ΑΝΩΤΑΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ: ΜΟΣΧΟΒΑ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: 7520

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αποτελεί μία σύνθεση και ενοποίηση ορισμένων βασικών εννοιών των Οικονομικών Μαθηματικών με σκοπό να γίνει μία διεξοδική ανάλυση σε ότι αφορά τον απλό και σύνθετο ανατοκισμό και τις οικονομικές συναρτήσεις. Πιο αναλυτικά , στα πρώτα κεφάλαια , γίνεται παρουσίαση των εφαρμογών της σύνθετης κεφαλαιοποίησης, της ισοδυναμίας επιτοκίων, της γραμμικής και εκθετικής περίπτωσης καθώς και της αποτίμησης της τελικής αξίας του κεφαλαίου. Επίσης αναφέρονται οι ράντες οι οποίες είναι άμεσα συνδεδεμένες με το κεφάλαιο και μέσα από ασκήσεις πρακτικής εκτελείται μία προσπάθεια ώστε να καταστεί δυνατό όσο περισσότερο γίνεται η κατανόηση της χρησιμότητάς τους. Στα επόμενα κεφάλαια που ακολουθούν η προσοχή στρέφεται στις επιχειρήσεις, μέσω των οικονομικών συναρτήσεων της ζήτησης – προσφοράς, εσόδων-εξόδων και οριακού κόστους με σκοπό να προσεγγιστεί ο ορισμός τους και να γίνει κατανοητός. Δίνονται αναλυτικά γραφικές παραστάσεις με τον σχεδιασμό των καμπύλων τους αναλύονται οι κλίσεις τους ,ενώ παράλληλα γίνεται μία προσέγγιση στα πιο ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους και στην ανάλυσή τους . Στα τελευταία κεφάλαια η αριστοποίηση των οικονομικών συναρτήσεων θα ήταν ανέφικτο να μην αναφερθεί , η ύπαρξη ακροτάτων και ο πολλαπλασιαστής Lagrand θα μπορούσε να πει κανείς ότι είναι από τα πιο σημαντικά κεφάλαια της ανάλυσης των οικονομικών συναρτήσεων. Έτσι και εδώ οι αναλύσεις που γίνονται και οι αναφορές στη θεωρία έχουν σκοπό να περιηγηθούμε στον κόσμο των οικονομικών συναρτήσεων και παράλληλα στο σύνολο των οικονομικών μαθηματικών με απώτερο σκοπό την κατανόηση του.

ΓΕΝΙΚΑ

Μερισμός

Ο χωρισμός ενός αριθμού σε μέρη ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα μίας ή πολλών σειρών αριθμών , ονομάζεται μερισμός.

1. Ο μερισμός ενός αριθμού x σε μέρη που είναι ανάλογα σε μία σειρά αριθμών α,β,γ :

Αν θέλουμε να μερίσουμε τον αριθμό x σε τρία ανάλογα μέρη των αριθμών α,β,γ τότε πρέπει να διαιρέσουμε τον αριθμό x με το άθροισμα τους και έπειτα να πολλαπλασιάσουμε το πηλίκο με κάθε ένα αριθμό ξεχωριστά.

Δηλαδή:

α) $\frac{x}{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \alpha$

β) $\frac{x}{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \beta$

γ) $\frac{x}{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \gamma$

2. Όταν ο μερισμός ενός αριθμού x γίνεται σε αντιστρόφως ανάλογα μέρη τότε:

- ✓ Φτιάχνουμε τους αντίστροφους αριθμούς

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$

- ✓ Κάνουμε μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα

$\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}, \frac{\alpha\cdot\gamma}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}, \frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$

- ✓ Μερίζεται ο αριθμός x σε όσους αριθμητές κλασμάτων υπάρχουν

1. $\frac{x}{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta} \cdot \beta\gamma$
2. $\frac{x}{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta} \cdot \alpha\gamma$

3. $\frac{x}{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta} \cdot \alpha\beta$

3. Μερισμός ενός αριθμού x σε μέρη που είναι ανάλογα 2 σειρών αριθμών, α,β,γ και δ,ε,ζ.

- ✓ Φτιάχνουμε μία καινούργια σειρά αριθμών οι οποίοι προέρχονται από τα γινόμενα των δύο αριθμών και των δύο σειρών, δηλαδή: αδ,βε,δζ
- ✓ Μετά γίνεται ο μερισμός για :

  αδ) $\frac{x}{\alpha\delta+\beta\varepsilon+\delta\zeta} \cdot \alpha\delta$

  βε) $\frac{x}{\alpha\delta+\beta\varepsilon+\delta\zeta} \cdot \beta\varepsilon$

  δζ) $\frac{x}{\alpha\delta+\beta\varepsilon+\delta\zeta} \cdot \delta\zeta$

Παραδείγματα :

Να μερισθεί ο αριθμός 81 σε μέρη ανάλογα των αριθμών 2,3,4

ΛΥΣΗ

1ο $\frac{81}{2+3+4} \cdot 2 = \frac{81}{9} \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$

2ο $\frac{81}{2+3+4} \cdot 3 = \frac{81}{9} \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$

3ο $\frac{81}{2+3+4} \cdot 4 = \frac{81}{9} \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36$

Να μερισθεί ο αριθμός 130 σε αντιστρόφως ανάλογα μέρη των αριθμών 2,3,4.

ΛΥΣΗ

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \qquad \frac{3\cdot4}{2\cdot3\cdot4}, \frac{2\cdot4}{2\cdot3\cdot4}, \frac{2\cdot3}{2\cdot3\cdot4}$

1º $\frac{130}{3\cdot4+2\cdot4+2\cdot3}\cdot 3\cdot 4=\frac{130}{26}\cdot 12=60$

2º $\frac{130}{3\cdot4+2\cdot4+2\cdot3}\cdot 2\cdot 4=\frac{130}{26}\cdot 8=40$

3º $\frac{130}{3\cdot4+2\cdot4+2\cdot3}\cdot 2\cdot 3=\frac{130}{26}\cdot 6=30$

Να μερισθεί ο αριθμός 5320 σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα των αριθμών 2,3,4 και 5,6,7.

ΛΥΣΗ

Η νέα σειρά αριθμών είναι :

2· 5 = 10 , 3*6 = 18 , 4 · 7 = 28

1º $\frac{5320}{10+18+28}\cdot 10=\frac{5320}{56}\cdot 10=950$

2º $\frac{5320}{10+18+28}\cdot 18=\frac{5320}{56}\cdot 18=1710$

3º $\frac{5320}{10+18+28}\cdot 28=\frac{5320}{56}\cdot 28=2660$

Η χρονική αξία του χρήματος

Η γνωστή έκφραση « η χρονική αξία του χρήματος» είναι ευρέως διαδεδομένη ειδικά στα οικονομικά για τον λόγο ότι η αξία μίας ποσότητας χρήματος κατά τη διάρκεια του έτους μεταβάλλεται.

Στην ουσία η έννοια της αξίας του χρήματος είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια του τόκου και με το κόστος ευκαιρίας του χρήματος.

Για την ανάλυση της χρονικής αξίας του χρήματος αλλά και την επίλυση πολλών προβλημάτων , βασικές μεταβλητές που χρησιμοποιούνται είναι το **κεφάλαιο**, ο **τόκος**, ο **χρόνος** και το **επιτόκιο**.

- ✓ Ως κεφάλαιο ορίζεται το οικονομικό αγαθό που μετράτε σε χρήματα και η χρήση του είναι βασική για τη διεκπεραίωση των παραγωγικών σκοπών.
- ✓ Ως χρόνος ορίζεται το διάστημα εκείνο που γίνεται παραγωγική χρήση του κεφαλαίου.
- ✓ Ως τόκος ορίζεται η αύξηση που έχει το κεφάλαιο κατά τη διάρκεια της παραγωγικής του ικανότητας.
- ✓ Ως επιτόκιο ορίζεται ο τόκος μίας χρηματικής μονάδας στη μονάδα του χρόνου.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} : ΑΠΛΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΌΣ</u>

<u>1.1 ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ ή ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ</u>

Ο υπολογισμός του απλού τόκου (Ι) εξαρτάται από τις εξής βασικές μεταβλητές:

- Αρχικό κεφάλαιο (Κο): το οποίο μέσω της σύναψης δανείου είναι τα χρήματα που δανείζεται ο επενδυτής.
- Παρούσα αξία: το ακριβές ποσό που λαμβάνει ο επενδυτής και συγκεκριμένα στον απλό τόκο το αρχικό κεφάλαιο είναι ίσο με την παρούσα αξία.
- Χρόνος (t): είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο επενδυτής κάνει χρήση ολόκληρου του δανείου ή μέρος αυτού.
- Επιτόκιο (i%): είναι η τιμή ενός απλού τόκου δανείου και αναφέρεται πάντα ως ποσοστό, το οποίο είναι απαραίτητο να πληρωθεί έτσι ώστε να γίνει χρήση του δανείου.

Παρατηρήσεις:

1.Πρέπει να υπάρχει προσοχή διότι ο χρόνος n είναι απαραίτητο να εκφράζεται στην ίδια συγκεκριμένη χρονική περίοδο όπου αναφέρεται το επιτόκιο. Με λίγα λόγια δηλαδή σε περίπτωση που είναι το επιτόκιο είτε ετήσιο, είτε εξαμηνιαίο, είτε τριμηνιαίο κτλ. πρέπει και ο τοκισμός να είναι σε n έτη, n εξάμηνα κτλ.

2.Σε περίπτωση που το επιτόκιο είναι ετήσιο τότε ο τόκος διατυπώνεται ως εξής :

$I = \frac{K\mu i}{12}$ μ = οι μήνες τοκισμού.

3.Σε περίπτωση που η διάρκεια του τοκισμού είναι σε ημέρες τότε:

$I = \frac{K\nu i}{365}$ ή $I = \frac{K\nu i}{366}$ (εάν είναι δίσεκτο)

4.Σε αρκετές περιπτώσεις και συνήθως για λόγους ευκολίας το έτος υπολογίζεται με 360 ημέρες δηλαδή 30 το μήνα. Το έτος σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **εμπορικό έτος**.

Ορισμός του απλού ανατοκισμού:

I= Ko x I x n

Ως ολική αξία ύστερα από n χρόνια είναι το κεφάλαιο συν τον τόκο δηλαδή:

Pn=Ko (1 +in)

Εάν η ολική αξία, ο χρόνος και το επιτόκιο είναι γνωστά τότε ο τύπος για να υπολογισθεί το κεφάλαιο μετατρέπεται ως εξής:

Ko (1+in)= Pn

Ko $= \frac{Pn}{1+in}$

Επομένως ο απλός τόκος ή απλός ανατοκισμός είναι ένα ποσοστό σταθερό του κεφαλαίου που καταβάλλεται στον επενδυτή κάθε χρόνο χωρίς να εξαρτάται από τον αριθμό των χρόνων όπου το κεφάλαιο έχει κατατεθεί.

1.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΑΠΛΟ ΤΟΚΟ

Άσκηση : 1

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 4.000 ευρώ το οποίο τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 8% για 6 χρόνια.

ΛΥΣΗ

K = 4.000

n = 6

i = 0.08

Άρα: I_6 = K · n · I = I_6 = 4.000 x 6 x 0.08 = 1.920

Άσκηση : 2

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 5.000 ευρώ το οποίο τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 5% για 8 μήνες.

ΛΥΣΗ

Κ = 5.000

μ = 8

i = 0.05

Άρα : $I_\mu = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} = I_8 = \frac{5.000 \; X \; 8 \; X \; 0.05}{12}$ = 166.6

Άσκηση : 3

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 12.000 το οποίο τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 10% για 80 ημέρες (εμπορικό έτος)

ΛΥΣΗ

Κ = 12.000
v = 80
i = 0.10

Άρα : $I_v = \frac{K \cdot v \cdot i}{360} = I = \frac{12.000 \cdot 80 \cdot 0.10}{360} = 266.6$

Άσκηση : 4

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 15.000 ευρώ το οποίο τοκίστηκε από $1^{η}$ Ιανουαρίου 2016 έως 26 Μαρτίου 2016 με ετήσιο επιτόκιο 8% (εμπορικό έτος).

ΛΥΣΗ

Ο Ιανουάριος έχει 31 μέρες, ο Φεβρουάριος 29 μέρες, ο Μάρτιος 26-1=25 μέρες δηλαδή το κεφάλαιο τοκίζεται για : 31+29+25=85 ημέρες

K=15.000

v = 85

i = 0.08

Άρα : $I_v = \frac{K \cdot v \cdot i}{360} = I = \frac{15.000 \cdot 85 \cdot 0.08}{360} = 283$

- Το νέο κεφάλαιο που δημιουργείται είναι το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου και του τόκου:

Άρα : K+I=15.000+283=15.283

Άσκηση : 5

Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε κεφάλαιο 20.000 ευρώ για 6 έτη και έδωσε τόκο 5.000 ευρώ;

<u>ΛΥΣΗ</u>

K = 20.000

n = 6

I = 5.000

Άρα : I = K$\cdot n \cdot i$

i = $\frac{I}{K \cdot n}$

i = $\frac{5.000}{20.000 \cdot 6}$

i = $\frac{5.000}{120.000} = 0.04$

Άρα το επιτόκιο είναι 4%

1.3 ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΓΡΑΜΜΑΤΙΑ (ΘΕΩΡΙΑ)

Στη σημερινή εποχή οι περισσότερες συναλλαγές γίνονται με ολική ή μερική αντικατάσταση του χρήματος κάτι το οποίο σημαίνει ότι οι συναλλασσόμενοι κάνουν συναλλαγές επί πιστώσει χωρίς να χρησιμοποιούν μετρητά. Οι συναλλαγές που γίνονται επί πιστώσει έχουν την μορφή της συναλλαγματικής ή γραμματίου, όπου εκδίδεται από τον εκδότη και λειτουργεί ως εντολή προς τον οφειλέτη να πληρώσει το χρηματικό ποσό που αναγράφει σε κάποιο ορισμένο χρόνο και τόπο.

Οι κάτοχοι των γραμμάτιων που είναι οι εκδότες με τους πελάτες τους που είναι οι οφειλέτες, μπορούν να κάνουν τις εξής παρακάτω ενέργειες :

- Περιμένουν να λήξει η αναγραφόμενη ημερομηνία που είναι και η προθεσμία για να πληρώσουν οι οφειλέτες το αναγραφόμενο ποσό , αφού πρώτα τα τοποθετήσουν σε ασφαλές σημείο.
- Κάνουν μεταβίβαση με οπισθογράφηση τα γραμμάτια που έχουν στην κατοχή τους σε τρίτους κάτι το οποίο σημαίνει ότι μεταβιβάζουν και την απαίτηση της πληρωμής.
- Δίνουν ανάθεση σε κάποια τράπεζα να εισπράξει εκείνη τα αναγραφόμενα ποσά των γραμματίων που έχουν στην κατοχή τους έναντι προμήθειας.
- Εάν υπάρχει η περίπτωση να έχουν άμεση ανάγκη από χρήματα , κάνουν ρευστοποίηση των γραμματίων που έχουν σε τράπεζα , με αποτέλεσμα να τους παρακρατούνται οι τόκοι που αντιστοιχούν στο χρονικό διάστημα από την ημέρα που ρευστοποιήθηκαν τα γραμμάτια μέχρι την ημέρα της λήξης τους,

Ο όρος **προεξόφληση** αντιστοιχεί σε αυτή τη ρευστοποίηση που γίνεται. Ενώ οι τόκοι που παρακρατούνται από την τράπεζα ονομάζονται **προεξόφλημα**.

