ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΧΑΛΙΚΙΑΣ ΜΙΛΤΙΑΔΗΣ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

2018

ΔΑΦΕΡΜΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΜΑΥΡΑΓΑΝΗΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία χρόνια ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας έχει ενταχθεί σε πολλούς κλάδους όπως είναι ο Βιομηχανικός κλάδος και ο οικονομικός αλλά ειδικότερα στους περισσότερους τομείς που έχουν να κάνουν με τη παραγωγή όπως είναι η παραγωγή ενός προϊόντος και τις διαδικασίες όπως είναι η διαδικασία ελέγχου. Είναι ένα εργαλείο το οποίο βοηθά στο να εντοπιστούν τα λάθη στη παραγωγή και συντονίζει την λήψη αποφάσεων κάνοντας αναλύσεις σε πληθυσμούς και δείγματα ώστε να παρέχει διαγραμματικές απεικονίσεις και αποτελέσματα για το πότε μια διαδικασία είναι εκτός ελέγχου και τους λόγους που την επηρεάζουν ώστε να ληφθούν οι κατάλληλες αποφάσεις.

Η παρούσα εργασία έχει ως σκοπό να παρουσιάσει τον Στατιστικό έλεγχο και να τον συνδέσει με τη πιθανότητα αποδοχής παρτίδας κάνοντας τις απαραίτητες μετρήσεις ώστε να είναι σε θέση ο παραλήπτης της παραγγελίας να αποφασίσει αν θα αποδεχθεί τη παρτίδα ή όχι.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύεται η έννοια του Στατιστικού Ελέγχου καθώς και η πορεία του ανά τα χρόνια και δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε κάποιες ιδιότητες του θεωρητικά αλλά και πρακτικά με τη χρήση διαγραμμάτων και εφαρμογών όπως είναι τα προειδοποιητικά όρια , άνω και κάτω όρια , μέσος συντελεστής διαδρομής κτλ.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύονται κάποιες χρήσιμες κατανομές οι οποίες βοηθούν στην ανάλυση και την επιλογή μιας παρτίδας προϊόντων όπως είναι η κανονική κατανομή , η διωνυμική κατανομή , η υπεργεωμετρική κατανομή και η κατανομή Poisson. Τέλος, με τη χρήση του excel αναλύονται σημαντικά παραδείγματα και διαγραμματικές απεικονίσεις όπου βοηθούν τον αναγνώστη να καταλάβει την έννοια της πιθανότητας αποδοχής παρτίδας.

ABSTRACT

In recent years, Statistical Quality Control has been integrated into many industries, such as the industrial field and the financial sector, but in particular in most sectors dealing with production such as the production of a product and processes such as the control process. It is a tool that helps identify mistakes in production and manages decision making by analyzing populations and samples to provide graphical depictions and results on when a process is out of control and the reasons that affect it in order to obtain appropriate decisions.

This paper aims to present the Statistical Control and link it to the probability of accepting a lot by making the necessary measurements so that the order receiver to be able to decide whether to accept the lot or not.

The first chapter analyzes the concept of Statistical Control as well as its evolution over the years and emphasizes some of its properties both theoretically and practically with the usage of diagrams and applications such as warning limits, upper and lower limits, average path coefficient etc.

In the second chapter we analyze some useful distributions that help in the analysis and selection of a lot of products such as Regular distribution, Binomial distribution, Hypergeometric distribution and Poisson distribution. Finally, by using Microsoft Excel provides us with important examples and diagrams to help us understand the concept of lot acceptance.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θέλουμε να ευχαριστήσουμε τον επιβλέποντα καθηγητή Μιλτιάδη Χαλικιά αφενός μεν για τη βοήθεια στην επιλογή του θέματος και αφετέρου για την καθοδήγηση του κατά την εκπόνηση της εργασίας.
Τέλος, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τις οικογένειες μας για την υποστήριξη, την συμπαράσταση και την αγάπη που μας παρείχαν κατά τη διάρκεια της φοίτησής μας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

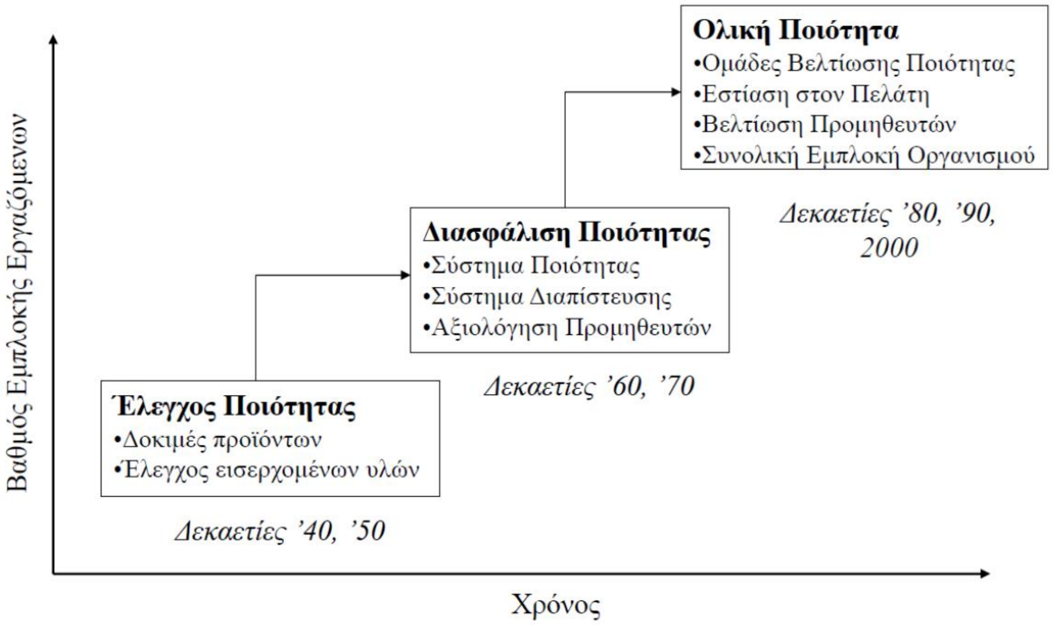
Ο όρος «ποιότητα» μπορεί να οριστεί με πολλούς τρόπους που κυμαίνονται από «οι απαιτήσεις των πελατών» ώστε να είναι «ικανοποιημένοι» ή ότι «ένα προϊόν είναι κατάλληλο προς χρήση έως τη συμμόρφωση προς τις απαιτήσεις». κ.ά. Πάντως, είναι προφανές ότι ο κάθε ορισμός της ποιότητας θα πρέπει να εμπεριέχει την ικανοποίηση των πελατών, ο οποίος θα πρέπει να είναι ο πρωταρχικός στόχος κάθε επιχείρησης. Ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας (statistical quality control ή SQC) είναι η διαδικασία ελέγχου μέσω της στατιστικής στη μεταβλητότητα μιας διαδικασίας (πχ την επιλογή μιας παρτίδας). Ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας περιλαμβάνει τον έλεγχο της κίνησης της διαδικασίας (τις προαπαιτούμενες διαδικασίες ώστε οι πελάτες να είναι ικανοποιημένοι ή τις διαδικασίες που χρειάζονται ώστε να έχουμε το «επιθυμητό» αποτέλεσμα) καθώς και τον έλεγχο των αλλαγών μεταβλητότητας της διαδικασίας (πχ συμμόρφωση προς τις απαιτήσεις). Στην συγκεκριμένη εργασία θα αναλύσουμε κάποιες γενικές έννοιες όπως πχ την ποιότητα, τον έλεγχο και τον στατιστικό έλεγχο και στη συνέχεια θα κάνουμε αναλυτικά πειράματα με τη χρήση της Διωνυμικής και της Υπεργεωμετρικής κατανομής για να βρούμε και να παρατηρήσουμε τις διάφορες πιθανότητες αποδοχής ενός δείγματος σε έναν πληθυσμό (MONTGOMERY, 2009).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Η ΠΟΡΕΙΑ ΤΟΥ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Η ιστορία της ποιότητας ξεκίνησε στις αρχές του 20ού αιώνα με αλματώδη βήματα έως και σήμερα όπου η ποιότητα είναι το κύριο μέλημα της κάθε επιχείρησης ως προς τα προϊόντα και τις υπηρεσίες .Οι περισσότερες τεχνικές του στατιστικού ελέγχου ποιότητας που χρησιμοποιούνται τώρα , έχουν ανακαλυφθεί τον τελευταίο αιώνα. Το 1924 ο Δρ. Walter A. Shewhart των Bell Telephone Laboratories ανακάλυψε κάποια από τα πιο γνωστά εργαλεία του στατιστικού ελέγχου. Οι τεχνικές αποδοχής δείγματος ανακαλύφθηκαν από τον Δρ. H. F. Dodge και H. G. Romig το 1928 επίσης των BellTelephoneLaboratories. Η χρήση του σχεδιασμού των πειραμάτων ανακαλύφθηκε από τον Δρ. R. A. Fisher του Ηνωμένου Βασιλείου το 1930. Το τέλος του Δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου σηματοδότησε την αύξηση του ενδιαφέροντος στη ποιότητα, πρωτίστως μεταξύ των βιομηχανιών στην Ιαπωνία οι οποίες βοηθήθηκαν από τον Δρ. W. E. Deming.

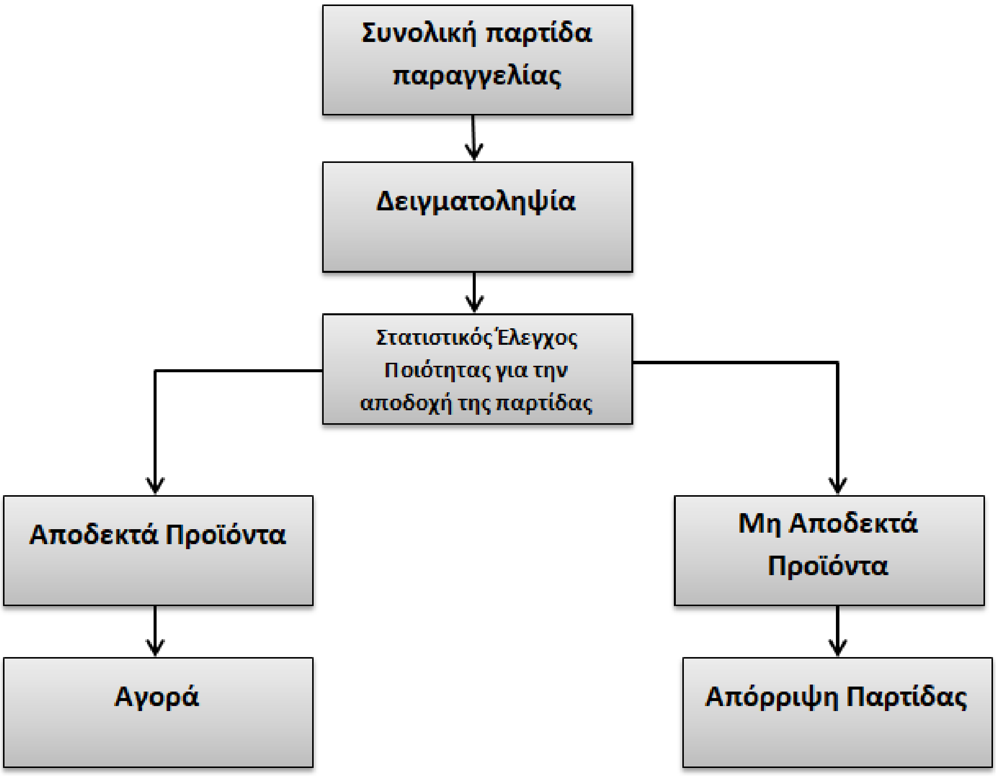
1.1.1 ΣΤΑΔΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ



Διάγραμμα 1

Στις δεκαετίες του ’40 και του ’50 ο Έλεγχος Ποιότητας δεν φαίνεται να είναι υψίστης σημασίας για τις επιχειρήσεις, καθώς αυτός πραγματοποιείται με απλές δοκιμές προϊόντων και με έλεγχο ποιότητας των εισερχόμενων πρώτων υλών. Δύο δεκαετίες αργότερα παρατηρείται μια ραγδαία ανάπτυξη στον τομέα του ελέγχου ποιότητας αφού δημιουργείται το πρώτο Σύστημα Ποιότητας για τις επιχειρήσεις. Η τελειοποίηση του ελέγχου γίνεται στο κοντινό παρελθόν (δεκαετίες ‘80-’00) όπου η ανάγκη για εστίαση στις ανάγκες του πελάτη είναι πλέον εμφανής και οι πρώτες ομάδες βελτίωσης και βελτιστοποίησης της ποιότητας κάνουν την εμφάνισή τους (Αντζουλάκος, 2006).

1.1.2 ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΟΙΟΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ



Η διαδικασία του παραδοσιακού μοντέλου ποιοτικού ελέγχου ξεκινάει όταν αποφασίσει μία επιχείρηση να λάβει μια παραγγελία προϊόντων. Η επιχείρηση προκειμένου να δεχθεί την παραλαβή της παρτίδας θα πρέπει να εφαρμόσει έλεγχο ώστε να διασφαλίσει τη ποιότητα των προϊόντων που παραλαμβάνει. Έτσι καλείται να κάνει στατιστικό έλεγχο ποιότητας παίρνοντας πρώτα ένα δείγμα από το συνολικό πληθυσμό των προϊόντων. Έπειτα εφαρμόζεται στατιστικός έλεγχος με βάση τα ελαττωματικά προϊόντα που ενδεχομένως να υπάρχουν στο πληθυσμό και έτσι διαμορφώνεται η πιθανότητα αποδοχής της παρτίδας.

1.2 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Σε κάθε εργασία παραγωγής προϊόντων ανεξαρτήτως του σχεδιασμού (τυποποιημένες διαδικασίες, καλά μηχανήματα, ικανοί εργάτες ή καλή πρώτη ύλη) θα υπάρχει πάντα μια φυσική «μεταβλητότητα». Με τον όρο φυσική μεταβλητότητα ορίζεται η διαφοροποίηση σε μια μετρήσιμη τιμή δύο προϊόντων όπου ΔΕΝ είναι ίδια. Η φυσική μεταβλητότητα αποτελείται από το άθροισμα πολλών αιτιών όπου συντελούν στη διαφοροποίηση δύο προϊόντων και αναφέρονται ως «κοινές» ή «τυχαίες» αιτίες μεταβλητότητας. Η φυσική μεταβλητότητα είναι μικρή σαν τιμή και δεν υπάρχουν παράγοντες όπου μπορούν να την ελέγξουν. Όταν μια διαδικασία λειτουργεί μόνο με την παρουσία μεταβλητότητας τότε λέμε ότι είναι εντός στατιστικού ελέγχου διαδικασία. Βέβαια , αυτό δεν σημαίνει ότι μια διαδικασία δεν μπορεί να εμφανίζει κι άλλες μορφές μεταβλητότητας, αν πχ για κάποιο λόγο υπάρχει συστηματική αλλαγή σε κάποιον ή κάποιους από τους παράγοντες που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος τότε είναι πιθανό περιστασιακά να εμφανίζονται μορφές μεταβλητότητας που οφείλονται σε κάποιον από τους παράγοντες:

1. Μη τυποποιημένες διαδικασίες .
2. Λανθασμένες ρυθμίσεις στα μηχανήματα.
3. Λάθη των εργαζομένων.
4. Κακή ποιότητα πρώτης ύλης.

Αν υπάρξει μεταβλητότητα που οφείλεται σε κάποιον από αυτούς τους παράγοντες ονομάζεται ειδική μεταβλητότητα, οι παράγοντες που οδηγούν στην ύπαρξη της ονομάζονται ειδικές αιτίες μεταβλητότητας, θα είναι πολύ μεγαλύτερη σε μέγεθος από την φυσική μεταβλητότητα και η ύπαρξη της οδηγεί σε μη αποδεκτά επίπεδα παραγωγής ή διαδικασιών και όταν μια διαδικασία εντάσσεται σε αυτή τη κατηγορία τότε λέμε ότι είναι εκτός στατιστικού ελέγχου διαδικασία (Αντζουλάκος, 2006).

1.2.1 ΟΡΙΑ ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΩΝ

Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός προϊόντος που οριοθετούνται στη φάση του σχεδιασμού του είναι άμεσα συνδεδεμένα με την έννοια της παραγωγής ενός προϊόντος και ονομάζονται άνω και κάτω όρια προδιαγραφών (Upper Specification Limits , Lower Specification Limits) και είναι τα όρια που καθορίζουν που θα πρέπει να βρίσκονται οι τιμές κάθε ποιοτικού χαρακτηριστικού του παραγόμενου προϊόντος για είναι αποδεκτό. Επίσης , υπάρχει και μία τιμή στόχος η οποία ορίζεται στη φάση του σχεδιασμού του προϊόντος και ονομάζεται T (target value) και είναι συνήθως το μέσο των τιμών ULS και LSL. Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά την πλειοψηφία των τιμών οι τιμές των ποιοτικών χαρακτηριστικών είναι εντός των ορίων όταν υπάρχει φυσική μεταβλητότητα αλλά δεν μπορούμε να πούμε ότι ισχύει το ίδιο όταν υπάρχει ειδική μεταβλητότητα (Αντζουλάκος, 2006).

1.2.2 ΕΛΛΑΤΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

Ελαττωματικά προϊόντα θεωρούνται τα προϊόντα όπου τουλάχιστον ένα ποιοτικό του χαρακτηριστικό έχει τιμή ή οποία είναι εκτός ορίων που θέτουμε ως προδιαγραφές όμως αυτό δεν σημαίνει ότι ανάλογα βέβαια με τον αριθμό των ελαττωματικών ποιοτικών χαρακτηριστικών και τον βαθμό του ελαττώματος ότι δεν είναι εφικτό να διατεθεί στην αγορά με σκοπό την πώληση. Πχ τα παπούτσια πολλές φορές μπορεί να έχουν ελαττώματα στο ύφασμα, στις ραφές, στο χρώμα κ.ο.κ όμως κάποιες φορές όταν ένα ζευγάρι έχει μόνο ένα από τα παραπάνω ελαττώματα ή περισσότερα αλλά σε μικρό βαθμό δεν θεωρείται ελαττωματικό και διατίθεται στην αγορά και υπάρχουν και ειδικά καταστήματα για το λόγο αυτό, βέβαια σε τέτοιες περιπτώσεις κατασκευάζονται ειδικά διαγράμματα ελέγχου όπου περιγράφονται με διακριτές μεταβλητές. Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν δύο ειδών διαγραμμάτων ελέγχου ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που περιγράφει τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του προϊόντος που εξετάζουμε:

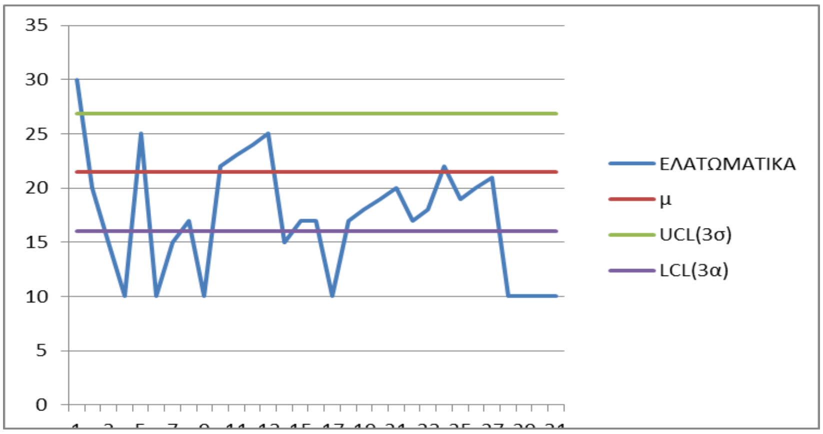
1) Διαγράμματα για συνεχή χαρακτηριστικά που αναφέρονται στις μεταβλητές
2) Διαγράμματα για διακριτά χαρακτηριστικά που αναφέρονται στις ιδιότητες

1.2.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Τα διαγράμματα ελέγχου τα εφηύρε το 1924 ο Walter A. Shewhart ο «πατέρας» του στατιστικού ελέγχου με σκοπό να χρησιμοποιούνται ως εργαλείο που να προσδιορίζει αν μια διαδικασία παραγωγής ή επιχείρησης βρίσκεται εντός ελέγχου.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε την τιμή της μεταβλητή X η οποία αντιπροσωπεύει πχ τα ελαττωματικά προϊόντα σε μια παρτίδα προϊόντων και θέλουμε να την εξετάσουμε . Επιλέγουμε σε διαφορετικές χρονικές στιγμές τυχαία δείγματα X1,X2,...Xn και υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης W1=g(Xi) για i=1,2,..n η οποία εκτιμά την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει (Αντζουλάκος, 2006).

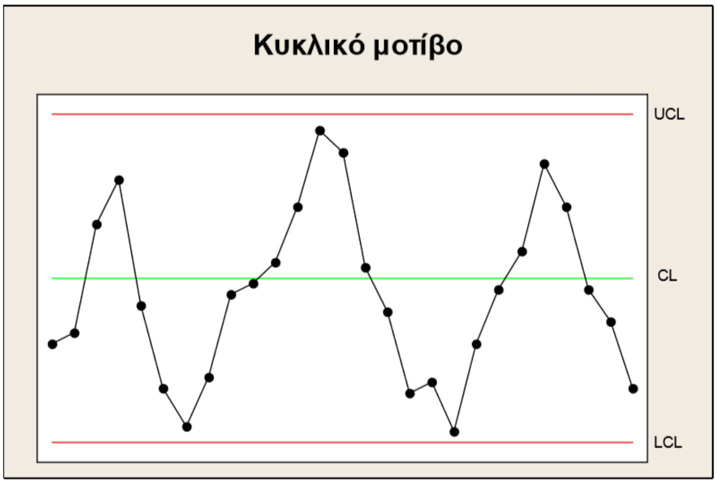
Τα διαγράμματα ελέγχου είναι αυτής της μορφής:



Διάγραμμα 2

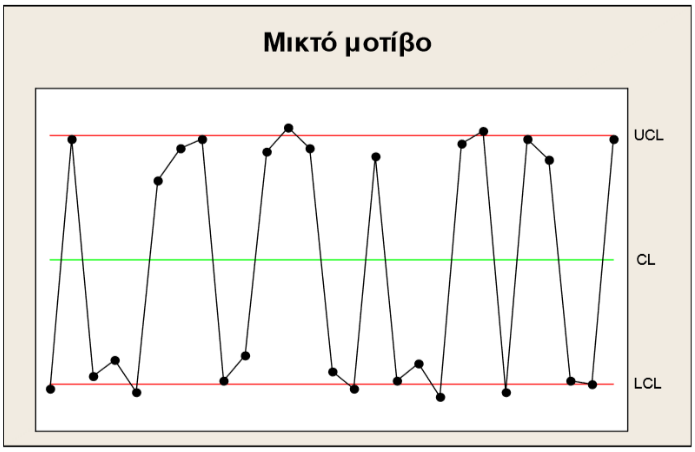
Και μπορούμε να παρατηρήσουμε τη πορεία των ελαττωματικών δηλαδή των τιμών της συνάρτησης W (μπλε γραμμή) τη μέση τιμή ή κεντρική γραμμή που προκύπτει από τη δειγματοληψία (κόκκινη γραμμή) το άνω όριο (πράσινη γραμμή) και το κάτω όριο (μωβ γραμμή). Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι εφόσον οι τιμές της W είναι μεταξύ των UCL LCL και η πορεία είναι τυχαία χωρίς μοτίβο τότε η διαδικασία είναι εντός ελέγχου άρα δεν χρειάζεται να επέμβουμε. Αλλά αν κάποιο σημείο των τιμών της W ξεπερνά την UCL ή την LSL τότε είναι ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου και θα πρέπει να βυθούν και να διορθωθούν οι ειδικές αιτίες που συμβάλουν σε αυτό το φαινόμενο. Αν σε αντίθετη περίπτωση οι τιμές της W είναι εντός των ορίων αλλά συμπεριφέρονται με μοτίβο ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτή είναι ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου, οι βασικότερες μορφές μοτίβων που περιγράφουν αυτό το φαινόμενο είναι:

α) Το κυκλικό μοτίβο όπου παρατηρείται μια περιοδικότητα στα σημεία με αποτέλεσμα να δημιουργούνται κύκλοι.



