

ΑΝΩΤΑΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ Τ.Τ.

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΤΜΗΜΑ
ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΩΓΜΗΣ ΜΕ
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ: ΜΑΛΛΙΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ
ΕΞ.10° Α.Μ.43197

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Τσολάκης Αντώνιος

ΑΘΗΝΑ 2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ/ SUMMARY.....	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ^ο : ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ	4
1.1 Ενδοκρυσταλλική ρωγμάτωση	4
1.2 Περικρυσταλλική ρωγμάτωση	4
1.3 Συνένωση μικροκενών.....	5
1.4 Είδη θραύσης	6
1.4.1 Όλκιμη θραύση.....	6
1.4.2 Ψαθυρή θραύση.....	7
1.4.2.1 Ψαθυρή θραύση-Τύπος I	7
1.4.2.2 Ψαθυρή θραύση-Τύπος II	8
1.4.2.2 Ψαθυρή θραύση-Τύπος III	8
1.5 ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΤΑΣΕΩΝ.....	8
1.6 ΘΕΩΡΙΑ Griffith.....	10
1.7 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΑΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΡΩΓΜΕΣ.....	11
1.8 ΚΡΙΣΙΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΑΣΗΣ.....	13
1.9 Η ΜΕΘΟΔΟΣ WESTERGAARD IRWIN.....	16
1.10 Η ΜΕΘΟΔΟΣ J INTEGRAL.....	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^ο : ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	26
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	26
2.2 ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ.....	27
2.3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ.....	29
2.3.1 ΤΡΙΚΟΜΒΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	29
2.3.2 ΤΕΤΡΑΚΟΜΒΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	31
2.4 ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ^ο : ΣΥΝΔΕΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΡΩΓΜΗΣ.....	36
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ^ο : ΠΡΩΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	46
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ^ο ΕΦΑΡΜΟΓΗ.....	53
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ^ο ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	64
ΒΙΒΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	65

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Εδω θα ήθελα να δώσω τις ευχαριστίες μου στον κύριο Τσολάκη υπεύθυνο της πτυχιακής μου και στον κύριο Μανωλάκο υπεύθυνο της πρακτικής μου για την απεριόριστη βοήθεια που μου προσέφεραν κατά τη παραγματοποίηση της πτυχιακής μου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πλαίσια της πτυχιακής μου εργασίας, επιχειρήθηκε η μελέτη των τάσεων που αναπτύσσονται στο άκρο της ρωγμής με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και η εφαρμογή σε ένα μοντέλο, στο οποίο οι αναλυτικές λύσεις δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Πιο αναλυτικά:

Αρχικά, περιγράφονται οι τρόποι διάδοσης μιας ρωγμής και οι τρόποι θραύσης ενός δοκιμίου, δηλαδή με όλκιμο ή ψαθυρό τρόπο. Στη συνέχεια, ορίζεται η έννοια του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης και του συντελεστή έντασης τάσης και περιγράφονται οι πρώτες προσπάθειες υπολογισμού του δεύτερου. Ακολουθεί μια αναφορά στις μεθόδους ανάλυσης των τάσεων στο άκρο της ρωγμής και πολύ κοντά σε αυτό.

Σε επόμενο κεφάλαιο, γίνεται, κατ' αρχάς, μια γενική παρουσίαση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, με έμφαση στα θέματα που αφορούν την ανάπτυξη του προτεινόμενου μοντέλου. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στην προσπάθεια σύνδεσης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων με τις αναλυτικές λύσεις για τον προσδιορισμό των τάσεων στο άκρο της ρωγμής, με τη χρήση ειδικών εργαλείων που απαιτούνται γι' αυτό, όπως π.χ. η εφαρμογή ειδικής μορφής πλέγματος. Τελος, δημιουργούνται και επιλύονται με τον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων ANSYS δύο μοντέλα, ένα θεωρητικό για το οποίο υφίστανται ήδη και αναλυτικές λύσεις και επιτυγχάνεται έτσι ο έλεγχος της ορθότητας των αποτελεσμάτων του προγράμματος και ένα πραγματικό μοντέλο, του οποίου μελετάται η συμπεριφορά κατά τη λειτουργία του.

SUMMARY

In the context of my dissertation thesis, I attempt to study the stress which developed at the crack tip using the finite element method and the application to a model in which the analytical solutions can not be applied. More detail:

To begin with, I have describe in what way a crack spreads along with how a test subject is broken, ductile or brittle. I have then defined the stress concentration factor as well as the stress intensity factor itself alongside with the first attempts of the calculation the later. Finally follows a brief description of the methods used to analyse the stress at each end and the adjacent parts of the crack.

The next chapter begins with a general presentation of the finite element method with emphasis placed on matters concerning the development of this particular model. The attempt to connect the finite element method with the analytical solutions through which the stress at each end of the crack was calculated is described analytically. The use of specified tools i.e. the application of a special mesh type are also listed. Finally, two models are developed and solved with the ANSYS finite element code, a theoretical for which already exist analytical solutions, and thus the control of the correctness of the results of the program and a real model, which is studied the behavior during its operation.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{[2],[3],[9],[10],[7],[8],[12],[6]}

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

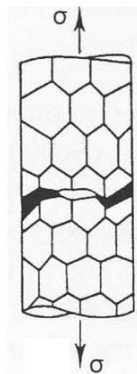
Ως θραύση ορίζεται ο διαχωρισμός ενός σώματος σε δύο ή περισσότερα μικρότερα τμήματα, ως αποτέλεσμα μιας επιβαλλόμενης στατικής τάσης, δηλαδή μιας τάσης που είναι σταθερή ή μεταβάλλεται πολύ αργά με τον χρόνο σε θερμοκρασίες χαμηλές σε σχέση με την θερμοκρασία τήξης του υλικού. Η τάση αυτή μπορεί να είναι ορθή ή διατμητική. Γενικά, στα υλικά συναντάται δύο τύπους θραύσης:

- ΟΛΚΙΜΗ ΘΡΑΥΣΗ
- ΨΑΘΥΡΗ ΘΡΑΥΣΗ

Η διάδοση μιας ρωγμής μέσα στο υλικό μπορεί να γίνει με τρεις μηχανισμούς: ενδοκρυσταλλικά, περικρυσταλλικά ή με συνένωση μικροκενών. Στα επόμενα, παρέχονται αναλυτικές πληροφορίες για κάθε τύπο.

1.1 Ενδοκρυσταλλική ρωγμάτωση

Ο μηχανισμός αυτός ρωγμάτωσης συναντάται σε όλους τους τύπους ψαθυρής θραύσης. Η διάδοση της ρωγμής γίνεται μέσω των κόκκων του υλικού, περνώντας από συγκεκριμένα κρυσταλλογραφικά επίπεδα ελάχιστης ενέργειας συνάφειας, βλ. Εικ. 1. Αυτός ο μηχανισμός συναντάται κυρίως σε μέταλλα με κρυσταλλική δομή hcp και bcc.