Για να γίνει ο υπολογισμός του προεξοφλήματος υπάρχουν δύο τρόποι :

1) Με βάση της ονομαστικής αξίας , δηλαδή του ποσού που αναγράφεται πάνω στο γραμμάτιο και η είσπραξή του γίνεται κατά τη λήξη του. Αυτή η μέθοδος καλείται **Εξωτερική προεξόφληση** και ο τόκος που παρακρατεί η τράπεζα, **Εξωτερικό προεξόφλημα.**

2) Με βάση την παρούσα αξία , δηλαδή το ποσό που εισπράττεται όταν γίνεται η προεξόφληση του γραμματίου. Σε αυτή την περίπτωση η μέθοδος ονομάζεται **Εσωτερική προεξόφληση** και το προεξόφλημα που παρακρατεί η τράπεζα **Εσωτερικό προεξόφλημα.**

1.4 ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

Σύμφωνα με τον σύνθετο ανατοκισμό καταβάλλεται επιτόκιο για το αρχικό κεφάλαιο αλλά καταβάλλεται επιπλέον και για κάθε τόκο ο οποίος συσσωρεύτηκε από προηγούμενα χρόνια. Στις μέρες μας τα χρήματα που επενδύονται στο επιχειρηματικό περιβάλλον, τις περισσότερες φορές έχουν σύνθετο τόκο.

Τύπος σύνθετου ανατοκισμού:

Pt= Po $(1 + \iota)^t$

Για την διεξαγωγή του τύπου του σύνθετου ανατοκισμού πρέπει να γίνει πρώτα από όλα ο υπολογισμός του. Οπότε:

Κεφάλαιο στην αρχή του χρόνου: Ko

Ο τόκος που καταβάλλεται για κάθε χρόνο: i · Ko

Σύνολο κεφαλαίου και τόκου στο τέλος στο τέλος του χρόνου: Ko + iKo= Ko(1+i)

Σύνολο στο τέλος του χρόνου = κεφάλαιο στην αρχή του επομένου χρόνου:

P1= Po (1+ i)

Άρα η περιγραφή του σύνθετου τόκου ανά έτος έχει ως εξής:

1^o έτος

Κεφάλαιο στην αρχή του χρόνου: K_1

Ο τόκος που καταβάλλεται για κάθε χρόνο: i · K_1

Σύνολο κεφαλαίου και τόκου στο τέλος στο τέλος του χρόνου:

K_1+ i K_1 =[K_1]·(1+i) = [Ko(1+i)]·(1+i)= $Ko(1 + i)^2$

Σύνολο στο τέλος του χρόνου = κεφάλαιο στην αρχή του επομένου χρόνου:

K_2= Ko $(1 + i)^2$

2ο έτος

Κεφάλαιο στην αρχή του χρόνου: K_2

Ο τόκος που καταβάλλεται για κάθε χρόνο: i · K_2

Σύνολο κεφαλαίου και τόκου στο τέλος στο τέλος του χρόνου:

K_2+ iK_2=[K_2]·(1+i) = [Ko $(1 + i)^2$]·(1+i)= Ko$(1 + i)^3$

Σύνολο στο τέλος του χρόνου = κεφάλαιο στην αρχή του επομένου χρόνου:

$K_3 = Ko\ (1 + i)^3$

κ.ο.κ ανά έτος **<u>καταλήγοντας:</u>**

Κεφάλαιο στην αρχή του χρόνου: K_{t-1}

Ο τόκος που καταβάλλεται για κάθε χρόνο: i x K_{t-1}

Σύνολο κεφαλαίου και τόκου στο τέλος στο τέλος του χρόνου:

K_{t-1}+ iK_{t-1}=[K_{t-1}]·(1+i) = [Ko $(1 + i)^{t-1}$](1+i)= Ko$(1 + i)^t$

Σύνολο στο τέλος του χρόνου = κεφάλαιο στην αρχή του επομένου χρόνου:

$K_t = Ko\ (1 + i)^t$

Είναι καλό να τονιστεί ότι κάθε χρόνο ο τόκος που απαιτείται προστίθεται στο ποσό της επένδυσης στην αρχή αυτού του χρόνου.

Τα ποσά που προκύπτουν κάθε χρόνο σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο, έτσι αποδίδεται η ακολουθία: Ko,Ko$(1 + i)^1$, Ko$(1 + i)^2$, …. , Ko$(1 + i)^t$

Παρούσα αξία με σύνθετο ανατοκισμό :

Το ποσό το οποίο έχει αποταμιευθεί σε χρόνο t = 0 ενός μελλοντικού ποσού που έχει συσσωρευτεί, K_t με επιτόκιο i% , θα έχει αυξημένη τιμή του K_t έπειτα από t χρόνια.

Επομένως ο τύπος για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας διαμορφώνεται ως εξής:

K_t=K_0 (1+i) –> $\frac{K_t}{(1+t)^t}$ =K_0

K_0 = $\frac{K}{(1+i)^t}$

- Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι όταν γνωρίζουμε τις τρείς από τις τέσσερις μεταβλητές του τύπου του σύνθετου τόκου , τότε είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η τέταρτη. Δηλαδή αν υποθέσουμε ότι αναζητάμε το i τότε:

K_t=K_0 $(1+i)^t$ –> $(1+i)^t$ = $\frac{K_t}{K_0}$ –> 1+ i = $(\frac{K_t}{K_0})^{1/t}$

ή i= $\sqrt[+]{\frac{K_t}{K_0}}$ -1

Με λίγα λόγια δηλαδή γίνεται αντικατάσταση όλων των γνωστών μεταβλητών και γίνεται η επίλυση του τύπου ως προς την άγνωστη.

- Η περίπτωση όπου ο σύνθετος ανατοκισμός γίνεται αρκετές φορές μέσα στον χρόνο:

Έως τώρα είχε ειπωθεί ότι ο σύνθετος τόκος ανατοκίζεται μία φορά τον χρόνο, όμως στην πραγματικότητα ο τόκος ανατοκίζεται πολλές φορές στο ίδιο έτος. Κάθε χρονική στιγμή ανατοκισμού ονομάζεται **περίοδος μετατροπής ή τοκοφόρα περίοδος.** Το πλήθος της μετατροπής περιόδων κάθε χρόνο συμβολίζεται με **m**, ενώ το επιτόκιο της κάθε μετατροπής περιόδου είναι i/m.

Παράδειγμα :

Μια επένδυση η οποία ανατοκίζεται 14 φορές τον χρόνο θα έχει 14 περιόδους μετατροπής. Άρα μια εξαετής επένδυση αν ανατοκίζεται 14 φορές ετησίως τότε η επένδυση θα έχει 84 περιόδους μετατροπής.

Δηλαδή : n = m × t

Συνολικός αριθμός περιόδων μετατροπής

Η αξία της επένδυσης στο τέλος της n περιόδου μετατροπής είναι :

K_t=K_0 $(1+\frac{i}{m})^n$ = $K_0(1+\frac{i}{m})^{m\times t}$

Ετήσια ποσοστιαία επιτόκια:

Όταν ο ανατοκισμός γίνεται πολλές φορές κατά την διάρκεια του έτους, το ποσό το οποίο θα έχει συγκεντρωθεί θα είναι διαφορετικό από εκείνο που υπολογίζεται με βάση τον ετήσιο ανατοκισμό. Υπό αυτή την έννοια πρέπει να υπάρχει ένα μέτρο σύγκρισης του ποσού που λαμβάνεται με το επιτόκιο που του αποδίδεται όταν ο ανατοκισμός γίνεται πολλές φορές μέσα στον ίδιο χρόνο. Αυτό ονομάζεται ετήσιο ποσοστιαίο επιτόκιο (APR).

- ⇨ Όταν ο ανατοκισμός γίνεται μια φορά τον χρόνο με επιτόκιο APR η επένδυση θα έχει ακριβώς το ίδιο ποσό, K_t στο τέλος των t χρόνων.

- *Τύπος για ετήσιο ποσοστιαίο για m φορές τον χρόνο:*

$APR = (1 + \frac{i}{m})^{m}$ -1

- *Όταν ο τόκος συνεχώς ανατοκίζεται τότε:*

$APR = e^{i}$-1

Όπου προκύπτει: $K_0\ (1 + APR)^{t} = K_0\ e^{it}$

$(1 + APR)^{t} = e^{it}$

$$\boxed{APR = e^{i}-1}$$

- **Απόσβεση**

Ως απόσβεση είναι το ποσό που υπολογίζεται για την λογική φθορά μιας συσκευής κατά την διάρκεια της παραγωγικής της λειτουργίας. Για παράδειγμα σε ένα περιουσιακό στοιχείο, απόσβεση είναι η χρηματική μείωση από την αρχική του αξία, κάθε χρόνο.

Οι τεχνικές απόσβεσης είναι δύο :

Α) Ευθύγραμμη απόσβεση, δηλαδή αφαιρούνται ίσα ποσά από την αρχική αξία του περιουσιακού στοιχείου κάθε χρόνο.

Παράδειγμα : Αν η αρχική τιμή ενός αυτοκινήτου ήταν 30.000 ευρώ και μετά από 4 χρόνια η αξία του εκτιμάται στα 18.000 ευρώ, τότε το ποσό της ευθύγραμμης απόσβεσης που από κάθε χρόνο αφαιρείται είναι:

(30.000 ευρώ – 18.000 ευρώ) ÷ 4 = 3.000

Β) Απόσβεση μειούμενης οφειλής, δηλαδή αφαιρούνται μεγαλύτερα ποσά από την αρχική αξία του περιουσιακού στοιχείου κάθε χρόν. Σε αυτή την τεχνική απόσβεσης ο τύπος είναι:

$A_t = A_0\,(1 - i\,)^t$

A_t= αξία περιουσιακού στοιχείου για t έτη

A_0 = η αρχική αξία του περιουσιακού στοιχείου

i = *το ποσοστό απόσβεσης*

t = *ο αριθμός των χρόνων*

- Καθαρή παρούσα αξία :

Είναι η παρούσα αξία για ένα μελλοντικό ποσό που πρέπει να εξοφληθεί άμεσα. Με την καθαρή παρούσα αξία γίνεται προσπάθεια να αποτιμηθεί η αποδοτικότητα των επενδύσεων που αναλαμβάνουν οι επιχειρήσεις και συμβολίζεται ως NPV. Επομένως ένας διαχειριστής ενός έργου για να πάρει σωστές αποφάσεις πρέπει να συγκρίνει όλα τα κόστη και όλες τις αποδόσεις αφού πρώτα τα υπολογίσει σε παρούσες τιμές. Υπό αυτό τον τρόπο συγκρίνονται οι παρούσες αποδόσεις με τα παρόντα κόστη έτσι ώστε να εκτιμηθεί το έργο.

Κανόνας απόφασης : NPV >0 = επένδυση στο έργο

NPV <0 = όχι επένδυση στο έργο

1.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΣΥΝΘΕΤΟ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟ

ΑΣΚΗΣΗ :1

Να δοθεί η τελική αξία κεφαλαίου 200.000€, το οποίο ανατοκίζεται κάθε 6 μήνες για 10 έτη με ετήσιο επιτόκιο 8%.

Αν στο τέλος των 5 πρώτων ετών προεξοφληθεί το κεφάλαιο που βρέθηκε, ποιά θα είναι η παρούσα αξία του και ποια η προεξόφληση;

Λύση :

Αν θεωρηθεί 8% το ετήσιο ανάλογο του εξαμηνιαίου, τότε το εξαμηνιαίο θα είναι :

$i/2 = 0{,}08/2 = 0{,}04$

$n = 10$ έτη $= 20$ εξάμηνα

$Kn = Ko\,(1 + i/2)^{20} = 200.000 \times (1 + 0{,}04)^{20} =$

$= 200.000 \times 2{,}1912 = 438.240$€.

Αν το κεφάλαιο K_n προεξοφληθεί σε 5 έτη πριν τη λήξη του, τότε θα γίνει :

$K = Kn\,(1 + 0{,}04)^{-10}$ γιατί τα 5 έτη = 10 εξάμηνα

$K = 438.240 \times 0{,}6756 = 296{,}074.944$ €.

Άρα το προεξόφλημα , δηλαδή οι τόκοι των 5 τελευταίων ετών, θα είναι

$E = 438.240 – 296{,}074.944 = 142{,}165.56$ €.

ΑΣΚΗΣΗ :2

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 150.000€, με ανατοκισμό για 8 έτη και 4 μήνες με 10%.

Λύση :

$Ko = 150.000$€ ,

$i = 10\% = 0{,}10$

$n = 8$ έτη + 4 μήνες

$Kn = Ko\ (1+i)^{n+\mu/12} = 150.000\ (1 + 0{,}10)^{8+4/12} = 150.000 \times 1{,}10^{8} \times 1{,}10^{4/12}$

$= 150.000 \times 2{,}1435887 \times 1{,}0322801 = 331917{,}59$€ .

ΑΣΚΗΣΗ : 3

Κεφάλαιο 5000 ευρώ τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 12% για 35 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπραχθεί στο τέλος της κατάθεσης σε περίπτωση που ο τοκισμός έγινε με α) απλό τόκο και β) με ετήσιο ανατοκισμό.

Λύση:

α) K = 5000

i = 0.12

n = 35

Άρα : $K + I = K + K \cdot n \cdot i = 5000 + 5000 \cdot 35 \cdot 0.12 = 26.000$

β) Ko = 5000

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_n = 5000 \cdot (1+0.12)^{35} = K_n = 5000 \cdot 52.7996 = 263.998$$

Υποσημείωση:

Επειδή στον απλό τόκο η αύξηση κεφαλαίου γίνεται γραμμικά ενώ στην περίπτωση του σύνθετου ανατοκισμού γίνεται εκθετικά, υπάρχει μεγάλη διαφορά στις τελικές αξίες.

ΑΣΚΗΣΗ : 4

Κεφάλαιο 8000 ευρώ κατατέθηκε με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8%. Να βρεθούν οι τόκοι που θα πάρουμε κατά τη διάρκεια του 8^{ου} έτους.

Λύση

$K_0 = 8000$

i = 0.08

Άρα: $E_n = K_0 \cdot i \cdot (1+i)^{n-1} = E_8 = 8000 \cdot 0.08 \cdot 1.08^{8-1}$

$E_8 = 8000 \cdot 0.08 \cdot 1.7138 =$

$E_8 = 1.096{,}832$

ΑΣΚΗΣΗ : 5

Κατατέθηκε κεφάλαιο με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%. Έπειτα από 4 χρόνια και 6 μήνες πήραμε συνολικά 42.699 ευρώ. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο.

Λύση

i = 0.04

n = $2 \cdot 4 + 1 = 9$

$K_q = 42.699$

Άρα : $K_o = K_q \cdot \frac{1}{(1+0.04)^9} = 42.699 \cdot \frac{1}{1.4233} = 30.000$

ΑΣΚΗΣΗ : 6

Μία γυναίκα κατέθεσε στην τράπεζα 3.000 ευρώ για 8 χρόνια και 3 μήνες. Τα 3 πρώτα χρόνια το ποσό τοκίστηκε με επιτόκιο 12%, το υπόλοιπο διάστημα έγινε ανατοκισμός με επιτόκιο 20%. Να βρεθεί η τελική αξία του κεφαλαίου.

Λύση

$$\text{K}_{\mathbf{1}} = 3000 \cdot (1 + 0.12)^3 = 3000 \cdot 1{,}404928 = 4.214{,}784$$

Για το υπόλοιπο διάστημα έχουμε:

i = $\frac{0.2}{2} = 0.10$

Το κάθε εξάμηνο για διάστημα 5 χρόνων και 3 μήνες είναι 10 + $\frac{1}{2}$

Άρα : $K_n = K_1(1 + 0.10)^{10+1/2} = K_1 \cdot 1.10^{10} \cdot 1.10^{1/2} =$

$$4.214{,}784 \cdot 2{,}5937423 \cdot 1{,}0488088 = 11.465{,}643$$

1.6 ΡΑΝΤΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΠΛΗΡΩΜΗ ΧΡΕΟΥΣ

Ράντα:

Με τον όρο ράντα εννοούμε μια σειρά από καταθέσεις ή αναλήψεις με ίσα ποσά που γίνονται για ίσα χρονικά διαστήματα. Για παράδειγμα, μια κατάθεση 1.500 ευρώ που γίνεται κάθε χρόνο για 20 χρόνια με σκοπό κάποιο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα. Εάν η κατάθεση γίνει την στιγμή του ανατοκισμού τότε έχουμε την γνωστή **συνήθης ράντα.**

Για να προσδιοριστεί ο τύπος της ράντας στο τέλος των t χρόνων, παίρνουμε τις τιμές της στο τέλος κάθε χρόνου.