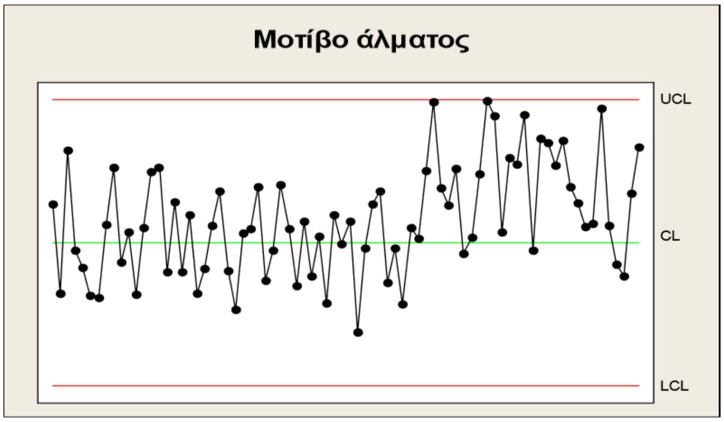
Διάγραμμα 3

β) Το μικτό μοτίβο που προκύπτει από δύο διαφορετικές κατανομές της μεταβλητής X μεταξύ των οποίων παλινδρομείτε η διαδικασία.



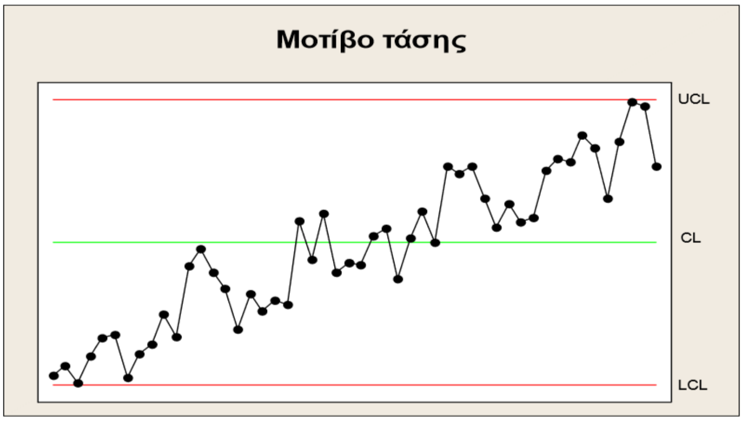
Διάγραμμα 4

γ) Το μοτίβο άλματος το οποίο έχει αλματώδεις ρυθμούς



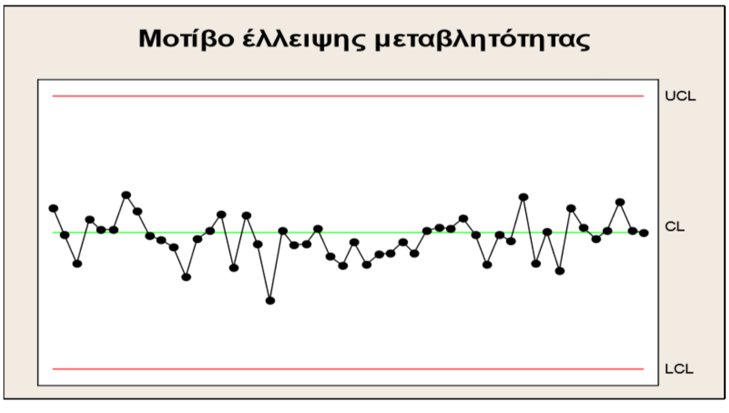
Διάγραμμα 5

δ) Το μοτίβο τάσης το οποίο έχει αύξουσα πορεία από το κάτω όριο προς το πάνω



Διάγραμμα 6

ε) Το μοτίβο έλλειψης μεταβλητότητας όπου οι τιμές του W κινούνται με συγκεκριμένο τρόπο γύρο από τη κεντρική τιμή χωρίς να υπάρχει κάποια αυξομείωση στη μεταβλητότητα.



Διάγραμμα 7

1.2.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

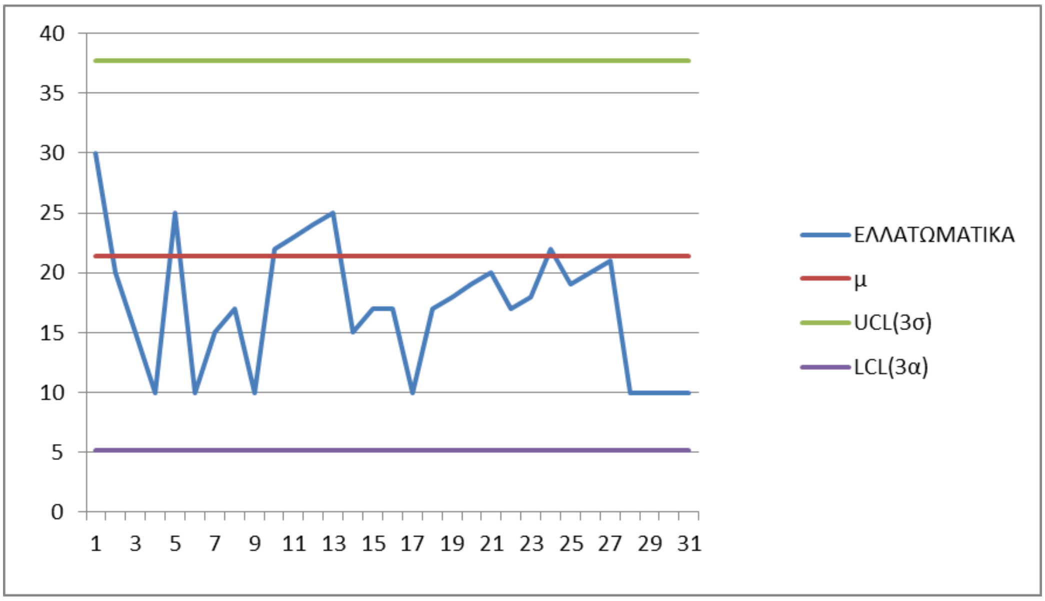
Αν υποθέσουμε ότι μετράμε τα ελαττωματικά προϊόντα ενός μήνα που εντοπίζουμε στην καθημερινή μας παρτίδα από 1/6/2018 έως και 1/7/2018 τότε θα ακολουθήσουμε τα εξής βήματα στο excel.

1) Καταγράφουμε τις ημερομηνίες και τα ελαττωματικά προϊόντα της κάθε ημέρας αν υπάρχουν και βρίσκουμε τη μέση τιμή ή αλλιώς τη κεντρική τιμή (μ) αθροίζοντας όλους τους όρους και διαιρώντας με το πλήθος τους ή γράφοντας τη συνάρτηση average στο excel και επιλέγοντας τα ελαττωματικά προϊόντα.
2) Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση stdev για να βρούμε τη τυπική απόκλιση (σ) του δείγματος.
3) Για να βρούμε το UCL αθροίζουμε τη μέση τιμή με τη τυπική απόκλιση επί τρία (δηλαδή μ+3σ)
4) Για να βρούμε το LSL αφαιρούμε από τη μέση τιμή τη τυπική απόκλιση επί τρία (δηλαδή μ-3σ)

Και προκύπτουν τα εξής δεδομένα :

μ	21,44			
σ	5,435644999			
ΗΜ/ΝΙΑ	**ΕΛΛΑΤΩΜΑΤΙΚΑ**	**μ**	**UCL(3σ)**	**LCL(3α)**
1/6/2018	30	21,44	37,746935	5,133065
2/6/2018	20	21,44	37,746935	5,133065
3/6/2018	15	21,44	37,746935	5,133065
4/6/2018	10	21,44	37,746935	5,133065
5/6/2018	25	21,44	37,746935	5,133065
6/6/2018	10	21,44	37,746935	5,133065
7/6/2018	15	21,44	37,746935	5,133065
8/6/2018	17	21,44	37,746935	5,133065
9/6/2018	10	21,44	37,746935	5,133065
10/6/2018	22	21,44	37,746935	5,133065
11/6/2018	23	21,44	37,746935	5,133065
12/6/2018	24	21,44	37,746935	5,133065
13/6/2018	25	21,44	37,746935	5,133065
14/6/2018	15	21,44	37,746935	5,133065
15/6/2018	17	21,44	37,746935	5,133065
16/6/2018	17	21,44	37,746935	5,133065
17/6/2018	10	21,44	37,746935	5,133065
18/6/2018	17	21,44	37,746935	5,133065
19/6/2018	18	21,44	37,746935	5,133065
20/6/2018	19	21,44	37,746935	5,133065
21/6/2018	20	21,44	37,746935	5,133065
22/6/2018	17	21,44	37,746935	5,133065
23/6/2018	18	21,44	37,746935	5,133065

24/6/2018	22	21,44	37,746935	5,133065
25/6/2018	19	21,44	37,746935	5,133065
26/6/2018	20	21,44	37,746935	5,133065
27/6/2018	21	21,44	37,746935	5,133065
28/6/2018	10	21,44	37,746935	5,133065
29/6/2018	10	21,44	37,746935	5,133065
30/6/2018	10	21,44	37,746935	5,133065
1/7/2018	10	21,44	37,746935	5,133065

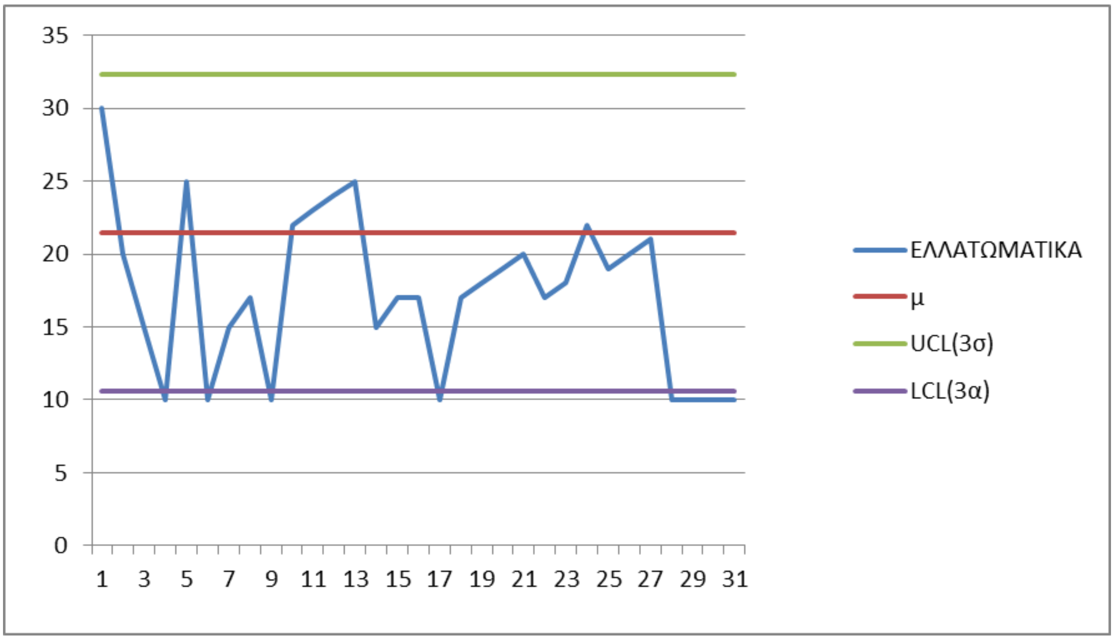


Διάγραμμα 8

Αν αναλύσουμε το ίδιο παράδειγμα με δύο σ αντί για τρία σ τότε :

μ	21,44			
σ	5,435644999			
ΗΜ/ΝΙΑ	**ΕΛΑΤΩΜΑΤΙΚΑ**	**μ**	**UCL(3σ)**	**LCL(3α)**
1/6/2018	30	21,44	32,31129	10,56871
2/6/2018	20	21,44	32,31129	10,56871
3/6/2018	15	21,44	32,31129	10,56871
4/6/2018	10	21,44	32,31129	10,56871
5/6/2018	25	21,44	32,31129	10,56871
6/6/2018	10	21,44	32,31129	10,56871
7/6/2018	15	21,44	32,31129	10,56871
8/6/2018	17	21,44	32,31129	10,56871
9/6/2018	10	21,44	32,31129	10,56871
10/6/2018	22	21,44	32,31129	10,56871

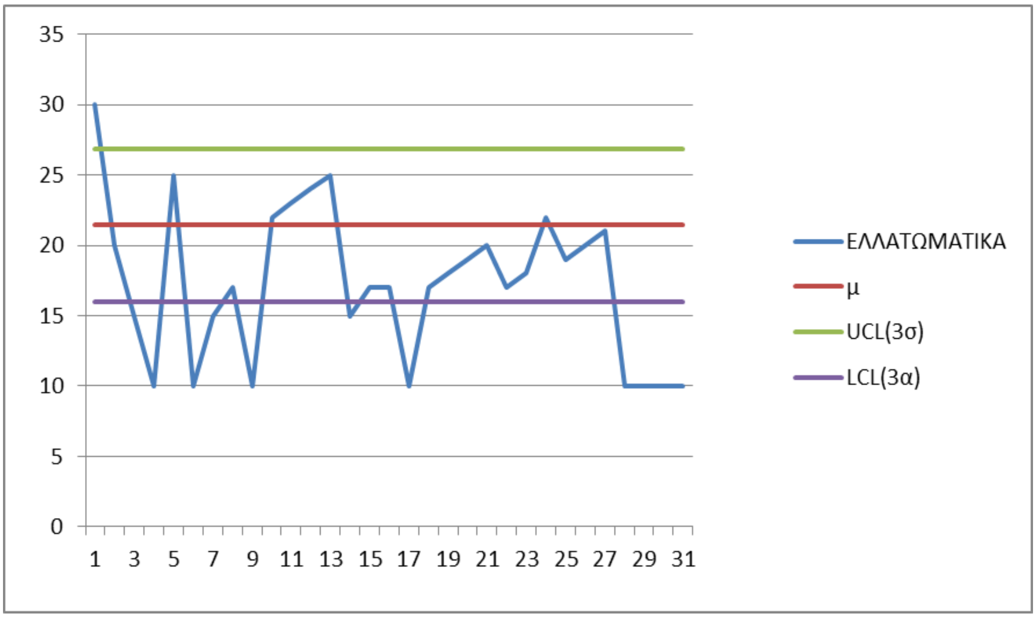
11/6/2018	23	21,44	32,31129	10,56871
12/6/2018	24	21,44	32,31129	10,56871
13/6/2018	25	21,44	32,31129	10,56871
14/6/2018	15	21,44	32,31129	10,56871
15/6/2018	17	21,44	32,31129	10,56871
16/6/2018	17	21,44	32,31129	10,56871
17/6/2018	10	21,44	32,31129	10,56871
18/6/2018	17	21,44	32,31129	10,56871
19/6/2018	18	21,44	32,31129	10,56871
20/6/2018	19	21,44	32,31129	10,56871
21/6/2018	20	21,44	32,31129	10,56871
22/6/2018	17	21,44	32,31129	10,56871
23/6/2018	18	21,44	32,31129	10,56871
24/6/2018	22	21,44	32,31129	10,56871
25/6/2018	19	21,44	32,31129	10,56871
26/6/2018	20	21,44	32,31129	10,56871
27/6/2018	21	21,44	32,31129	10,56871
28/6/2018	10	21,44	32,31129	10,56871
29/6/2018	10	21,44	32,31129	10,56871
30/6/2018	10	21,44	32,31129	10,56871
1/7/2018	10	21,44	32,31129	10,56871



Διάγραμμα 9

Αν το αναλύσουμε με ένα σ αντί για δύο

μ	21,44			
σ	5,435644999			
ΗΜ/ΝΙΑ	**ΕΛΑΤΩΜΑΤΙΚΑ**	**μ**	**UCL(3σ)**	**LCL(3α)**
1/6/2018	30	21,44	26,875645	16,00436
2/6/2018	20	21,44	26,875645	16,00436
3/6/2018	15	21,44	26,875645	16,00436
4/6/2018	10	21,44	26,875645	16,00436
5/6/2018	25	21,44	26,875645	16,00436
6/6/2018	10	21,44	26,875645	16,00436
7/6/2018	15	21,44	26,875645	16,00436
8/6/2018	17	21,44	26,875645	16,00436
9/6/2018	10	21,44	26,875645	16,00436
10/6/2018	22	21,44	26,875645	16,00436
11/6/2018	23	21,44	26,875645	16,00436
12/6/2018	24	21,44	26,875645	16,00436
13/6/2018	25	21,44	26,875645	16,00436
14/6/2018	15	21,44	26,875645	16,00436
15/6/2018	17	21,44	26,875645	16,00436
16/6/2018	17	21,44	26,875645	16,00436
17/6/2018	10	21,44	26,875645	16,00436
18/6/2018	17	21,44	26,875645	16,00436
19/6/2018	18	21,44	26,875645	16,00436
20/6/2018	19	21,44	26,875645	16,00436
21/6/2018	20	21,44	26,875645	16,00436
22/6/2018	17	21,44	26,875645	16,00436
23/6/2018	18	21,44	26,875645	16,00436
24/6/2018	22	21,44	26,875645	16,00436
25/6/2018	19	21,44	26,875645	16,00436
26/6/2018	20	21,44	26,875645	16,00436
27/6/2018	21	21,44	26,875645	16,00436
28/6/2018	10	21,44	26,875645	16,00436
29/6/2018	10	21,44	26,875645	16,00436
30/6/2018	10	21,44	26,875645	16,00436
1/7/2018	10	21,44	26,875645	16,00436

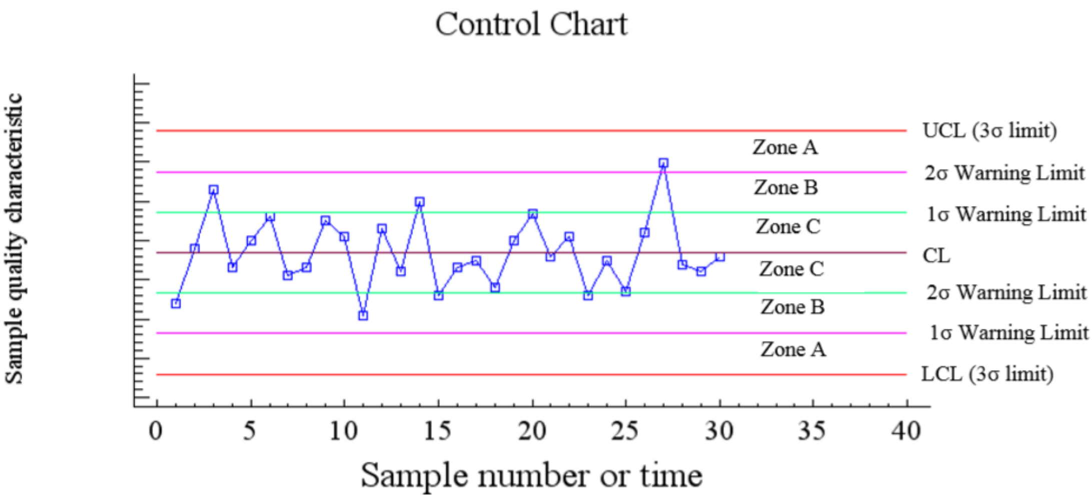


Διάγραμμα 10

Συνεπώς, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το σ είναι η ελαστικότητα ή ανεκτικότητα που θέλουμε να έχουμε σχετικά με τη πορεία των τιμών της συνάρτησης W ή των ελαττωματικών που υπάρχουν στο δείγμα.

1.2.5 ΠΡΟΕΙΔΟΠΟΙΗΤΙΚΑ ΟΡΙΑ

Αν θέλουμε ένα διάγραμμα ελέγχου να είναι πιο ευαίσθητο ή να μας προειδοποιεί νωρίτερα για τις διαδικασίες που βρίσκονται εκτός ελέγχου τότε μπορούμε να προσθέσουμε και προειδοποιητικά όρια ελέγχου εσωτερικά των ορίων ελέγχου των οποίων η διαγραμματική απεικόνιση έχει ως εξής:



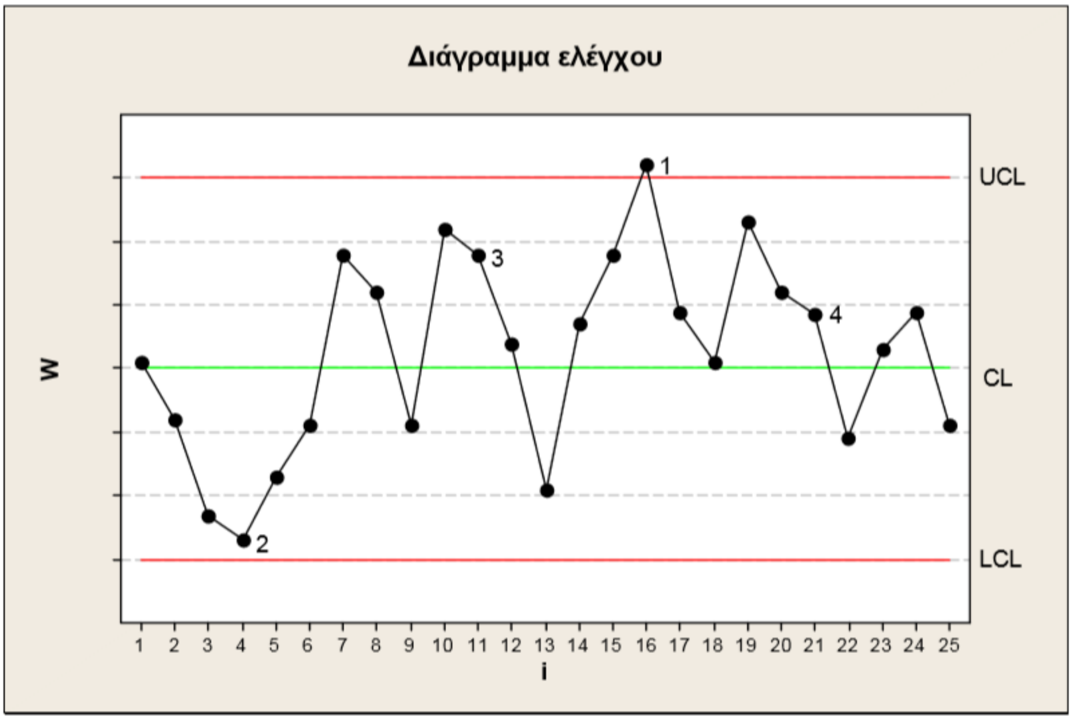
Διάγραμμα 11

Βέβαια τα προειδοποιητικά όρια έχουν και κάποιους κανονισμούς οι οποίοι μας βοηθούνε να περιγράψουμε τα διάφορα μοτίβα που εμφανίζονται στο σχεδιάγραμμα ελέγχου τα οποία συνυποδηλώνουν ότι μια διαδικασία είναι εκτός ελέγχου. Δηλαδή αν υποθέσουμε ότι στο σχεδιάγραμμα υπάρχει κάποιο σημείο ή περίπτωση που περιγράφει τον κανόνα τότε η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου αλλά το γεγονός ότι καταλαβαίνουμε μέσω των προειδοποιητικών ορίων ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου δεν σημαίνει ότι θα είναι και εκτός των ορίων που έχουμε θέσει. Με λίγα λόγια είναι ένας πιο αναλυτικός έλεγχος που μας προειδοποιεί προτού φανεί ότι οι τιμές του διαγράμματος βγαίνουν εκτός ορίων

Οι πιο σημαντικοί κανόνες που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής :

1) Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
2) Δύο από τα τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη Α (είτε στην θετική είτε στην αρνητική)
3) Τέσσερα από τα πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης C (είτε τη θετική είτε την αρνητική)
4) Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (είτε πάνω είτε κάτω της κεντρικής γραμμής)
5) Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά
6) Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική ζώνη C
7) Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη σειρά
8) Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C
9) Οποιαδήποτε μη τυχαία ακολουθία σημείων
10) Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά ή τα όρια ελέγχου.