Εικόνα 1 Σχηματική παράσταση ενδοκρυσταλλικής ρωγμάτωσης

1.2 Περικρυσταλλική ρωγμάτωση

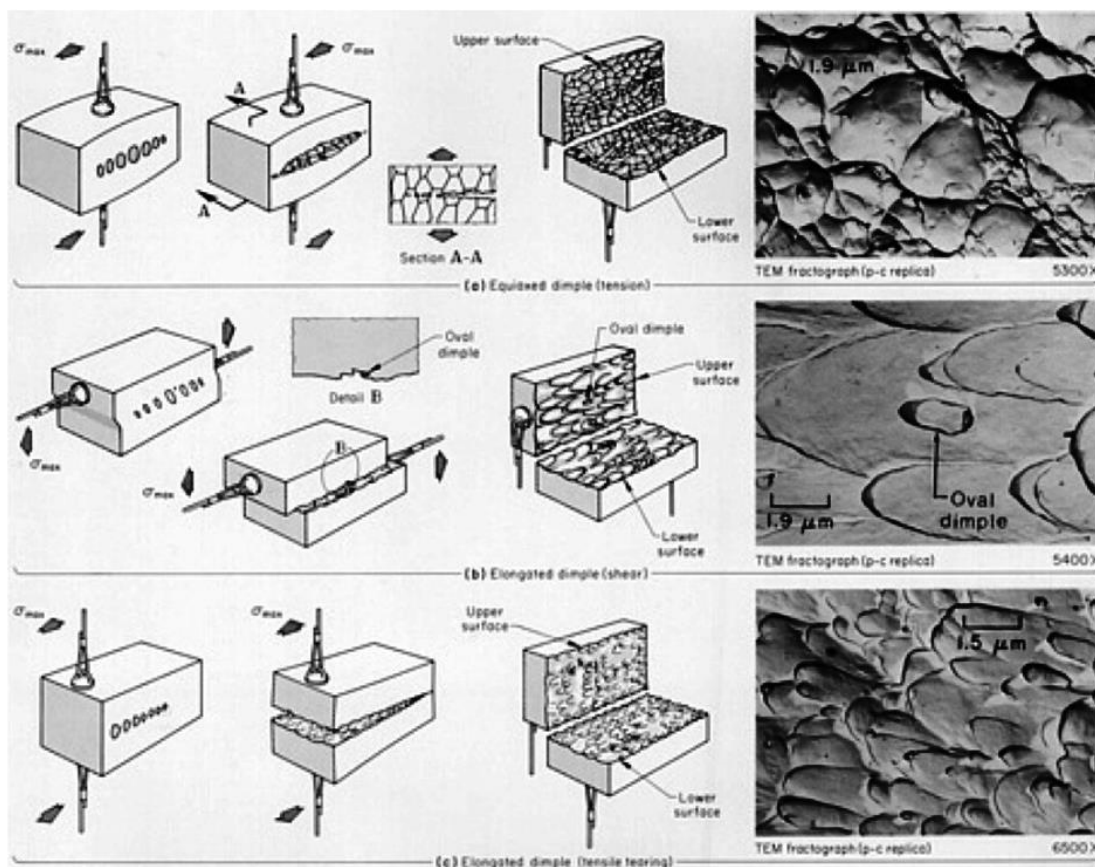
Είναι ο μηχανισμός θραύσης, κατά τον οποίο η ρωγμή μεταδίδεται ακολουθώντας τα όρια των κόκκων, βλ. Εικ. 2. Ιδιαίτερη επιδεκτικότητα εμφανίζουν στην περικρυσταλλική ρωγμάτωση μέταλλα με κρυσταλλική δομή fcc, σε συνδυασμό με την παρουσία ακαθαρσιών ή δευτερογενών φάσεων στα όρια των κόκκων τους. Κατά συνέπεια, διαλυτοποίηση αερίων (οξυγόνου, υδρογόνου) του περιβάλλοντος, αλλά και διάβρωση υπό μηχανική καταπόνηση ευνοούν τον εν λόγω μηχανισμό.



Εικόνα 2 Σχηματική παράσταση περικρυσταλλικής ρωγμάτωσης

1.3 Συνένωση μικροκενών

Η συνένωση μικροκενών είναι ο πιο συχνά συναντώμενος μηχανισμός θραύσης σε όλκιμα μεταλλικά υλικά. Η επιφάνεια θραύσης εμφανίζει χαρακτηριστική κυψελωτή μορφολογία, βλ. Εικ. 3. Το σχήμα των εμφανιζόμενων θυλάκων εξαρτάται από το είδος της εφαρμοζόμενης τάσης. Όταν η φόρτιση είναι μονοαξονική, οι σχηματιζόμενοι θύλακες είναι ισοαξονικοί, ενώ, όταν αναπτύσσονται και διατμητικές τάσεις, τότε σχηματίζονται επιμήκεις θύλακες. Στην περίπτωση συνδυασμού εφελκυσμού και κάμψης, οι θύλακες που σχηματίζονται στις επιφάνειες θραύσης είναι επιμήκεις, παραβολικής μορφής και έχουν την ίδια φορά και στις δυο επιφάνειες θραύσης.



Εικόνα 3 Σχηματική παράσταση μηχανισμών συνένωσης μικροκενών και μικρογραφικά χαρακτηριστικά αναπτυσσόμενων θυλάκων

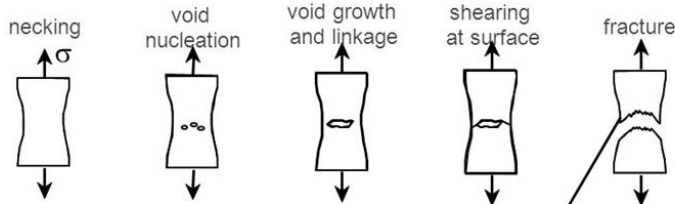
1.4 Είδη θραύσης

Όταν επεκτείνεται μια ρωγμή, δημιουργείται νέα ελεύθερη επιφάνεια, που έχει μια ειδική επιφανειακή ενέργεια γ , η οποία για στερεά υλικά είναι συνήθως της τάξης των 1 Jm^{-2} . Αυτή η ενέργεια παρέχεται από το εξωτερικό φορτίο και είναι συνήθως διαθέσιμη ως αποθηκευμένη ελαστική ενέργεια. Ωστόσο, δεν χρησιμοποιείται όλη η διαθέσιμη ενέργεια για τη δημιουργία νέων επιφανειακών ρωγμών, αλλά μετασχηματίζεται και σε άλλης μορφής ενέργειες, όπως κινητική ενέργεια ή θερμότητα. Όταν απαιτείται αρκετή διαθέσιμη ενέργεια για την ανάπτυξη και διάδοση των ρωγμών, η θραύση λέγεται *ψαθυρή*, ενώ όταν μεγάλο μέρος της ενέργειας μετασχηματίζεται σε άλλης μορφής ενέργεια, τότε η θραύση χαρακτηρίζεται ως *όλκιμη*.

1.4.1 Όλκιμη θραύση

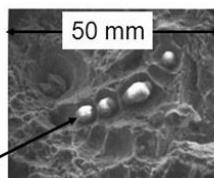
Σε αυτόν τον τύπο θραύσης, παρατηρείται στο υλικό πλαστική παραμόρφωση πριν από την τελική θραύση του δοκιμίου. Σε μια δοκιμή εφελκυσμού δοκιμίου από όλκιμο υλικό, μόλις αυτό περάσει το οριο διαρροής ξεκινάει να παραμορφώνεται πλαστικά και όταν φθάσει στη μέγιστη αντοχή παρατηρείται η εμφάνιση «λαιμού». Μετά την έναρξη δημιουργίας «λαιμού», τα μικροκενά που σχηματίζονται στο εσωτερικό της καθέτης διατομής, καθώς η παραμόρφωση συνεχίζεται, μεγενθύνονται, πλησιάζουν μεταξύ τους και, τελικά, συνενώνονται σχηματίζοντας μία ρωγμή (ασυνέχεια). Η ρωγμή αυτή συνεχίζει να μεγαλώνει σε διεύθυνση παράλληλη προς τον μεγάλο άξονά της, μέσω της διαδικασίας που περιγράφηκε πιο πάνω (μηχανισμός συνένωσης μικροκενών). Τελικά, λόγω της γρήγορης διάδοσης της ρωγμής γύρω από την εξωτερική περίμετρο του «λαιμού», επέρχεται θραύση του δοκιμίου μέσω διατμητικής παραμόρφωσης σε γωνία περίπου 45° ως προς τον άξονα εφελκυσμού (πρόκειται για τη διεύθυνση της μέγιστης διατμητικής τάσης). Ένας ακόμα τρόπος, με τον οποίο μπορεί να παρατηρηθεί θραύση με συνένωση των μικροκενών, είναι όταν η γεφύρωση των μικροκενών συντελείται με έντονη διατμητική παραμόρφωση, βλ. Εικ. 4.

• Evolution to failure:

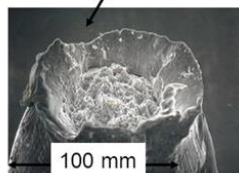


• Resulting fracture surfaces (steel)

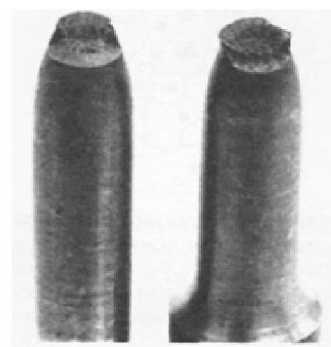
Inclusion particles serve as void nucleation sites.



From V.J. Colangelo and F.A. Heiser, *Analysis of Metallurgical Failures* (2nd ed), Fig. 11 28, p. 294, John Wiley and Sons, Inc., 1987. (Orig. source: P. Thornton, *J. Mater. Sci.*, Vol. 6, 1971, pp. 347-56.)