Αναλυτικότερα :

1^{ος} χρόνος –> A_0

2^{ος} χρόνος –> A_0 (1+ i) +A_0

3^{ος} χρόνος –> A_0 $(1+i)^2$ +A_0 (1+ i) +A_0

Δηλαδή:

t χρόνος –> A_0 $(1+i)^{t-1}$ +A_0 $(1+i)^{t-2}$+A_0 $(1+i)^{t-3}$ +…A_0 (1+ i) +A_0

άρα : το ποσό της ράντας στο τέλος των t χρόνων είναι :

$$V_{ANU}\text{, t}= A_0 \frac{(1+i)^t-1}{i}$$

Παράδειγμα:

Ένας παππούς καταθέτει την ημέρα που γεννήθηκε το εγγόνι του 2.000 ευρώ και κάθε χρόνο καταθέτει 2.000 μέχρι το παιδί να συμπληρώσει το 17^{ο} έτος της ηλικίας του (δηλαδή 18 φορές). Ποιο είναι το ποσό το οποίο θα συσσωρευτεί όταν συμπληρώσει το 18^{ο} έτος της ηλικίας του;

Λύση:

Εάν υποτεθεί ότι το επιτόκιο είναι ετήσιο και σταθερό ίσο με 5% και ο ανατοκισμός το ίδιο τότε:

Ποσό πρώτης κατάθεσης: $2000(1+i)^n = 2000(1+0.05)^{18}$

Ποσό δεύτερης κατάθεσης: $2000(1+i)^{n-1} = 2000(1+0.05)^{17}$

Ποσό τρίτης κατάθεσης : $2000(1+i)^{n-2} = 2000(1+0.05)^{16}$

Ποσό τελευταίας κατάθεσης : (ο τοκισμός είναι για ένα χρόνο)

$2000(1+i) = 2000(1+0{,}05)$

Το συνολικό ποσό στο τέλος του 18^{ου} χρόνου είναι :

$2000(1+i)^n + 2000(1+i)^{n-1} + 2000(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots + 2000(1+i) =$

$2000(1+i)((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots 1) =$

$2000(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} = 2000(1+i)\,\frac{(1+i)^n-1}{i} = 2000(1+0.05)\,\frac{(1+0.05)^{18}-1}{0.05} = 59.078$

Με τον όρο **δόση** της ράντας εννοούμε το ποσό το οποίο γίνεται κατάθεση ή ανάληψη σε ίσα χρονικά διαστήματα και έχει το σύμβολο **R**.

Η ημερομηνία της πληρωμής κάθε δόσης μιας ράντας ονομάζεται **λήξη** της αντίστοιχης δόσης.

Ως **περίοδο** της ράντας ονομάζεται το χρονικό διάστημα μεταξύ της καταβολής δύο διαδοχικών δόσεων.

- *Σε περίπτωση όπου η δόση μιας ράντας καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου λέγεται **προκαταβλητέα ράντα,** ενώ εάν η δόση καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου ονομάζεται **ληξιπρόθεσμη ράντα.***

Ως **εποχή υπολογισμού** είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία υπολογίζεται η πραγματική ή παρούσα αξία μιας ράντας.

- Η παρούσα αξία μιας ράντας :

Ράντα επιπλέον μπορεί να θεωρηθεί μια σειρά καταθέσεων ή αναλήψεων με ίσα ποσά σε ίσα μελλοντικά διαστήματα. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει η πιθανότητα να πρέπει να προσδιοριστεί η παρούσα αξία της ράντας.

Η αξια μιας σειράς πληρωμών στο τέλος t χρόνων είναι :

V_{ANU} , t= $A_0 \frac{(1+i)^t-1}{i}$

Σε περίπτωση που το ποσό το οποίο έχει επενδυθεί επαρκεί για να παρέχει μια σειρά καταθέσεων τότε:

$V_0 (1+i)^t = A_0 \frac{(1+i)^t-1}{i} \Leftrightarrow V_0 = \frac{1}{(1+i)^t} \; A_0 \frac{(1+i)^t-1}{i}$

Κάνοντας διαίρεση και τις δύο πλευρές με $(1+i)^t$

Επομένως ο παράγοντας ράντας είναι :

$$V_0 = A_0 \frac{1-(1+i)^{-t}}{i}$$

Παράδειγμα

Ένας επιχειρηματίας τι ποσό πρέπει να καταθέσει σε μία τράπεζα σήμερα ώστε να εισπράξει 2.000, 2.200, και 1.900 ευρώ αντίστοιχα για τα επόμενα 3 χρόνια με ετήσιο ανατοκισμό και επιτόκιο 5% ;

Λύση

$$\mathrm{V}_0 = 2.000 \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)} + 2.200 \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)^2} + 1.900 \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)^3} = 5.541{,}52 \; \varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}$$

- **Οι ράντες κατατάσσονται ως εξής:**

1 **Ανάλογα με τη δόση:**

α) Όταν όλες οι δόσεις είναι ίσες, τότε ονομάζονται **σταθερές.** Στις σταθερές ράντες έχουμε και την ιδιαίτερη περίπτωση της **μοναδιαίας ράντας**. Δηλαδή η ράντα που η δόση της ισούται με μία νομισματική μονάδα, για παράδειγμα 1 ευρώ.

β) Όταν οι δόσεις δεν είναι ίσες έχουμε τις **μεταβλητές** ράντες.

2 Σύμφωνα με τη διάρκεια ή το πλήθος των δόσεων :

α) Όταν το πλήθος των δόσεων είναι καθορισμένο τότε ονομάζονται **πρόσκαιρες**.

β) Όταν το πλήθος των δόσεων δεν είναι καθορισμένο τότε ονομάζονται **διηνεκείς.**

γ) Όταν το πλήθος των δόσεων εξαρτάται από τη διάρκεια ζωής ενός ή περισσότερων ατόμων τότε ονομάζονται **ράντες ζωής**.

3 Σύμφωνα με τον χρόνο πληρωμής των δόσεων :

α) Όταν η δόση της ράντας καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου, ονομάζεται **ληξιπρόθεσμη.**

β) Όταν η δόση της ράντας καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου τότε ονομάζεται **προκαταβλητέα.**

4 Σύμφωνα με την περίοδο:

α) Όταν η περίοδος της ράντας είναι ίση με την περίοδο βάση της οποίας αναφέρεται το επιτόκιο τότε ονομάζεται **ακέραια.** Συγκεκριμένα όταν η ράντα έχει περίοδο το χρόνο, ονομάζεται **ετήσια**.

β) Όταν η περίοδος της ράντας είναι μικρότερη από την περίοδο βάση της οποίας αναφέρεται το επιτόκιο, τότε λέγεται **κλασματική ράντα** .

5 Σύμφωνα με την εποχή του υπολογισμού :

α) Όταν η αρχή της ράντας συμπίπτει με την εποχή υπολογισμού και η πρώτη δόση καταβάλλεται στην αρχή ή στο τέλος της πρώτης περιόδου, τότε ονομάζεται **άμεση** ράντα.

β) Όταν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται πριν από την αρχή της ράντας, δηλαδή η καταβολή της πρώτης δόσης δεν γίνεται στην αρχή ή στο τέλος της πρώτης περιόδου, αλλά αργότερα, τότε ονομάζεται **μέλλουσα** ράντα.

γ) Όταν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται ύστερα από την αρχή της ράντας τότε λέγεται **αρξάμενη.**

6 Σύμφωνα με την πραγματοποίηση κάποιου τυχαίου γεγονότος:

α) Όταν η καταβολή κάθε δόσης δεν εξαρτάται από κάποιο τυχαίο γεγονός, για παράδειγμα, εξόφληση δανείου, τότε λέγεται **βέβαιη**.

β) Όταν η καταβολή κάθε δόσης εξαρτάται από κάποιο τυχαίο γεγονός , για παράδειγμα, ζωής ή θανάτου κάποιου ατόμου τότε έχουμε τη **τυχαία** ράντα. Στις τυχαίες ράντες περιλαμβάνονται και οι ράντες ζωής . Τις τυχαίες ράντες υπάρχει πιθανότητα να τις συναντήσουμε και ως **αβέβαιες** ή **στοχαστικές** ή **ενδεχόμενες**.

- Μέση λήξη:

Ως μέση λήξη των δόσεων μίας ράντας ονομάζεται η χρονική στιγμή κατά την οποία η παρούσα αξία της ράντας είναι ίση με το άθροισμα των δόσεών της.

Για παράδειγμα εάν υποτεθεί ότι υπάρχει μία άμεση, ακέραιη και σταθερή ληξιπρόθεσμη ράντα με **n** δόσεις ίσες με **R** τότε, για να υπολογισθεί η μέση λήξη $\boldsymbol{\bar{n}}$

οδηγούμαστε στο τύπο:

$(1 + i)^{\bar{n}} = \frac{n}{a\overline{n/\imath}}$

- Αποπληρωμές χρέους :

Όταν ένα δάνειο πληρώνεται με δόσεις αυτό σημαίνει ότι το κεφάλαιο και ο τόκος αποπληρώνονται με ισόποσες πληρωμές που γίνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα με σταθερό επιτόκιο κατά τη διάρκεια του δανείου.

Για να προσδιοριστεί το ποσό που πρέπει να καταβληθεί με δεδομένο ότι η αξία του δανείου (L) και η αξία του επιτοκίου είναι γνωστές τότε:

$$V_t = P_0\,(1 + i)^t + A_0\,\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Χρέος στο τέλος t χρόνων

είναι οι μη πληρωμές

Η σειρά των κανονικών

πληρωμών στο τέλος των t χρόνων

Στο τέλος των

t χρόνων το δάνειο αποπληρώνεται

Vt = 0

Άρα με την αντικατάσταση έχουμε :

$$0 = -\,L\,(1+i)^t + A_o\,\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

- Χρεολυτικά κεφάλαια :

Σε περίπτωση που τοποθετείται στην άκρη ένα σταθερό ποσό κάθε χρόνο με σκοπό την αποπληρωμή κάποιου χρέους, τότε έχουμε το χρεολυτικό κεφάλαιο. Δηλαδή, έχουμε μία ράντα για αποπληρωμή χρέους. Όταν ένα ποσό σταθερό A_o , κατατίθεται στην αρχή του χρόνου και ανατοκίζεται ο τόκος κάθε χρόνο i% τότε το ποσό θα αυξάνεται κάθε χρόνο. Δηλαδή :

$V_{SK,t} = A_o\,(1+i)^t + A_o\,(1+i)^{t-1} + A_o\,(1+i)^{t-2} + \ldots\ldots + A_o\,(1+i)$

Υποσημείωση:

Στο τέλος του χρόνου t δεν γίνεται καμία καταβολή. Το κεφάλαιο είναι πλέον «ώριμο» και κατάλληλο για την αποπληρωμή του χρέους.

- Επιτόκια και η σχέση τους με την αξία των ομολογιακών δανείων:

Ως ομολογιακό δάνειο ορίζεται μία χρηματική επένδυση που γίνεται προς την κυβέρνηση για ένα συγκεκριμένο αριθμό χρόνων. Η κυβέρνηση από την άλλη πλευρά πληρώνει στον επενδυτή ένα σταθερό ποσό στο τέλος κάθε χρόνου. Παράλληλα, αποπληρώνει με την τελική πληρωμή την ονομαστική αξία του ομολογιακού δανείου στον επενδυτή.

Με σκοπό τα ομολογιακά δάνεια να γίνουν ελκυστικά για τους επενδυτές, το μέγεθος των σταθερών ετήσιων πληρωμών πρέπει να βασίζεται στο επιτόκιο (i) που ισχύει εκείνη τη χρονική στιγμή στην αγορά.

Ετήσια πληρωμή = i x (αξία του ομολογιακού δανείου)

Παράδειγμα :

Όταν ένα ομολογιακό δάνειο 20.000 ευρώ αγοράζεται με ισχύον επιτόκιο 6% τότε:

0,06 x 20.000 = 1.200

Η πληρωμή των 1.200 ευρώ κάθε χρόνο είναι σταθερή και δεν μεταβάλλεται σε όλη τη διάρκεια του ομολογιακού δανείου. Η ονομαστική αξία των 20.000 ευρώ με την ωρίμανση αποπληρώνεται πια στον επενδυτή. Ο λόγος που τα ομολογιακά δάνεια είναι ελκυστικά προς επενδύσεις είναι διότι ο σύνθετος τόκος είναι πιο ελκυστικός.

Τα επιτόκια αλλάζουν και για να γίνει κατανοητή η ελκυστικότητα των μελλοντικών πληρωμών ενώ παράλληλα τα επιτόκια αυξάνονται ή μειώνονται πρέπει να επιστρέψουμε στην παρούσα αξία. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η αξία του ομολογιακού δανείου κατά τη τελευταία πληρωμή προεξοφλείτε στο παρόν, και ο σκοπός είναι ο προσδιορισμός στο εάν υπάρχει κέρδος ή ζημία στο ποσό της επένδυσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} : ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γενικά

Ως **παραγωγική διαδικασία** ορίζονται όλοι εκείνοι οι τρόποι με τους οποίους ο άνθρωπος μετασχηματίζει την ύλη με σκοπό να της δώσει μορφή χρήσιμη για τη ζωή του.

Ως **παραγωγικοί συντελεστές** χαρακτηρίζονται όλα εκείνα τα στοιχεία που βοηθούν να ολοκληρωθεί η παραγωγική διαδικασία και διακρίνονται σε τέσσερις κατηγορίες :

1. Η εργασία
2. Το έδαφος, δηλαδή η γη και οι φυσικοί πόροι
3. Το κεφάλαιο
4. Η επιχειρηματικότητα

Ως **κόστος ευκαιρίας** ονομάζεται η θυσία ενός αγαθού x για την παραγωγή ενός άλλου αγαθού y. Με λίγα λόγια δηλαδή η θυσία ενός αγαθού (y) που θα μπορούσε να παραχθεί με τους ίδιους παραγωγικούς συντελεστές οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του συγκεκριμένου αγαθού (x). Στα οικονομικά η έννοια του κόστους ευκαιρίας αποτελεί μία από τις πιο βασικές έννοιες διότι μέσα από αυτή γίνεται κατανοητή η στενότητα που έχουν οι παραγωγικοί πόροι, ένα ζήτημα το οποίο αποτελεί βάση του οικονομικού προβλήματος και εκεί αποδίδεται και ο λόγος ύπαρξης της οικονομικής επιστήμης.

