταγραψουμε γνωστες απο την αρχη παραμορφωσεις (ειναι γνωστες οι διευθυνσεις των) καταλληλοτερη απο τους δυο τυπους συμπλεγματων ειναι το ορθογωνιο συμπλεγμα, στο οποιο οι μετρητες διατασσονται κατα γωνιες 0°, 45° και 90°. Στην περιπτωση που η διαταξη των παραμορφωσεων ειναι αγνωστη, καταλληλοτερη απο τους δυο τυπους ειναι το ισογωνιο η δελτα συμπλεγμα, οπου οι μετρητες ειναι διατεταγμενοι κατα 0°, 60° και 120°. Υπαρχουν παραλλαγες των δυο αυτων τυπων συμπλεγματων, οι οποιες προκυπτουν με την προσθηκη ενος ακομα μετρητη, οπως να προσθεσουμε εναν μετρητη υπο γωνια 45° στο συμπλεγμα το ορθογωνιο, οποτε προκυπτει το τετραπλο ορθογωνικο συμπλεγμα, η την προσθηκη ενος επιπλεον μετρητου καθετα προς την μια πλευρα (τον εναν μετρητη του συμπεγματος) του ισογωνιου συμπεγματος, οποτε και θα προκυψει το ταυ–δελτα συμπεγμα. Εμεις θα αναπτυξουμε τον πιο διαδεδομενο τυπο συμπεγματος, το ορθογωνιο συμπλεγμα, το οποιο και αποτελει και την βαση για την επιλυση και την κατανοηση αλλων τυπων συμπλεγματων.

Εστω το ορθογωνιο συμπλεγμα του σχηματος 4.1, και εστω οτι με την χρηση τριων ηλεκτρομηκηνσιομετρων μετρηθησαν οι παραμορφωσεις ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} κατα τις διευθυνσεις 1, 2, 3 αντιστοιχα. Εστω ακομα οτι οι μετρητες σχηματιζουν γωνιες με τους ημιαξονες (Οx) και (Οy) του ορθοκανονικου συστηματος αξονων που εκλεξαμε, και οτι οι μετρουμενες παραμορφωσεις κατα τους δυο αυτους αξονες ειναι ε_{xx}, ε_{yy}, γ_{xy}. Θα ισχυει:

$$\phi_1 = \phi_0$$

$$\phi_2 = \phi_0 + 45°$$

$$\phi_3 = \phi_0 + 90°$$

Κατα τα γνωστα του κεφαλαιου 3, οι ορθες παραμορφωσεις υπο τυχουσα διευθυνση που οριζεται απο στροφης του ημιαξονος (Οx) κατα γωνια ϕ, θα διδονται απο την σχεση (4):

$$\varepsilon_{xx} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) / 2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\phi / 2 - \gamma_{xy} \sin 2\phi \quad (4)$$

Με εφαρμογη στην σχεση (4) για τις γωνιες των 0°, 45°,90° θα εχουμε οτι:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} \quad (5\alpha)$$

$$\varepsilon_{22} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} - \gamma_{xy}) / 2 \quad (5\beta)$$

$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{yy}$ (5γ)