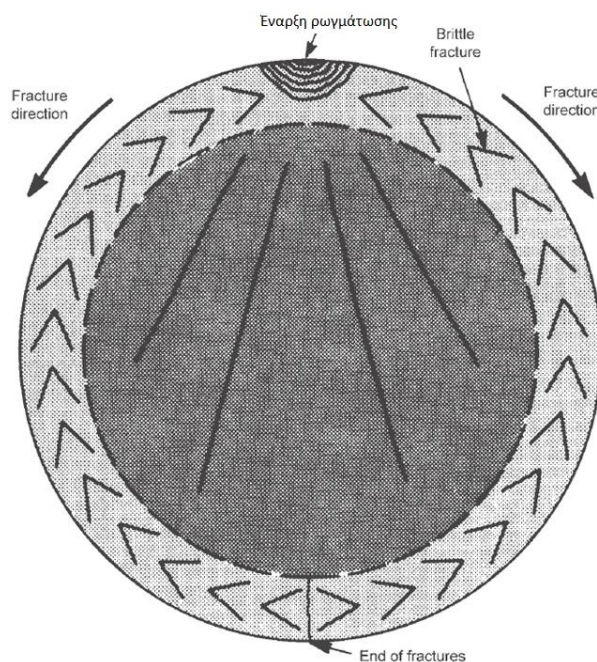
Fracture surface of tire cord wire loaded in tension. Courtesy of F. Roehrig, CC Technologies, Dublin, OH. Used with permission.



Εικόνα 4 Σχηματική παράσταση μηχανισμού όλκιμης θραύσης και μικρογραφικά χαρακτηριστικά της

1.4.2 Ψαθυρή θραύση

Στην ψαθυρή θραύση, πριν από τη θραύση δεν παρατηρείται πλαστική παραμόρφωση ή αυτή είναι αρκετά μικρή και η διάδοση της ρωγμής γίνεται πολύ γρήγορα. Η διεύθυνση διάδοσης της ρωγμής είναι κάθετη στην διεύθυνση της εφαρμοζόμενης τάσης και σχηματίζεται μία σχετικά επίπεδη επιφάνεια θραύσης. Οι επιφάνειες θραύσης υλικών που αστόχησαν με ψαθυρό τρόπο παρουσιάζουν τα δικά τους διακριτά χαρακτηριστικά, χωρίς ίχνος πλαστικής παραμόρφωσης. Για παράδειγμα, σε μερικά χαλύβδινα δοκίμια, σχηματίζεται μία σειρά από σημάδια σχήματος - V, τα οποία, αν τα ακολουθήσουμε προς τα πίσω (κατά την κατεύθυνση της κορυφής του V), θα μας οδηγήσουν στο σημείο έναρξης σχηματισμού της ρωγμής, βλ. Εικ. 5. Άλλες ψαθυρές επιφάνειες θραύσης περιλαμβάνουν γραμμές ή αυλακώσεις που απλώνονται ακτινικά. Συχνά αυτά τα αποτυπώματα είναι ορατά και με γυμνό οφθαλμό.



Εικόνα 5

1.4.2.1 Ψαθυρή θραύση-Τύπος I

Ο πρώτος τύπος ψαθυρής θραύσης (τύπος I) παρατηρείται για χαμηλές τάσεις. Κατά τον Τύπο I, η ρωγμή μεταδίδεται είτε περικρυσταλλικά είτε ενδοκρυσταλλικά. Αυτός ο τύπος θραύσης προκαλείται όταν στο εσωτερικό του υλικού προϋπάρχουν μικρορωγμές ή μικροκενά, τα οποία συνήθως έχουν διαστάσεις μεγαλύτερες από το μέγεθος των κόκκων. Όταν η θραύση του υλικού είναι Τύπου I, τότε πριν από τη θραύση έχουμε μηδενική πλαστική παραμόρφωση. Τα υλικά τα οποία προσεγγίζουν τη ψαθυρή θραύση Τύπου I είναι κυρίως το γυαλί και διάφορα ανόργανα στερεά και κεραμικά σε θερμοκρασία περιβάλλοντος.

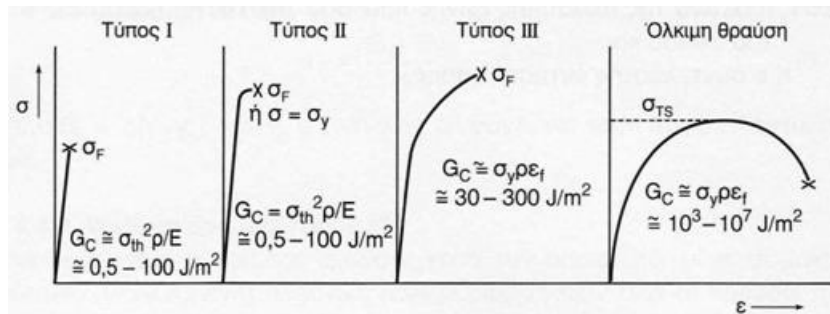
1.4.2.2 Ψαθυρή θραύση-Τύπος II

Σε αυτόν τον τύπο θραύσης, πριν από τον αποχωρισμό σημειώνεται πολύ μικρή πλαστική παραμόρφωση. Εδώ, η διάδοση της ρωγμής γίνεται ή ενδοκρυσταλλικά ή περικρυσταλλικά. Ο Τύπος II θραύσης λαμβάνει χώρα σε υψηλότερες τιμές τάσης από τον Τύπο I και σε υλικά, στα οποία δεν υπάρχουν καθόλου ρωγμές ή αυτές έχουν μέγεθος μικρότερο του μεγέθους του κόκκου.

1.4.2.3 Ψαθυρή θραύση-Τύπος III

Σ' αυτόν τον τύπο θραύσης εκδηλώνεται μακροσκοπική πλαστική παραμόρφωση πριν από τη θραύση, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της διατομής μετά τη θραύση σε ποσοστό όχι πάνω από 10%. Η τελική ρωγμάτωση μπορεί να σχηματιστεί είτε περικρυσταλλικά είτε ενδοκρυσταλλικά.

Στην Εικ. 6 συγκρίνονται τα διαγράμματα που λαμβάνονται σε κάθε είδος θραύσης.



Εικόνα 6 Χαρακτηριστικά διαγράμματα σ - ϵ για τα διάφορα είδη θραύσης

1.5 Συγκέντρωση τάσεων

Η αντοχή σε θραύση ενός στερεού υλικού είναι συνάρτηση των συνεκτικών δυνάμεων που υφίστανται μεταξύ των ατόμων. Σε αυτήν τη βάση, η θεωρητική αντοχή ενός ψαθυρού ελαστικού στερεού έχει υπολογισθεί ότι είναι περίπου ίση με το 1/10 του μέτρου ελαστικότητας (E) του υλικού. Οι πειραματικές τιμές της αντοχής σε θραύση των περισσότερων συμβατικών μηχανολογικών υλικών κυμαίνονται συνήθως μεταξύ 10 και 1000 φορές κάτω από την θεωρητική τιμή. Ο A. Griffith πρότεινε ότι η απόκλιση μεταξύ θεωρητικής και μετρούμενης τιμής της αντοχής σε θραύση εξηγείται από την ύπαρξη μικροκενών και ατελειών στο εσωτερικό του υλικού. Στα άκρα των ατελειών αυτών σημειώνεται συγκέντρωση τάσεων, το μέγεθος των οποίων εξαρτάται από τον προσανατολισμό και την γεωμετρία της ατέλειας/ρωγμής. Όσον αφορά την κατανομή των τάσεων πέρα από το άκρο της ρωγμής, το μέγεθος της τάσης μειώνεται με την απόσταση από το άκρο της ρωγμής, ενώ σε πολύ απομακρυσμένα σημεία, η τάση ισούται με την ονομαστική τάση σ_0 . Αν υποθέσουμε ότι μία ρωγμή έχει ελλειπτικό σχήμα και ότι προσανατολίζεται κάθετα στην εφαρμοζόμενη τάση, η μέγιστη τάση στο άκρο της ρωγμής, σ_{max} παρέχεται από τη σχέση

$$\sigma_{max} = \sigma_0 \left(1 + 2 \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\rho_t} \right)} \right) \quad (1)$$

όπου: σ_0 είναι το μέγεθος της ονομαστικής εφελκυστικής τάσης, ρ_t είναι η ακτίνα καμπυλότητας της αιχμής (άκρου) της ρωγμής και a το μήκος της επιφανειακής ρωγμής.