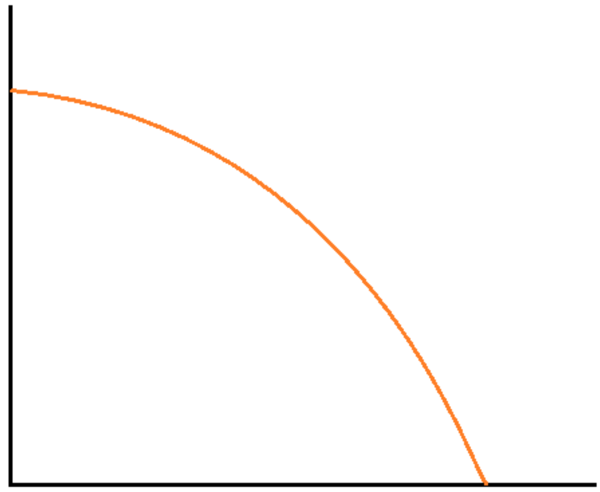
Ο τύπος του κόστους ευκαιρίας :

$$\text{ΚΕ} = \frac{\text{Μονάδες του αγαθού που θυσιάζονται}}{\text{Μονάδες του αγαθού που παράγεται}}$$

Το κόστος ευκαιρίας έχει δυνατότητες να είναι :

1. Αυξανόμενο συνεχώς
2. Μειούμενο συνεχώς
3. Σταθερό
4. Σταθερό και = 1

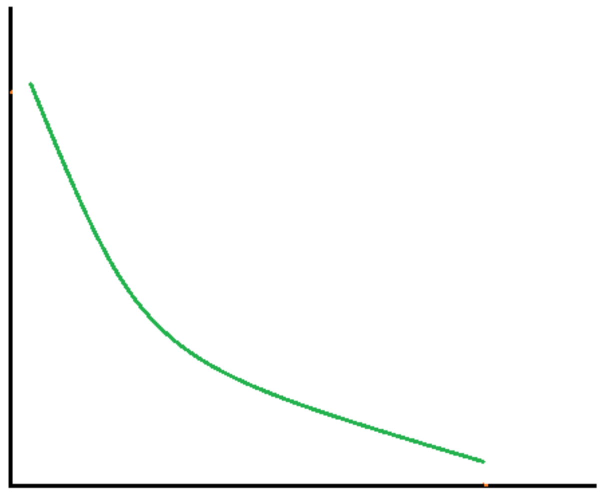
Κόστος ευκαιρίας συνεχώς αυξανόμενο :



Οι παραγωγικοί συντελεστές σε αυτή την περίπτωση δεν είναι εξίσου κατάλληλοι για την παραγωγή όλων των αγαθών και στην περίπτωση που θα αυξάνεται η παραγωγή ενός αγαθού θα αποσπώνται από την παραγωγή ενός άλλου αγαθού.

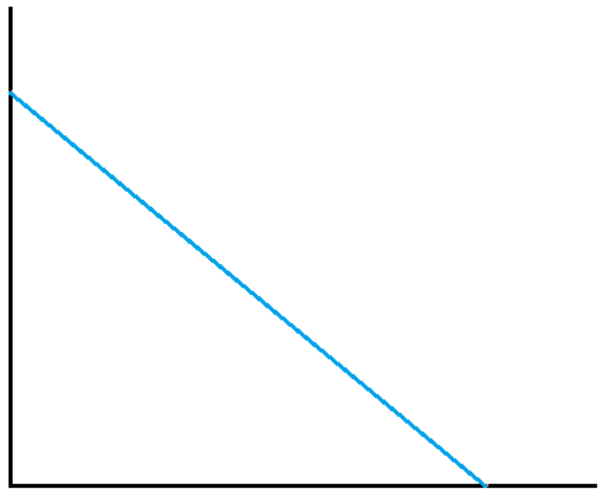
Κόστος ευκαιρίας συνεχώς μειούμενο:

Κόστος ευκαιρίας φθίνον:



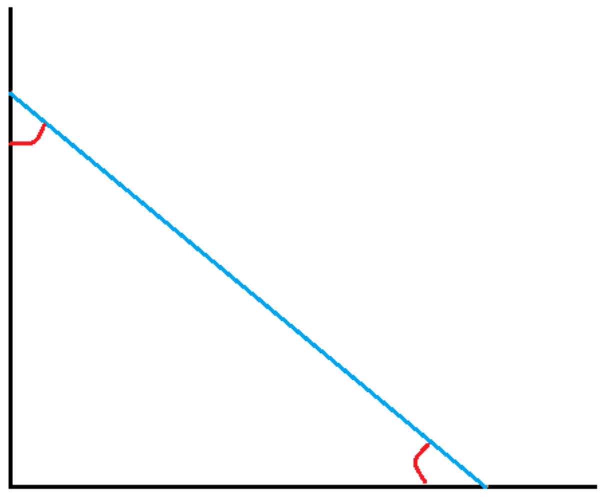
Σε αυτή την περίπτωση όταν αυξάνεται η παραγωγή ενός αγαθού οι συντελεστές που αποσπώνται από την παραγωγή ενός άλλου αγαθού είναι όλο και πιο πολύ εξειδικευμένοι ως προς την παραγωγή αυτού του αγαθού.

Κόστος ευκαιρίας σταθερό:



Σε αυτή την περίπτωση όλοι οι παραγωγικοί συντελεστές είναι το ίδιο κατάλληλοι για την παραγωγή όλων των αγαθών.

Κόστος ευκαιρίας σταθερό και = 1:



Οι παραγωγικοί συντελεστές είναι κατάλληλοι για την παραγωγή όλων των αγαθών , η μόνη διαφορά που υπάρχει σε αυτή την περίπτωση είναι ότι η ευθεία γραμμή σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

2.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Η συνάρτηση ζήτησης είναι τις περισσότερες φορές φθίνουσα, δηλαδή η κλίση της καμπύλης της είναι αρνητική. Είναι μία μαθηματική εξίσωση και προσδιορίζει τη συνολική ζήτηση για ένα προϊόν σε σχέση με τους παράγοντες που την επηρεάζουν.

Τη ζητούμενη ποσότητα ενός προϊόντος την επηρεάζει :

- ✓ Η τιμή του προϊόντος
- ✓ Οι προτιμήσεις των καταναλωτών
- ✓ Οι τιμές των διάφορων υποκατάστατων του προϊόντος
- ✓ Οι τιμές των διάφορων συμπληρωματικών του προϊόντος
- ✓ Το εισόδημα των καταναλωτών
- ✓ Η αναμενόμενη τιμή του ζητούμενου προϊόντος σε κάποια μελλοντική περίοδο
- ✓ Οι προσδοκίες για την εξέλιξη των εισοδημάτων στο μέλλον

Η συνάρτηση ζήτησης έχει ως εξής:

$$Q = \alpha - \beta P$$

Όπου:

Q = η ζήτηση

α και β = δύο παράμετροι που μπορούν να εκτιμηθούν οικονομικά

P= η τιμή

Η ζήτηση για ένα αγαθό δείχνει την ποσότητα του αγαθού που οι καταναλωτές επιθυμούν να αγοράσουν σε κάθε επίπεδο τιμής του. Όμως η απλή επιθυμία ενός καταναλωτή για ένα προϊόν δεν αποτελεί ζήτηση. Είναι απαραίτητο να υπάρχει αγοραστική δύναμη που απαιτείται για την αγορά του.

Ορισμός :

Ως υποκατάστατο αγαθό ορίζεται εκείνο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση κάποιου άλλου. Ενώ ως συμπληρωματικό αγαθό ορίζεται εκείνο το οποίο καταναλώνεται σε συνδυασμό με κάποιο άλλο.

Επομένως, η ζητούμενη ποσότητα εξαρτάται από την τιμή στην περίπτωση όπου όλες οι άλλες μεταβλητές παραμένουν σταθερές.

Για παράδειγμα, η ζήτηση ενός αγαθού X μπορεί να δοθεί από τη συνάρτηση, Q = 400-4P. Η εξίσωση αυτή περιγράφει το **νόμο της ζήτησης** σύμφωνα με τον οποίο υπάρχει αρνητική σχέση μεταξύ της ζητούμενης ποσότητας ενός αγαθού και της τιμής του. Με λίγα λόγια δηλαδή όταν η τιμή ενός προϊόντος αυξάνεται η ζητούμενη ποσότητα του συγκεκριμένου αγαθού μειώνεται ενώ όταν η τιμή μειώνεται η ζήτηση αυξάνεται ενώ όλοι οι υπόλοιποι παράγοντες μένουν σταθεροί.

Η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης του Q = 400 - 4P δίνεται ως:

$$Q = 400 - 4P$$

$$4P = 400 - Q$$

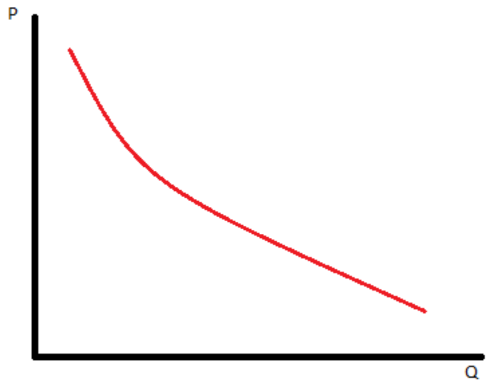
$$P = 100 - 0.5Q$$

Άρα: όταν η μορφή της συνάρτησης είναι Q = f(P) έχουμε συνάρτηση ζήτησης ενώ όταν η μορφή είναι P = g(Q) τότε έχουμε αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης.

Καμπύλη ζήτησης:

Μέσω της καμπύλης της ζήτησης φαίνεται η ζητούμενη ποσότητα που ο καταναλωτής είναι διατεθειμένος να αγοράσει σε οποιαδήποτε τιμή. Σε όλες τις περιπτώσεις η καμπύλη της ζήτησης έχει αρνητική κλίση .

Δηλαδή :



Οι λόγοι που ισχύει ο νόμος της ζήτησης είναι οι εξής :

1. Η επίδραση της υποκατάστασης
2. Η επίδραση του εισοδήματος

- Ατομική και συλλογική ζήτηση

Η συνολική ζήτηση για ένα αγαθό μπορεί να προκύψει από το οριζόντιο άθροισμα όλων των ατομικών καμπύλων ζήτησης για το συγκεκριμένο προϊόν .

Πιο αναλυτικά:

Σε μία αγορά με 4 καταναλωτές έχουμε :

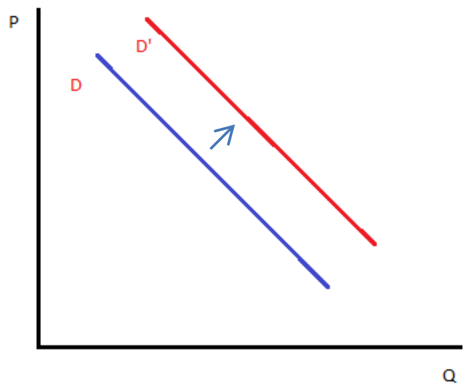
P	QA	QB	QΓ	QΔ	QD
25	90	50	150	80	370
20	100	60	160	90	410
15	110	70	170	100	450

- Μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα και στη ζήτηση

Εάν υποτεθεί για παράδειγμα ότι για την αντιμετώπιση της ημικρανίας ο ασθενής πρέπει να πίνει φυτικά προϊόντα για να μπορεί να αποφευχθεί ο πόνος , τότε πως επηρεάζει κάτι τέτοιο την ζήτηση των φυτικών προϊόντων ;

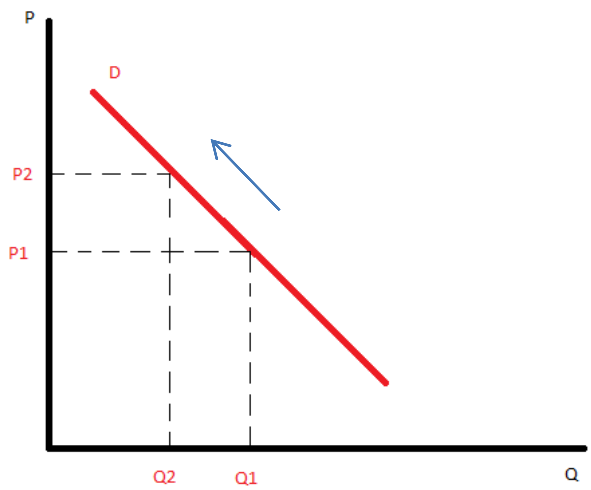
Αναπόφευκτα αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μεταβολή των προτιμήσεων και αυξάνει την ζήτηση. Σε κάθε τιμή που λαμβάνει το προϊόν οι αγοραστές ζητούν μεγαλύτερες ποσότητες με αποτέλεσμα η καμπύλη ζήτησης να μετατοπίζεται προς τα δεξιά.

P	QD	Q’D
80	150	230
50	200	280
30	250	330



Στην περίπτωση που μεταβληθεί η τιμή , η καμπύλη ζήτησης δεν μετατοπίζεται αλλά υπάρχει μετακίνηση από το ένα σημείο στο άλλο .

Εάν για παράδειγμα η τιμή αυξηθεί τότε :



- **Ελαστικότητα ζήτησης**

Ως ελαστικότητα της ζήτησης ορίζεται:

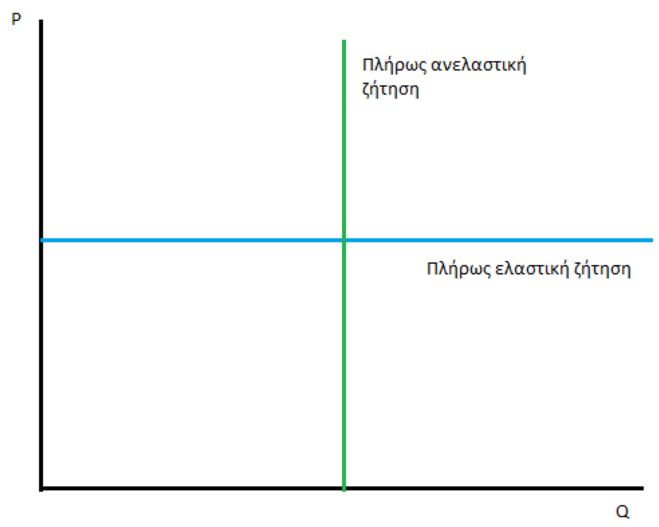
$$E_D = \frac{\textit{Ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας}}{\textit{Ποσοστιαία μεταβολή της τιμής}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\ x\ \frac{P}{Q}$$

- ✓ Σε περίπτωση για παράδειγμα ,που αυξηθεί η τιμή κατά 20% και η ζητούμενη ποσότητα μειωθεί 30% τότε η ελαστικότητα της ζήτησης είναι ίση με -1.5

Η ελαστικότητα της ζήτησης θεωρείται υψηλή στην περίπτωση μόνο που ισούται με μεγάλο αρνητικό αριθμό.

Όταν $E_D > 1$ τότε η ζήτηση ονομάζεται ελαστική

Όταν $E_D < 1$ τότε η ζήτηση ονομάζεται ανελαστική



- Τοξοειδής ελαστικότητα :

Σύμφωνα με το σημείο που είναι αρχικό αλλάζει και το μέγεθος της ελαστικότητας. Για να εξεταστεί εάν η ζήτηση είναι ελαστική ή ανελαστική τότε :

Τοξοειδής $E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\ x\ \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}$

- Ελαστικότητα σημείου :

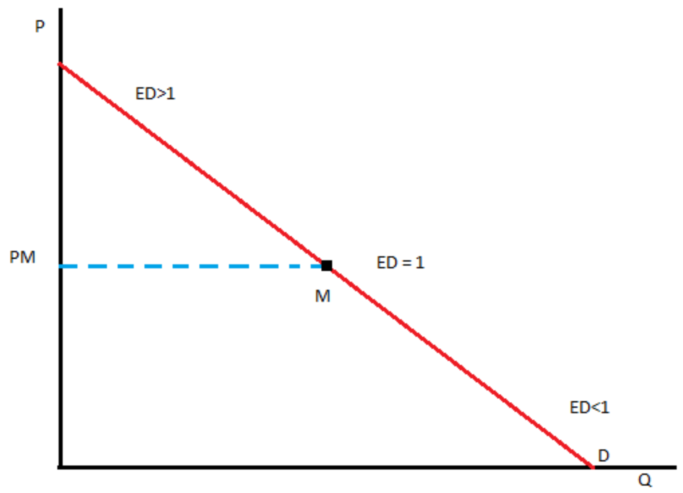
Είναι η αναφορά στην ελάχιστη μεταβολή της τιμής , δηλαδή :

$\mathrm{E} = \frac{dQ}{dP}\ x\ \frac{P}{Q}$

- Κλίση της καμπύλης στην ελαστικότητα ζήτησης

Η κλίση που έχει η καμπύλη ζήτησης επηρεάζει την ελαστικότητα ζήτησης αλλά σε καμία περίπτωση δεν ταυτίζονται. Για παράδειγμα, όταν η ζήτηση είναι μία ευθεία γραμμή που έχει αρνητική κλίση , ενώ στη μέση της γραμμής η κλίση είναι σταθερή, η ελαστικότητα έχει μεταβολή.