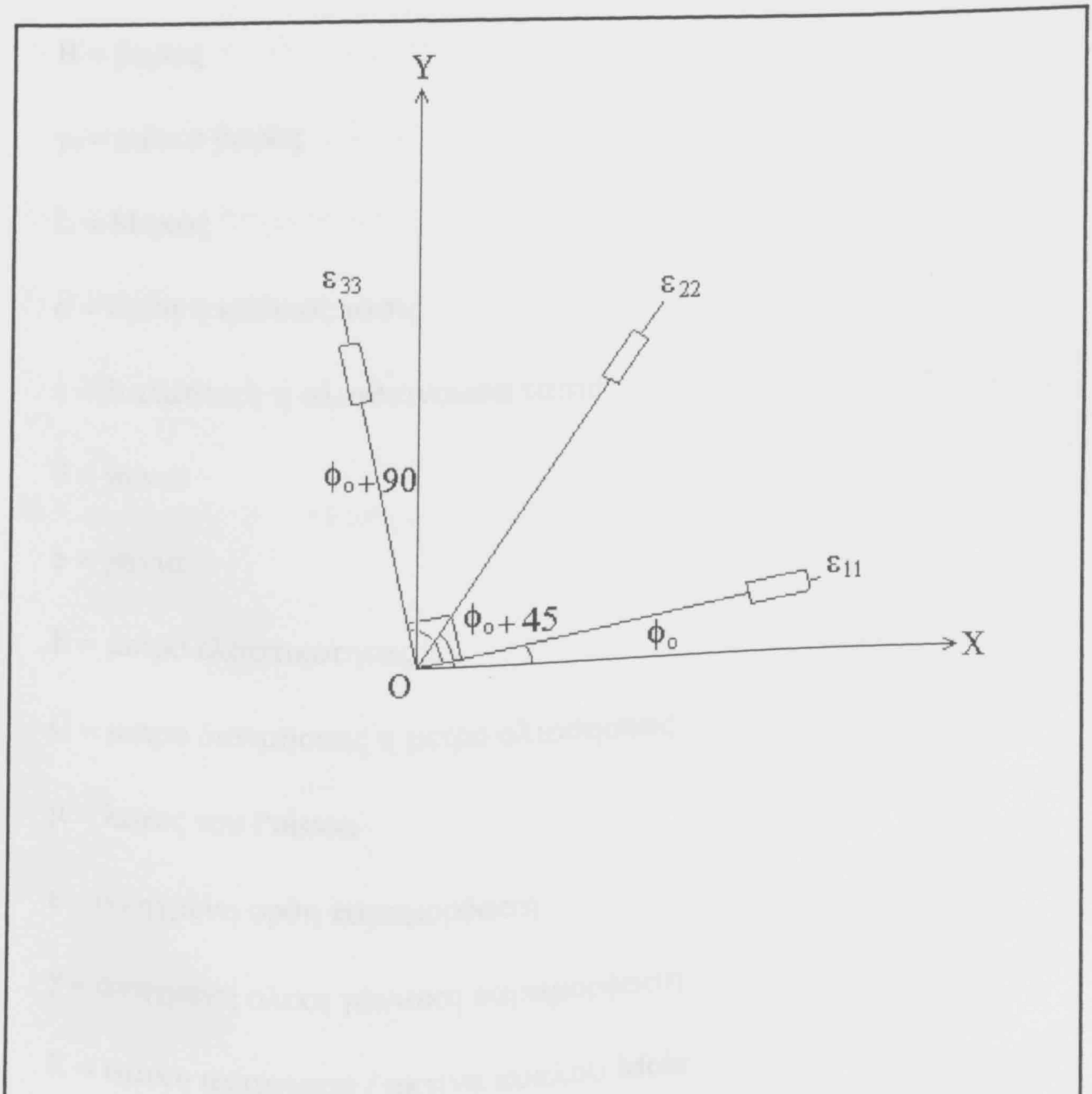
Απο την επιλυση του συστηματος των σχεσεων (5α), (5β), (5γ) παιρνουμε τις παραμορφωσεις κατα τους ημιαξονες (Ox) και (Oy) αντιστοιχα:

$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11}$

$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{33}$

$\gamma_{xy} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} - 2\,\varepsilon_{22}$

Για την περιπτωση του ισογωνιου συμπλεγματος παραμορφωσεων, το οποιο ειναι καταλληλο οπως ειπαμε για την περιπτωση που η διευθυνση των κυριως τασεων μας ειναι τελειως αγνωστες, εργαζομαστε κατ αντιστοιχια με την προηγουμενη περιπτωση. Για την περιπτωση που οι διευθυνσεις των κυριως παραμορφωσεων μας ειναι γνωστες, πλεον καταλληλο ειναι το ορθογωνιο συμπλεγμα αποτελουμενο απο δυο μετρητες. Οι μετρητες τοποθετουνται κατα τις διευθυνσεις αυτες και οι μετρουμενες παραμορφωσεις συμπιπτουν με τις κυριες παραμορφωσεις.



Σχημα 4.1

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

F = Δυναμις

M = μαζα

S = Εμβαδο

B = βαρος

γ_o = ειδικο βαρος

L = Μηκος

σ = ορθη η καθετος τασις

τ = διατμητικη η ολισθαινουσα τασις

θ = γωνια

ϕ = γωνια

E = μετρο ελαστικοτητας

G = μετρο διατμησεως η μετρο ολισθησεως

μ = λογος του Poisson

ε = ανηγμενη ορθη παραμορφωση

γ = ανηγμενη ολικη γωνιακη παραμορφωση

R = ωμικη αντισταση / ακτινα κυκλου Mohr

e = ευαισθησια οργανου μετρησης

δ = αναγνωση οργανου μετρησης

m = μεγεθυνση η παραγων πολλαπλασιασμου οργανου

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΠΗΓΕΣ

1) Ιωαννης Ν.Πρασιανακης–Μηχανικη παραμορφωσιμων σωματων (Μηχανικη ΙΙΙ) 1986

2) Δημητρης Π.Παπαγεωργιου–Εφαρμοσμενη μηχανικη (Αντοχη των υλικων) 1989

3) Μαρκετου Ε.–Τεχνικη Μηχανικη,τομος ΙΙ 1985

4) Σπανος Γεωργιος –Προσωπικες σημειωσεις παραδοσεων 1992–1993

5) Χαρωνης Παναγιωτης – Εφηρμοσμενη Μηχανικη 1984

6) R.Whitlow– Materials and structures 1991

7) Γεωργικοπουλου Κ. , Μπιτσακου Λ. – Τεχνικη Μηχανικη,Αντοχη Υλικων (ΤΕΕ)

8) Κερμανιδης Θ. – Μαθηματα Αντοχης Υλικων,τομοι Ι,ΙΙ