Σε μία μικρορωγμή μεγάλου μήκους η ακτίνα καμπυλότητας στο άκρο της είναι μικρή και ο όρος (a/ρ_t) παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η Εξ. (1) αποκτά τη μορφή

$$\sigma_{\max} = 2\sigma_0 \sqrt{\frac{a}{\rho_t}} \quad (2)$$

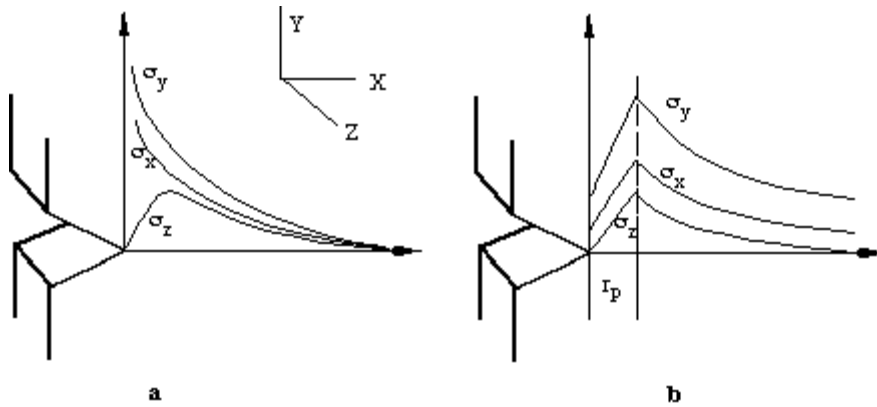
Ο λόγος σ_{\max} / σ_0 ονομάζεται *συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων K_t* , και ισούται με

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = 2 \sqrt{\frac{a}{\rho_t}} \quad (3)$$

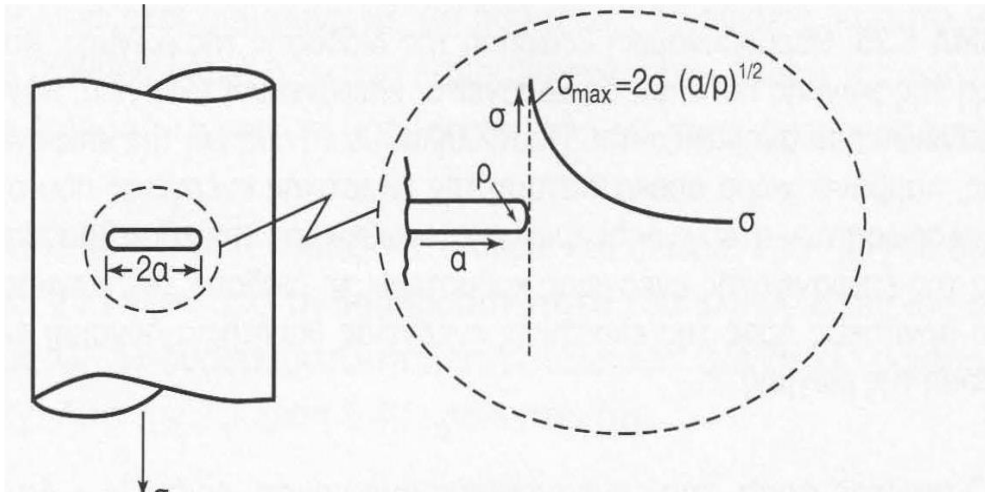
Για ρωγμές ελλειπτικού σχήματος, με μήκος μεγάλου άξονα $2a$, η μέγιστη τιμή της τάσης στο άκρο της ρωγμής λαμβάνει την τιμή

$$\sigma_{\max} = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho_t}} \quad (4)$$

όπου σ είναι η ονομαστική τάση που ασκείται στο υλικό και ρ_t η ακτίνα καμπυλότητας του άκρου της ρωγμής, βλ. Εικ. 7 και 8.



Εικόνα 7 Το εντατικό πεδίο πέρα από το άκρο μιας ρωγμής. (a) Για τελείως ελαστικό υλικό και (b) για ελαστοπλαστικό υλικό



Εικόνα 8 Το εντατικό πεδίο γύρω από το άκρο ελλειπτικής διαμπερής ρωγμής

1.6 Θεωρία του Griffith

Οι συνιστώσες της ολικής ενέργειας που απορροφάται κατά τη ρωγμάτωση είναι η επιφανειακή ενέργεια, U_s και η ελαστική ενέργεια, U_{el} . Όταν ο όρος της επιφανειακής ενέργειας είναι θετικός, καθυστερείται η διάδοση της ρωγμής, ενώ ο αρνητικός όρος της ελαστικής ενέργειας επιταχύνει τη διάδοση της ρωγμής. Ο πρώτος όρος της επιφανειακής ενέργειας παρέχεται από τη σχέση

$$U_s = 4\alpha\gamma \quad (5)$$

με μονάδα [ενέργεια ανά μονάδα μήκους του υλικού].

Η αύξηση της επιφανειακής ενέργειας οφείλεται σε όλες τις νέες επιφάνειες που δημιουργούνται κατά τη διάδοση της ρωγμής. Κατ' επεκταση, θα σημειώνεται και αύξηση της ολικής ενέργειας του συστήματος. Η δεύτερη ενεργειακή συνιστώσα σχετίζεται με την απελευθέρωση της ελαστικής ενέργειας που είχε συσσωρευτεί εσωτερικά στο υλικό. Επειδή κατά τη διάδοση της ρωγμής οι δεσμικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων χαλαρώνουν, προκαλείται μείωση της ελαστικής ενέργειας, με αποτέλεσμα να προκύπτει αύξηση της ολικής ενέργειας. Αποδεικνύεται ότι η ελαστική ενέργεια που εκλύεται ανά μονάδα μήκους του υλικού είναι

$$U_{el} = \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} \quad (6)$$

Άρα, η συνολική διαφορά στην ελεύθερη ενέργεια κατά τη διάδοση της ρωγμής, U_{tot} , ισούται με

$$U_{tot} = U_s - U_{el} = 4\alpha\gamma - \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} \quad (7)$$

Το κρίσιμο μήκος ρωγμής, a , είναι το μήκος εκείνο πέρα από το οποίο η ρωγμή διαδίδεται ανεξέλεγκτα, με αποτέλεσμα τη θραύση του υλικού. Το κρίσιμο μήκος ρωγμής αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της διαφοράς ολικής ενέργειας, δηλαδή όταν η συνάρτηση $U_{tot}(a)$ λάβει

τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή όταν γίνει $dU_{tot}/da=0$. Η τάση θραύσης σ_F του υλικού προκύπτει από τη συνθήκη

$$\left[\frac{d \left(4\alpha\gamma - \frac{\pi\sigma^2\alpha^2}{E} \right)}{da} \right]_{\sigma} = 0 \quad (8)$$

όπου: E το μέτρο ελαστικότητας, γ η ειδική επιφανειακή ενέργεια και α το ήμισυ του μήκους της εσωτερικής ρωγμής

Σε ένα υλικό θα επέλθει θραύση όταν $\sigma_{max} = \sigma_{th}$. Η τάση σ για την οποία ισχύει αυτή η συνθήκη ονομάζεται *τάση θραύσης*, σ_F .

Η Εξ. (8) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{2\gamma E}{\pi\alpha} \right)} \quad (9)$$

Η Εξ. (9) ονομάζεται *εξίσωση Griffith* και αποτελεί αναγκαία, αλλά όχι και ικανή συνθήκη για ψαθυρή θραύση Τύπου I.

Η προηγηθείσα ανάλυση εφαρμόζεται μόνο σε πλήρως ψαθυρά υλικά, στα οποία δεν εμφανίζεται καθόλου πλαστική παραμόρφωση. Στα μεταλλικά υλικά και σε πολλά πολυμερή πριν από τη θραύση υφίσταται κάποια πλαστική παραμόρφωση. Για να λάβουμε υπόψη αυτή την πλαστική παραμόρφωση, αντικαθιστούμε στην εξ. (9) τον όρο γ με τον όρο με τον όρο $\gamma + \gamma_p$, όπου ο γ_p παριστάνει την *ενέργεια πλαστικής παραμόρφωσης* που σχετίζεται με την επέκταση της ρωγμής. Έτσι, έχουμε

$$\sigma_F = \sqrt{\left[\frac{2E(\gamma + \gamma_p)}{\pi\alpha} \right]} \quad (10)$$