Οι πρώτοι τέσσερεις κανόνες είναι γνωστοί ως Western Electric Rules όπου στη παρακάτω διαγραμματική απεικόνιση βλέπουμε ξεκάθαρα πότε και σε ποια σημεία ενεργοποιούνται τα προειδοποιητικά όρια.



Διάγραμμα 12

Και παρατηρούμε ότι στο σημείο 4 χτύπησε ο κανόνας 2 , στο σημείο 11 χτύπησε ο κανόνας 3, στο σημείο 16 χτύπησε ο κανόνας 1 και στο σημείο 21 χτύπησε ο κανόνας 4 (Western Elecetric Company, 1956) (Αντζουλάκος, 2006).

1.2.6 ΜΕΣΟ ΜΗΚΟΣ ΔΙΑΔΡΟΜΗΣ (AVERAGE RUN LENGTH) ή ARL

Το μέσο μήκος διαδρομής ορίζεται με τη σχέση ARL=$\frac{1}{p}$ όπου p είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων που έχουμε θέσει ενώ το ARL δείχνει τον απαιτούμενο αριθμό δειγμάτων ώστε να εμφανιστεί σε ένα διάγραμμα ένα σημείο εκτός ελέγχου.

Εάν μια διαδικασία βρίσκεται εντός ελέγχου με 3σ όρια ελέγχου και η προαναφερόμενη στατική συνάρτηση W ακολουθεί κανονική κατανομή το ARL είναι ίσο με:

ARL = $\frac{1}{a}$, όπου a η πιθανότητα να υπάρξει ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου, Ενώ εάν μια διαδικασία βρίσκεται εκτός ελέγχου τότε το ARL θα είναι ίσο με: ARL=$\frac{1}{1-\beta}$, όπου β η πιθανότητα να βρίσκεται ένα σημείο του διαγράμματος εντός των ορίων ελέγχου (Mitra, 2016), (Αντζουλάκος, 2006).

1.2.7 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Έστω ότι ένα εργοστάσιο κατασκευάζει χυμούς σε συσκευασίες των 1500 ml για να παρακολουθήσει τη διαδικασία ο υπεύθυνος ποιότητας συλλέγει δείγμα 16 συσκευασιών και μετρά τη ποσότητα του χυμού που εμπεριέχει η κάθε συσκευασία και προσδιορίζει τη μέση τιμή συσκευασίας (με όρια 3σ). Μετά τη μέτρηση που έκανε ο υπεύθυνος παρατήρησε ότι όταν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή (μ) = 1506 και τυπική απόκλιση (σ) = 4.

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ</u>

Α) Αν υποθέσουμε ότι η διαδικασία βρίσκεται εντός ελέγχου αλλά αμέσως μετά τη συλλογή κάποιου δείγματος η μέση τιμή γίνεται μ=1508 ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει η ίδια. Ποια η πιθανότητα η μετατόπιση αυτή να γίνει αντιληπτή από τη συλλογή του επόμενου δείγματος;

Β) Έστω ότι τα στοιχεία είναι ίδια με της (Α) ποιά είναι η πιθανότητα η μετατόπιση αυτή να γίνει αντιληπτή με τη συλλογή του τρίτου δείγματος;

Γ) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος μετά τη μετατόπιση που απαιτείται για να δώσει ένδειξη στο διάγραμμα ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου ;

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

Εφόσον η συνάρτηση W ακολουθεί κανονική κατανομή έχουμε ότι

W W~ N(μ,$\frac{\sigma^2}{n}$) Δηλαδή W ~ N(1506,$\frac{4^2}{16}$)

Για να βρούμε τα όρια ελέγχου κάνουμε τις εξής πράξεις :

LCL = μ-3σ=1506-3$\frac{4}{4}$ = 1506-3 = 1503

UCL = μ+3σ=1506+3$\frac{4}{4}$= 1506+3= 1509

Άρα

Α) Αφού το W ~ N(1508,$\frac{4^2}{16}$) η πιθανότητα να βρεθεί σημείο του διαγράμματος ελέγχου εκτός των ορίων είναι :

P = 1 – P(LCL ≤ W ≤ UCL) = 1 – P(1503 ≤ W ≤ 1509)

= 1- P$\left(\frac{1503-1508}{1} \leq \frac{W-1508}{1} \leq \frac{1509-1508}{1}\right)$

= 1-P(-5 ≤ Z ≤ 1) = 1 – [Φ(1)- Φ(-5)] = 1 – [0,8413 – 0] = 0,1587

Β) Για να βρούμε τη συγκεκριμένη πιθανότητα θα χρησιμοποιήσουμε Γεωμετρική κατανομή η οποία ορίζει ότι η συνάρτηση η οποία δίνει τη πιθανότητα η πρώτη επιτυχία να συμβεί μέχρι και τη χ-οστή επανάληψη του πειράματος δίνεται από τη σχέση : $f(x) = (1-p)^{x-1} \times p$ όπου στη περίπτωση μας το p είναι ίσο με το Φ(1) άρα:

f(x) = $0{,}8413^2 * 0{,}1587 = 0{,}112326$

Γ) Το μέσο μήκος ροής από τη στιγμή που θα πραγματοποιηθεί ή μετατόπιση είναι ίσο με :

ARL= $\frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}112326}$ = 9 άρα 4,5 ώρες κατά μέσο όρο.

Πχ αν υποθέσουμε ότι αυτά είναι τα δεδομένα :

μ	1506
σ	1

Ελαττωματικά	**μ**	**UCL**	**LCL**
1504	1506	1509	1503
1506	1506	1509	1503
1504	1506	1509	1503
1501	1506	1509	1503
1506	1506	1509	1503
1508	1506	1509	1503
1509	1506	1509	1503
1504	1506	1509	1503
1506	1506	1509	1503
1506	1506	1509	1503
1506	1506	1509	1503
1512	1506	1509	1503
1506	1506	1509	1503
1506	1506	1509	1503
1517	1506	1509	1503
1500	1506	1509	1503

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1.ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η κανονική κατανομή ως δημιούργημα του Φρίντριχ Γκάους χρησιμοποιείται ως μια πρώτη προσέγγιση για την περιγραφή τυχαίων μεταβλητών (πραγματικών αριθμών) οι οποίες τείνουν να συγκεντρώνονται γύρω από τη μέση τιμή. Πολλοί είναι οι λόγοι οι οποίοι την κάνουν την πιο σημαντική κατανομή της στατιστικής κάποιοι από αυτούς είναι οι εξής:

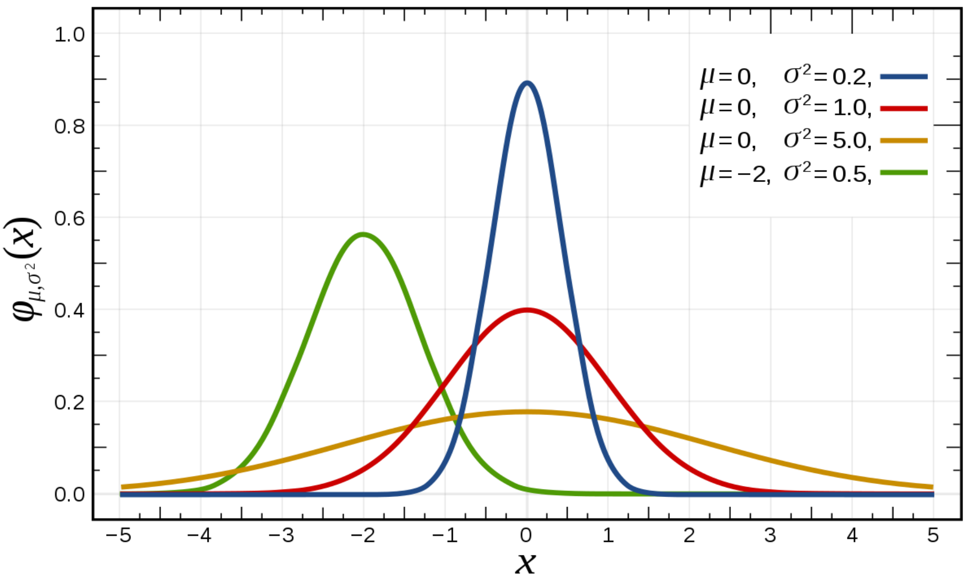
1. Ακολουθείται με ακρίβεια ή με μεγάλη προσέγγιση από τα συχνά φαινόμενα

2. Πολλές ασυνεχείς κατανομές πιθανοτήτων μπορούν προσεγγιστικά να βρεθούν μέσω της κανονικής κατανομής όπως πχ ύψος, βάρος, κτλ

3. Σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων ισοπίθανων τυχαίων μεταβλητών προσεγγίζεται μέσω της κανονικής κατανομής.

4. Ορίζεται πολλές φορές και ως κατανομή σφαλμάτων επειδή πολλά τυχαία σφάλματα που εμφανίζονται σε διάφορες μετρήσεις ακολουθούν κανονική κατανομή.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας των πιθανοτήτων έχει σχήμα «καμπάνας» και αναφέρεται ως κωνοειδής



Διάγραμμα 13

Με την πιθανότητα να ορίζεται ως εξής :

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2 \quad \pi \quad \sigma^2}} \quad e^{-\frac{(\chi - \quad \mu)^2}{2\sigma^2}},$$

Όπου e= η βάση των νεπέριων αριθμών (2,71828) μ = η μέση τιμή του πληθυσμού , σ= η τυπική απόκλιση του πληθυσμού, σ^2= η διακύμανση του πληθυσμού ,π= μαθηματική σταθερά (3,1415) και x = η τιμή μια τυχαίας συνεχούς μεταβλητής στο διάστημα [-∞,+∞].

Ο συμβολισμός της κανονικής κατανομής είναι : X ~ N (μ,σ^2) , για μια τυχαία μεταβλητή όπου Z ~ N(0,1) η συνάρτηση της πιθανότητας συμβολίζεται ως φ(z) και η συνάρτηση κατανομής ως Φ(z) (Χαλικιάς Ι. , 2003).

2.1.2 ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Όταν μια κατανομή έχει μέση τιμή μ =0 , τυπική απόκλιση σ=1 άρα και διασπορά σ^2=1 συμβολίζεται με N(0,1) και ονομάζεται τυποποιημένη κανονική κατανομή . Όταν μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή συμβολίζεται με Z και η πιθανότητα της είναι ίση με:

$$\Phi(Z)\frac{1}{\sqrt{2 \quad \pi}} \quad e^{-\frac{Z^2}{2}}, \ \mu\varepsilon - \infty \leq Z \leq +\infty$$

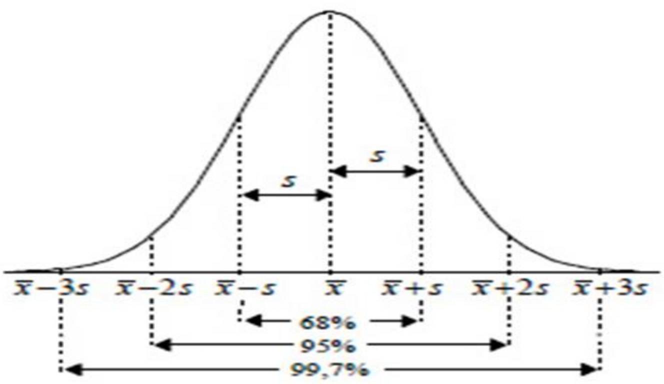
Η τυποποίηση των δεδομένων βασίζεται στην απόκλιση τους από την μέση τιμή (μ) σε όρους της απόκλισης (σ) και έχουν τύπο:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

(Γ.Παπαδόπουλος).

2.1.3 ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Σε μία δειγματοληψία που εντάσσεται στην κανονική κατανομή το 68,3% των παρατηρήσεων απέχει κατά σ από τη μέση τιμή δηλαδή βρίσκεται στο διάστημα [μ-σ , μ+σ], το 95% των παρατηρήσεων απέχει κατά 2σ από τη μέση τιμή βρίσκεται δηλαδή στο διάστημα [μ-2σ , μ+2σ] και το 99,7% των παρατηρήσεων απέχει κατά 3σ από τη μέση τιμή βρίσκεται δηλαδή στο διάστημα [μ-3σ , μ+3σ] (Χαλικιάς Μ. , 2012)



Διάγραμμα 14

2.1.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Έστω ότι η μέση τιμή παραγγελίας προϊόντων είναι μ= 15000 (τεμάχια) και η τυπική απόκλιση είναι 5000 τεμάχια.

Ποιό είναι το ποσοστό των παραγγελιών που τα τεμάχια τους είναι κάτω των 5000;

Ποιό είναι το ποσοστό των παραγγελιών που τα τεμάχια τους είναι πάνω από 30000 ;

Απάντηση

Κανονική κατανομή Μέσης παραγγελίας προϊόντων	
Μέση Παραγγελία (μ) =	15000
Τυπική Απόκλιση (σ)=	5000
Ποσοστό παραγγελίας με προϊόντα κάτω των 5000 τεμαχίων=	2,275013
Ποσοστό παραγγελίας με προϊόντα άνω των 30000 τεμαχίων=	0,13499

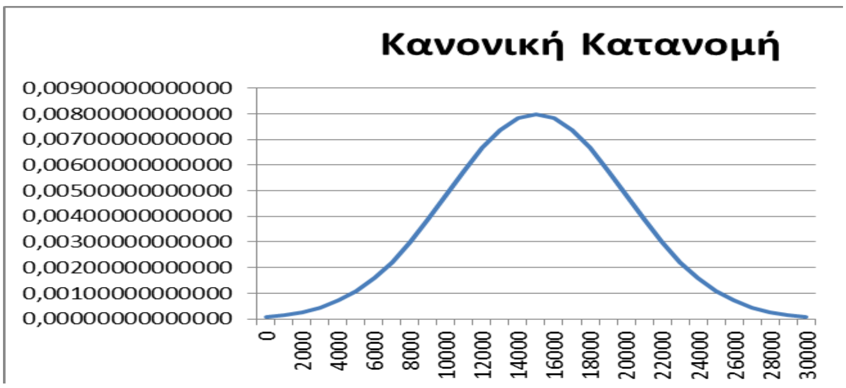
Το 2,28% των παραγγελιών περιέχουν 5000 τεμάχια και κάτω .

Το 0,13% των παραγγελιών περιέχουν τουλάχιστον 30000 τεμάχια.

Αν θελήσουμε να δούμε τα ποσοστά των παραγγελιών ακριβώς από 0 έως 30000 (ανά μονάδες προϊόντων) η διαγραμματική απεικόνιση έχει ως εξής :

Όπου βλέπουμε με ακρίβεια πόσο είναι η πιθανότητα να είναι ακριβώς για κάθε 1000 μονάδες προϊόντων τα προϊόντα εντός της παραγγελίας.

0	0,00008863696824
1000	0,00015830903166
2000	0,00027165938467
3000	0,00044789060590
4000	0,00070949185692
5000	0,00107981933026
6000	0,00157900316602
7000	0,00221841669359
8000	0,00299454931271
9000	0,00388372109966
10000	0,00483941449038
11000	0,00579383105523
12000	0,00666449205784
13000	0,00736540280607
14000	0,00782085387951
15000	0,00797884560803
16000	0,00782085387951
17000	0,00736540280607
18000	0,00666449205784
19000	0,00579383105523
20000	0,00483941449038
21000	0,00388372109966
22000	0,00299454931271
23000	0,00221841669359
24000	0,00157900316602
25000	0,00107981933026
26000	0,00070949185692
27000	0,00044789060590
28000	0,00027165938467
29000	0,00015830903166
30000	0,00008863696824



Διάγραμμα 15

2.1.5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Έστω X ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων στον πληθυσμό ($3 \leq X \leq 63$) στο τυχαίο δείγμα των 250 προϊόντων (n=250). Γνωρίζοντας οτι το ποσοστό ύπαρξης ελλατωματικού προϊόντος στον πληθυσμό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$p = \frac{X}{N}$$

Προκύπτουν οι εξής πιθανότητες:

Πιθανότητα ύπαρξης ελλατωματικού p (X/N) =	
	0,0006
	0,0012
	0,0018
	0,0024
	0,003
	0,0036
	0,0042
	0,0048
	0,0054
	0,006
	0,0066
	0,0072
	0,0078
	0,0084
	0,009
	0,0096
	0,0102
	0,0108
	0,0114
	0,012
	0,0126

n*p =	
	0,15
	0,3
	0,45
	0,6
	0,75
	0,9
	1,05
	1,2
	1,35
	1,5
	1,65
	1,8
	1,95
	2,1
	2,25
	2,4
	2,55
	2,7
	2,85
	3
	3,15

Η μέση τιμή της Κανονικής Κατανομής υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το δείγμα με τις πιθανότητες ύπαρξης ελαττωματικού:

$$\mu = n \times p$$

Υπολογίζοντας τη τυπική απόκλιση με τον τύπο:
όπου η τυπική απόκλιση ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου της μέσης τιμής με 1 – τη πιθανότητα ύπαρξης ελαττωματικού προϊόντος στο πληθυσμό

Προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα →

np*(1-p)=	0,387182128
	0,547393825
	0,670216383
	0,773666595
	0,86472539
	0,946974128
	1,022540953
	1,092812884
	1,158753641
	1,221065109
	1,280277314
	1,336802154
	1,390967289
	1,443038461
	1,493234744
	1,541739278
	1,588707021
	1,634270479
	1,678544012
	1,721627137
	1,763607099

Έχοντας υπολογίσει τη μέση τιμή, τη τυπική απόκλιση και γνωρίζοντας τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο πληθυσμό Χ καθίσταται δυνατή η εύρεση των πιθανοτήτων αποδοχής της παρτίδας.

Χρησιμοποιώντας τη NORM.DIST κατανομή του Microsoft Excel με:

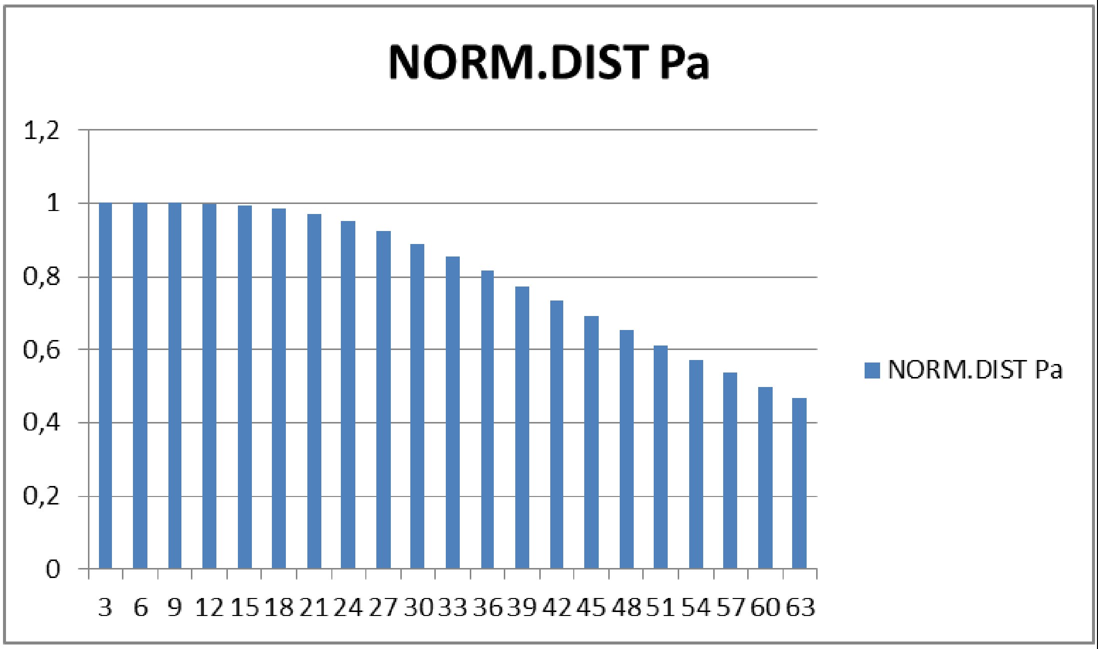
NORM.DIST(x; mean ; standard_dev ; cumulative)

Όπου στο συγκεκριμένο παράδειγμα δέχεται αυτές τις τιμές:

NORM.DIST(C;n*p; $\sqrt{np(1-p)}$;true)

Προκύπτουν οι πιθανότητες αποδοχής Pa:

NORM.DIST Pa
1
0,999999594
0,999929024
0,999039272
0,995365666
0,986708587
0,971740618
0,950233877
0,922768622
0,890358278
0,8541636
0,815317812
0,774836619
0,733582434
0,692259543
0,651425121
0,611507094
0,572823872
0,535603351
0,5
0,466109645



Διάγραμμα 16

2.2 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ – ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η διωνυμική κατανομή τείνει προς την κανονική για μέγεθος δείγματος (n) μεγαλύτερο από 20. Για μικρότερα δείγματα η πιθανότητα p πρέπει να είναι κοντά στο 0,5.

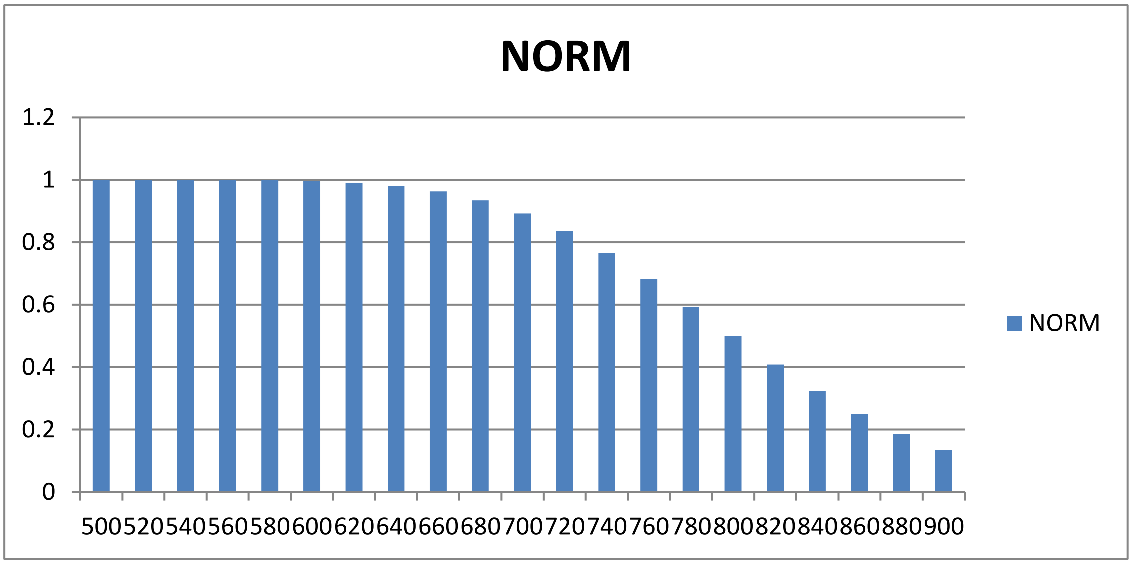
2.2.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ-ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Έστω ότι έχουμε συνολική παρτίδα παραγγελίας N= 10.000. Με τυχαία δειγματοληψία παίρνουμε δείγμα n= 250 προϊόντων. Θεωρούμε CutPoint, **c=80** (ο αριθμός των αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων).