Δηλαδή :



- Τα συνολικά έσοδα και η ελαστικότητα της ζήτησης :

Όταν υπάρχουν μεταβολές στη ζήτηση η μεταβλητή που θέλουμε να έχουμε ενημέρωση είναι τα έσοδα, δηλαδή, τα ποσά που εισπράττουν οι επιχειρήσεις από την πώληση των προϊόντων τους.

Τα συνολικά έσοδα ορίζονται ως : TR = P x Q

- ✓ Σε περίπτωση που E_D > 1 η μεταβολή των εσόδων είναι στην αντίθετη κατεύθυνση από την μεταβολή της τιμής
- ✓ Σε περίπτωση που E_D < 1 η μεταβολή των εσόδων είναι στην ίδια κατεύθυνση με την μεταβολή της τιμής
- ✓ Σε περίπτωση που E_D = 1 τα έσοδα στο σύνολό τους δεν μεταβάλλονται.

Οι παράγοντες που προσδιορίζουν την ελαστικότητα της ζήτησης :

1. Τα υποκατάστατα αγαθά. Όσο το δυνατόν περισσότερα και καλύτερα υποκατάστατα έχει ένα αγαθό τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η ελαστικότητα της ζήτησης.
2. Η σπουδαιότητα του αγαθού σχετικά με το συνολικό εισόδημα. Όσο πιο πολύ εισόδημα διατίθεται στην αγορά του αγαθού τόσο πιο μεγάλη θα είναι και η ελαστικότητα της ζήτησής του.
3. Πόσο σημαντική είναι η ανάγκη που ικανοποιεί το συγκεκριμένο προϊόν. Όσο περισσότερη είναι η ανάγκη για το συγκεκριμένο προϊόν τόσο μικρότερη θα είναι η ελαστικότητα της ζήτησης.
4. Όταν είναι μεγαλύτερα τα χρονικά διαστήματα τότε η ελαστικότητα της ζήτησης είναι μεγαλύτερη.
5. Η ζήτηση για αγαθά τα οποία έχουν μεγαλύτερη διάρκεια ζωής επιφέρει συνήθως μεγαλύτερη ελαστικότητα συγκριτικά με την ζήτηση των αγαθών που έχουν μικρή διάρκεια ζωής.
6. Ο κορεσμός της αγοράς για ένα συγκεκριμένο αγαθό. Σε περίπτωση που αγορά έχει κορεσμό τότε η ελαστικότητα της ζήτησης είναι μικρή.
7. Η διανομή του εισοδήματος. Όταν ένα αγαθό απευθύνεται μεγάλη ομάδα πληθυσμού τότε η ελαστικότητα ζήτησης είναι μεγάλη.

- Σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης

Ορίζεται ως :

$$E_{AB} = \frac{Η\ ποσοστιαία\ μεταβολή\ της\ ποσότητας\ του\ A}{Η\ ποσοστιαία\ μεταβολή\ της\ ποσότητας\ του\ B} = \frac{ΔQ_A}{ΔQ_B}\ x\ \frac{P_B}{Q_A}$$

- ✓ Όταν είναι υποκατάστατα αγαθά : E_{AB} > 0
- ✓ Όταν είναι συμπληρωματικά αγαθά : E_{AB} < 0
- ✓ Όταν τα αγαθά είναι ανεξάρτητα : E_{AB} = 0

Η επίδραση του εισοδήματος στην ζήτηση :

Εισοδηματική ελαστικότητα ζήτησης :

$$η = \frac{Η\ ποσοστιαία\ μεταβολή\ της\ ποσότητας\ του\ A}{Η\ ποσοστιαία\ μεταβολή\ του\ εισοδήματος} = \frac{ΔQ_A}{ΔI}\ x\ \frac{I}{Q_A}$$

- ✓ Σε περίπτωση που τα αγαθά είναι κανονικά τότε η > 0
- ✓ Σε περίπτωση που τα αγαθά είναι κατώτερα τότε η < 0
- ✓ Σε περίπτωση που τα αγαθά είναι πολυτελή τότε η > 1
- ✓ Σε περίπτωση που τα αγαθά είναι πρώτης ανάγκης τότε 0 < η < 1

Η ζήτηση των προϊόντων και η καταναλωτική συμπεριφορά:

Ορθολογικός καταναλωτής :

Ως ορθολογικός καταναλωτής χαρακτηρίζεται ένα άτομο το οποίο κάνει εκτίμηση του κόστους και των ωφελειών ενός αγαθού που προβαίνει στην αγορά του.

Οι προσεγγίσεις σχετικά με την ανάλυση της συμπεριφοράς του ορθολογικού καταναλωτή είναι οι εξής :

1.Μέσω της οριακής χρησιμότητας, η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι η χρησιμότητα είναι δυνατόν να μετρηθεί.

2.Μέσω των καμπυλών αδιαφορίας, κατά την οποία είναι απαραίτητο να γίνει σύγκριση και ιεράρχηση της χρησιμότητας των διάφορων αγαθών.

Χρησιμότητα :

Ο σκοπός που οι άνθρωποι προβαίνουν στο να κάνουν αγορές σε διάφορα αγαθά ή υπηρεσίες είναι για το λόγο ότι μέσα από αυτά αντλούν ικανοποίηση. Στα οικονομικά ο όρος ικανοποίηση έχει αντικατασταθεί με τον όρο χρησιμότητα.

- Συνολική χρησιμότητα (TU): ορίζεται η συνολική ικανοποίηση που αποκτά ο καταναλωτής όταν κάνει συνολική κατανάλωση για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο.
- Οριακή χρησιμότητα (MU) : ορίζεται η επιπλέον ικανοποίηση που προέρχεται από την κατανάλωση μίας επιπλέον μονάδας ενός αγαθού ή υπηρεσίας.

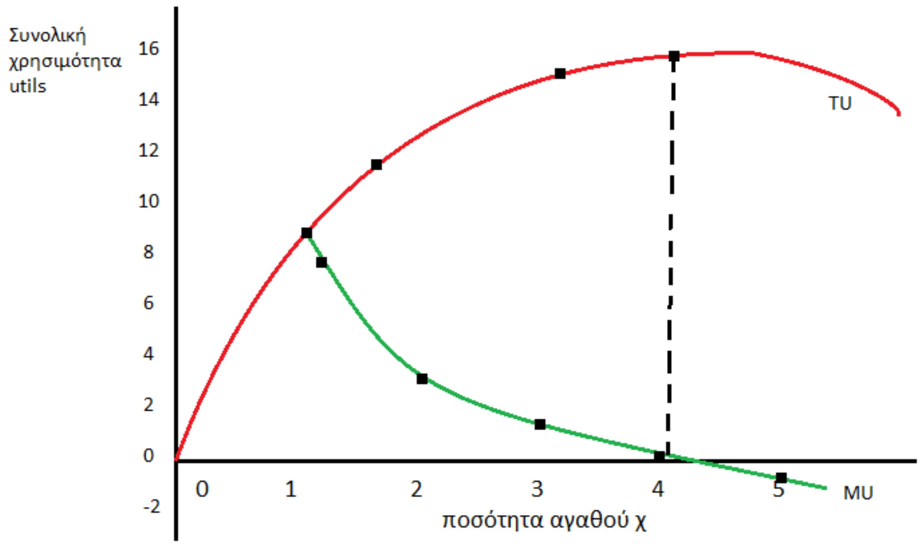
Util $\longrightarrow$ μονάδα μέτρησης της χρησιμότητας

Νόμος της φθίνουσας οριακής χρησιμότητας

Όσο μεγαλώνει η κατανάλωση ενός αγαθού , κάθε μία μονάδα επιπρόσθετη έχει ως αποτέλεσμα λιγότερη αύξηση της χρησιμότητας συγκριτικά με τις προηγούμενες μονάδες.

Παράδειγμα

Μονάδες αγαθού Χ	TU	MU
0	0	-
1	7	7
2	12	5
3	16	3
4	16	0
5	13	-1



Παρατηρήσεις :

Η καμπύλη MU έχει αρνητική κλίση για τον λόγο ότι ισχύει ο νόμος της φθίνουσας οριακής χρησιμότητας.

Η καμπύλη TU ξεκινάει από την αρχή των δύο αξόνων

Όταν MU = 0 φτάνει σε μέγιστο η καμπύλη MU

Σε περίπτωση που γνωρίζουμε το TU η MU γίνεται ως εξής : MU = $\frac{\Delta TU}{\Delta Q}$

<u>Μεγιστοποίηση της χρησιμότητας :</u>

<u>Παράδειγμα:</u>

Εάν υποτεθεί ότι το κρασί επιφέρει διπλάσια ικανοποίηση από την μπύρα στον καταναλωτή αλλά η τιμή του είναι πενταπλάσια, ο καταναλωτής για να αξιοποιήσει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τα χρήματά του θα επιλέξει την μπύρα.

Αναλυτικά:

Πρέπει να γίνει σύγκριση των λόγων της οριακής χρησιμότητας προς την τιμή για κάθε αγαθό , δηλαδή :

$\frac{MU_K}{P_K} < \frac{MU_M}{P_M}$

Όσο αυξάνεται η κατανάλωση της μπύρας και μειώνεται η κατανάλωση του κρασιού τότε: η MU_K αυξάνεται και η MU_M μειώνεται μέχρι :

$\frac{MU_K}{P_K} = \frac{MU_M}{P_M}$

Με αυτό τον τρόπο έχει βρεθεί ο άριστος συνδυασμός μεταξύ αυτών των δύο αγαθών.

Άρα για όλα τα αγαθά ισχύει: $\frac{MU_1}{P_1} = \frac{MU_2}{P_2} = \ldots\ldots = \frac{MU_n}{P_n}$

2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ

Η συνάρτηση προσφοράς περιγράφει τη σχέση της συνολικής προσφοράς ενός αγαθού σύμφωνα με τους παράγοντες που την προσδιορίζουν.

Η προσφερόμενη ποσότητα ενός αγαθού (Q) επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες οι οποίοι είναι :

- ✓ Η τιμή του αγαθού
- ✓ Το κόστος παραγωγής
- ✓ Η δυνατότητα κερδοφορίας εναλλακτικών αγαθών
- ✓ Η δυνατότητα κερδοφορίας των αγαθών που παράγονται μαζί με το συγκεκριμένο προϊόν
- ✓ Οι τυχαίοι ή άλλοι παράγοντες
- ✓ Οι στόχοι των παραγωγών
- ✓ Η αναμενόμενη τιμή του προσφερόμενου αγαθού σε μία μελλοντική περίοδο

Για να γίνει εκτίμηση μίας τέτοιου είδους συνάρτησης δεν είναι εύκολο πράγμα, γιατί κάποια από τα στοιχεία τα οποία είναι απαραίτητα για αυτή είναι δύσκολο να συγκεντρωθούν.

Για παράδειγμα είναι δύσκολο να συγκεντρωθούν στοιχεία για τις δυνατότητες κερδοφορίας που έχουν κάποια εναλλακτικά αγαθά.

Άρα με κάποιες απλοποιήσεις χρησιμοποιείται η συνάρτηση ως εξής:

$Q = β+γP$

Όπου:

Q = η προσφερόμενη ποσότητα του αγαθού

P = η τιμή του αγαθού

β και γ = οι παράμετροι που μπορούν οικονομικά να εκτιμηθούν.

Ως γ συμβολίζεται η μεταβαλλόμενη προσφερόμενη ποσότητα όταν αλλάζει η τιμή, ενώ ως β συμβολίζεται η επίδραση όλων των παραγόντων που δεν έχουν συμπεριληφθεί στην εξίσωση.

Για παράδειγμα:

Αν β = 20.000 και γ = 1.000 και P = 1.500 η μορφή που παίρνει η εξίσωση είναι :

Q = 20.000 + (1.000 x 1.500) = 1.520.000

Το πιο απλό μοντέλο για τη συνάρτηση της προσφοράς μπορεί να αποδοθεί ως :

Q = f(P) με λίγα λόγια δηλαδή η προσφερόμενη ποσότητα εξαρτάται μόνο από την τιμή στην περίπτωση που όλες οι άλλες μεταβλητές παραμένουν σταθερές. Μέσα από αυτή την εξίσωση περιγράφεται ο **νόμος της προσφοράς** , σύμφωνα με τον οποίο υπάρχει θετική σχέση μεταξύ της προσφερόμενης ποσότητας ενός αγαθού με την τιμή του. Άρα , όταν η τιμή ενός αγαθού αυξάνεται , παράλληλα αυξάνεται και η προσφερόμενη ποσότητα ενώ όταν η τιμή μειώνεται , μειώνεται και η προσφορά του , καθώς όλοι οι υπόλοιποι παράγοντες παραμένουν σταθεροί.

- Συνολική και ατομική προσφορά:

Η συνολική προσφορά για ένα προϊόν προκύπτει από το οριζόντιο άθροισμα όλων των ατομικών καμπύλων προσφοράς για το συγκεκριμένο προϊόν.

- Μεταβολή στη προσφερόμενη ποσότητα και στη προσφορά :

Οι μεταβολές που μπορεί να έχει η τιμή ενός προιόντος οδηγούν με την σειρά τους σε μεταβολή της προσφερόμενης ποσότητας, ενώ οι μεταβολές των υπόλοιπων προσδιοριστικών παραγόντων, μεταβάλουν την προσφορά.

Ζήτηση και προσφορά σε συνδυασμό :

- ✓ Αγορά σε ισορροπία :

Έτσι ονομάζεται το σημείο τομής των καμπύλων ζήτησης και προσφοράς. Η τιμή του συγκεκριμένου σημείου ονομάζεται τιμή ισορροπίας ενώ η ποσότητα, ποσότητα ισορροπίας. Άλλη ονομασία που μπορεί να συναντήσουμε για την τιμή ισορροπίας είναι : τιμή εκκαθάρισης της αγοράς.

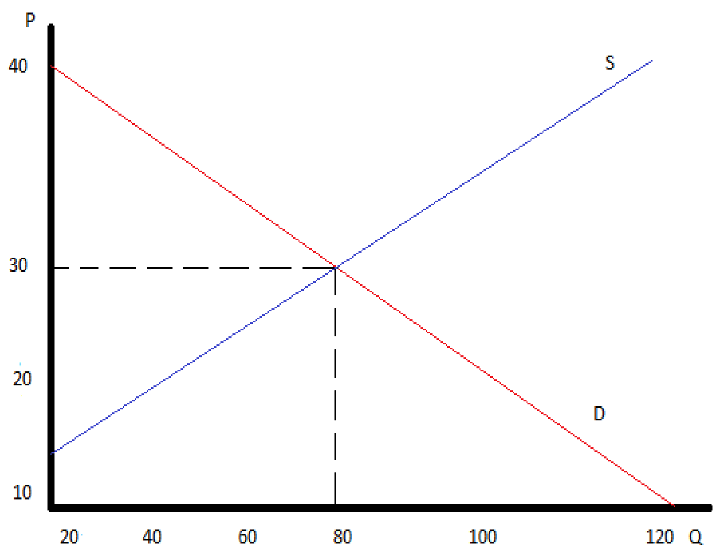
Ως ισορροπία χαρακτηρίζεται η κατάσταση κατά την οποία οι δυνάμεις της προσφοράς και της ζήτησης εξισορροπούν μεταξύ τους. Χαρακτηριστικό είναι ότι στην τιμή ισορροπίας η ποσότητα την οποία είναι πρόθυμοι οι καταναλωτές να αγοράσουν είναι ίση με την ποσότητα που οι πωλητές είναι πρόθυμοι να πουλήσουν.

Σε περίπτωση που η τιμή είναι μεγαλύτερη από την τιμή ισορροπίας τότε η προσφορά ονομάζεται υπερβάλλουσα ενώ εάν η τιμή είναι μικρότερη από την τιμή ισορροπίας τότε η ζήτηση ονομάζεται υπερβάλλουσα.