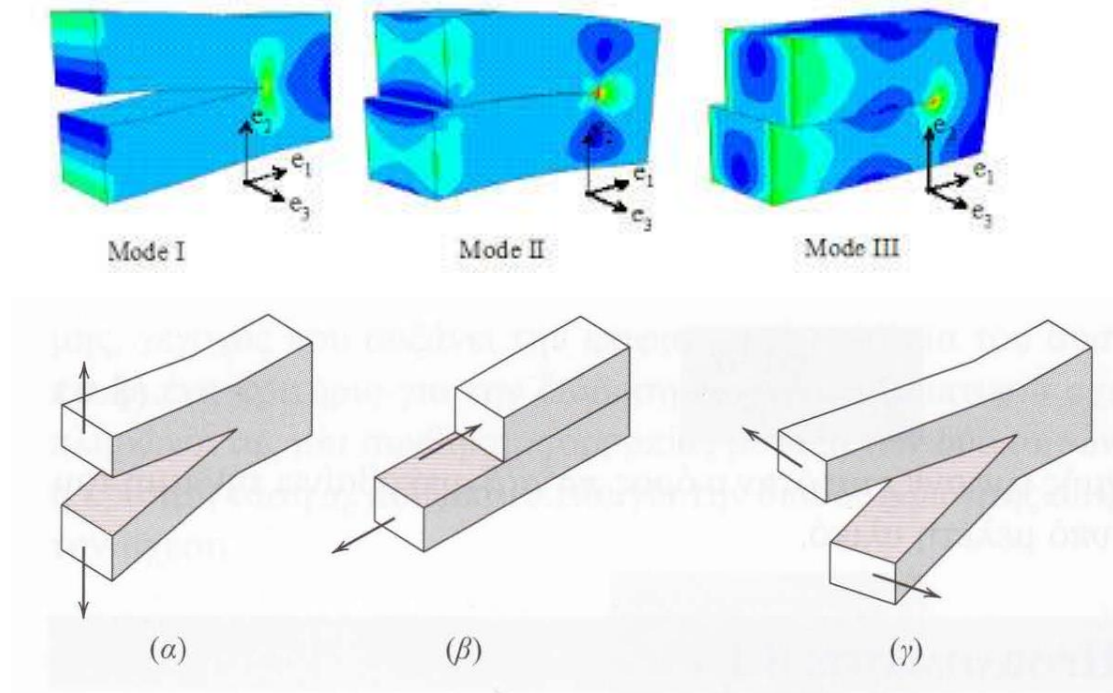
Ο G. Irwin επέλεξε να ενσωματώσει τους δύο όρους, γ και γ_p , σε ένα και μόνο όρο G_c ως εξής

$$G_c = 2(\gamma + \gamma_p) \quad (11)$$

ο όρος G_c είναι γνωστός ως *κρίσιμος ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας παραμόρφωσης*.

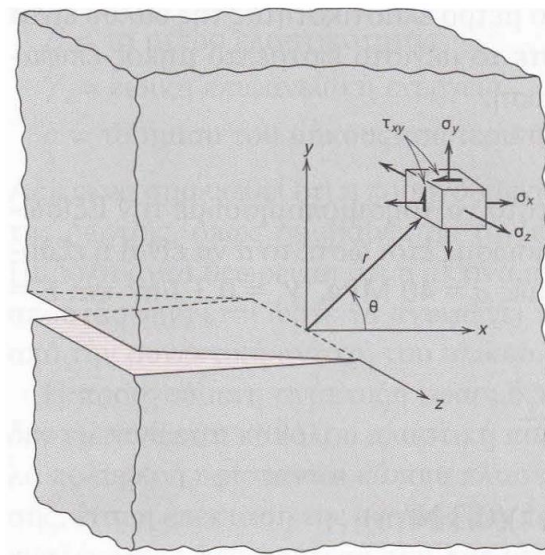
1.7 Ανάλυση των τάσεων στις ρωγμές

Υπάρχουν τρεις βασικοί τρόποι με τους οποίους ένα φορτίο μπορεί να ενεργήσει σε μία ρωγμή, και καθένας προκαλεί διαφορετική μετατόπιση της επιφάνειας της ρωγμής. Οι τρεις τύποι φόρτισης απεικονίζονται στην Εικ. 9. Ο τύπος I αντιστοιχεί σε εφελκυσμό, ενώ οι τύποι II και III σε ολίσθηση και απόσχιση, αντίστοιχα. Ο τύπος I είναι ο *τύπος διάνοιξης* της ρωγμής και συναντάται πιο συχνά



Εικόνα 9 Οι τρεις τύποι διάνοιξης των επιφανειών ρωγμής: (α) τύπος I, εφελκυστικός τύπος, (β) τύπος II, τύπος ολίσθησης και (γ) τύπος III, τύπος απόσχισης

Αναφορικά με την Εικ. 10, οι συνιστώσες τάσεις σε τυχόν σημείο πέρα από το άκρο της ρωγμής παρέχονται από τις σχέσεις:



Εικόνα 10 Τασικό πεδίο στην περιοχή του άκρου ρωγμής

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_x(\theta) \\ \sigma_y &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_y(\theta) \\ \tau_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{xy}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Στην εξίσωση (12) εμφανίζονται οι τάσεις που δρουν στο μέτωπο διάδοσης ρωγμής που φορτίζεται εφελκυστικά σε λεπτό έλασμα. Η παράμετρος K ονομάζεται *συντελεστής έντασης τάσεων* και προβλέπει την ένταση της τάσης κοντά στο άκρη μιας ρωγμής που προκαλείται από ένα απομακρυσμένο φορτίο ή παραμένουσες τάσεις. Ο συντελεστής έντασης τάσεων εξαρτάται από:

- το σχήμα του δοκιμίου,
- το μέγεθος και τη θέση της ρωγμής,
- το μέγεθος του φορτίου που εφαρμόζεται στο δοκίμιο,
- την κατανομή του φορτίου.

Η χρήση του K παρέχει κατάλληλο προσδιορισμό της κατανομής των τάσεων γύρω από μία ρωγμή. Για κάθε τύπο διάνοιξης της ρωγμής τύπου I, II, III υπάρχει και διαφορετικός συντελεστής έντασης τάσεων. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο συντελεστής έντασης τάσεων K και ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων K_t αν και είναι παρόμοιοι δεν είναι ισοδύναμοι. Ο συντελεστής έντασης τάσεων K σχετίζεται με την εφαρμοζόμενη τάση και το μήκος της ρωγμής μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (13)$$

Για τους τρεις διαφορετικούς τρόπους διάνοιξης της ρωγμής οι αντίστοιχοι συντελεστές έντασης τάσεων είναι

$$\left. \begin{aligned} K_I &= Y\sigma_{yy}\sqrt{2\pi r} \\ K_{II} &= Y\tau_{yx}\sqrt{2\pi r} \\ K_{III} &= Y\tau_{yz}\sqrt{2\pi r} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Στη περίπτωση που η φόρτιση είναι σύνθετη, χρησιμοποιείται ο ισοδύναμος συντελεστής έντασης τάσεων, οποίος περιέχει και τους τρεις επιμέρους συντελεστές, εφόσον αυτοί υπάρχουν

$$K_{eq} = \sqrt{A_{11}K_I^2 + A_{12}K_I K_{II} + A_{22}K_{II}^2 + A_{33}K_{III}^2} \quad (15)$$

Ο ισοδύναμος συντελεστής έντασης τάσης, K_{eq} , προκύπτει από τους συντελεστές A_{11} - A_{33} , οι οποίοι εξαρτώνται κυρίως από τη γωνία διάδοσης της ρωγμής και απο τον λόγο Poisson.

1.8 Κρίσιμος συντελεστής έντασης τάσης

Για να ορίσουμε τον *κρίσιμο συντελεστή έντασης τάσεων*, θα πρέπει πρώτα να καθορίσουμε πότε θραύεται ένα δοκίμιο. Η θραύση, λοιπόν, επέρχεται όταν η τιμή της εφαρμοζόμενης τάσης υπερβεί μία κρίσιμη τιμή, σ_c [Εξ. (11)]. Εάν αντικαταστήσουμε αυτή

την κρίσιμη τιμή της τάσης στην Εξ. (13), τότε προκύπτει μια κρίσιμη τιμή και για τον συντελεστή έντασης τάσεων. Αυτή η κρίσιμη τιμή ονομάζεται *κρίσιμος συντελεστής έντασης τάσης* K_c και ορίζεται από τη σχέση

$$K_c = Y(a/W)\sigma_c\sqrt{\pi a} \quad (16)$$

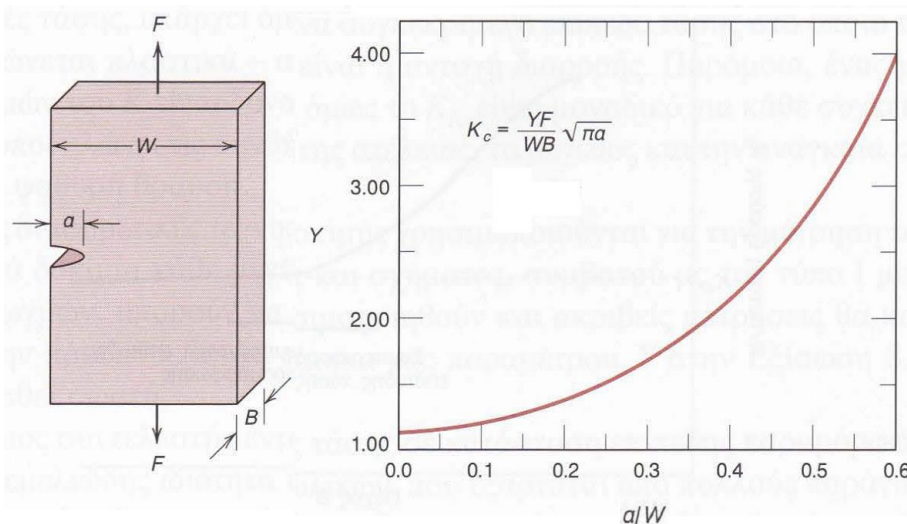
όπου: σ_c είναι και πάλι η κρίσιμη τάση για την διάδοση της ρωγμής και η συνάρτηση Y εξαρτάται από το μήκος της ρωγμής και από το πλάτος του ελασμάτος, δηλαδή είναι $Y(a/W)$. Για τις τιμές της συνάρτησης $Y(a/W)$ ισχύει ότι, όταν ο λόγος a/W προσεγγίζει το μηδέν, η τιμή της $Y(a/W)$ προσεγγίζει την μονάδα. Δοκίμια πεπερασμένων διαστάσεων απαιτούν μαθηματικές εκφράσεις του όρου $Y(a/W)$, οι οποίες συχνά είναι πεπλεγμένες συναρτήσεις του λόγου a/W . Για παράδειγμα, σε επίπεδη πλάκα πάχους W , με διαμπερή ρωγμή στο κέντρο της, ισχύει

$$Y(a/W) = \left(\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W} \right) \quad (17)$$