Πληθυσμός Παρτίδας N =	10.000		
Δείγμα Πληθυσμού n =	1000		
Αριθμός αποδεκτών ελλατωματικών C =	80		
Αριθμός ελλατωματικών X =	500	Πιθανότητα ύπαρξης ελλατωματικού p (X/N) =	0,05
	520		0,052
	540		0,054
	560		0,056
	580		0,058
	600		0,06
	620		0,062
	640		0,064
	660		0,066
	680		0,068
	700		0,07
	720		0,072
	740		0,074
	760		0,076
	780		0,078
	800		0,08
	820		0,082
	840		0,084
	860		0,086
	880		0,088
	900		0,09

p*n =	50	np*(1-p)=	6,892024376
	52		7,021111023
	54		7,147307185
	56		7,270763371
	58		7,391616873
	60		7,509993342
	62		7,62600813
	64		7,739767438
	66		7,851369307
	68		7,960904471
	70		8,068457102
	72		8,174105456
	74		8,277922445
	76		8,379976134
	78		8,480330182
	80		8,579044236
	82		8,676174272
	84		8,771772911
	86		8,86588969
	88		8,958571315
	90		9,049861877

2.2.2 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

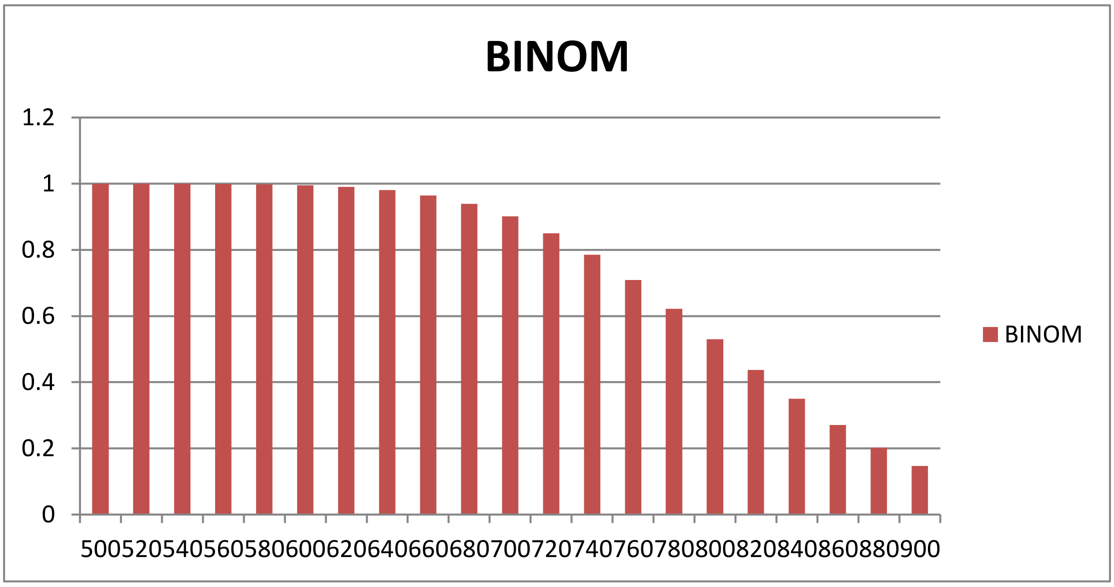


NORM
0,999993281
0,99996668
0,999862476
0,999518109
0,998541466
0,996128989
0,990870994
0,98064449
0,962717302
0,934141618
0,89240025
0,836135974
0,765718629
0,683435829
0,593221537
0,5
0,408845281
0,324192056
0,249281966
0,185928711
0,134582126

Διάγραμμα 17

Βλέπουμε ότι με τα δεδομένα που έχουν αναφερθεί παραπάνω και με προϋποθέσεις όπου ευνοούν τη συσχέτιση των δύο κατανομών η Κανονική Κατανομή έχει μικρή μείωση όταν ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων Χ είναι 500 – 700 μονάδες. Η μεγαλύτερη πτώση στη πιθανότητα αποδοχής της παρτίδας διαμορφώνεται στα 780 ελαττωματικά προϊόντα.

2.2.3 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ



BINOM
0,999979513
0,999925002
0,999756674
0,999293937
0,998152606
0,99560895
0,990453865
0,980898546
0,964614729
0,938979613
0,90153676
0,850593839
0,785795428
0,708479751
0,621676409
0,52971378
0,437533031
0,349896079
0,270693209
0,202503185
0,146465009

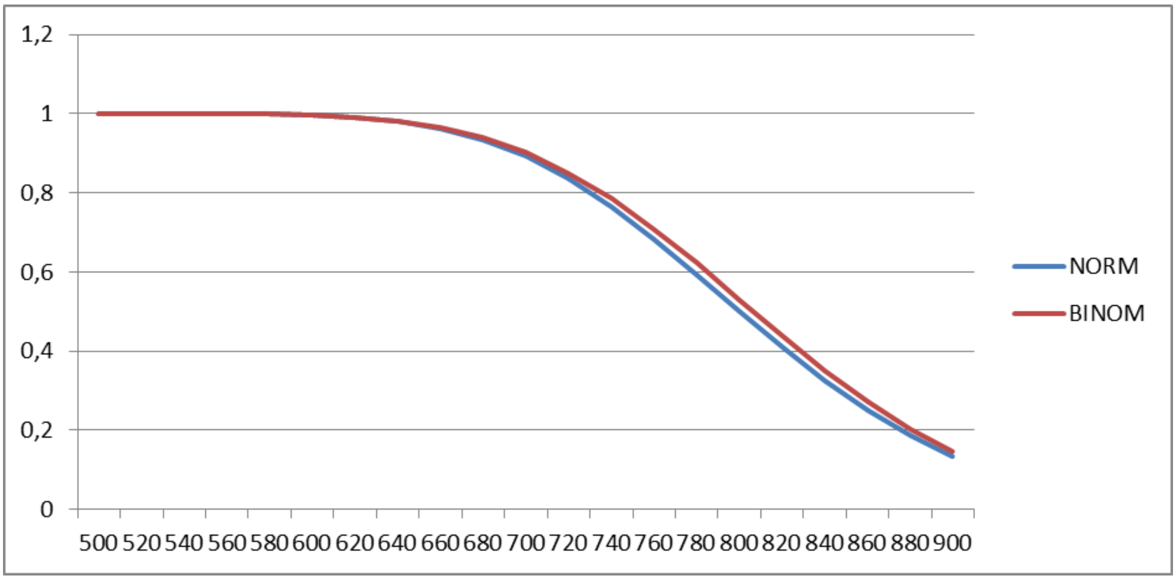
Διάγραμμα 18

Η Διωνυμική Κατανομή ακολουθεί παρόμοια πορεία με τη Κανονική Κατανομή ενώ η μέγιστη πτώση της πιθανότητας αποδοχής της παρτίδας εμφανίζεται στα 800 ελαττωματικά προϊόντα και είναι ίση με 0,092.

Παρατηρείται ότι δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στις πιθανότητες αποδοχής του πληθυσμού Pa. Αυτό οφείλετε στο γεγονός ότι τα δεδομένα που έχουν χρησιμοποιηθεί πληρούν τις προϋποθέσεις για να συμβαδίζουν οι δύο κατανομές.
Θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια επιχείρηση είναι δυνατό να χρησιμοποιεί κανονική κατανομή για να αποφασίσει αν θα δεχθεί μια παρτίδα προϊόντων μόνο όταν ο πληθυσμός και το δείγμα είναι αρκετά μεγάλα.

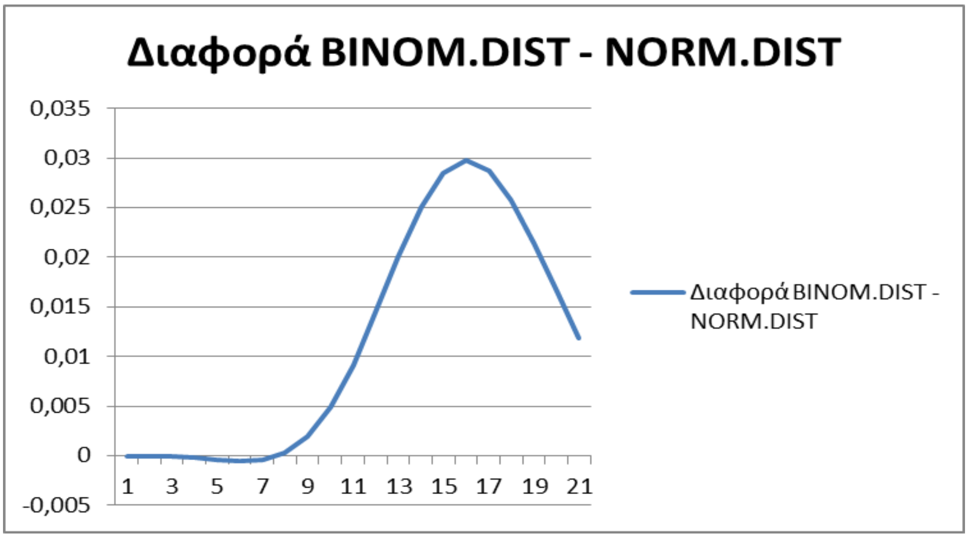
Παράδειγμα:

Για τα δεδομένα που έχουν δοθεί παραπάνω προκύπτει το εξής διάγραμμα που μας βοηθάει να καταλάβουμε τη πορεία των δύο κατανομών στις διάφορες τιμές του Χ



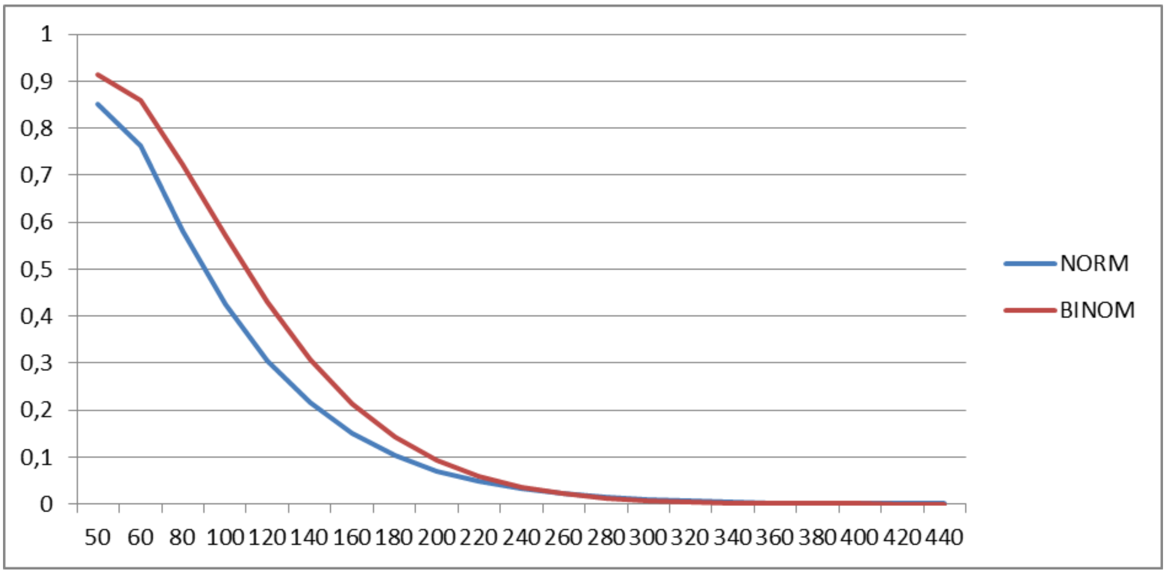
Διάγραμμα 19

Όπως είναι εμφανές στο διάγραμμα οι δύο κατανομές έχουν ίσες περίπου τιμές στις μικρές σχετικά τιμές του Χ (500-700) ενώ στις ενδιάμεσες τιμές (700-860) υπάρχει μια μικρή απόκλιση. Όσο αυξάνονται τα ελαττωματικά προϊόντα μετά από αυτό το σημείο η διαφορά των δύο κατανομών τείνει στο μηδέν.
Η μέγιστη διαφορά των δύο κατανομών φθάνει τον αριθμό 0,03



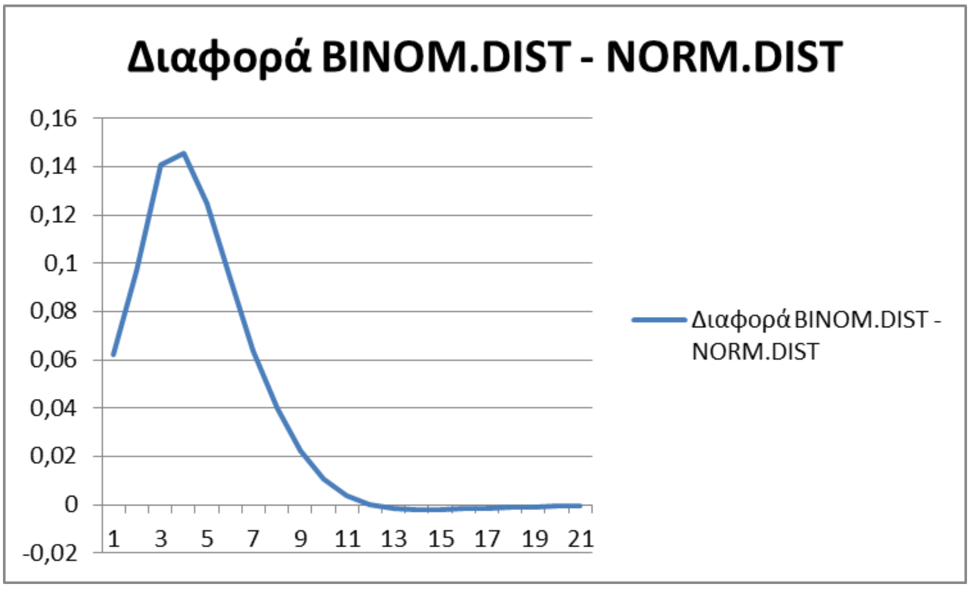
Διάγραμμα 20

Αν όμως αλλάξουμε τα δεδομένα και θεωρήσουμε ότι το δείγμα και ο πληθυσμός αλλά και ο αριθμός Χ των ελαττωματικών προϊόντων μειώνονται όσο το δυνατόν αναλογικά τότε έχουμε τα παρακάτω δεδομένα:
Έστω λοιπόν ότι έχουμε μια παραγγελία 3000 προϊόντων και παίρνουμε τυχαίο δείγμα (n) 100 προϊόντων και θεωρούμε αριθμό αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων c=3.



Διάγραμμα 21

Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχει εμφανής διαφορά ανάμεσα στις δύο κατανομές, τώρα που το δείγμα n και ο πληθυσμός N έχουν μειωθεί με μέγιστη διαφορά να διαμορφώνεται στις 0,145 μονάδες. Επομένως θεωρείται ακατάλληλη η Κανονική Κατανομή για εύρεση πιθανότητας αποδοχής μικρών παρτίδων προϊόντων.



Διάγραμμα 22

2.3 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η διωνυμική κατανομή είναι μια διακριτή συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής. Περιγράφει ένα τυχαίο πείραμα με δυο πιθανά αποτελέσματα (επιτυχία - αποτυχία) και πιθανότητα επιτυχίας p. Το πείραμα επαναλαμβάνεται n φορές. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών. Η πιθανότητα να έχουμε k επιτυχίες σε n ανεξάρτητα πειράματα με πιθανότητα επιτυχίας p κάθε φορά είναι:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Η διωνυμική κατανομή θεωρείται μια διαδικασία που αποτελείται από μια σειρά από ανεξάρτητες δοκιμές. Με ανεξάρτητες δοκιμές εννοούμε ότι το αποτέλεσμα κάθε δοκιμής δεν εξαρτάται καθόλου από το αποτέλεσμα προηγούμενων δοκιμών. Τα αποτελέσματα μπορεί να είναι είτε «επιτυχία» είτε «αποτυχία» , όταν το αποτέλεσμα κάθε δοκιμής είναι είτε «επιτυχία» είτε «αποτυχία» τότε οι δοκιμές ονομάζονται δοκιμές Bernoulli. Αν η πιθανότητα της «επιτυχίας» p σε κάθε δοκιμή είναι σταθερή τότε ο αριθμός των «επιτυχιών» x σε n δοκιμές Bernoulli έχει διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p όπως ορίζονται ακολούθως:

n>=0 και 0 < p < 1 είναι $P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ x=0,1,2,….,n
(Χαλικιάς Μ. , 2012)

Ο μέσος όρος και η διακύμανση της κατανομής είναι:

(1) μ=np (2) $\sigma^2 = np(1-p)$

Η διωνυμική κατανομή χρησιμοποιείται συχνά στη ποιοτική μηχανική. Είναι το κατάλληλο μοντέλο πιθανότητας για δειγματοληψία από έναν απείρως μεγάλο πληθυσμό, όπου το p αντιπροσωπεύει το κλάσμα ελαττωματικών ή μη συμμορφούμενων στοιχείων του πληθυσμού. Σε αυτές τις εφαρμογές το x συνήθως αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ελαττωματικών στοιχείων που βρίσκονται σε ένα τυχαίο δείγμα n στοιχείων.

Στο παραπάνω ορισμό η πράξη $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{x!(\boldsymbol{n}- \quad x)!}$

Είναι ο αριθμών των συνδυασμών n στοιχείων που λαμβάνονται x κάθε φορά. Η διωνυμική κατανομή είναι το κατάλληλο μοντέλο πιθανότητας για την επιλογή ενός τυχαίου δείγματος n στοιχείων με επανατοποθέτηση από ένα πληθυσμό N στοιχείων από τα οποία τα n είναι μη συμβατά ή ελαττωματικά. Με τυχαίο δείγμα εννοούμε ένα δείγμα στο οποίο έχει επιλεγεί **έτσι ώστε όλα τα πιθανά δείγματα να είναι ισοπίθανα στην επιλογή.** Σε αυτές τις εφαρμογές το x αντιπροσωπεύει συνήθως τον αριθμό των μη συμβατών ή ελαττωματικών στοιχείων στο δείγμα.

Πχ Έστω ότι έχουμε p=0.2 n=20 τότε η πιθανότητα για κάθε x είναι :

p=0,2 , n=20 για κάθε τιμή του x		p=0,2, n=20 για κάθε τιμή του x	
x	P(X=x)	x	P(X>x)
0	0,011529215	0	0,011529
1	0,057646075	1	0,069175
2	0,136909429	2	0,206085
3	0,205364143	3	0,411449
4	0,218199402	4	0,629648
5	0,174559522	5	0,804208
6	0,109099701	6	0,913307
7	0,054549850	7	0,967857
8	0,022160877	8	0,990018
9	0,007386959	9	0,997405
10	0,002031414	10	0,999437

Συχνά στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας προκύπτει η τυχαία μεταβλητή: $\hat{p} = \frac{x}{n}$ όπου το x έχει κανονική κατανομή με τα στοιχεία (παραμέτρους) n,p. Συχνά είναι η συχνότητα των παρατηρούμενων ελαττωματικών στοιχείων σε ένα δείγμα x του δείγματος n και αυτό συνήθως ονομάζεται ελαττωματικό κλάσμα δείγματος. Το σύμβολο ‘‘^’’ χρησιμοποιείται για να δείξει (για το στοιχείο που το έχει δηλαδή το p) είναι μία εκτίμηση της αληθούς, άγνωστης τιμής της Διωνυμικής παραμέτρου p.

Η κατανομή πιθανοτήτων εκτιμάται από τη διωνυμική κατανομή από τον τύπο :

$\boldsymbol{P\{\hat{p} \leq a\} = P\{\frac{x}{n} \leq a\} = p\{x \leq na\} = \sum_{x=0}^{[na]} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}$ Όπου η μεταβλητή na συμβολίζει τον μεγαλύτερο ακέραιο ή μικρότερο ή ίσο με το na . Ο μέσος όρος του $\hat{p}$ είναι το p και η διακύμανση είναι : $\sigma^2_{\hat{p}=\frac{p(1-p)}{n}}$

2.3.1 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

2.3.1.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1*:* Έστω ότι έχουμε συνολική παρτίδα παραγγελίας N= 5000. Με τυχαία δειγματοληψία παίρνουμε δείγμα n= 100 προϊόντων. Θεωρούμε CutPoint, **c=3** (ο αριθμός των αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων) και η πιθανότητα ελαττωματικού στον πληθυσμό που διαμορφώνεται ως εξής:

$$p = \frac{x}{N}$$

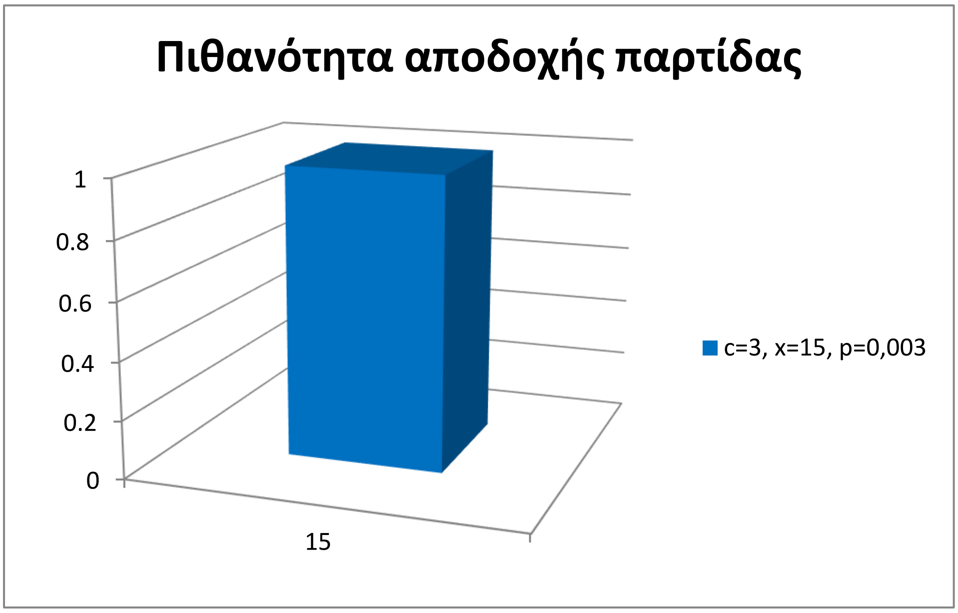
*Όπου x είναι ο αριθμός των ελαττωματικών στον πληθυσμό και ισούται με **15***

p=15/5000 = 0,003

για p = 0,003 εφαρμόζεται η Binom.Dist συνάρτηση του Microsoft Excel και προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$Pa = 0{,}99974753$$

Όπου Pa η πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού, άρα της παρτίδας των 5000 προϊόντων.



Διάγραμμα 23

2.3.1.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2*:* Έστω ότι έχουμε συνολική παρτίδα παραγγελίας N= 5000. Με τυχαία δειγματοληψία παίρνουμε δείγμα n= 100 προϊόντων. Θεωρούμε CutPoint, **c=3** (ο αριθμός των αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων) και η πιθανότητα ελαττωματικού στον πληθυσμό που διαμορφώνεται ως εξής:

$$p = \frac{x}{N}$$

*Όπου x είναι ο αριθμός των ελαττωματικών στον πληθυσμό και ισούται με **450***

p=450/5000 = 0,09

για p = 0,09 εφαρμόζεται η Binom.Dist συνάρτηση του Microsoft Excel και προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$Pa = 0{,}017300609$$

Όπου Pa η πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού, άρα της παρτίδας των 5000 προϊόντων.

Διάγραμμα 24

2.3.1.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3*:* Έστω ότι έχουμε συνολική παρτίδα παραγγελίας N= 5000. Με τυχαία δειγματοληψία παίρνουμε δείγμα n= 100 προϊόντων. Θεωρούμε CutPoint, **c=1** (ο αριθμός των αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων) και η πιθανότητα ελαττωματικού στον πληθυσμό που διαμορφώνεται ως εξής:

$$p = \frac{x}{N}$$

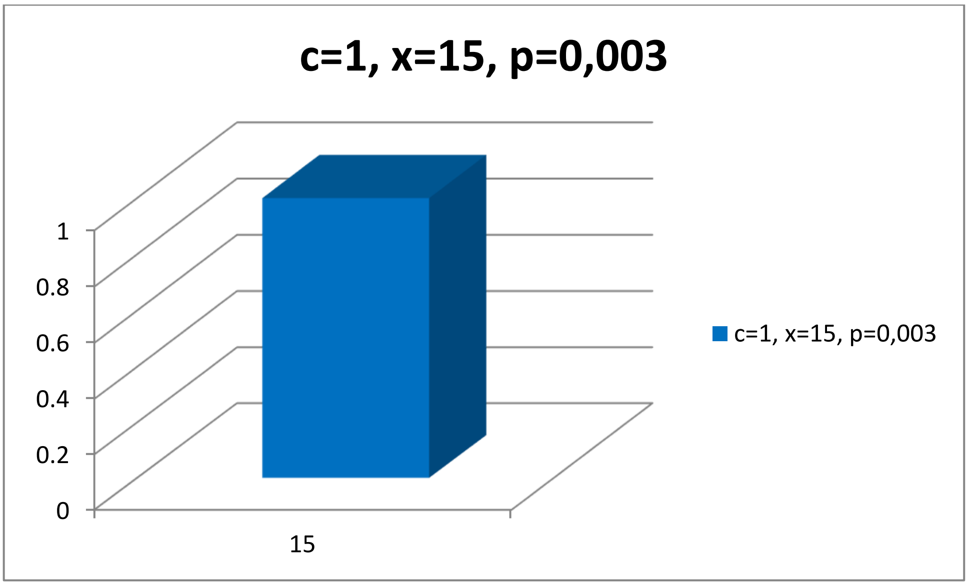
Όπου x είναι ο αριθμός των ελαττωματικών στον πληθυσμό και ισούται με 15

p=15/5000 = 0,003

για p = 0,003 εφαρμόζεται η Binom.Dist συνάρτηση του Microsoft Excel και προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$Pa = 0{,}963297979$$

Όπου Pa η πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού, άρα της παρτίδας των 5000 προϊόντων.