- **Καμπύλη προσφοράς και ζήτησης μαζί**

Εάν υποτεθεί ότι έχουμε τις παρακάτω τιμές :

P	QD	QS
10	120	40
20	100	60
30	80	80
40	60	100

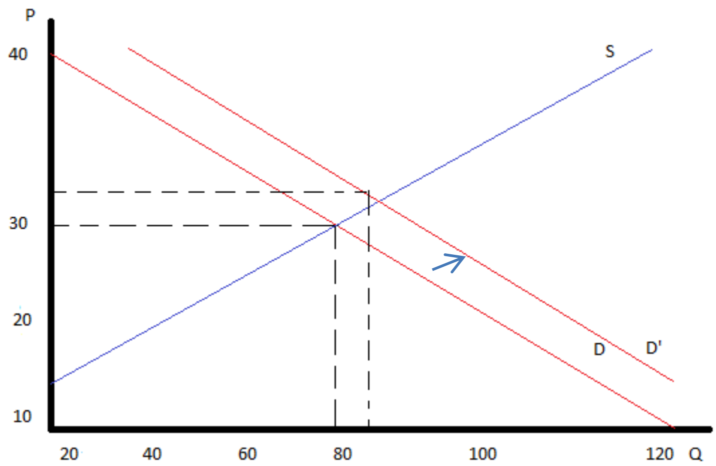


- Μεταβολές στην προσφορά και στη ζήτηση

Σε περίπτωση μεταβολής κάποιου γεγονότος τότε αυτό έχει ως αποτέλεσμα την μετατόπιση των καμπυλών της προσφοράς και της ζήτησης , πράγμα το οποίο σημαίνει ότι μεταβάλλεται και η ισορροπία. Η συγκριτική στατιστική είναι αυτή που αναλύει τέτοιες μεταβολές , δηλαδή συγκρίνει δύο θέσεις ισορροπίας διαφορετικές μεταξύ τους.

Παράδειγμα :

Έστω ότι η μεταβολή του καιρού είναι μεγάλη και κάνει πολύ ζέστη. Αυτό το γεγονός πως επηρεάζει την αγορά του παγωμένου καφέ; Παρατηρείται η καμπύλη της ζήτησης να μετατοπίζεται προς τα δεξιά διότι η ζήτηση αυξάνεται με αποτέλεσμα να αυξάνεται η τιμή αλλά και η ποσότητα ισορροπίας.



Σχετικά με την προσφορά με την αλλαγή του καιρού οι επιχειρήσεις πωλούν μεγαλύτερη ποσότητα παγωμένου καφέ οπότε αναπόφευκτα έχουμε μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα.

Το ίδιο συμβαίνει αντίστοιχα όταν υπάρχει αύξηση στης προσφοράς η οποία επιφέρει μείωση της τιμής και παράλληλα αύξηση στην ποσότητα ισορροπίας ή και το αντίθετο.

- **Ελαστικότητα προσφοράς :**

$$\mathrm{E}_S = \frac{\textit{Η ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας}}{\textit{Η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\ x\ \frac{P}{Q}$$

Παράγοντες που προσδιορίζουν την ελαστικότητα της προσφοράς:

1. Ένας από τους κύριους παράγοντες είναι ο χρόνος, όσο μεγαλύτερη είναι η χρονική περίοδος που εξετάζεται τόσο πιο δυνατή είναι η προσαρμογή της παραγωγής με αποτέλεσμα να γίνεται και ελαστική η προσφορά.
2. Η ειδίκευση των συντελεστών παραγωγής. Όσο περισσότερο ειδικευμένοι είναι οι παραγωγικοί συντελεστές τόσο μικρότερη είναι η ελαστικότητα της προσφοράς.

Για παράδειγμα, εάν σε μία επιχείρηση βιολογικών προϊόντων η ελαστικότητα προσφοράς είναι πολύ μικρή και η ελαστικότητα ζήτησης επίσης μικρή τότε αυτό μπορεί να οδηγήσει στη μείωση του εισοδήματος.

Πιο αναλυτικά :

2.3 ΚΟΣΤΟΣ

Τα κόστη τα οποία επιβαρύνονται οι επιχειρήσεις είναι όταν χρησιμοποιούν εισροές όπως είναι το κεφάλαιο και η εργασία με σκοπό να επιτευχθεί η παραγωγή των προϊόντων έτσι ώστε να μπορούν να διατεθούν για πώληση.

Το συνολικό κόστος της παραγωγής ενός αγαθού αποτελείται από :

1. Τα σταθερά κόστη (FC), δηλαδή τα κόστη που είναι ανεξάρτητα από το επίπεδο παραγωγής, για παράδειγμα, ενοίκιο της εγκατάστασης.
2. Τα μεταβλητά κόστη (VC), δηλαδή τα κόστη που μπορούν να μεταβληθούν σύμφωνα με το επίπεδο παραγωγής της επιχείρησης, για παράδειγμα, πρόσθετη εργασία κτλ.

Επομένως το συνολικό κόστος (TC) είναι το άθροισμα του σταθερού και του μεταβλητού κόστους.

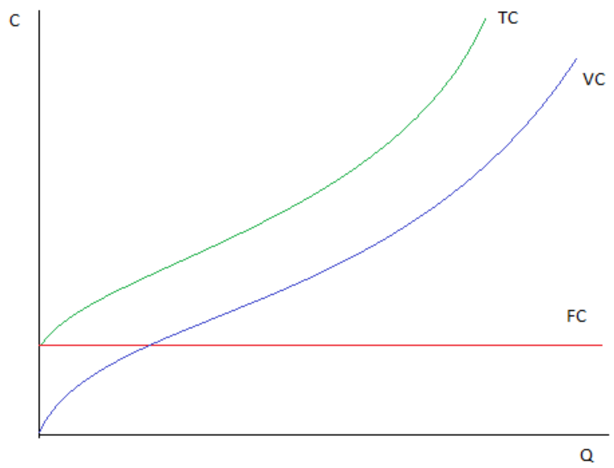
$$TC = FC + VC$$

- Το κόστος σε βραχυχρόνια περίοδο

Οι επιχειρήσεις πρέπει να πάρουν την δύσκολη απόφαση να επιβαρυνθούν με κόστη για να αγοράσουν παραγωγικούς συντελεστές με σκοπό να μπορέσουν να παράγουν τα προϊόντα τους για να είναι ικανά να τεθούν προς πώληση.

Πιο αναλυτικά στον παρακάτω πίνακα δίνονται διάφορα στοιχεία κόστους μίας επιχείρησης έτσι ώστε να γίνει κατανοητή αυτή η επίδραση.

Προϊόν Q	Σταθερό κόστος FC	Μεταβλητό κόστος VC	Συνολικό κόστος TC
0	15	0	15
1	15	12	27
2	15	25	40
3	15	30	45



- ✓ VC = f (Q) το μεταβλητό κόστος το οποίο εξαρτάται από το ύψος της παραγωγής
- ✓ FC το σταθερό κόστος το οποίο δεν επηρεάζεται από την παραγωγή

Μία επιχείρηση πρέπει να γνωρίζει την ποσότητα που χρειάζεται να παράγει, επομένως πρέπει να γνωρίζει και το κόστος του οποίου η μεταβολή επηρεάζεται από την ποσότητα που παράγεται.

Ως **μέσο συνολικό κόστος** χαρακτηρίζεται εκείνο το οποίο μας δείχνει το κόστος μίας μονάδας του προϊόν σε σχέση με το συνολικό κόστος το οποίο έχει επιμερισθεί σε όλες τις μονάδες του συγκεκριμένου προϊόντος.

- ✓ Μέσο συνολικό κόστος : AC = $\frac{TC}{Q}$
- ✓ Μέσο σταθερό κόστος : AFC = $\frac{FC}{Q}$
- ✓ Μέσο μεταβλητό κόστος : AVC = $\frac{VC}{Q}$
- ✓ AC = AFC + AVC

Οριακό κόστος

Ως οριακό κόστος χαρακτηρίζεται το κόστος που προκύπτει από τη παραγωγή μίας ακόμα μονάδας προϊόντος και ορίζεται ως:

$$\text{Οριακό κόστος} = \frac{\textit{Μεταβολή Συνολικού Κόστους}}{\textit{Μεταβολή του προϊόντος}}$$

$$\text{Δηλαδή: MC} = \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = \frac{\Delta VC}{\Delta Q}$$

Στην ουσία δείχνει το ρυθμό με βάση τον οποίο μεταβάλλεται το συνολικό κόστος όταν μεταβάλλεται η παραγωγή κατά μία μονάδα.

Το οριακό κόστος επηρεάζεται μόνο από τις μεταβολές του μεταβλητού κόστους διότι το σταθερό κόστος δεν αλλάζει ανάλογα με τον αριθμό των αγαθών που παράγονται.

- ✓ Επιχειρηματικές αποφάσεις και οριακό κόστος:

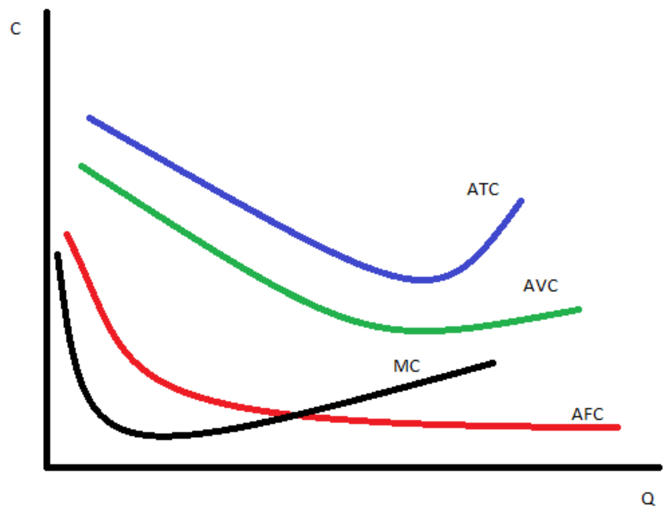
Ο ρόλος που έχει το οριακό κόστος στη λήψη αποφάσεων των επιχειρήσεων σχετικά με την αύξηση της παραγωγής είναι πολύ σημαντικός. Ο λόγος έγκειται στο γεγονός ότι παρέχει ενημέρωση σχετικά με το εάν υπάρχει ή όχι συμφέρον στην παραγωγή μίας επιπλέον μονάδας προϊόντος. Αυτό προκύπτει από τη σύγκριση του πρόσθετου κόστους που θα δημιουργηθεί από την παραγωγή της μονάδας αυτής (οριακό κόστος), με το πρόσθετο έσοδο που θα αποφέρει (οριακό έσοδο). Θα ήταν καλό να αναφερθεί ότι η σημασία του οριακού κόστους διαφέρει ανάλογα με τον κλάδο και το παραγόμενο προϊόν.

Στις επιχειρήσεις όπου το μέσο κόστος είναι σταθερό τότε το οριακό κόστος ισούται με το μέσο κόστος. Όμως, σε επιχειρήσεις που απαιτούν μεγάλες επενδύσεις κεφαλαίου , γεγονός το οποίο επιφέρει υψηλό μέσο κόστος, το οριακό κόστος είναι πολύ χαμηλό.

Το οριακό κόστος σαν έννοια είναι πολύ σημαντική για τη βελτίωση των επιπέδων παραγωγής, καθώς αυτό γίνεται όταν το οριακό κόστος είναι ίσο με το οριακό έσοδο.

Για παράδειγμα μία υποτιθέμενη επιχείρηση έχει τα εξής διάφορα στοιχεία κόστους :

Q	FC	VC	TC	AFC	AVC	ATC	MC
0	15	0	15	-	-	-	-
1	15	12	27	15	12	27	12
2	15	18	33	7.5	9	16.5	6
3	15	22	38	5	7.3	12.6	4
4	15	30	45	3.7	7.5	11.2	8



Παρατηρήσεις :

Οι καμπύλες οριακού κόστους, μέσου συνολικού και μέσου μεταβλητού αν παρατηρήσει κανείς έχουν σχήμα U

Όταν AVC < MC τότε το AVC αυξάνεται , το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση του ATC. Ενώ όταν AVC > MC τότε το AVC μειώνεται , αντίστοιχα το ίδιο γίνεται και στην περίπτωση του ATC.

- Το κόστος σε μακροχρόνια περίοδο

Σε περίπτωση που μία επιχείρηση πρέπει να πάρει αποφάσεις για μακροχρόνια περίοδο αυτό αυτόματα της προσδίδει μεγαλύτερη ευελιξία. Για παράδειγμα μπορεί να θελήσει να επεκτείνει τις δραστηριότητές της πράγμα το οποίο σημαίνει ότι όλοι οι συντελεστές της είναι μεταβαλλόμενοι και δεν υφίσταται ο νόμος της φθίνουσας απόδοσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει σταθερό κόστος μιας και δεν υπάρχουν σταθεροί συντελεστές.

- ✓ Καμπύλες μακροχρόνιο μέσου κόστους (LAC):

Στην περίπτωση που η παραγωγή της επιχείρησης χαρακτηρίζεται από κλίμακα οικονομίας τότε η καμπύλη LAC είναι φθίνουσα μόλις αυξηθεί η παραγόμενη ποσότητα.

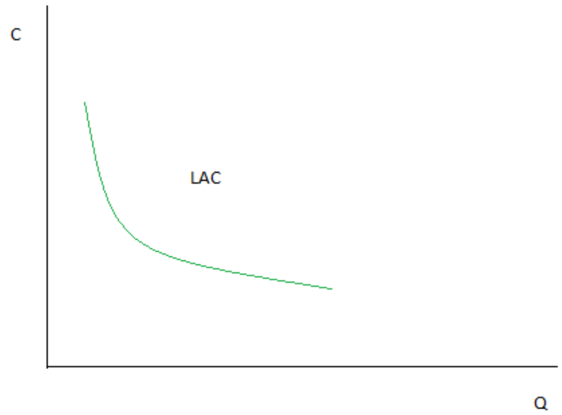
Σε αυτό το σημείο είναι καλό να αποδοθεί ο ορισμός των οικονομιών κλίμακας, δηλαδή, όταν μειώνεται το μέσο κόστος, αυξάνεται η κλίμακα παραγωγής.

Στην περίπτωση που υπάρχει κλίμακα αντί-οικονομιών τότε η καμπύλη LAC είναι αύξουσα .

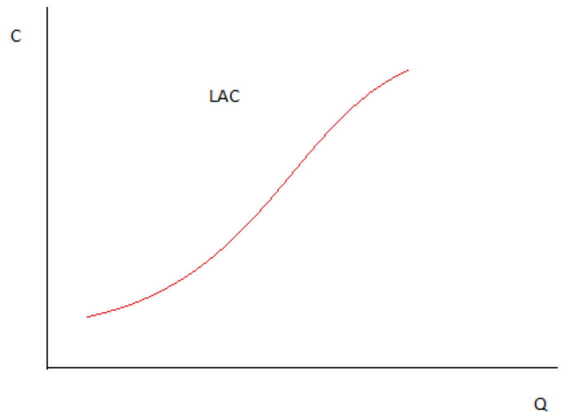
Όταν δεν υπάρχουν αυτές οι δύο περιπτώσεις τότε η καμπύλη LAC είναι οριζόντια.