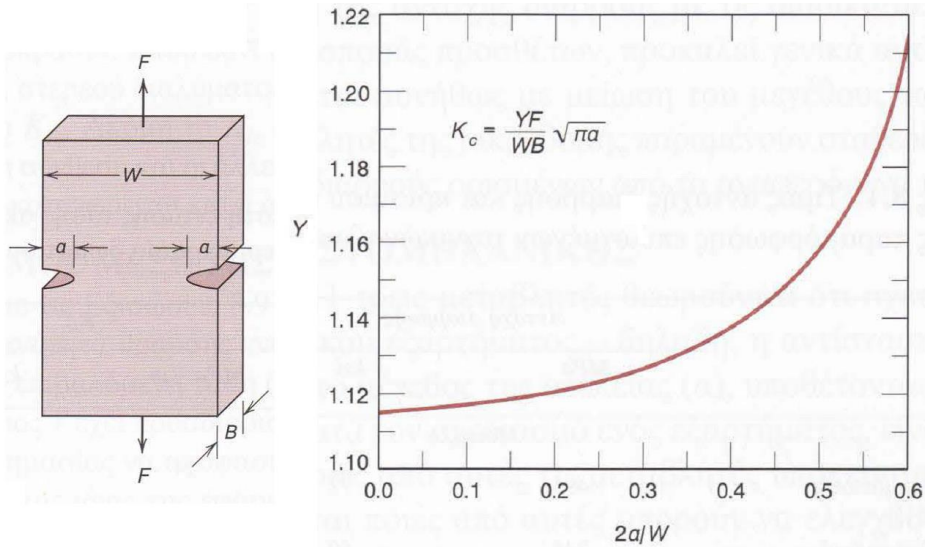
Εξ ορισμού, ο κρίσιμος συντελεστής έντασης τάσης είναι η ιδιότητα που εκφράζει την αντίσταση του υλικού σε ψαθυρή θραύση παρουσία ρωγμής. Σε σχετικά λεπτά δοκίμια, η τιμή του K_c εξαρτάται από το πάχος του δοκιμίου B και μάλιστα μειώνεται όσο αυτό αυξάνει. Τελικά, το K_c γίνεται ανεξάρτητο του B , από τη στιγμή που πληρούται η συνθήκη επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης. Η σταθερή τιμή του K_c για δοκίμια μεγαλύτερου πάχους, K_{Ic} ορίζεται ως εξής

$$K_{Ic} = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (18)$$

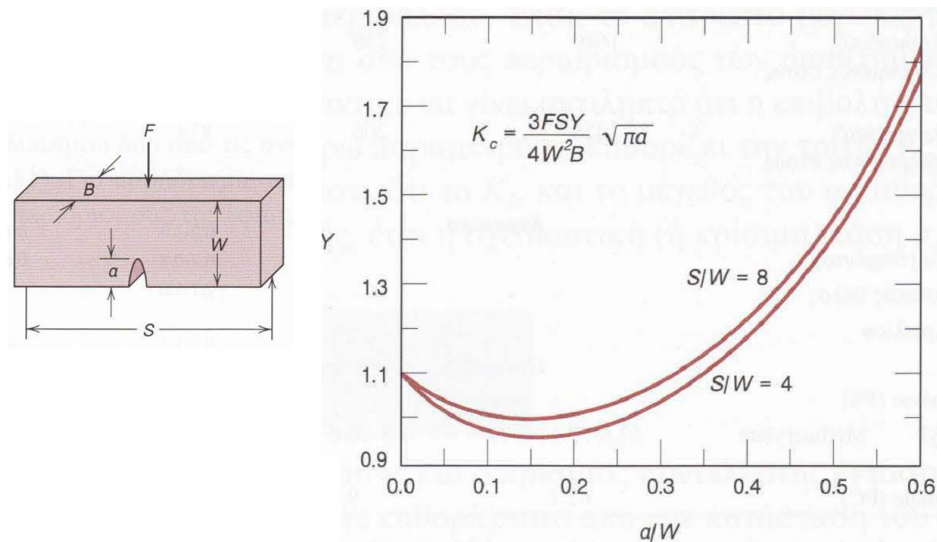
Συνήθως, χρησιμοποιούνται οι τιμές της αντίστασης θραύσης, δεδομένου ότι αυτές είναι πάντοτε μικρότερες από εκείνες του K_c . Ο δείκτης I του K_{Ic} υποδηλώνει ότι η συγκεκριμένη κρίσιμη τιμή του K_c αντιστοιχεί σε διάνοιξη ρωγμής του τύπου I . Τα ψαθυρά υλικά, στα οποία δεν είναι δυνατόν να παρουσιασθεί σημαντική πλαστική παραμόρφωση μπροστά από μία εξελισσόμενη ρωγμή, έχουν χαμηλές τιμές του K_{Ic} και είναι ευπρόσβλητα σε καταστρεπτική αστοχία. Από την άλλη μεριά, οι τιμές του K_{Ic} στα όλκιμα υλικά είναι σχετικά υψηλές. Η μηχανική των θραύσεων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην πρόβλεψη καταστροφικών αστοχιών σε υλικά με ενδιάμεση όλκιμότητα. Χαρακτηριστικά νομογραφήματα για τον υπολογισμό του δείκτη K_c δίνονται στις Εικ. 11, 12 και 13.



Εικόνα 11



Εικόνα 12



Εικόνα 13

1.9 Η Μέθοδος Westergaard-Irwin

Το 1939, ο Harold M. Westergaard ανέπτυξε μια λύση για το πεδίο των τάσεων που περιβάλλει μια ρωγμή, η οποία έχει δύο πλεονεκτήματα έναντι της λύσης του Inglis.

Πρώτον, η λύση του Westergaard εφαρμόζεται άμεσα σε ρωγμές, όχι σε έλλειψη που προσεγγίζει μια ρωγμή στο όριο.

Δεύτερον, η λύση εκφράζεται σε ορθογώνιες συντεταγμένες και όχι σε ελλειπτικές συντεταγμένες.

Ο Westergaard επέλεξε να εκφράσει τις ορθογώνιες συντεταγμένες ως μιγαδικούς αριθμούς, $z = x + iy$. Όμως, οι εκφράσεις που προκύπτουν είναι πολύ πιο εύκολο να ερμηνευθούν από τις εξισώσεις του Inglis σε ελλειπτικές συντεταγμένες.

Η χρήση της τασικής συνάρτησης Airy αποτελεί συνήθη τεχνική για την επίλυση διδιάστατων προβλημάτων ελαστικότητας. Οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων για διδιάστατα προβλήματα είναι

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Αυτές ικανοποιούνται σε κάθε περίπτωση, εάν οι συνιστώσες τάσεις εκφραστούν σε σχέση με τη συνάρτηση του Airy, δηλαδή στη μορφή

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Για να εκφράσουμε τις τάσεις θα πρέπει να ικανοποιηθεί η ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x - \nu \sigma_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_y - \nu \sigma_x)}{\partial x^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (21)$$

όπου: ∇^2 είναι ο συνήθης συντελεστής Laplace.

Με συνδυασμό των Εξ. (20) και (21) προκύπτει η σχέση

$$\nabla^2 (\nabla^2 A) = 0 \quad (22)$$

Οποιαδήποτε συνάρτηση A που ικανοποιεί τη συνθήκη $\nabla^4 A = 0$ θεωρείται με βεβαιότητα ότι παράγει πεδία τάσης και ανηγμένης παραμόρφωσης, που βρίσκονται σε ισορροπία για ισοτροπικό στερεό.