Διάγραμμα 25

2.3.1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4: Έστω ότι έχουμε συνολική παρτίδα παραγγελίας N= 5000. Με τυχαία δειγματοληψία παίρνουμε δείγμα n= 100 προϊόντων. Θεωρούμε CutPoint, c=1 (ο αριθμός των αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων) και η πιθανότητα ελαττωματικού στον πληθυσμό που διαμορφώνεται ως εξής:

$$p = \frac{x}{N}$$

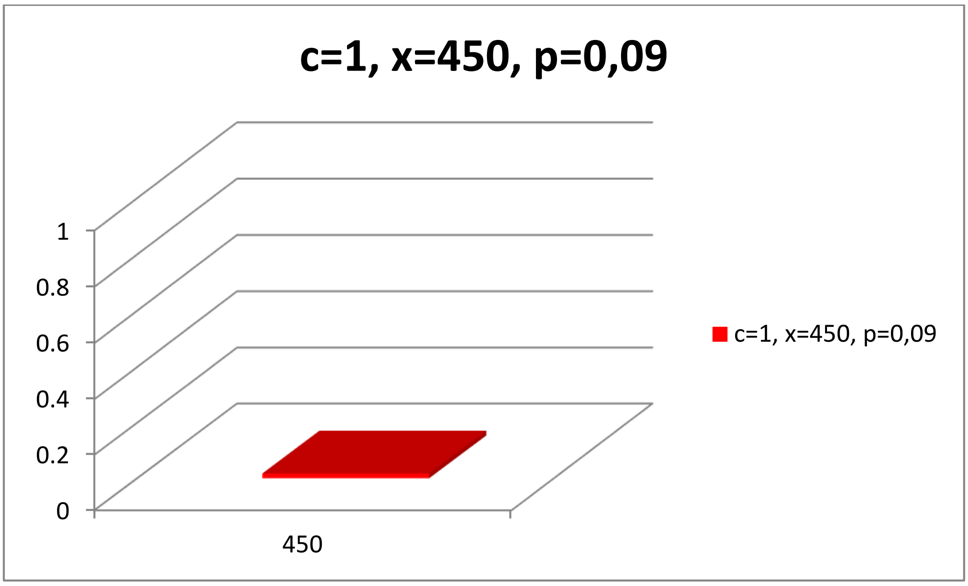
Όπου x είναι ο αριθμός των ελαττωματικών στον πληθυσμό και ισούται με 450

p=450/5000 = 0,09

για p = 0,09 εφαρμόζεται η Binom.Dist συνάρτηση του Microsoft Excel και προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$Pa = 0{,}000873316$$

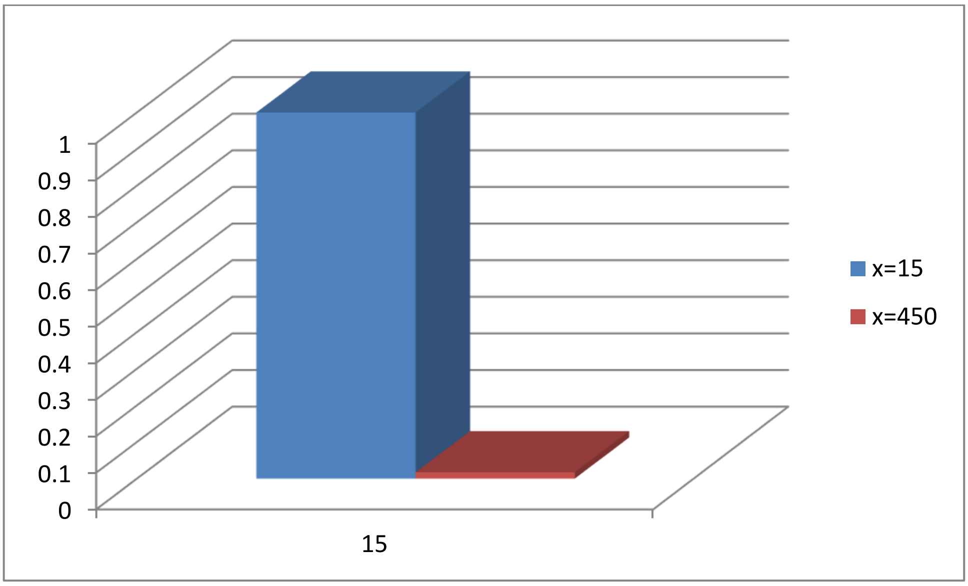
Όπου Pa η πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού, άρα της παρτίδας των 5000 προϊόντων.



Διάγραμμα 26

Παρατηρήσεις Εφαρμογών 1-2

Παρατηρούμε ότι, συγκρίνοντας τις **Εφαρμογές 1 και 2**, η τιμή του x η οποία μεταβάλλεται από 15 ελαττωματικά στον πληθυσμό σε 450 η πιθανότητα αποδοχής της παρτίδας Pa μεταβάλλεται σε μεγάλο βαθμό.



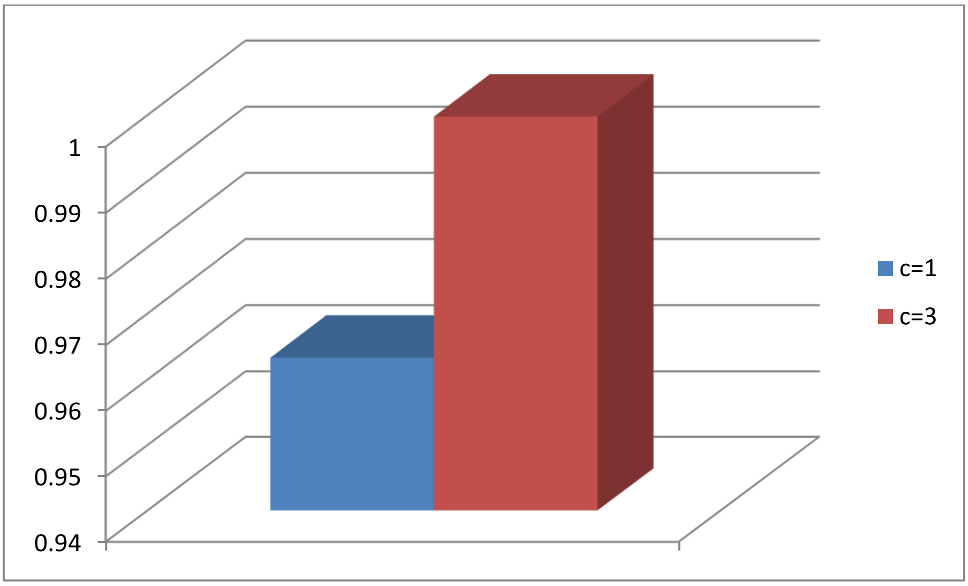
Διάγραμμα 27

Παρατηρήσεις Εφαρμογών 1-3

Σε αυτή τη περίπτωση σύγκρισης των δύο εφαρμογών 1 και 3, καθώς και των διαφορετικών δεδομένων που προκύπτουν από αυτές παρατηρούμε ότι αλλάζοντας το c, τον αριθμό δηλαδή μέχρι και τον οποίο αποδεχόμαστε τον αριθμό των ελαττωματικών στο δείγμα, μεταβάλλεται σημαντικά ολόκληρη η πιθανότητα της αποδοχής της παρτίδας.

Εφαρμογή 1	**Εφαρμογή 3**
N=5000	N=5000
n=100	n=100
X=15	X=15
C=3	C=1
Pa=0,99974753	Pa= 0,963297979

Μειώνοντας το c κατά 2 μονάδες παρατηρείται μια σημαντικά μεγάλη μεταβολή και στην πιθανότητα αποδοχής ολόκληρου του πληθυσμού ($\geq 3\%$)



Διάγραμμα 28

Επίσης, παρατηρήθηκε ότι συνδέεται άρρηκτα η ποσότητα των ελαττωματικών προϊόντων x που έχουμε στον πληθυσμό με τον αριθμό αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων, το CutPoint, c.

Δηλαδή, όσο αυξάνεται η ποσότητα των ελαττωματικών προϊόντων x στον πληθυσμό, τόσο μεγαλύτερη σημασία έχει ο αριθμός αποδεκτών στον πληθυσμό (c) μέχρι να φτάσει το μέγιστο σημείο. Μετά από έναν αριθμό ελαττωματικών προϊόντων x η σημασία του c στο πείραμα αρχίζει και μικραίνει.

Παράδειγμα Παρατήρησης 1-3

Για N=5000, n=100

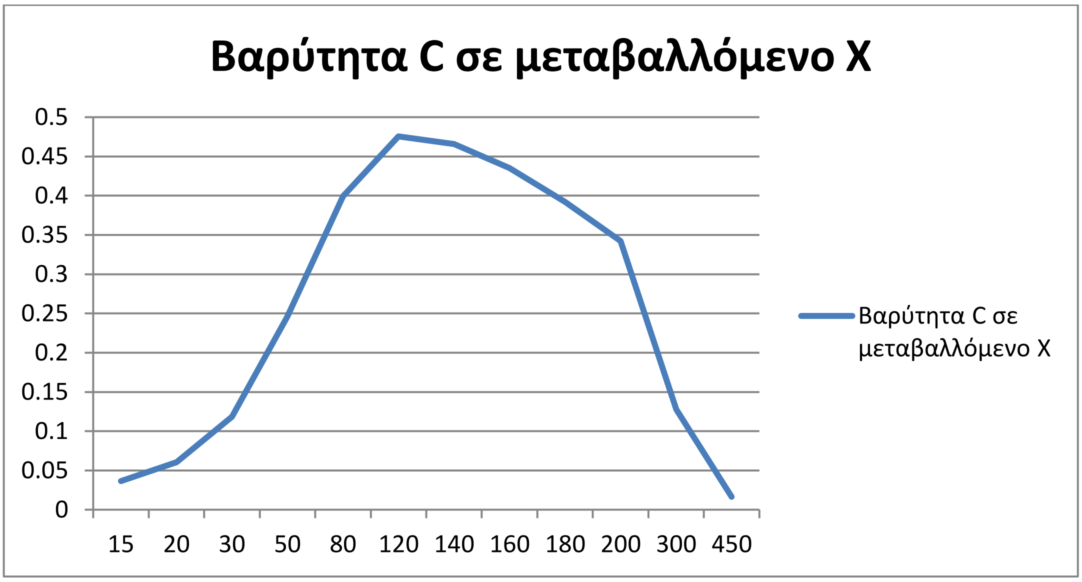
*και **c=3** προκύπτουν τα παρακάτω δεδομένα:*

X=	15	20	30	50	80	120	140	160	180	200	300	450
p=	0,003	0,004	0,006	0,01	0,016	0,024	0,028	0,032	0,036	0,04	0,06	0,09
Pa=	0,999	0,999	0,996	0,981	0,922	0,780	0,692	0,601	0,512	0,429	0,143	0,017

*και **c=1** προκύπτουν τα παρακάτω δεδομένα:*

X=	15	20	30	50	80	120	140	160	180	200	300	450
p=	0,003	0,004	0,006	0,01	0,016	0,024	0,028	0,032	0,036	0,04	0,06	0,09
Pa=	0,963	0,938	0,878	0,735	0,523	0,304	0,226	0,166	0,121	0,087	0,015	0,0008

Παίρνοντας τη διαφορά των **Pa για c=3 και για c=1** παρατηρούμε ότι η Σημαντικότητα του C στις διάφορες τιμές του X αυξομειώνεται. Η σημαντικότητα της μεταβλητής c είναι αυξανόμενη μέχρι ένα μέγιστο σημείο A όπου στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι x=120 στο οποίο η βαρύτητα του C είναι μέγιστη (max). Μετά από το σημείο A ακολουθεί φθίνουσα πορεία η βαρύτητα της μεταβλητής c.



Διάγραμμα 29

2.3.1.5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5*:* Έστω ότι έχουμε συνολική παρτίδα παραγγελίας N= 5000. Με τυχαία δειγματοληψία παίρνουμε δείγμα n= 100 προϊόντων. Θεωρούμε CutPoint, c=3 (ο αριθμός των αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων) και η πιθανότητα ελαττωματικού στον πληθυσμό που διαμορφώνεται ως εξής:

$$p = \frac{x}{N}$$

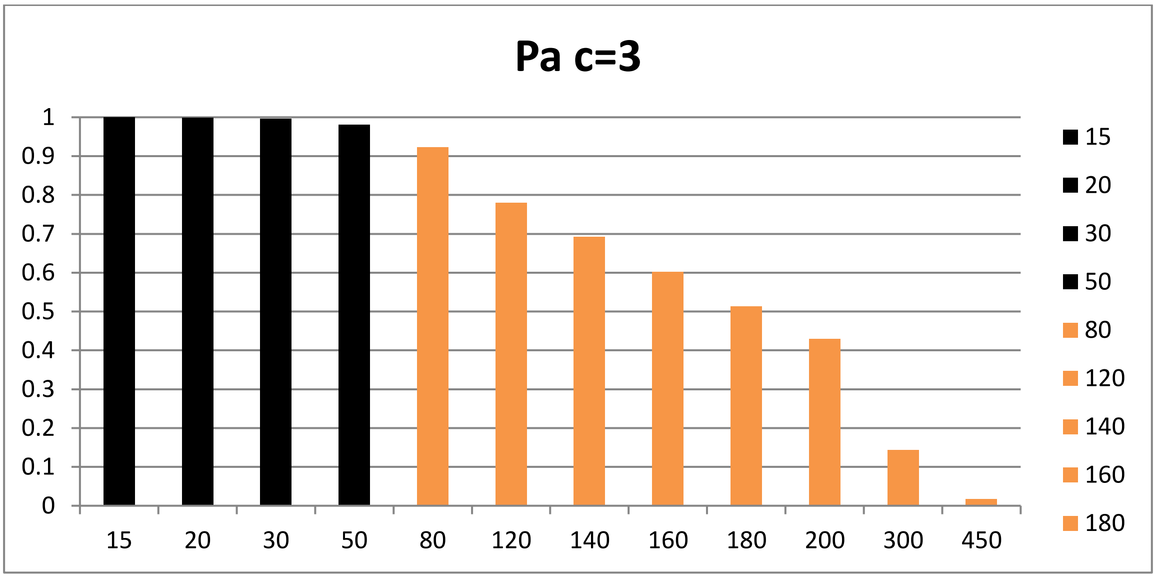
Όπου x είναι ο αριθμός των ελαττωματικών στον πληθυσμό.

Το x σε αυτή τη περίπτωση θα πάρει διάφορες τιμές:

X=	15	20	30	50	80	120	140	160	180	200	300	450

Επομένως το Pa (πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού) παίρνει τις παρακάτω τιμές:

Pa=	0,999	0,999	0,996	0,981	0,922	0,780	0,692	0,601	0,512	0,429	0,143	0,017



Διάγραμμα 30

Προφανώς, όσο περισσότερα ελαττωματικά προϊόντα έχουμε στον πληθυσμό τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότερα ελαττωματικά στο δείγμα. Επομένως η πιθανότητα αποδοχής Pa, βάσει του c=3, διαμορφώνεται όπως απεικονίζει το παραπάνω διάγραμμα.

Παρατηρείται η μεγάλη πτώση της πιθανότητας να κυμαίνεται μεταξύ του x=50 και x=80
όπου Pa(50) = 0,981= 98,1%
ενώ Pa(80)= 0,922 = 92,2%

2.4 ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η υπεργεωμετρική κατανομή είναι μια διακριτή συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής. Περιγράφει ένα τυχαίο πείραμα με δυο πιθανά αποτελέσματα (επιτυχία - αποτυχία) σε πεπερασμένο πληθυσμό που επαναλαμβάνεται n φορές χωρίς επανατοποθέτηση. Η κατανομή γίνεται εύκολα κατανοητή με την περιγραφή της μέσω ενός μοντέλου με κάλπες. Θεωρούμε μια κάλπη με Κ λευκές μπάλες (επιτυχίες) και Ν-Κ μαύρες (αποτυχίες). Από την κάλπη παίρνουμε χωρίς επανατοποθέτηση n μπάλες. Η υπεργεωμετρική κατανομή μας δίνει την πιθανότητα οι k από αυτές να είναι λευκές.

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι:

$$P(X=k)=\frac{\binom{N-K}{n-k}\binom{K}{k}}{\binom{N}{n}}$$

Ή ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος πεπερασμένος πληθυσμός που αποτελείται από στοιχεία Ν. Ένας αριθμός Κ(Κ<=Ν) από αυτά τα στοιχεία εμπίπτουν σε μια κατηγορία ενδιαφέροντος. Επιλέγεται τυχαίο δείγμα n στοιχείων από τον πληθυσμό (χωρίς επανατοποθέτηση) και παρατηρείται ο αριθμός των στοιχείων k που εμπίπτουν στη κατηγορία ενδιαφέροντος. Το k είναι μια υπεργεωμετρική τυχαία μεταβλητή με τη πιθανότητα κατανομής (πχ αποδοχή παρτίδας) να ορίζεται ως εξής :

$P(X=k)=\frac{\binom{N-K}{n-k}\binom{K}{k}}{\binom{N}{n}}$ *k=0,1,2…,min(n,K)*

Ο μέσος όρος και η διακύμανση της κατανομής είναι:

(1) $\mu=\frac{nK}{N}$ *(2)* $\sigma^2=\frac{nK}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Στο παραπάνω ορισμό η πράξη $\binom{K}{k}=\frac{K!}{k!(K-k)!}$

Είναι ο αριθμός των συνδυασμών Κ στοιχείων που λαμβάνονται κ κάθε φορά. Η υπεργεωμετρική κατανομή είναι το κατάλληλο μοντέλο πιθανότητας για την επιλογή ενός τυχαίου δείγματος n στοιχείων χωρίς επανατοποθέτηση από ένα πληθυσμό Ν στοιχείων από τα οποία τα Κ είναι μη συμβατά ή ελαττωματικά. Με τυχαίο δείγμα εννοούμε ένα δείγμα στο οποίο έχει επιλεγεί έτσι ώστε όλα τα πιθανά δείγματα να είναι ισοπίθανα στην επιλογή. Σε αυτές τις εφαρμογές το k αντιπροσωπεύει συνήθως τον αριθμό των μη συμβατών ή ελαττωματικών στοιχείων στο δείγμα (Τσικογιαννόπουλος, 2010).

Πχ Έστω ότι έχουμε μια παρτίδα που εμπεριέχει 100 στοιχεία εκ των οποίων τα 20 δεν συμμορφώνονται με τις απαιτήσεις. Αν επιλέξουμε 10 αντικείμενα τυχαία (χωρίς επανατοποθέτηση) τότε η πιθανότητα εύρεσης ενός ή λιγότερων ελαττωματικών στοιχείων στο δείγμα είναι :

$$P\{x \leq 1\} = P\{x = 0\} + P\{x = 1\} = \frac{\binom{20}{0}\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{20}{1}\quad\binom{95}{9}}{\binom{100}{10}} = 0{,}363049$$

N=100, K=20, n=10 Για κάθε τιμή του k	N=100, K=20, n=10 Για κάθε τιμή του k
k P(X<=k)	k P(X=k)
0 0,095116272	0 0,095116272
1 0,363049	1 0,267933162
2 0,68122	2 0,31817063
3 0,890428	3 0,209208085
4 0,974535	4 0,084107305
5 0,996067	5 0,02153147
6 0,999608	6 0,00354136
7 0,999976	7 0,000367934
8 0,999999	8 0,000023
9 1	9 0,000001
10 1	10 0

2.4.1 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

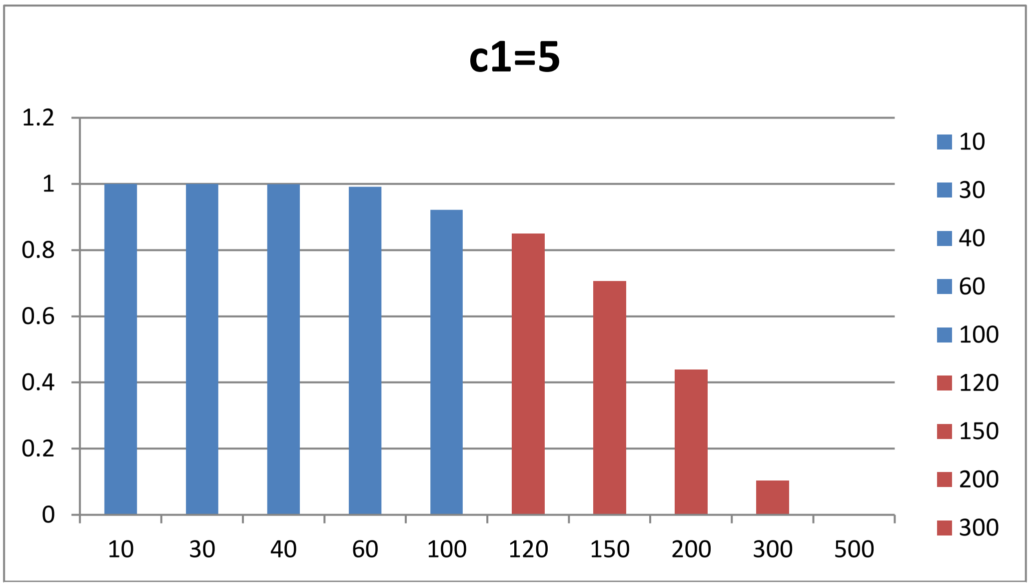
2.4.1.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1*:* Έστω ότι έχουμε συνολική παρτίδα παραγγελίας N= 4000. Με τυχαία δειγματοληψία παίρνουμε δείγμα n= 120 προϊόντων. Θεωρούμε CutPoint, **c=5** (ο αριθμός των αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων).

Το x σε αυτή τη περίπτωση θα πάρει διάφορες τιμές:

X=	10	30	40	60	100	120	150	200	300	500

Επομένως το Pa (πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού) παίρνει τις παρακάτω τιμές:

Pa=	0,999	0,999	0,998	0,991	0,921	0,850	0,706	0,439	0,102	0,001



Διάγραμμα 31

Προφανώς, όσο περισσότερα ελαττωματικά προϊόντα έχουμε στον πληθυσμό τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότερα ελαττωματικά στο δείγμα. Επομένως η πιθανότητα αποδοχής Pa, βάσει του c=5, διαμορφώνεται όπως απεικονίζει το παραπάνω διάγραμμα.