Αναλυτικότερα :

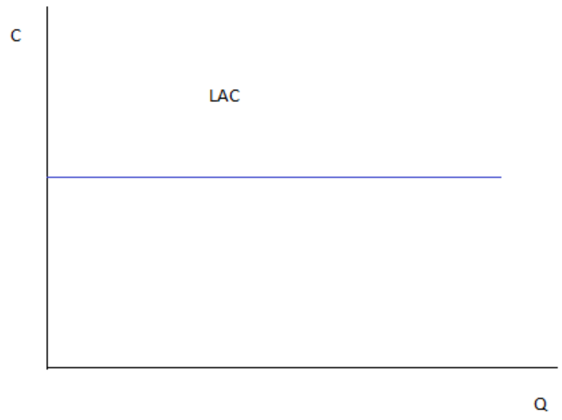
1.Οικονομίες κλίμακας:



2.Αντί-οικονομίες κλίμακας:



3.Σταθερό μέσο κόστος:



Συνήθως σε μία επιχείρηση η οποία επεκτείνεται , στην αρχή η παραγωγή χαρακτηρίζεται από οικονομίες κλίμακας, για αυτό το λόγο η καμπύλη LAC είναι φθίνουσα, στη συνέχεια όμως επειδή εξαντλούνται οι οικονομίες κλίμακας η LAC γίνεται οριζόντια. Όμως εάν η μεγέθυνση είναι πολύ μεγάλη τότε δημιουργούνται αντί-οικονομίες κλίμακας.

- ✓ Παράγοντες που επηρεάζουν τις οικονομίες κλίμακας:

1.Όταν υπάρχει καλύτερη δυνατότητα εξειδίκευσης των παραγωγικών συντελεστών. Κάτι το οποίο σημαίνει ότι γίνεται με καλύτερο τρόπο ο καταμερισμός των έργων και αξιοποιείται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο ο ήδη υπάρχον εξοπλισμός.

2.Όταν υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί ο κεφαλαιουχικός εξοπλισμός.

3. Όταν υπάρχει η ικανότητα να αγορασθούν ορισμένα μέσα παραγωγής με πολύ μειωμένο κόστος.

- ✓ Παράγοντες που δημιουργούν αντί-οικονομίες κλίμακας:

Σε αυτή την περίπτωση οι κύριοι παράγοντες και οι πιο σημαντικοί είναι αυτοί οι οποίοι σχετίζονται με γραφειοκρατικά και διοικητικά προβλήματα που υπάρχουν μέσα σε ένα τεράστιο οργανισμό.

2.4 ΈΣΟΔΑ

Τα έσοδα μίας επιχείρησης προέρχονται από την πώληση των προϊόντων που παράγει. Τα συνολικά έσοδα (TR) προσδιορίζονται από την τιμή του προϊόντος (P) επί τον αριθμό των πωληθέντων προϊόντων (Q).

Επομένως:

$$TR = P \times Q$$

Στην περίπτωση που η τιμή για κάθε προϊόν που πωλείται είναι σταθερή τότε τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης μπορούν να παρασταθούν από μία ευθεία γραμμή. Με λίγα λόγια δηλαδή, κάθε επιχείρηση αποδέχεται μία σταθερή τιμή η οποία συμβολίζεται από μία οριζόντια συνάρτηση ζήτησης. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση των συνολικών εσόδων είναι ως εξής:

$$TR = P_0 Q$$

Όπου :

P_0 = η σταθερή τιμή ανά προϊόν η οποία αντιπροσωπεύεται από την κάθετη αποτέμνουσα μίας οριζόντιας συνάρτησης ζήτησης.

Κεφάλαιο 3ο : Μονοτονία – Ακρότατα

3.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Γνησίως αύξουσα συνάρτηση:

Μία συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως αύξουσα στην περίπτωση όπου σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ισχύει:

για κάθε x_1,$x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε:

f(x_1) < f(x_2)

2) Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση:

Μία συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στην περίπτωση όπου σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ισχύει:

για κάθε x_1,$x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε:

f(x_1) > f(x_2)

Παράδειγμα :

Η συνάρτηση f (x) = , x≠0 είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα (-∞, 0) και (0,∞).

Σε περίπτωση που θεωρηθεί ,$x_1 \in$ (-∞, 0) και $x_2 \in$ (0,∞) τότε $x_1 < 0 < x_2$ και

f(x_1) < f(x_2) , άρα η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞, 0) ∪ (0,∞).

3) Γνησίως μονότονη συνάρτηση:

Μία συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ στην περίπτωση όπου είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.

- ✓ Όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σε αυτό, τότε απλά η συνάρτηση ονομάζεται γνησίως μονότονη.
- ✓ Σε περίπτωση που η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα διάστημα Δ_1 και Δ_2 τότε αυτό δεν σημαίνει ότι είναι μονότονη και στην ένωσή τους $\Delta_1 \cup \Delta_2$

4) Μονοτονία της συνάρτησης f(x) = αx + β

- ✓ Στην περίπτωση όπου α > 0 τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R
- ✓ Στην περίπτωση όπου α < 0 τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

5) Ολικό ελάχιστο :

Όταν μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in$ A τότε ισχύει:

f(x) ≥ f(x_0) για κάθε $x_0 \in$ A

Το $x \in$ A ονομάζεται θέση ελαχίστου ενώ το f(x_0) ονομάζεται ολικό ελάχιστο ή σκέτο ελάχιστο της συνάρτησης f και ο συμβολισμός του είναι minf(x). Έτσι η συνάρτηση f για x = x_0 έχει ελάχιστο στο f(x_0).

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Μ(x_0 , f(x_0) είναι το χαμηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης της f.

6) Ολικό μέγιστο :

Όταν μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A παρουσιάζει μέγιστο στο

$x_0 \in A$ τότε ισχύει : f (x) ≤ f (x_0) για κάθε x $\in A$

7) Άρτια συνάρτηση :

Άρτια ονομάζεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A όταν για κάθε

x $\in A$ ισχύει :

- x ∈ A και f (-x) = f (x)

8) Περιττή συνάρτηση :

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α ονομάζεται περιττή όταν για κάθε

x ∈ A ισχύει :

- x ∈ A και f (-x) = -f(x)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = 4x – 2 με πεδίο ορισμού το διάστημα [-3,5].

α) Ποιο είναι το είδος της μονοτονίας της ;

β) Να αποδειχθεί ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 = -3 και μέγιστο στο x_0 = 5

γ) Να βρεθεί το min(fx) και το max(fx)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι της μορφής : f(x) = αx + β

με α = 4 > 0 είναι γνησίως αύξουσα στο R άρα και στο [-3,5]

β) x ∈ [-3,5] άρα : x ≥ -3 = f (x) ≥ f (-3)

επομένως το f(-3) είναι ελάχιστο

x ∈ [-3,5] άρα x ≤ 5 = f (x) ≤ f(5)

επομένως το f (5) είναι μέγιστο

γ) min f(x) = f(-3) = 4(-3)-2= -10

max f(x) = f(5) = 4 x 5 -2 =18

2. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R και για κάθε α,β ∈ R ισχύει :
f (α + β) = f (α) + f (β)

Να αποδειχθεί :

α) f(0) = 0

β) η f είναι περιττή

ΛΥΣΗ

α) Η f (α +β) = f (α) + f (β) για α=β=0 γίνεται :

f (0+0) = f (0) + f (0)

f(0) = 2f (0)

άρα f (0) = 0

β) Έστω για τυχαίο x ∈ R τότε και - x ∈ R για α = x και β = -x επομένως :

f (x + (-x)) = f(x) + f(-x)

f(0) = f (x) + f (-x)

0 = f(x) + f (x)

F (-x) = -f(x)

Άρα η f είναι περιττή

3. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $(x-1)^2$ + 4 α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,\infty)$

β) Να αποδειχθεί ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$

γ) Να βρεθεί το min f(x)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Έστω $x_1,x_2 \in (-\infty,1]$ με $x_1 < x_2$ τότε :

$x_1 < x_2 \leq 1$

$x_1 - 1 < x_2 - 1 \leq 0$

$(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2$

$(x_1 - 1)^2 + 4 > (x_2 - 1)^2 + 4$

$f(x_1) > f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$

Έστω ότι $x_1,x_2 \in [1,\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε:

$1 \leq x_1 < x_2$

$0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1$

$(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2$

$(x_1 - 1)^2 + 4 < (x_2 - 1)^2 + 4$

$f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\infty)$

β) Για $x \in (-\infty, 1]$ τότε : $x \leq 1$άρα :

$f(x) \geq f(1)$

Για $x \in [1,\infty)$ τότε: $x \geq 1$ άρα:

$f(x) \geq f(1)$

Από τις συναρτήσεις προκύπτει : f(x) ≥ f(1) για κάθε x ∈ R

Άρα : f(1) = ελαστικό

γ) min f(x) = f(1) = $(1-1)^2+4=4$

4. Να εξεταστεί η μονοτονία της συνάρτησης f(x) = 1-$\sqrt{3x-1}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Πρέπει 3x-1≥ 0 = x ≥ $\frac{1}{3}$

Οπότε : $D_f = [\frac{1}{3}, \infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ με $x_1 < x_2$ τότε :

$3x_1 < 3x_2$

$\sqrt{3x_1 - 1} < \sqrt{3x_2 - 1}$

$-\sqrt{3x_1 - 1} > -\sqrt{3x_2 - 1}$

$1-\sqrt{3x_1 - 1} > 1-\sqrt{3x_2 - 1}$

$f(x_1) > f(x_2)$

Επομένως : η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{3}, \infty)$

3.2 ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Συνάρτηση δύο μεταβλητών

Στην γενικότερη μορφή τους οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών γράφονται ως εξής:

$z = f(x,y)$

Ως x και y ορίζονται οι ανεξάρτητες μεταβλητές ενώ z η εξαρτημένη μεταβλητή , δηλαδή η τιμή που εξαρτάται από τις x και y.

Μερική παραγώγιση

Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης.

Η παραγωγίση κατά μήκος μίας ισοσταθμικής καμπύλης είναι ισοδύναμη με την μερική παραγώγιση, κάτι το οποίο σημαίνει ότι σταθεροποιείται μία από τις τρείς μεταβλητές και γίνεται στις άλλες δύο μεταβλητές παραγώγιση. Όμως πρέπει να φανεί ότι η παράγωγος αποτελεί μέρος μίας τρισδιάστατης διάταξης όπου η άλλη η μεταβλητή παρέμεινε σταθερή. Αυτή η παράγωγος ονομάζεται μερική παράγωγος και ο συμβολισμός στης είναι ∂.

Παράδειγμα:

Στην υποτιθέμενη συνάρτηση $z = x + 2y + 5$, να γίνει μερική παραγώγιση του z ως προς α) x και β) y.

ΛΥΣΗ:

α) η μερική παραγώγιση του z ως προς x : $\frac{\partial z}{\partial x}$

Το 2y θεωρείται σταθερό και το 5 είναι μία σταθερά. Οπότε:

$z = x + 2[y] + 5 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 1+0+0=1$

β) η μερική παραγώγιση του z ως προς y : $\frac{\partial z}{\partial y}$

Το x θεωρείται σταθερό και το 5 είναι μία σταθερά. Οπότε :

z = [x] + 2y + 5 $\longrightarrow$ $\frac{\partial z}{\partial y}$ = 0+2+0=2

Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης.

Με σκοπό να βρεθούν οι παράγωγοι δεύτερης τάξης το μόνο που πρέπει να γίνει είναι να παραγωγιστούν οι μερικές παράγωγοι της πρώτης τάξης. Σε περίπτωση που υπάρχουν δύο μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης τότε η κάθε μία μερική παράγωγος πρώτης τάξης μπορεί να παραγωγιστεί ως προς την ίδια μεταβλητή ξανά, κάτι το οποίο έχει ως αποτέλεσμα να δίνει δύο μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης.

Ακόμα κάθε μερική παράγωγος πρώτης τάξης μπορεί να παραγωγιστεί ως προς την άλλη μεταβλητή δίνοντας με αυτό τον τρόπο δύο σταυρωτές μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης.

Παράδειγμα:

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης για τη συνάρτηση U = $x^2\ y^5$

ΛΥΣΗ

Η μερική παράγωγος πρώτης τάξης ως προς το x είναι :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy^5 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 2x[y^5] \longrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2(1)y^5$$

Η μερική παράγωγος πρώτης τάξης ως προς y είναι:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 5x^2y^4 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = 5[x^2]y^4 \longrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 5x^2(4y^3) = 20x^2y^3$$

Σταυρωτές μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

Μερική παραγώγιση ως προς το y :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy^5 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 2[x]y^5 \longrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 2x(5y^4) = 10xy^4$$

Μερική παραγώγιση ως προς το x :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 5x^2y^4 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = 5x^2[y^4] \longrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 5(2x)y^4 = 10xy^4$$

Παρατήρηση:

Οι δύο σταυρωτές μερικοί παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι ίσες , κάτι το οποίο συμβαίνει τις περισσότερες φορές.

Αριστοποίηση

Η αριστοποίηση σχετίζεται με την εύρεση τιμών στις ανεξάρτητες μεταβλητές για τις οποίες η μεταβλητή που εξαρτάται από αυτές παίρνει την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της . Ιδιαίτερη σημασία έχει δοθεί στις συναρτήσεις όπου έχουν μία ή και περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές.

- ✓ Ολικό μέγιστο:

Μία συνάρτηση f(x) εμφανίζει ολικό μέγιστο στο σημείο x στην περίπτωση που ισχύει:

$f(x^*) \geq f(x) \forall x$

- ✓ Ολικό ελάχιστο:

Μία συνάρτηση f(x) εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο σημείο x στην περίπτωση που ισχύει :

$f(x^*) \leq f(x) \forall x$

- ✓ Τοπικό μέγιστο:

Μία συνάρτηση f(x) εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο σημείο x στην περίπτωση που ισχύει :

$f(x^*) \geq f(x) \forall x^* - \varepsilon \leq x \leq x^* + \varepsilon$

- ✓ Τοπικό ελάχιστο:

Μία συνάρτηση f(x) εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x στην περίπτωση που ισχύει :

$f(x^*) \leq f(x) \forall x^* - \varepsilon \leq x \leq x^* + \varepsilon$

Μέθοδος αριστοποίησης δύο μεταβλητών:

Ως υποτιθέμενη συνάρτηση έχουμε την z = f(x,y)

Βήμα 1ο : Γίνεται ο υπολογισμός στις πρώτες και δεύτερες παραγώγους:

Δηλαδή : $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Βήμα 2ο : Γίνεται εξίσωση των πρώτων παραγώγων με το 0 και έπειτα γίνεται επίλυση στις εξισώσεις αυτές για την εύρεση της x συντεταγμένης και y συντεταγμένης στα ακρότατα σημεία:

Δηλαδή : $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

- ✓ Σε περίπτωση που χρειαστεί γίνεται υπολογισμός του z από τις x και y συντεταγμένες των ακρότατων σημείων

Βήμα 3ο : Με την χρήση των δεύτερων παραγώγων γίνεται ο προσδιορισμός της φύσης των ακρότατων σημείων. Υπολογίζονται όλες οι δεύτερες παράγωγοι στις x και y συντεταγμένες των ακρότατων σημείων.

Ενώ ο αριθμός των διαστάσεων αυξάνεται αντίστοιχα το ίδιο συμβαίνει και με τον αριθμό των συνθηκών οι οποίοι είναι απαραίτητο να ικανοποιηθούν για να επαληθευτεί η φύση των άριστων σημείων. Έτσι δημιουργείται για αυτό το σκοπό ο όρος Δ δηλαδή:

$\Delta = (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) - (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2$

Το σημείο είναι ελάχιστο όταν : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$ και $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$ και $\Delta>0$

Το σημείο είναι μέγιστο όταν : : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$ και $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$ και $\Delta < 0$

Είναι σημείο καμπής όταν : και οι δύο δεύτερες παράγωγοι έχουν το ίδιο πρόσημο αλλά $\Delta < 0$

Είναι σημείο ισορροπίας ή σαγματικό όταν : και οι δύο παράγωγοι έχουν διαφορετικό πρόσημο αλλά $\Delta < 0$

Στην περίπτωση που $\Delta=0$ τότε έχουμε καμία απάντηση αφού δεν μπορεί να διεξαχθεί αποτέλεσμα.