Ο Westergaard επέλεξε για τη μελέτη μιας ρωγμής υπό τάση μια μιγαδική συνάρτηση ως τασική συνάρτηση του Airy. Αυτό επιτρέπει να εκφράζεται η τάση ως συνάρτηση των x και y , $\sigma = f(x, y)$, με τη χρήση μιγαδικών αριθμών.

Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann συσχετίζουν τις πολλών διαφορετικών τύπων παραγώγους μιγαδικών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{dZ}{dz} &= \frac{\partial \operatorname{Re} Z}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} Z}{\partial y} \\ \operatorname{Im} \frac{dZ}{dz} &= \frac{\partial \operatorname{Im} Z}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re} Z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Κάθε μιγαδική συνάρτηση $Z(z)$, μπορεί να χωριστεί σε πραγματικό και φανταστικό μέρος $Z(z) = \operatorname{Re} Z + i \operatorname{Im} Z$, έτσι ώστε να διευκολυνθεί η παράγωγισή της συνάρτησης, υπό τη μορφή

$$\frac{dZ}{dz} = \operatorname{Re} \frac{dZ}{dz} + i \operatorname{Im} \frac{dZ}{dz} = \frac{\partial \operatorname{Re} Z}{\partial x} + i \frac{\partial \operatorname{Im} Z}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} Z}{\partial y} - i \frac{\partial \operatorname{Re} Z}{\partial y} \quad (24)$$

Ο Westergaard πρότεινε μια χαρακτηριστική μιγαδική τασική συνάρτηση Airy ως λύση για το τασικό πεδίο σε μια άπειρη πλάκα που περιέχει μια ρωγμή.

Η προτεινόμενη συμβολοσειρά είναι χρήσιμη επειδή, όπως θα δούμε, η τασική συνάρτηση Airy A θα εκφράζεται σε όρους Z , αλλά οι τάσεις είναι όλες συναρτήσεις των παραγώγων δεύτερης τάξης του A . Επομένως, δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε ρητά ποιες είναι οι \bar{Z} και $\bar{\bar{Z}}$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\bar{Z}}}{dz} &= \bar{\bar{Z}} \\ \frac{d\bar{Z}}{dz} &= Z \\ \frac{dZ}{dz} &= Z' \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ο Westergaard έθεσε ως μιγαδική τασική συνάρτηση του Airy την

$$A = \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}} + y \operatorname{Im} \bar{Z} \quad (26)$$

$$Z(z) = \frac{\sigma_{\infty}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2}} \quad (27)$$

όπου: α το μήκος της ρωγμής.

Το πρώτο βήμα μετά την επιλογή μιας τασικής συνάρτησης Airy είναι να επιβεβαιωθεί με ότι ικανοποιείται η συνθήκη $\nabla^4 A = 0$. Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι η διαφορική εξίσωση ικανοποιείται από την A [Εξ. (26)] ανεξάρτητα από την επιλογή της $Z(z)$. Η παρατήρηση αυτή επέτρεψε στον Westergaard να επιλέξει πολλές διαφορετικές συναρτήσεις για τη $Z(z)$, που καθεμιά τους αποτελούσε λύση και σε διαφορετικό πρόβλημα. Η συνάρτηση για το $Z(z)$ που αναφέρθηκε παραπάνω ήταν η λύση για μια ρωγμή σε μια άπειρη πλάκα. Με αντικατάσταση της συνάρτησης A στις εκφράσεις σ_{xx} σ_{yy} σ_{xy} παίρνουμε

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \\ \sigma_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z' \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

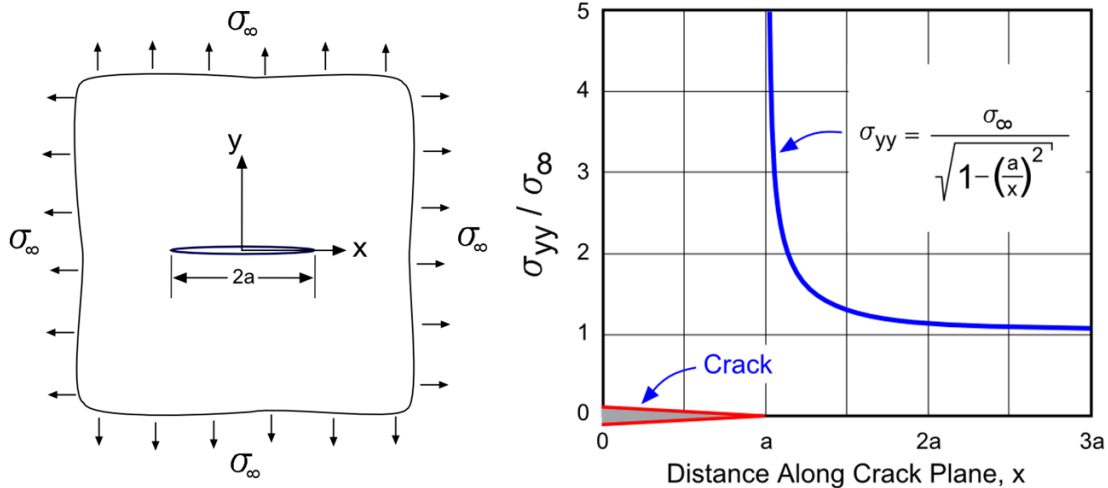
Το βασικότερο πρόβλημα με τη λύση του Westergaard είναι ο διαχωρισμός της ρίζας σε πραγματικό και φανταστικό μέρος. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μόνο με τη χρήση μιας σειράς Taylor. Μπορούμε, όμως, να αποφύγουμε το ανάπτυγμα σε σειρά κατά μήκος του επιπέδου της ρωγμής, όπου είναι $y=0$ και $z=x$, οπότε οι εξισώσεις γράφονται στη μορφή

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} Z \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} Z \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$Z(x) = \frac{\sigma_{\infty}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \quad (30)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_{\infty}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \quad (31)$$

Στην Εικ. 14 φαίνεται η κατανομή της τάσης στην περιοχή πέρα από το άκρο της ρωγμής, όπου φαίνεται ότι θεωρητικά η τάση απειρίζεται στο άκρο της ρωγμής και μειώνεται γρήγορα σε μικρή απόσταση από το άκρο της ρωγμής, διατηρώντας σχεδόν σταθερή τιμή (περίπου ίση με την εφαρμοζόμενη τάση).

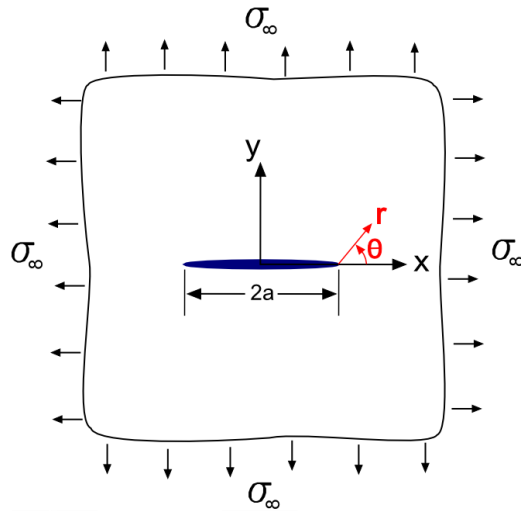


Εικόνα 14 Τασικό πεδίο στο άκρο ρωγμής κατά Westergaard

Αργότερα, ο Irwin μπόρεσε να απλοποιήσει σε μεγάλο βαθμό τις σχέσεις του Westergaard στην περιοχή που περιβάλλει άμεσα το άκρο της ρωγμής, εκφράζοντας το μιγαδικό αριθμό z ως άθροισμα δυο όρων (πολική μορφή)

$$z = a + re^{i\theta} \quad (32)$$

Το βασικό χαρακτηριστικό της εξίσωσης αυτής είναι ότι $r = 0$ στο άκρο της ρωγμής ($x = a$). Αυτό αντικατοπτρίζεται από τα κόκκινα στοιχεία της Εικ. 15.