Παρατηρείται η μεγάλη πτώση της πιθανότητας να κυμαίνεται μεταξύ του x=60 και x=100

όπου Pa(60) = 0,991= 99,1%

ενώ Pa(100)= 0,921 = 92,1%

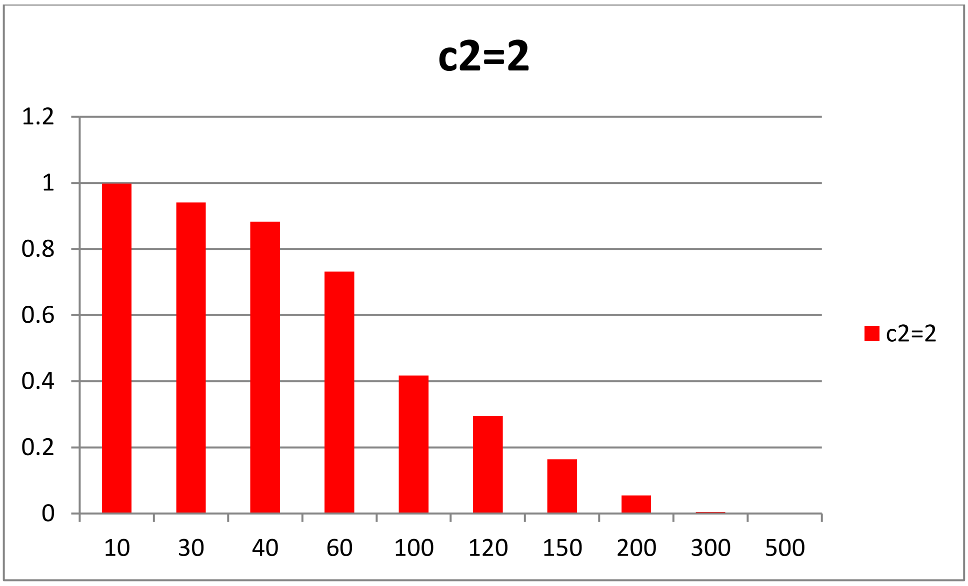
2.4.1.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2*:* Έστω ότι έχουμε συνολική παρτίδα παραγγελίας N= 4000. Με τυχαία δειγματοληψία παίρνουμε δείγμα n= 120 προϊόντων. Θεωρούμε CutPoint, **c=2** (ο αριθμός των αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων).

Το x σε αυτή τη περίπτωση θα πάρει διάφορες τιμές:

X=	10	30	40	60	100	120	150	200	300	500

Επομένως το Pa (πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού) παίρνει τις παρακάτω τιμές:

Pa=	0,997	0,940	0,883	0,731	0,416	0,294	0,164	0,054	0,004	0,000



Διάγραμμα 32

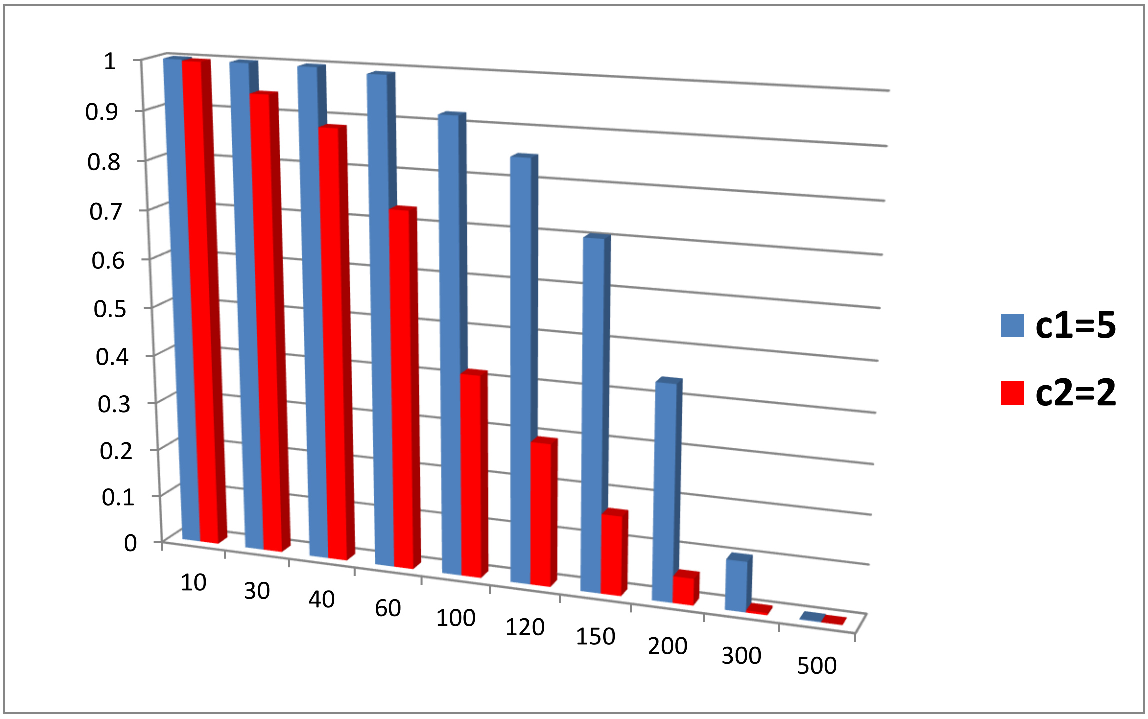
Προφανώς, όσο περισσότερα ελαττωματικά προϊόντα έχουμε στον πληθυσμό τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότερα ελαττωματικά στο δείγμα. Επομένως, η πιθανότητα αποδοχής Pa, βάσει του c=3, διαμορφώνεται όπως απεικονίζει το παραπάνω διάγραμμα.

Παρατηρείται η μεγάλη πτώση της πιθανότητας να κυμαίνεται μεταξύ του x=60 και x=100
όπου Pa(60) = 0,731= 73,1%
ενώ Pa(100)= 0,416 = 41,6%

Παρατηρήσεις Εφαρμογών 1-2

Σε αυτή τη περίπτωση σύγκρισης των δύο εφαρμογών 1 και 2, καθώς και των διαφορετικών δεδομένων που προκύπτουν από αυτές παρατηρούμε ότι αλλάζοντας το c, τον αριθμό δηλαδή μέχρι και τον οποίο αποδεχόμαστε τον αριθμό των ελαττωματικών στο δείγμα, μεταβάλλεται σημαντικά ολόκληρη η πιθανότητα της αποδοχής της παρτίδας.

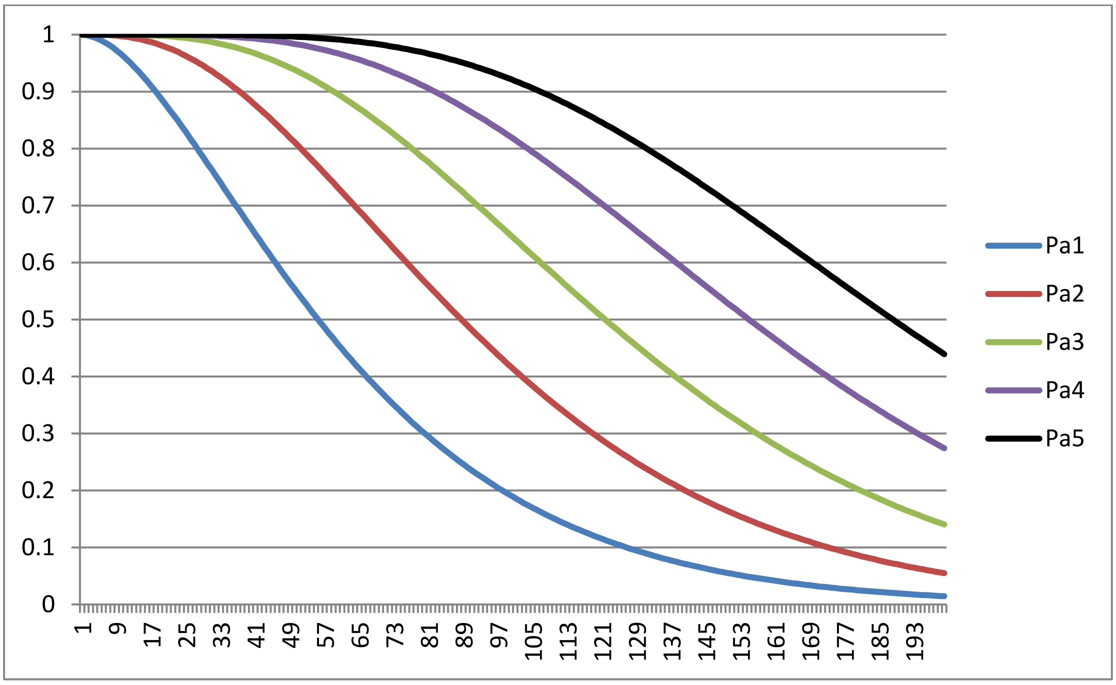
Εφαρμογή 1	**Εφαρμογή 3**
N=4000	N=4000
n=120	n=120
X=30	X=30
C=5	C=2
Pa= 0,999788334	Pa= 0,940615227



Διάγραμμα 33

2.4.1.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3(Παρατήρηση Ελαστικότητας – CutPoint)

Σε μία εφαρμογή με σταθερό πληθυσμό, σταθερό δείγμα, διαφορετικό εύρος ελαττωματικών προϊόντων στον πληθυσμό X=[1,200] και για CutPoint C=[1,5] παρατηρήθηκαν τα εξής αποτελέσματα:



Διάγραμμα 34

Όπου:

Pa1 η πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού με c1=1

Pa2 η πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού με c2=2

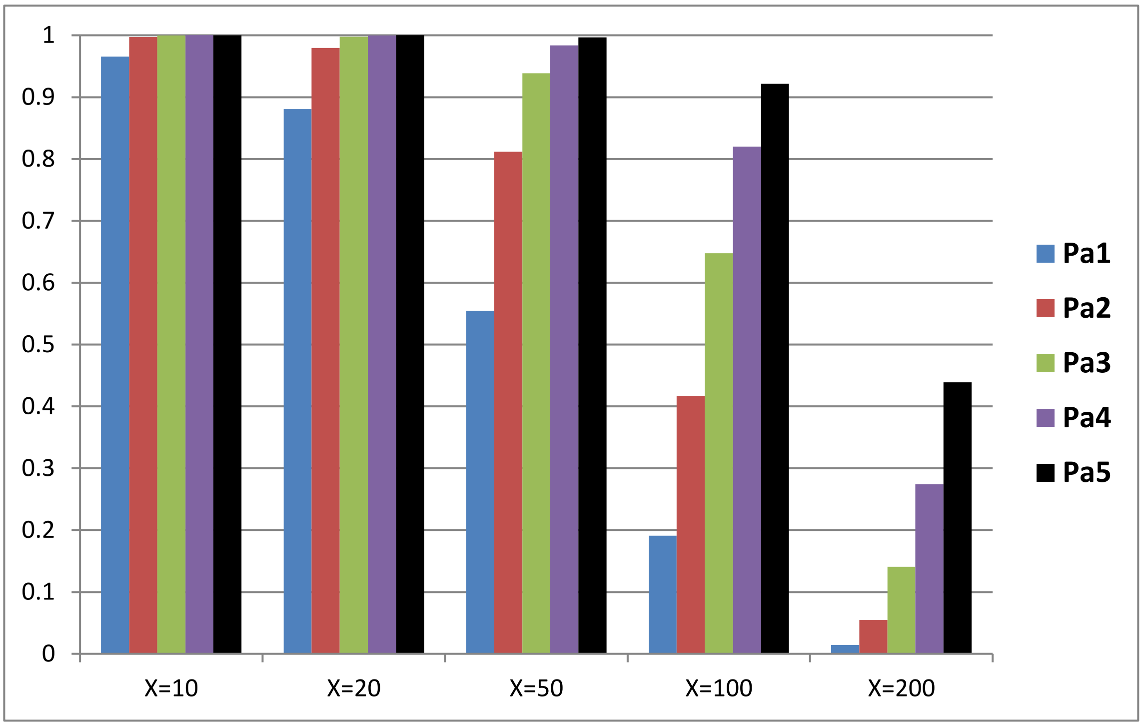
Pa3 η πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού με c3=3

Pa4 η πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού με c4=4

Pa5 η πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού με c5=5

Για να ερμηνευτεί καλύτερα η σημασία του διαγράμματος επιλέχθηκαν 5 τιμές της μεταβλητής X για να συγκριθούν οι πιθανότητες αποδοχής μεταξύ αυτών των τιμών.

	X=10	X=20	X=50	X=100	X=200
Pa1	0,965687102	0,880518457	0,554273331	0,190894805	0,014500871
Pa2	0,997291549	0,979320131	0,811647575	0,416979662	0,054931438
Pa3	0,999859291	0,997428229	0,938421008	0,64734756	0,140425126
Pa4	0,999995002	0,999758522	0,983877915	0,820077824	0,274148253
Pa5	0,999999877	0,999982327	0,996527617	0,921717148	0,439159327



Διάγραμμα 35

Παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται το CutPoint (c) τόσο μικρότερη είναι η ποσοστιαία μεταβολή μεταξύ των δύο ακραίων τιμών που παίρνει το X [10,200] για κάθε Pa.

Πχ

Για c=1

Pa1(x=10)= 0,965687102 και Pa1(x=200)=0,014500871 η ποσοστιαία μεταβολή είναι ίση με 98,5%

Ενώ για c=5

Pa5(x=10)=0,999999877 και Pa5(x=200)=0,439159327 η ποσοστιαία μεταβολή είναι ίση με 56%
δηλαδή η αύξηση του CutPoint κατά 4 μονάδες αύξησε την ανεκτικότητα κατά 1,03 φορές για x=10 ενώ για x=200 αυξήθηκε κατά 30 φορές.

2.5 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ –ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω ότι έχουμε τα εξής δεδομένα που παραμένουν σταθερά και για τις δύο κατανομές:

Πληθυσμός ή ποσότητα παραγγελίας (**N=500**)
Δείγμα (**n=25**)
Αριθμός αποδεκτών στοιχείων στο δείγμα CutPoint (**c=5**)

N=	500
n=	25
c=	5

Για διάφορες τιμές του X δηλαδή των ελαττωματικών προϊόντων στον πληθυσμό προκύπτουν οι εξής παρατηρήσεις:

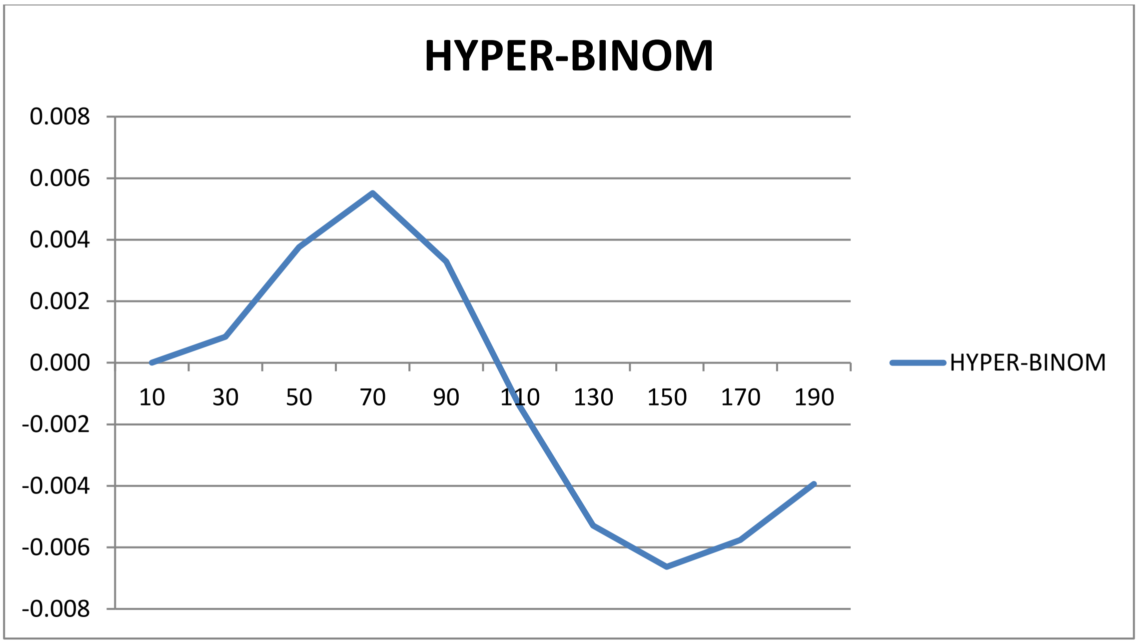
BINOM(Pa1)	HYPER(Pa2)	X	P
0,999991831	0,999998456	10	0,02
0,996936147	0,997787501	30	0,06
0,966600055	0,970359644	50	0,1
0,873187099	0,878702875	70	0,14
0,712459778	0,715751087	90	0,18
0,518430758	0,517034692	110	0,22
0,335630217	0,330342368	130	0,26
0,193488442	0,18685635	150	0,3
0,099384731	0,093622968	170	0,34
0,045424521	0,041485804	190	0,38

Όπου Pa1 η πιθανότητα αποδοχής της παρτίδας με Διωνυμική Κατανομή και Pa2 η πιθανότητα αποδοχής της παρτίδας με Υπεργεωμετρική Κατανομή και $p = \frac{x}{N}$. Παρατηρείται ότι υπάρχει μια μικρή απόκλιση στη τιμή της πιθανότητας αποδοχής της Διωνυμικής από την υπεργεωμετρική.

2.5.1 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ – ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Αναλυτικότερα :

BINOM(Pa1)	HYPER(Pa2)	X	P	HYPER-BINOM
0,999991831	0,999998456	10	0,02	0,000006625
0,996936147	0,997787501	30	0,06	0,000851355
0,966600055	0,970359644	50	0,1	0,003759589
0,873187099	0,878702875	70	0,14	0,005515776
0,712459778	0,715751087	90	0,18	0,003291309
0,518430758	0,517034692	110	0,22	-0,001396066
0,335630217	0,330342368	130	0,26	-0,005287849
0,193488442	0,18685635	150	0,3	-0,006632092
0,099384731	0,093622968	170	0,34	-0,005761763
0,045424521	0,041485804	190	0,38	-0,003938717

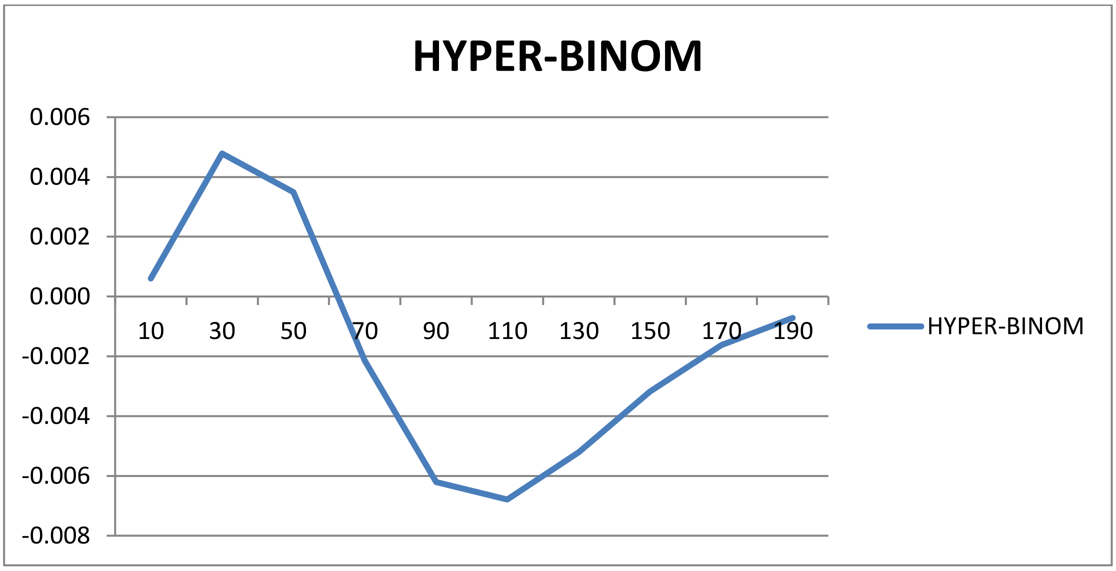


Διάγραμμα 36

Βλέπουμε ότι στο σημείο CutPoint =5 η Υπεργεωμετρική τουλάχιστον μέχρι την τιμή του X=90 είναι ελαφρώς πιο ελαστική από την διωνυμική.

Ενώ για CutPoint=3 η τιμή του X αναδιαμορφώνεται σε X=50

BINOM(Pa1)	HYPER(Pa2)	X	P	HYPER-BINOM
0,998554113	0,999160475	10	0,02	0,000606362
0,940243223	0,945028029	30	0,06	0,004784806
0,763591358	0,767083149	50	0,1	0,003491792
0,528567276	0,526414927	70	0,14	-0,002152349
0,317080589	0,310876438	90	0,18	-0,006204151
0,16756346	0,160774663	110	0,22	-0,006788797
0,078860513	0,073652329	130	0,26	-0,005208183
0,033240517	0,030059451	150	0,3	-0,003181065
0,012565607	0,010940741	170	0,34	-0,001624866
0,00425001	0,003540689	190	0,38	-0,000709320



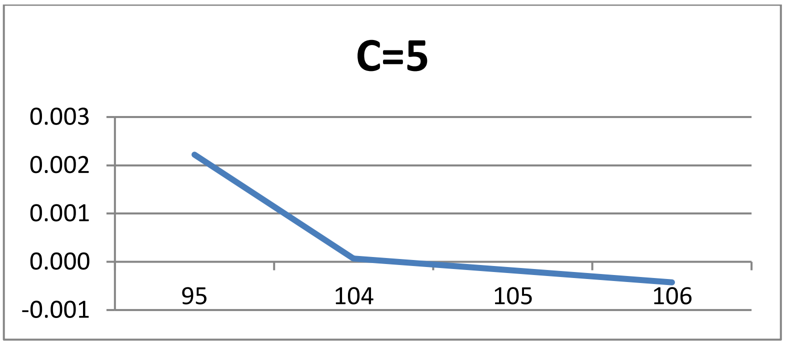
Διάγραμμα 37

Παρατηρούμε ότι η υπεργεωμετρική είναι ελαφρώς ελαστικότερη τουλάχιστον μέχρι τη τιμή του X=50. Είναι εμφανές ότι λόγω της άρρηκτης συσχέτισης του X με το C επηρεάζεται ως ένα συγκεκριμένο σημείο το πρόσημο της διαφοράς μεταξύ της Υπεργεωμετρικής και Διωνυμικής κατανομής.

2.5.1.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Για N=500, n=25 και **c=5** έχουμε:

0,665260873	0,667481079	95	0,19	0,002220206
0,577353833	0,577418959	104	0,21	0,000065125
0,567502978	0,567322248	105	0,21	-0,000180730
0,557656865	0,55723065	106	0,21	-0,000426215

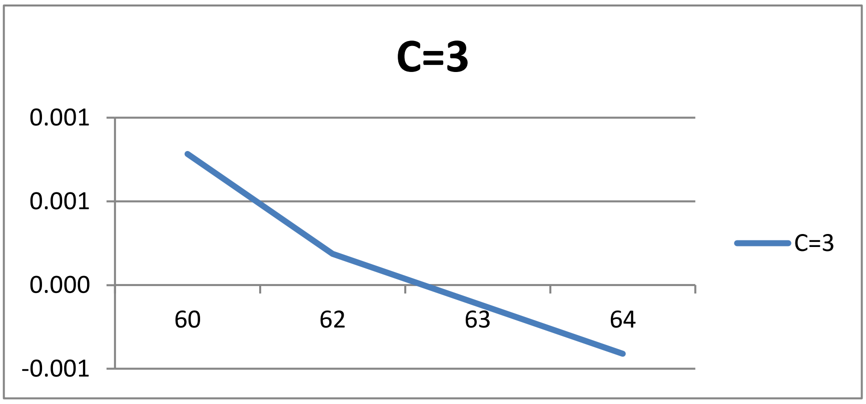


Διάγραμμα 38

2.5.1.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Για N=500, n=25 και **c=3** έχουμε:

0,647537047	0,648320423	60	0,12	0,000783377
0,623625442	0,623812687	62	0,12	0,000187245
0,611656279	0,611544468	63	0,13	-0,000111811
0,599692308	0,599281863	64	0,13	-0,000410445



Διάγραμμα 39

Επομένως, παρατηρείται ότι υπάρχει μία σταθερά που αντιπροσωπεύει τη συσχέτιση μεταξύ CutPoint (c) και αριθμό ελαττωματικών προϊόντων στον πληθυσμό (X) στα παραπάνω παραδείγματα και υπολογίζεται από τη παρακάτω σχέση:

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{c}{X}}$$

Όπου αυτός ο αριθμός λ δείχνει το σημείο εκείνο στο οποίο η Διαφορά μεταξύ Υπεργεωμετρικής και Διωνυμικής Κατανομής από θετική γίνεται αρνητική. Ειδικότερα, αν κάνουμε τη πράξη: $\frac{5}{105}$ και $\frac{3}{63}$ όπου 5 και 3 είναι τα CutPoints των παραπάνω παραδειγμάτων και 105, 63 είναι ο αριθμός εκείνος των ελαττωματικών προϊόντων (X). Επομένως, η αναλογία των κλασμάτων παραμένει η ίδια στο σημείο όπου η αφαίρεση της Διωνυμικής Κατανομής από την Υπεργεωμετρική Κατανομή γίνεται αρνητική. Η σταθερά αυτή είναι ο αριθμός: 0,0476190476190476.