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΥΠΑΡΞΗΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ</u>

1. Πρώτης παραγώγου κριτήριο

Οι συναρτήσεις σε κλειστό και ορισμένο διάστημα που είναι συνεχείς εμφανίζουν ελάχιστο ή μέγιστο στο σημείο x* όταν ισχύει : $f'(x^*) = 0$

2. Δεύτερης παραγώγου κριτήριο

Όταν η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και εννοείται συνεχής τότε:

Τοπικό μέγιστο στο x* : $f'(x^*) = 0$ και $f''(x^*) < 0$

Τοπικό ελάχιστο στο x* : $f'(x^*) = 0$ και $f''(x^*) > 0$

Σημείο καμπής στο x* : $f'(x^*) = 0$ και $f''(x^*) = 0$

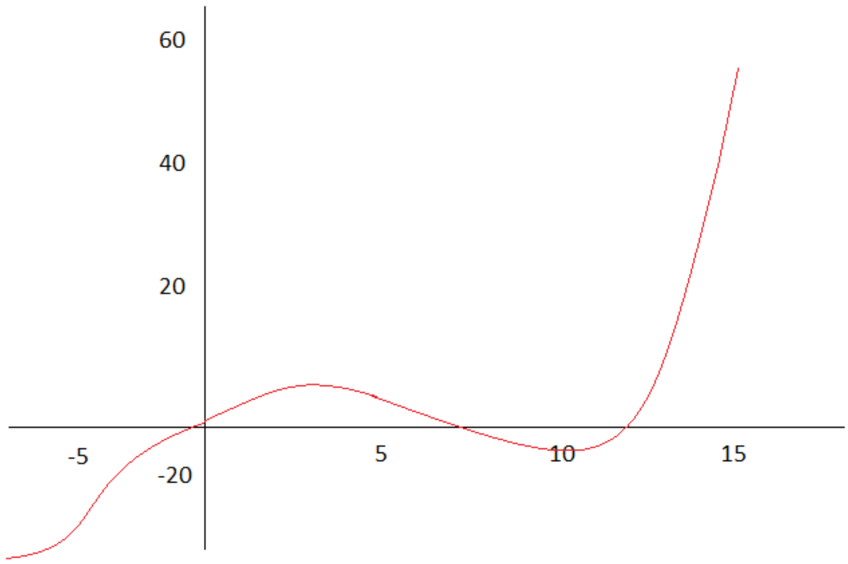
<u>ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</u>

Η συνάρτηση για τα κέρδη που έχει μία επιχείρηση έχει ως εξής :

$\Pi(Q) = -1+Q^3+9Q-6Q^2$

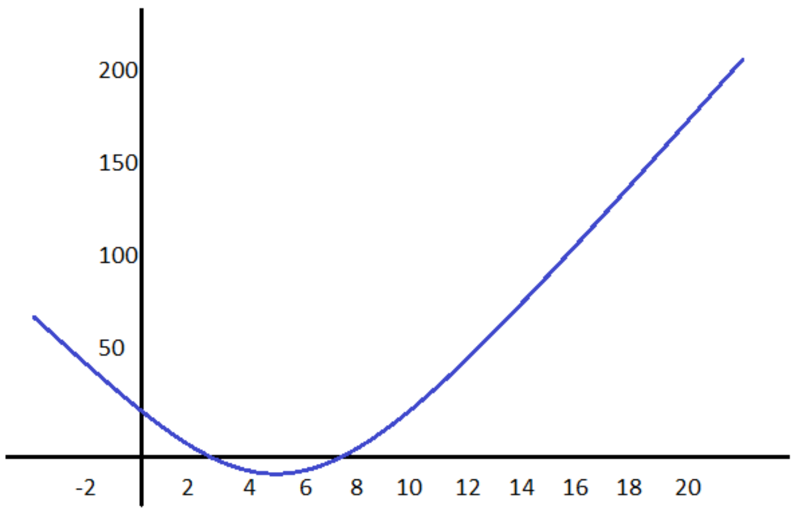
Αναλυτικά:

Η συνάρτηση του κέρδους μιας επιχείρησης σε γραφική παράσταση:

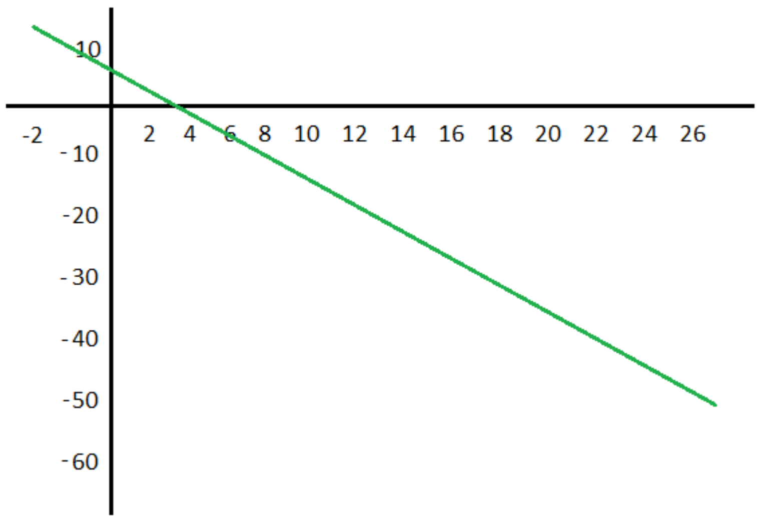


Αριστοποίηση οικονομικών συναρτήσεων μίας μεταβλητής :

Πρώτη παράγωγος :



Δεύτερη παράγωγος :



Αριστοποίηση οικονομικών συναρτήσεων για 2 μεταβλητές:

Οι παράγοντες για το σημείο στασιμότητας μίας συνάρτησης που έχει δύο μεταβλητές είναι ίδιοι με εκείνους για την μία μεταβλητή.

- ✓ Κρίσιμα ή στάσιμα σημεία:

Τα σημεία μίας συνάρτησης z = f(x,y)/D στα οποία η κλήση της συνάρτησης f ισούται με το 0, δηλαδή, $f_x = f_y = 0$ ονομάζονται στάσιμα σημεία ή κρίσιμα.

Δεύτερη παράγωγος :

Στην περίπτωση που εάν η συνάρτηση f = f (x,y) σε μία περιοχή του σημείου Po(Xo,Yo), είναι κλάση C2, τότε ισχύει :

Στάσιμο σημείο : $f_x\ (x_0, y_0) = f_y\ (x_0, y_0) = 0$

Εάν : $f_{xx}\left(x_{0,}y_0\right) = A$, $f_{xy}(x_0, y_0) = B,\ f_{yy}(x_0, y_0) = \Gamma$

Δ = ΑΓ- B^2

<u>Τοπικό μέγιστο :</u>

$$\mathrm{f_x}(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0, f_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

$$\boxed{f_{xx}(x_0, y_0)\ f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_o, y_0))^2 > 0}$$

<u>Τοπικό ελάχιστο</u>

$$\mathrm{f_x}(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0, f_{yy}(x_0, y_0) > 0$$

$$\boxed{f_{xx}(x_0, y_0)\ f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_o, y_0))^2 > 0}$$

Σαγματικό σημείο :

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\boxed{f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_o, y_0))^2 < 0}$$

Καμία απάντηση:

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\boxed{f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_o, y_0))^2 = 0}$$

1.3 LAGRANGE ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ , ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ:

Μέχρι τώρα όλα τα ακρότατα τα οποία έχουν υπολογισθεί ονομάζονται ελεύθερα διότι οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Όμως υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες είναι υπό περιορισμό και η μέθοδος LAGRANGE είναι η πιο διαδεδομένη για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων σχετικά με μεγιστοποίηση και ελαχιστοποίηση αυτών των συναρτήσεων.

- ✓ Ως λ ορίζεται ο πολλαπλασιαστής LANGRANGE ο οποίος μας υποδεικνύει στην άριστη τιμή της συνάρτησης τις επιπτώσεις που μπορεί να επιφέρει μία ελάχιστη μεταβολή του περιορισμού.

Πρώτης τάξεως συνθήκες :

$$\frac{\partial L\ (x, y, \lambda)}{\partial x} = 0 = f_1(x^*, y^*) + \lambda\, g_1(x^*, y^*) = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0 = f_2(x^*, y^*) + \lambda\, g_2(x^*, y^*) = 0$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 = g(x^*,y^*) = 0$$

Θα ήταν καλό να αναφερθεί ότι οι συνθήκες για να βρεθούν τα ακρότατα σημεία είναι παρόμοιες με όσες έχουν προαναφερθεί όμως η διαφορά είναι όταν υπάρχει καμία απάντηση. Εδώ είναι οι εξής:

Μέγιστο : $A < 0$

Ελάχιστο : $A > 0$

Καμία απάντηση : $A=0$

$$g_x = \frac{\partial g}{\partial x}, g_y = \frac{\partial g}{\partial y}, {g_x}^2 L_{YY} - 2g_y g_x + {g_y}^2 L_{xx} = A$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $4^{Ο}$: ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΕΦΑΛΑΙΑ

Άσκηση : 1

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 50.000 ευρώ ο οποίος τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 7% για 3 χρόνια.

ΛΥΣΗ

K = 50.000

n = 3

i = 0.07

Άρα: I_3= K · n · I => I_3 = 50.000 x 3 x 0.07 = 10.500

Άσκηση : 2

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 25.000 ευρώ το οποίο τοκίστηκε από 1η Φεβρουαρίου 2018 έως 26 Απριλίου 2018 με ετήσιο επιτόκιο 3% (εμπορικό έτος).

ΛΥΣΗ

Ο Φεβρουάριος 28 μέρες, ο Μάρτιος 31 μέρες Απρίλιος έχει 26-1=25 μέρες δηλαδή το κεφάλαιο τοκίζεται για : 31+28+25=84 ημέρες

K=25.000

v = 84

i = 0.03

Άρα : $I_v = \frac{K \cdot v \cdot i}{360} = I = \frac{25.000 \cdot 84 \cdot 0.03}{360} = 175$

Το νέο κεφάλαιο που δημιουργείται είναι το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου και του τόκου:

Άρα : K+I=25.000+175=25.175

ΑΣΚΗΣΗ : 3

Κεφάλαιο 50000 ευρώ τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 9% για 15 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπραχθεί στο τέλος της κατάθεσης σε περίπτωση που ο τοκισμός έγινε με α) απλό τόκο και β) με ετήσιο ανατοκισμό.

Λύση:

K = 50000

i = 0.09

n = 15

Άρα : K+ I = K+K $\cdot n \cdot i = 50000 + 50000 \cdot 15 \cdot 0.09 = 135000$

β) Ko = 50000

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_n = 50000 \cdot (1+0.09)^{15} = K_n = 50000 \cdot 3{,}64 = 182.000$$

ΑΣΚΗΣΗ : 4

Μια επενδυτική εταιρία τι ποσό πρέπει να καταθέσει σε μία τράπεζα σήμερα ώστε να εισπράξει 5.000, 4.200, και 3.900 ευρώ αντίστοιχα για τα επόμενα 3 χρόνια με ετήσιο ανατοκισμό και επιτόκιο 5% ;

Λύση

$$\mathrm{V}_0 = 5.000 \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)} + 4.200 \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)^2} + 3.900 \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)^3} =$$

$$\mathrm{V}_0 = 4761{,}904 + .3809{,}523 + 3368{,}966 = 11940{,}393$$

ΑΣΚΗΣΗ : 5

Ο κύριος Γιώργος κατέθετε στην τράπεζα 8.000 ευρώ για 9 χρόνια και 3 μήνες. Τα 5 πρώτα χρόνια το ποσό τοκίστηκε με επιτόκιο 6%, το υπόλοιπο διάστημα έγινε ανατοκισμός με επιτόκιο 16%. Να βρεθεί η τελική αξία του κεφαλαίου.

Λύση

$$K_{\mathbf{1}} = 8000 \cdot (1 + 0.06)^5 = 8000 \cdot 1{,}338 = 10.704$$

Για το υπόλοιπο διάστημα έχουμε:

i = $\frac{0.16}{2} = 0.08$

Το κάθε εξάμηνο για διάστημα 4 χρόνων και 3 μήνες είναι 8 +0,5

$\frac{1}{2}$Άρα : $K_n = K_1(1 + 0.08)^{8+1/2} = K_1 \cdot 1.08^8 \cdot 1.08^{1/2} =$

$10704 \cdot 1{,}85 \cdot 1{,}04 = 20.594{,}496$

Άρα η τελική αξία του κεφαλαίου είναι :

$$K_n + K_1 = 10.704 + 20.594{,}496 = 31.298{,}496$$

ΑΣΚΗΣΗ : 6

Δίνεται η συνάρτηση f (x) = 8x – 4 με πεδίο ορισμού το διάστημα [-6,10].

α) Ποιο είναι το είδος της μονοτονίας της ;

β) Να αποδειχθεί ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 = -3 και μέγιστο στο x_0 = 5

γ) Να βρεθεί το min(fx) και το max(fx)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Η συνάρτηση f είναι της μορφής : f(x) = αx + β

με α = 8 > 0 είναι γνησίως αύξουσα στο R άρα και στο [-6,10]

β) x ∈ [-6,10] άρα : x ≥ -6 = f (x) ≥ f (-6)

επομένως το f(-6) είναι ελάχιστο

x ∈ [-6,10] άρα x ≤ 10 = f (x) ≤ f(10)

επομένως το f (10) είναι μέγιστο

γ) min f(x) = f(-6) = 8(-6)-4= -52

max f(x) = f(5) = 8 x 5 -4 =36

ΑΣΚΗΣΗ : 7

1. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R και για κάθε α,β ∈ R ισχύει :

$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$

Να αποδειχθεί :

α) $f(0) = 0$

β) η f είναι περιττή

ΛΥΣΗ

α) Η $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ για $\alpha=\beta=0$ γίνεται :

$f(0+0) = f(0) + f(0)$

$f(0) = 2f(0)$

άρα $f(0) = 0$

β) Έστω για τυχαίο $x \in R$ τότε και $-x \in R$ για $\alpha = x$ και $\beta = -x$ επομένως :

$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$

$f(0) = f(x) + f(-x)$

$0 = f(x) + f(x)$

$F(-x) = -f(x)$

Άρα η f είναι περιττή

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική βιβλιογραφία

Αποστολόπουλος, Θ. (2002). Οικονομικά μαθηματικά και στοιχεία τραπεζικών εργασιών. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Αλεξανδρής, Ν. (1989). Οικονομικά μαθηματικά. Εκδόσεις Σταμούλη.

Βασιλάκης, Κ. (2005). Οικονομικά μαθηματικά. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Βόσκογλου Μ.(1999).Μαθηματικά για τον Τομέα της Διοίκησης & της Οικονομίας. Μακεδονικές Εκδόσεις, Έκδοση Γ ', Αθήνα.

Καραπιστόλης, Δ. (1994). Οικονομικά μαθηματικά. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Κούγιας, Γ. & Γεωργίου, Δ. (2004). Χρηματοοικονομικά μαθηματικά. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Κουμούσης 1.(1986). Οικονομικά Μαθηματικά. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Μαρκάτος Κ. Μαθηματικά Γ ενικά και Πιστωτικά Μετ’εφαρμογών στην Οικονομία και Διοίκηση. Εκδόσεις Ελληνικός Λόγος, Αθήνα.

Ξεπαπαδέας Α.(1989).Μαθηματικές Μέθοδοι στα Οικονομικά. Εκδόσεις Σμπίλιας. Αθήνα.

Παπαμηχαήλ Δ.(1993). Οικονομικά Μαθηματικά. Εκδόσεις Α. Σταμούλης, Αθήνα.

Φράγκος, Χ. (2007). Οικονομικά μαθηματικά. Εκδόσεις Σταμούλη.

Χουβαρδάς, Β. (1998). Οικονομικά μαθηματικά. Μακεδονικές Εκδόσεις

Ξενόγλωσση

Zima, P. & Brown, R. (1997). Outline of Mathematics of Finance, Schaums 2nd edition. Εκδόσεις McGrawHill.