2.6 ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Η κατανομή Poisson είναι μια διακριτή κατανομή η οποία χρησιμοποιείται συχνά στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας. Στην θεωρία πιθανοτήτων και στατιστικής, η κατανομή Poisson, ονομάστηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Siméon Denis Poisson, είναι μία διακριτή συνάρτηση κατανομής που εκφράζει την πιθανότητα ενός δεδομένου αριθμού γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα σταθερό διάστημα χρόνου ή/και χώρου αν αυτά τα γεγονότα συμβαίνουν με ένα γνωστό μέσο ρυθμό και είναι ανεξάρτητα από το χρονικό διάστημα από την τελευταία περίπτωση. Η κατανομή Poisson μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον αριθμό γεγονότων σε άλλα καθορισμένα διαστήματα όπως η απόσταση, η επιφάνεια ή ο όγκος.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι κάποιος παίρνει 4 αλληλογραφίες ημερησίως κατά μέσο όρο. Θα υπάρξει, ωστόσο, μία ορισμένη διάδοση: μερικές φορές λίγα περισσότερα, μερικές φορές λίγο λιγότερα, πότε-πότε τίποτα.[2]Δεδομένου μόνο του μέσου ρυθμού, για ένα ορισμένο διάστημα παρακολούθησης (αριθμό αλληλογραφίας ανά μέρα, τηλεφωνήματα ανά ώρα, κτλ.), και υποθέτοντας ότι η διαδικασία, ή ο συνδυασμός των διαδικασιών, που παράγουν τα γεγονότα είναι ουσιαστικά τυχαίος, η κατανομή Poisson καθορίζει πόσο πιθανό είναι ότι ο αριθμός θα είναι 3 ή 5 ή 10 ή κάποιος άλλος αριθμός, κατά την διάρκεια μίας περιόδου παρατήρησης. Αυτό σημαίνει ότι, προβλέπει τον αριθμό διάδοσης γύρω από ένα γνωστό ρυθμό εξάπλωσης.

Η κατανομή Poisson έχει την παράμετρο λ που δηλώνει τη μέση τιμή αριθμού εμφανίσεων ενός γεγονότος, οι οποίες είναι ανεξάρτητες της τελευταίας χρονικής στιγμής εμφάνισης του γεγονότος (Παπαδόπουλος).

Ο τύπος είναι ο εξής: $P(x) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^{x}}{x!}$, όπου x=0,1,2,3,4…

Όταν το λ είναι >0 τότε η μέση τιμή της κατανομής Poisson είναι η εξής:

$\mu = \lambda$

Και η τυπική απόκλιση είναι :
σ^2

Όπου στη κατανομή Poisson η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι ίσες με το λ.

Συνήθως, η κατανομή Poisson μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο για την ανίχνευση ελαττωματικών προϊόντων που εμφανίζονται σε μία μονάδα προϊόντος. Πιο συγκεκριμένα κάθε τυχαία μεταβολή που συμβαίνει ανά μονάδα (προϊόντος) μπορεί να προσεγγιστεί από την κατανομή Poisson.

Πχ Έστω ότι ο αριθμός των ελαττωματικών συζευγμένων καλωδίων (ανά μονάδα) που υπάρχουν σε ένα κουτί της ΔΕΗ εντάσσονται στη κατανομή Poisson με παράμετρο λ=4. Η πιθανότητα να διαλέξουμε ένα κουτί της ΔΕΗ που να εμπεριέχει 2 ή λιγότερα ελαττωματικά καλώδια είναι : $P\{x \leq 2\} = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-4} \quad 4^{x}}{x!} =$ 0.018316+0.073263+0.146525=0.238104

Mean=4 Για κάθε τιμή του x έχουμε	Mean=4 Για κάθε τιμή του x έχουμε
x P(X=x)	x P(X≤x)
0 0,018315639	0 0,018315639
1 0,073262556	1 0,091578194
2 0,146525111	2 0,219787667
3 0,195366815	3 0,341891926
4 0,195366815	4 0,39073363
5 0,156293452	5 0,351660267
6 0,104195635	6 0,260489086
7 0,059540363	7 0,163735997
8 0,029770181	8 0,089310544
9 0,013231192	9 0,043001373
10 0,005292477	10 0,018523668

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Είναι δυνατό να διεξάγουμε τη κατανομή Poisson ως μια πιο περιορισμένη μορφή της Διωνυμικής κατανομής.

Αυτό μπορεί να συμβεί σε μια διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p αν υποθέσουμε ότι το n προσεγγίζει το άπειρα και το p προσεγγίζει το 0 ώστε να ισχύει ότι np=λ (να είναι μια σταθερά).Τότε οδηγούμαστε στη Poisson. Επίσης, είναι δυνατό να διεξάγουμε τη κατανομή Poisson χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα αμιγώς πιθανότητας (Hines, Montgomery, Goldsman, Borror, 2004).

2.6.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ POISSON

Έστω ότι έχουμε μία παρτίδα προϊόντων αγνώστου πληθυσμού και χρειάζεται να βρούμε τη πιθανότητα αποδοχής της παρτίδας.
Εξετάζουμε με αριθμό ελαττωματικών από 1 έως 10 στο πληθυσμό.
Με τυχαία δειγματοληψία επιλέγουμε το δείγμα 120 προϊόντων και θεωρούμε πιθανότητα ύπαρξης ελαττωματικού στο πληθυσμό 1%.
Ο αποδεκτός αριθμός ελαττωματικών στο δείγμα
CutPoint C είναι ίσος με 2.

Εφόσον η πιθανότητα ύπαρξης ενός ελαττωματικού είναι 0,01 και έχουμε δείγμα 120 προϊόντα, τα μέσα ελαττωματικά προϊόντα στο δείγμα θα είναι 1,2.

$$Μέσα\ Ελλατωματικά\ προϊόντα = n * p0$$

Όπου n το δείγμα και p0 η πιθανότητα ύπαρξης ελαττωματικού στο δείγμα.
Η πιθανότητα ύπαρξης ελαττωματικού υπολογίζεται κυρίως με τον εξής τύπο:

$$p0 = \frac{X}{N}$$

Σε περίπτωση όμως όπως η παραπάνω, που δεν γνωρίζουμε τον πληθυσμό τότε υπολογίζουμε τη πιθανότητα προσεγγιστικά: Βρίσκουμε τη πιθανότητα ύπαρξης ενός ελαττωματικού στα 100 και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το δείγμα που έχουμε κάθε φορά.

Οπότε για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε:

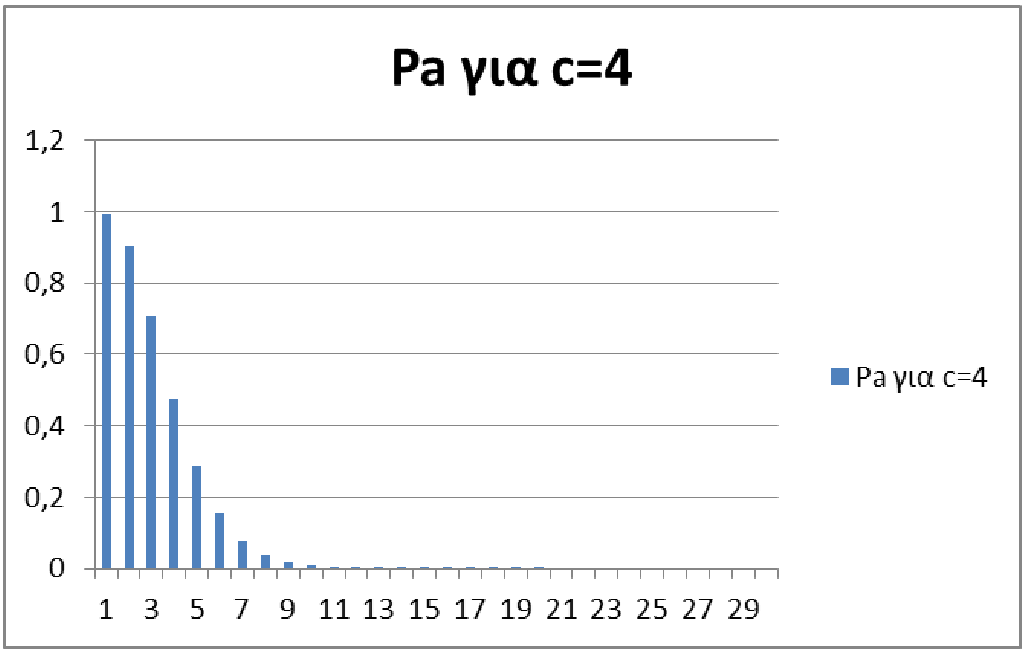
100p0	p0 (πιθανότητα % ύπαρξης ελλατωματικού στον πληθυσμό)	n Δείγμα	n*p0
1	0,01	120	1,2
2	0,02		2,4
3	0,03		3,6
4	0,04		4,8
5	0,05		6
6	0,06		7,2
7	0,07		8,4
8	0,08		9,6
9	0,09		10,8
10	0,1		12

2.6.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ POISSON

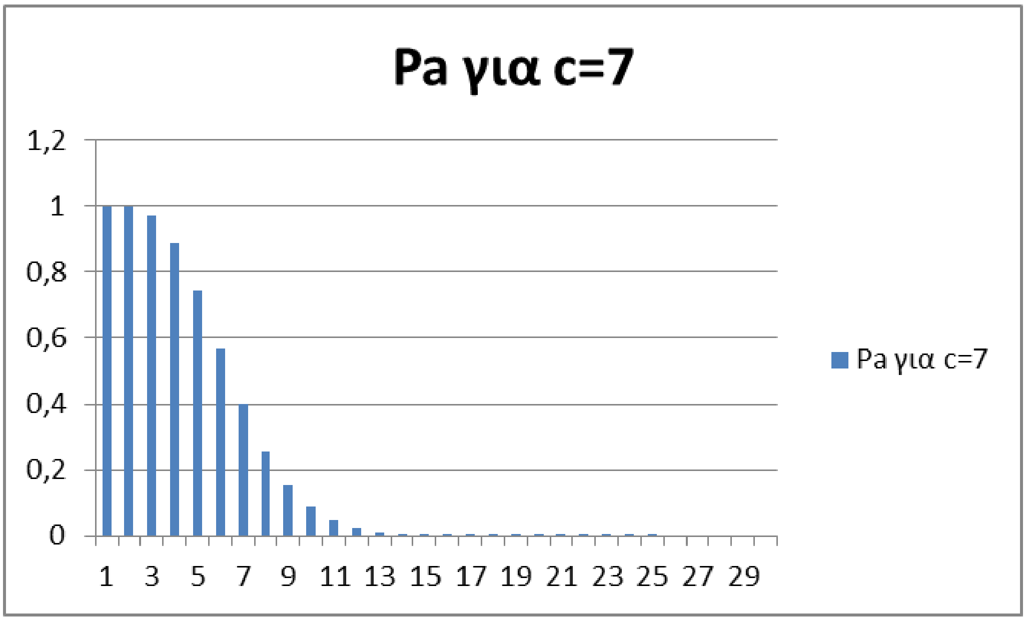
Εξετάζοντας το παραπάνω παράδειγμα με τα ίδια δεδομένα αλλά διαφορετικά CutPoint (C) παρατηρούμε ότι:

C1	Pa1	C2	Pa2	C3	Pa3
2	0,879487099	4	0,992254212	7	0,999963
	0,569708747		0,90413141		0,996661
	0,302746845		0,70643845		0,969211
	0,142539219		0,476258754		0,886666
	0,061968804		0,2850565		0,74398
	0,025473508		0,155515616		0,568941
	0,010047072		0,078908283		0,398652
	0,003838865		0,037794694		0,258428
	0,001430413		0,017277204		0,156583
	0,000522258		0,007600391		0,089504

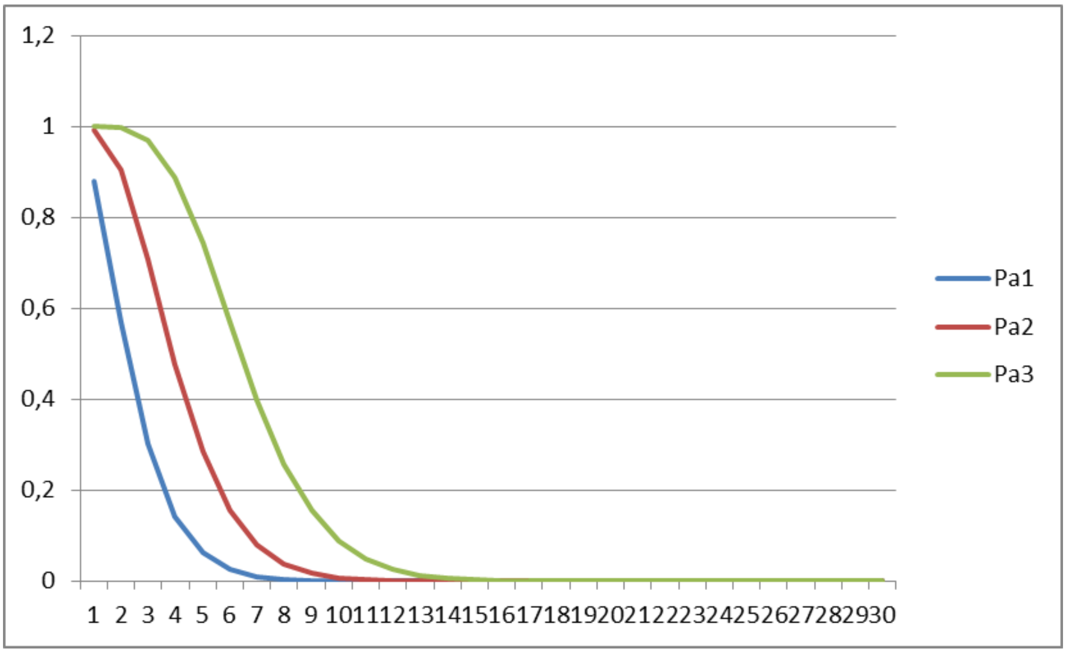
Η ελαστικότητα από C1 σε C2 όπου διπλασιάζεται το CutPoint, έχει μεγάλη ποσοστιαία μεταβολή. Αντιθέτως όμως από C2 σε C3 που σχεδόν διπλασιάζεται το CutPoint η μεταβολή είναι αμελητέα στις μικρές ποσότητες ελαττωματικών αλλά είναι πιο μεγάλη στις μεγάλες ποσότητες ελαττωματικών.



Διάγραμμα 40



Διάγραμμα 41



Διάγραμμα 42

2.7 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ – ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Η Poisson είναι οριακή κατανομή της Διωνυμικής. Αυτό σημαίνει ότι η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται από την κατανομή Poisson όταν το n, δηλαδή το δείγμα είναι αρκετά μεγάλο και τείνει προς το άπειρο (+∞). Αν και η πιθανότητα ελαττωματικού στον πληθυσμό τείνει προς το 0, τότε η θετική σταθερά λ ισοδυναμεί με τη μέση τιμή της κατανομής, δηλαδή

$$\lambda \cong n*p$$

2.7.1 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ – POISSON

Έστω ότι έχουμε συνολική παρτίδα παραγγελίας N= 5000. Με τυχαία δειγματοληψία παίρνουμε δείγμα n= 120 προϊόντων. Θεωρούμε CutPoint, C=2 (ο αριθμός των αποδεκτών ελαττωματικών προϊόντων).

Για τις διάφορες τιμές του X η πιθανότητα ύπαρξης ελαττωματικού θα διαμορφωθεί ως εξής:

$$p0 = \frac{X}{N}$$

και διαμορφώνονται οι παρακάτω τιμές:

X	p = x/N	n Δείγμα	n*p0	N	C1
1	0,0002	120	0,024	5000	2
4	0,0008		0,096		
7	0,0014		0,168		
10	0,002		0,24		
13	0,0026		0,312		
16	0,0032		0,384		
19	0,0038		0,456		
22	0,0044		0,528		
25	0,005		0,6		
28	0,0056		0,672		
31	0,0062		0,744		
34	0,0068		0,816		
37	0,0074		0,888		
40	0,008		0,96		
43	0,0086		1,032		
46	0,0092		1,104		
49	0,0098		1,176		
52	0,0104		1,248		
55	0,011		1,32		
58	0,0116		1,392		
61	0,0122		1,464		
64	0,0128		1,536		
67	0,0134		1,608		
70	0,014		1,68		
73	0,0146		1,752		
76	0,0152		1,824		
79	0,0158		1,896		
82	0,0164		1,968		
85	0,017		2,04		
88	0,0176		2,112		

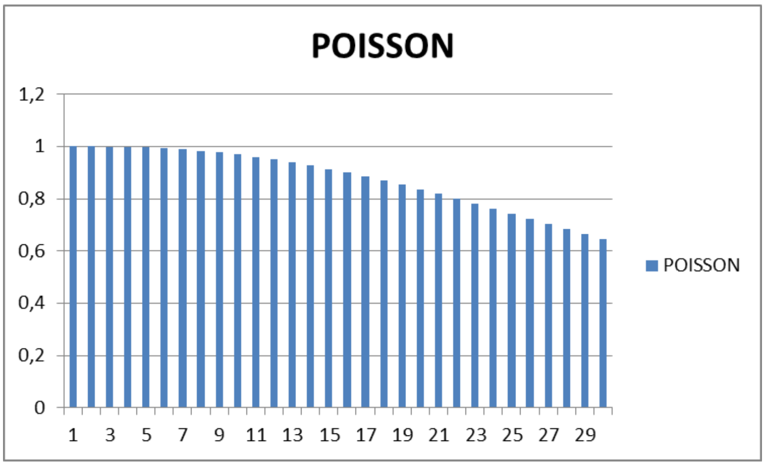
Εξετάζοντας με τα παραπάνω δεδομένα τις πιθανότητες αποδοχής της παρτίδας και για τις δύο κατανομές προκύπτουν τα εξής:

2.7.2 ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

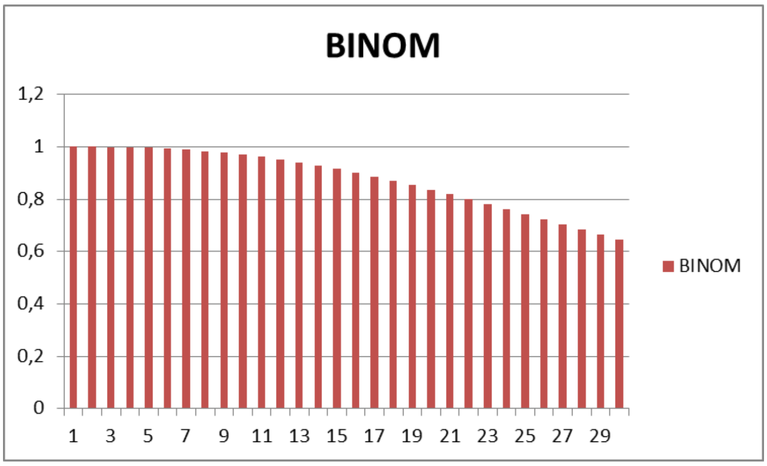
X	Pa POISSON
1	0,999997737
4	0,999862764
7	0,999302912
10	0,99807343
13	0,99598677
16	0,992904353
19	0,988729304
22	0,983400052
25	0,976884712
28	0,969176153
31	0,96028769
34	0,95024932
37	0,939104458
40	0,926907098
43	0,913719367
46	0,899609417
49	0,884649626
52	0,86891506
55	0,852482176
58	0,835427727
61	0,817827857
64	0,799757351
67	0,781289018
70	0,762493211
73	0,743437437
76	0,724186068
79	0,704800124
82	0,685337129
85	0,665851023

2.7.3 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

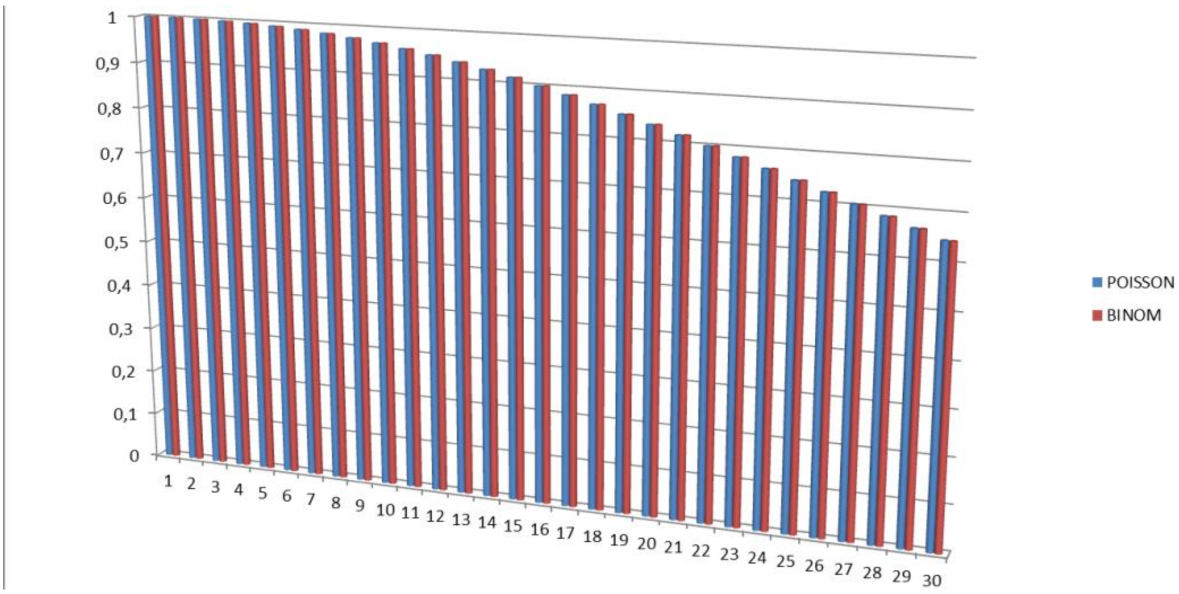
X	Pa BINOM
1	0,999997792
4	0,999865939
7	0,999318162
10	0,998113216
13	0,996064857
16	0,99303417
19	0,988922761
22	0,983666734
25	0,97723137
28	0,969606437
31	0,96080207
34	0,950845149
37	0,939776143
40	0,927646348
43	0,914515495
46	0,900449674
49	0,885519554
52	0,869798843
55	0,853362991
58	0,83628808
61	0,818649895
64	0,800523153
67	0,781980863
70	0,763093812
73	0,743930151
76	0,724555075
79	0,705030579
82	0,685415289
85	0,665764342



Διάγραμμα 43



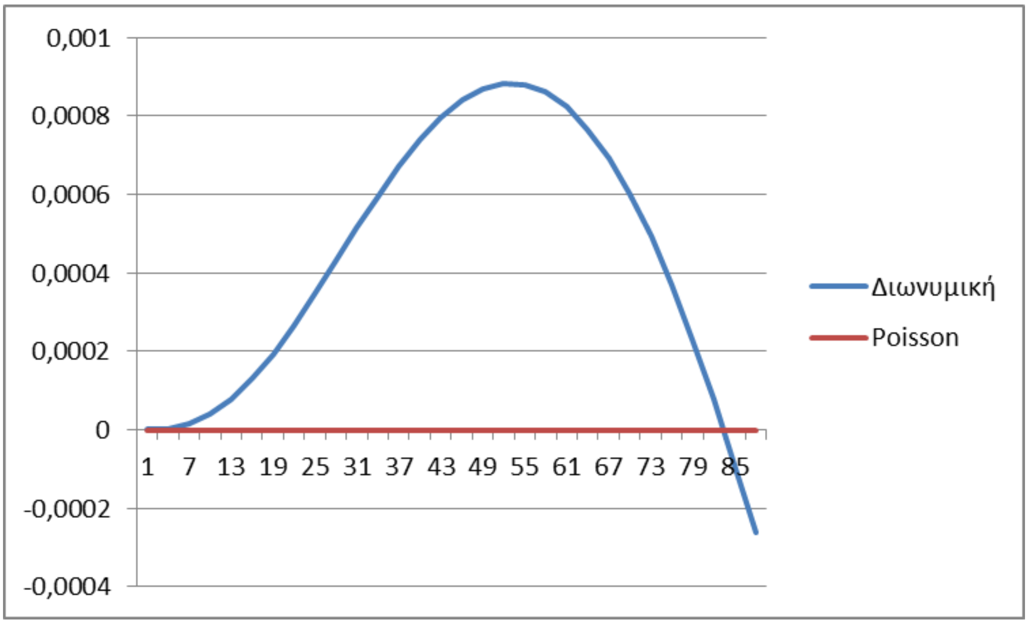
Διάγραμμα 44



Διάγραμμα 45

2.7.4 ΠΑΡΑΤΉΡΗΣΗ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΣ

Παρατηρήθηκε τόσο στην αριθμητική προσέγγιση της πιθανότητας αποδοχής Pa όσο και στη διαγραμματική προσέγγιση ότι ενώ η κατανομή Poisson είναι «παρακλάδι» της Διωνυμικής Κατανομής και λειτουργεί προσεγγιστικά ότι μέχρι έως το σημείο X=82 είναι ανελαστικότερη της Διωνυμικής ενώ μετά από αυτό το σημείο είναι ελάχιστα πιο ελαστική.



Διάγραμμα 46

Μηδενίζοντας τη κατανομή Poisson (αφαιρώντας την από τον εαυτό της) ώστε να γίνει άξονας σύγκρισης (σημείο αναφοράς) μπορούμε να τη συσχετίσουμε με τη διαφορά της καμπυλότητας της Διωνυμικής κατανομής με τη Poisson.

2.8 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ – ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ – ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Συχνά προκύπτει το ερώτημα: «Ποία είναι η πιο σωστή κατανομή για την αποδοχή ή την απόρριψη μιας παρτίδας προϊόντων σε μία επιχείρηση;»
Δεν υπάρχει σαφής απάντηση στο ερώτημα. Παρόλα αυτά υπάρχει ένα μέτρο αριθμητικής και διαγραμματικής σύγκρισης που βοηθούν τα στελέχη των επιχειρήσεων στη λήψη αποφάσεων.

Έστω ότι έχουμε μία παρτίδα 5000 προϊόντων (N=5000) και χρειάζεται να βρούμε τη πιθανότητα αποδοχής της παρτίδας.

Εξετάζουμε με αριθμό ελαττωματικών από 0 έως 100 ($0 \leq X \leq 100$) στο πληθυσμό.

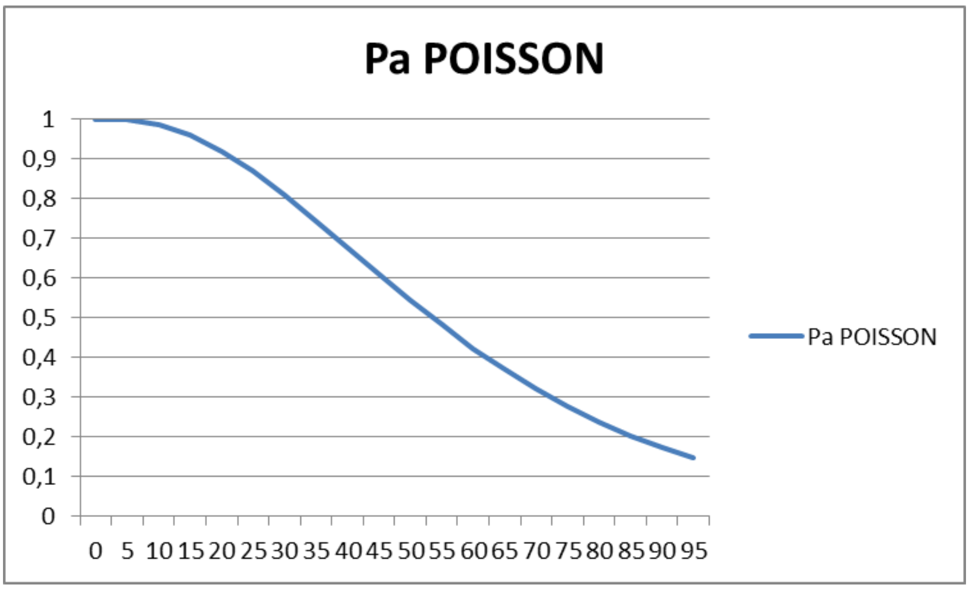
Με τυχαία δειγματοληψία επιλέγουμε το δείγμα 250 προϊόντων.

Ο αποδεκτός αριθμός ελαττωματικών στο δείγμα CutPoint C είναι ίσος με 2.

Πληθυσμός Παρτίδας N =	5.000
Δείγμα Πληθυσμού n =	250
Αριθμός αποδεκτών ελλατωματικών C =	2
Αριθμός ελλατωματικών X =	0
	5
	10
	15
	20
	25
	30
	35
	40
	45
	50
	55
	60
	65
	70
	75
	80
	85
	90
	95
	100

2.8.1 ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

p*n =	Πιθανότητα ύπαρξης ελλατωματικού p (X/N) =	Pa POISSON
0	0	1
0,25	0,001	0,997838503
0,5	0,002	0,985612322
0,75	0,003	0,95949456
1	0,004	0,919698603
1,25	0,005	0,868467665
1,5	0,006	0,808846831
1,75	0,007	0,743969695
2	0,008	0,676676416
2,25	0,009	0,609339267
2,5	0,01	0,543813116
2,75	0,011	0,481456705
3	0,012	0,423190081
3,25	0,013	0,369566668
3,5	0,014	0,320847199
3,75	0,015	0,277068443
4	0,016	0,238103306
4,25	0,017	0,203711091
4,5	0,018	0,173578071
4,75	0,019	0,147349184
5	0,02	



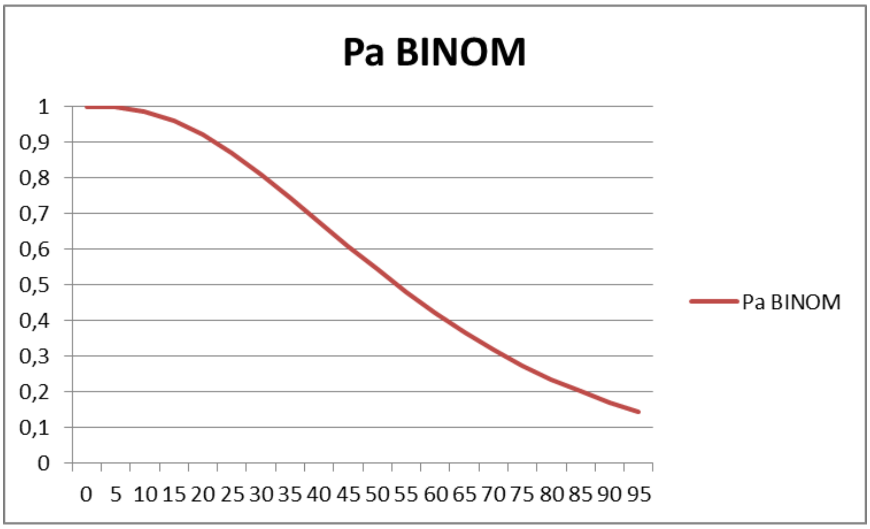
Διάγραμμα 47

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

2.8.2 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Pa BINOM
1
0,997859778
0,985726119
0,959744201
0,920067835
0,868889549
0,809226045
0,744205011
0,676677871
0,609038744
0,543168973
0,48045389
0,421837243
0,367891609
0,318891688
0,274883128
0,235743148
0,201231588
0,171032322
0,144785796

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

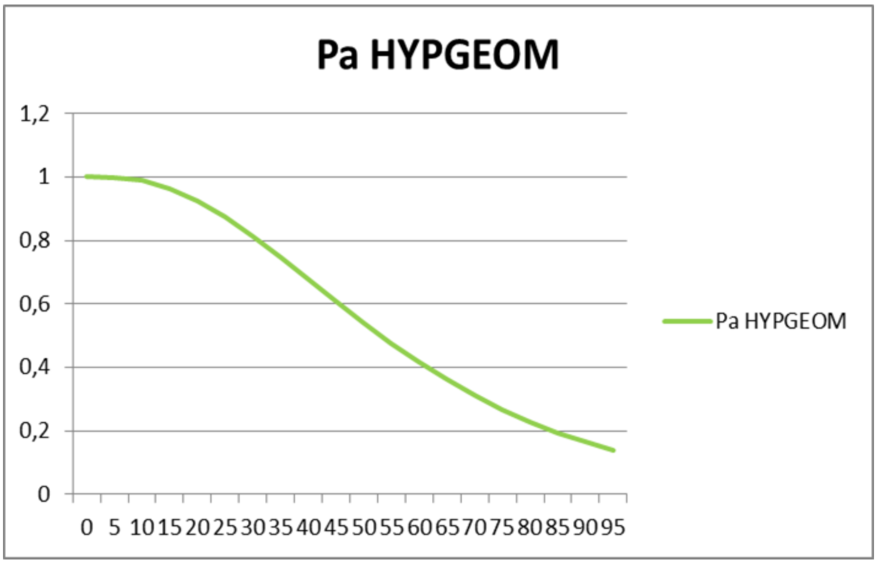


Διάγραμμα 48

Παρατηρείται ότι η Διωνυμική Κατανομή ακολουθεί παρόμοια πορεία με μικρές έως μηδαμινές αποκλείσεις από την Κατανομή Poisson. Επίσης είναι φανερό ότι η Poisson σε μικρές τιμές που παίρνει το X (δηλαδή ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων) παίρνει ελάχιστα μικρότερες τιμές. Όσο αυξάνονται τα ελαττωματικά προϊόντα στο πληθυσμό τόσο υπερέχει η Poisson έναντι της Διωνυμικής Κατανομής.

2.8.3 ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

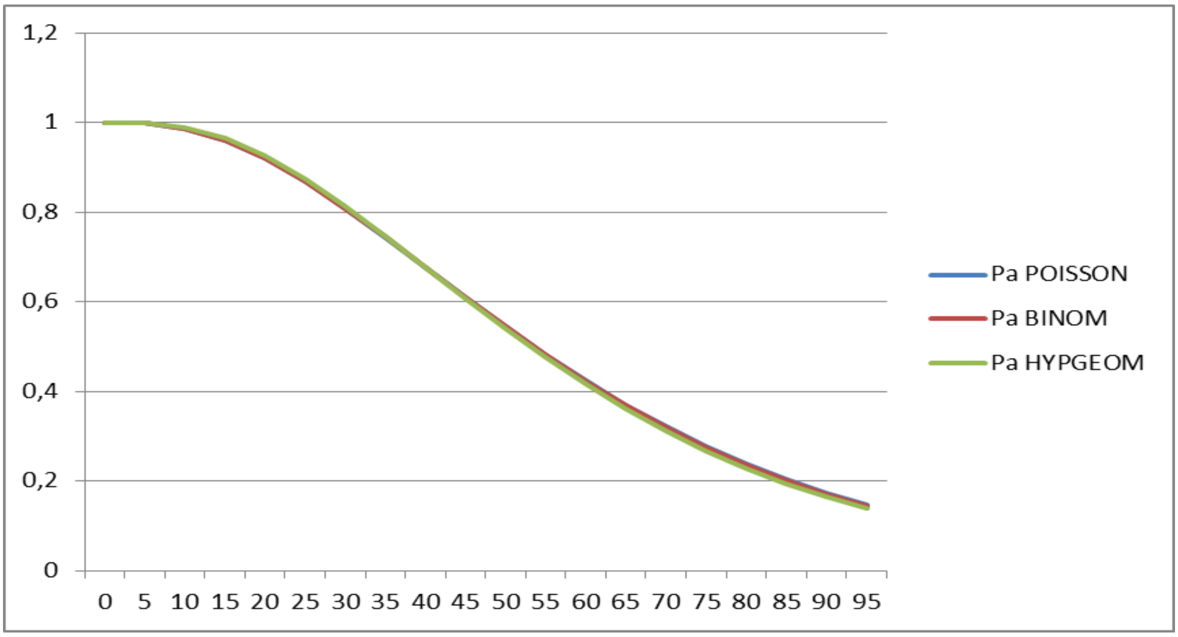
Pa HYPGEOM
1
0,99885404
0,988593875
0,964039892
0,92489291
0,873342109
0,812600798
0,746052898
0,67679297
0,607412846
0,539936831
0,475841245
0,416117187
0,36135099
0,31180725
0,267506046
0,22829032
0,193881994
0,163927008
0,138030219
$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$



Διάγραμμα 49

Παρατηρείται ότι στις μικρές τιμές ελαττωματικών προϊόντων στον πληθυσμό (Χ) η Υπεργεωμετρική είναι ελαστικότερη της Διωνυμικής (παίρνει μεγαλύτερες τιμές πιθανότητας αποδοχής της παρτίδας) ενώ στις μεγαλύτερες τιμές του Χ σε σχέση με τη Διωνυμική Κατανομή είναι ανελαστικότερη.

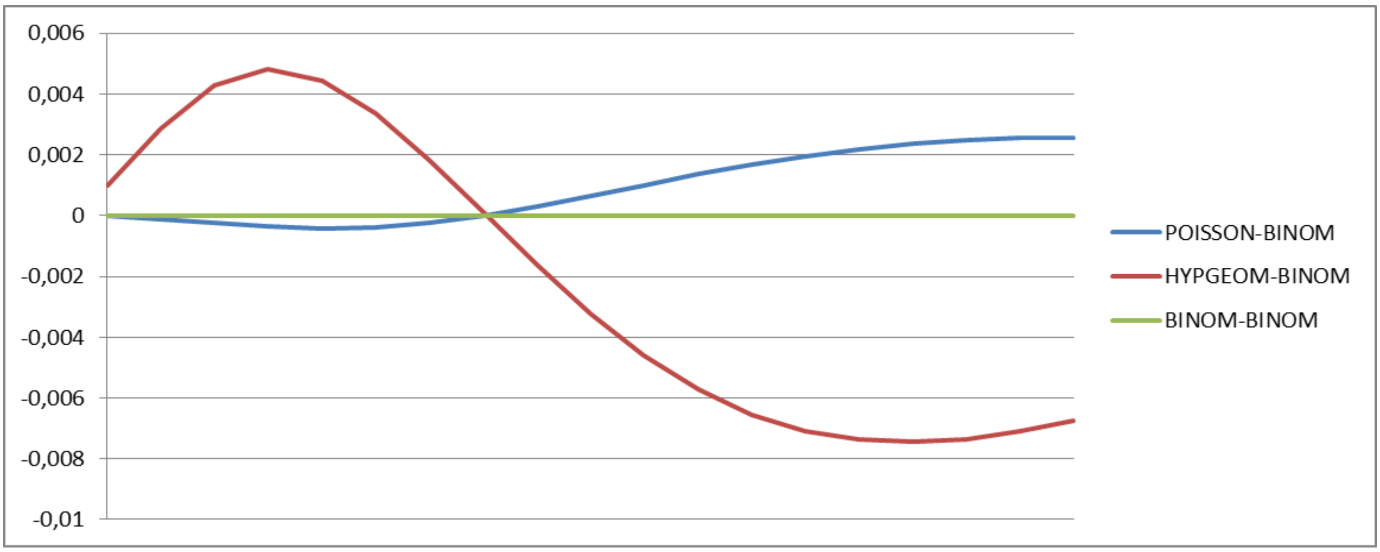
2.8.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ – ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ - POISSON



Διάγραμμα 50

Παρατηρείται ότι και οι 3 κατανομές ακολουθούν την ίδια πορεία με μικρές ποσοστιαίες αυξομειώσεις σχεδόν μη διακριτές.

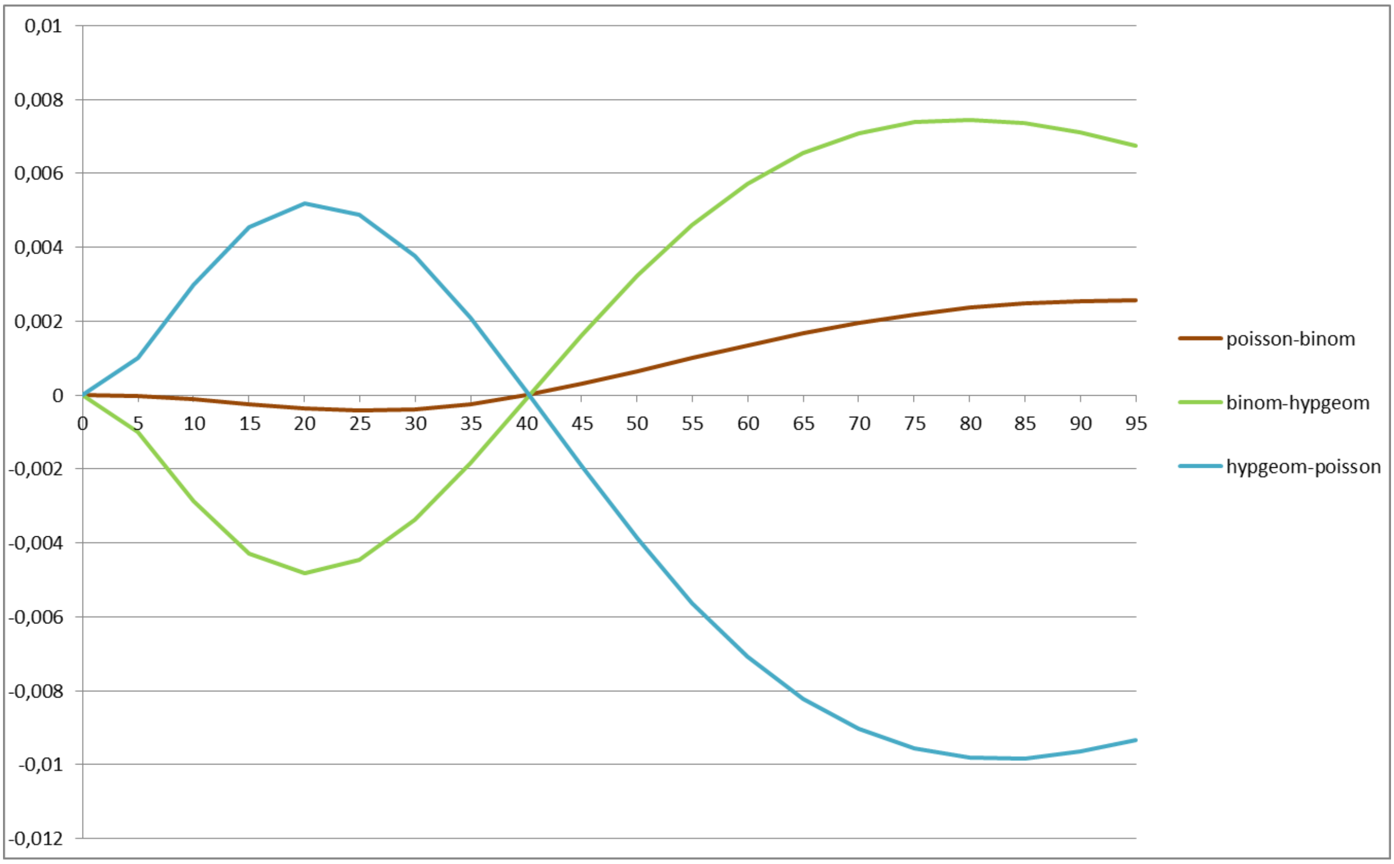
Επίσης παρατηρήθηκε ότι η Υπεργεωμετρική Κατανομή υπερέχει αριθμητικά από τις άλλες δύο κατανομές μέχρι το Χ=45 ελαττωματικά και έως εκεί η ανελαστικότερη κατανομή είναι η Poisson. Μετά από εκείνο το σημείο των 45 ελαττωματικών αντιστρέφεται η διαφορά των κατανομών με ελαστικότερη και μεγαλύτερη αριθμητικά να είναι η κατανομή Poisson και ανελαστικότερη με μικρότερη τιμή η Υπεργεωμετρική Κατανομή. Η Διωνυμική Κατανομή βρίσκεται πάντα στη μέση αυτών των δύο κατανομών, εφόσον δεν παίρνει ποτέ τη μικρότερη ή τη μεγαλύτερη τιμή. Αφαιρώντας τη Διωνυμική Κατανομή από την Υπεργεωμετρική Κατανομή, τη Poisson αλλά και από τον εαυτό της προέκυψε το εξής γράφημα:



Διάγραμμα 51

Επίσης παρατηρείται ότι υπάρχει ένα σημείο X ($35 \le X \le 40$) όπου οι διαφορές των 3 κατανομών μηδενίζονται άρα οι 3 κατανομές για αυτό το σημείο X έχουν στιγμιαία την ίδια τιμή.

Βέβαια αν δείξουμε διαγραμματικά τις διαφορές μεταξύ των κατανομών σε σχέση με τον άξονα μηδέν εμφανίζεται το εξής διάγραμμα:



Διάγραμμα 52

Επίσης η διαφορά μεταξύ Υπεργεωμετρικής Κατανομής και Κατανομής Poisson φαίνεται να αντανακλά σχεδόν την διαφορά μεταξύ της Διωνυμικής Κατανομής και Υπεργεωμετρικής, έχοντας σχετικά μεγάλη απόκλιση μέχρι 0,01 σε σχέση με τη διαφορά της Κατανομής Poisson – Διωνυμικής που φτάνει μέχρι το 0,003. Το φαινόμενο της αντανάκλασης προκύπτει διότι με τις συγκεκριμένες παραμέτρους:

$$n \to \infty \; και \; p \to 0 \; ώστε \; np \; σταθερό$$

Η Διωνυμική κατανομή συγκλίνει στην κατανομή Poisson.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X=k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\left(\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}
\end{aligned}$$

(Wikipedia).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Hines, Montgomery, Goldsman, Borror. (2004).

Mitra, A. (2016). *Fundamentals of Quality Control and Improvement.* New Jersey: John Wiley and Sons.

MONTGOMERY, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control.*

Western Elecetric Company. (1956). *Statistical Quality Control Handbook.* USA: MACK Printing Company.

Wikipedia. (n.d.). *el.wikipedia.org*. Ανάκτηση από https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%94%CE%B9%CF%89%CE%BD%CF%85%CE%BC%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%BA%CE%B1%CF%84%CE%B1%CE%BD%CE%BF%CE%BC%CE%AE

Αντζουλάκος, Δ. (2006). *Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ "Εφαρμοσμένη Στατιστική".* Ανάκτηση 2018, από http://www.unipi.gr/faculty/dantz/Statistical_Quality_Control.pdf

Γ.Παπαδόπουλος. (n.d.). *aua.gr.* Ανάκτηση από https://www.aua.gr/gpapadopoulos/files/normal010-2.pdf

Παπαδόπουλος, Γ. (n.d.). *aua.gr.* Ανάκτηση από https://www.aua.gr/gpapadopoulos/files/Poisson13.pdf

Τσικογιαννόπουλος, Π. (2010). *Αθροιστική πολυωνυμική και υπεργεωμετρική κατανομή.*

Χαλικιάς, Ι. (2003). *Στατιστική: Μέθοδοι Ανάλυσης για Επιχειρηματικές Αποφάσεις. 2η έκδοση.* Γέρακας.

Χαλικιάς, Μ. (2012). *Επαγωγική Στατιστική* . Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.