Εικόνα 15

Αξίζει ακόμη να σημειωθεί ότι είναι $r \ll a$ στην περιοχή πολύ κοντά στο άκρο της ρωγμής. Αυτή η ανισότητα χρησιμοποιήθηκε από τον Irwin για να βρει απλές εκφράσεις για τις συνιστώσες της τάσης κοντά στο άκρο της ρωγμής σε όρους πολικών συντεταγμένων r και θ . Αντικαθιστώντας την έκφραση του z στο $Z(z)$, προκύπτει

$$Z(z) = \frac{\sigma_\infty}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + re^{i\theta}}\right)^2}} \quad (33)$$

$$Z(z) = \frac{\sigma_\infty}{\sqrt{\left(\frac{2\alpha re^{i\theta} + r^2 e^{i2\theta}}{\alpha^2 + r2\alpha e^{i\theta} + r^2 e^{i2\theta}}\right)}} \quad (34)$$

Κάνοντας την παραδοχή $\alpha \gg r$ για την περιοχή πολύ κοντά στο άκρο της ρωγμής, προκύπτει ότι $\alpha^2 \gg r2\alpha e^{i\theta} \gg r^2$, με συνέπεια η Εξ. (33) να πάρει τη μορφή

$$Z(z) = \frac{\sigma_\infty}{\sqrt{\left(\frac{2\alpha re^{i\theta}}{\alpha^2}\right)}} \quad (35)$$

Εφαρμόζοντας τη ταυτότητα του Euler [$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$], παίρνουμε

$$Z(z) = \sigma_\infty \sqrt{\frac{\alpha}{2r}} \cdot e^{-i\frac{\theta}{2}} \quad (36)$$

$$Z(z) = \sigma_\infty \sqrt{\frac{\alpha}{2r}} \left(\cos\frac{\theta}{2} - i \sin\frac{\theta}{2} \right) \quad (37)$$

Όμως, η λύση του Westergaard χρειάζεται μόνο το πραγματικό μέρος της συνάρτησης, δηλ. είναι

$$\text{Re } Z = \sigma_\infty \sqrt{\frac{\alpha}{2r}} \cos\frac{\theta}{2} \quad (38)$$

Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται για την εκτίμηση της Z' . Οπότε λαμβάνονται

$$Z'(z) = \frac{-\sigma_{\infty} \alpha^2}{z^3 \left[1 - \left(\frac{a}{z} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (39)$$

$$Z'(z) = \frac{-\sigma_{\infty} \alpha^2}{a^3 \left[\left(\frac{2are^{i\theta}}{a^2} \right) \right]^{3/2}} \quad (40)$$

$$Z'(z) = \frac{-\sigma_{\infty}}{2r} \sqrt{\frac{a}{2r}} \cdot e^{-i\frac{3\theta}{2}} \quad (41)$$

$$Z'(z) = \frac{-\sigma_{\infty}}{2r} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (42)$$

Γνωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των Z και Z' , γίνεται εφικτός ο προσδιορισμός των εκφράσεων των συνιστωσών της τάσης, Έτσι, π.χ. για την τάση σ_{xx} έχουμε

$$\sigma_{xx} = \text{Re } Z - y \text{Im } Z' \quad (43)$$

Με εισαγωγή κατάλληλων συντελεστών για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη, είναι εφικτή η προσέγγιση των τάσεων κατά Irwin κοντά στη ρωγμή

$$\sigma_{xx} = \sigma_{\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{y}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (44)$$

Θέτουμε $y=r \cdot \sin\theta$, οπότε

$$\sigma_{xx} = \sigma_{\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (45)$$

Και επειδή $1/2 \sin\theta = \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)$,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (46)$$

Εργαζόμενοι ομοίως για όλες τις συνιστώσες τάσεις, τελικά λαμβάνονται οι σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \sigma_{\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

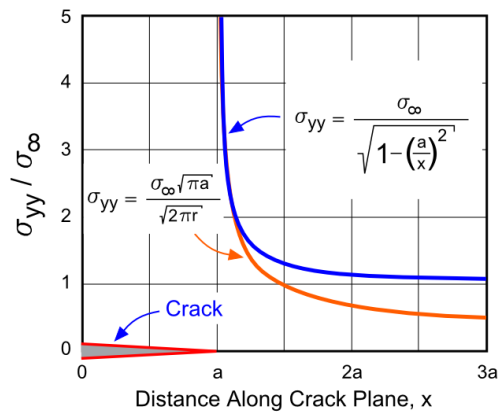
Είναι φανερό ότι οι εκφράσεις των συνιστωσών τάσης, λόγω των απλοποιήσεων που έγιναν, είναι ακριβείς μόνο κοντά στο άκρο της ρωγμής, αλλά όχι πάνω στο άκρο αυτής, διότι εκεί η τάση απειρίζεται ακόμα και για πολύ μικρές εφαρμοζόμενες τάσεις. Για να διερευνήσουμε πόσο κοντά στη ρωγμή πρέπει να βρισκόμαστε, ώστε να υφίσταται σχετική ακρίβεια στη λύση, εξετάζουμε την σ_{yy} για $\gamma = 0$, γνωρίζοντας ότι η ακριβής έκφραση είναι

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{\infty}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \quad (48)$$

Με την προσέγγιση του Irwin για $\theta=0$ είναι

$$\sigma_{yy} = \sigma_{\infty} \sqrt{\frac{a}{2r}} \quad (49)$$

Οι δύο εξισώσεις συγκρίνονται στην Εικ. 16.

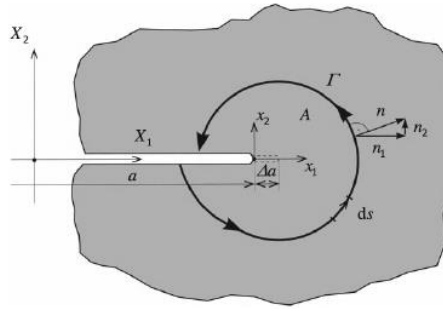


Εικόνα 16

Είναι σαφές ότι οι σχέσεις (48) και (49) είναι ισοδύναμες πολύ κοντά στο άκρο της ρωγμής και αποκλίνουν καθώς αυξάνεται η απόσταση από το άκρο. Η περιοχή στην οποία οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες αντιστοιχεί σε περίπου $r \leq a/10$. Πέρα από την απόσταση αυτή, η προσέγγιστική έκφραση του Irwin συνεχίζει να μειώνεται προς το μηδέν, δεδομένου ότι το κλάσμα $1/\sqrt{r}$ μειώνεται καθώς το r αυξάνεται.

1.10 Η Μέθοδος J-Integral

Οι Cherepanov και Rice εισήγαγαν μια άλλη μηχανική παράμετρο, με την οποία καθίσταται εφικτός ο υπολογισμός των συντελεστών έντασης τάσεων και ονομάζεται *ολοκλήρωμα J* (J-integral). Αυτή η παράμετρος έχει αποδειχθεί εξαιρετικά πολύτιμη όχι μόνο στην γραμμική-ελαστική μηχανική των θραύσεων, αλλά και στη θραυστομηχανική των ανελαστικών υλικών.



Εικόνα 17 Μορφοποίηση του J-integral

Με βάση την Ει. 17, επιλέγουμε αυθαίρετα μια περιοχή A γύρω από το άκρο της ρωγμής που περιβάλλεται από την καμπύλη Γ , η οποία διαγράφεται από την κάτω προς την πάνω πλευρά της ρωγμής. Για να υπολογίσουμε την δυναμική ενέργεια του συστήματος, θα πρέπει να εξετάσουμε ολόκληρο το σώμα. Θα δούμε ότι το αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει από την ολοκλήρωση δεν εξαρτάται από την επιλεγμένη περιοχή.

Οι εξωτερικές τάσεις $t_i = \sigma_{ij}n_j$ θεωρείται ότι παραμένουν σταθερές κατά την επέκταση της ρωγμής κατά da . Επίσης, θεωρούμε ότι οι βαρυτικές δυνάμεις είναι μηδενικές. Η ρωγμή επεκτείνεται κατά μήκος της αρχικής της κατεύθυνσης κατά da και η περιοχή A μετατοπίζεται μαζί με αυτή. Κατά τη διάρκεια της επέκτασης της ρωγμής κατά da , όλες οι μεταβλητές που εξαρτώνται από τη περιοχή A αλλάζουν άμεσα και έμμεσα με το μήκος της ρωγμής. Επομένως, εκτός από τις σταθερές συντεταγμένες (X_1, X_2) , εισάγεται και ένα κινούμενο σύστημα $(x_1 = X_1 - a, x_2 = X_2)$ στο άκρο της ρωγμής με

$$\frac{d(-)}{da} = \frac{\partial(-)}{\partial a} + \frac{\partial x_1}{\partial a} \frac{\partial(-)}{\partial x_1} = \frac{\partial(-)}{\partial a} - \frac{\partial(-)}{\partial x_1} \quad (50)$$

Έτσι, διαφορίζουμε τη δυναμική ενέργεια, που είναι συνάρτηση του πεδίου μετατόπισης u_i , σε σχέση με το μήκος της ρωγμής

$$\begin{aligned} \frac{-d\Pi(u_i)}{da} &= \frac{d}{da} \{W_{ext}(u_i) - W_{int}(u_i)\} = \frac{d}{da} \left\{ \int_{\Gamma} t_i u_i ds - \int_A U dA \right\} = \\ &= \int_A \frac{\partial U(u_i)}{\partial x_1} dA - \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds + \left[- \int_A \frac{\partial U}{\partial a} dA + \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right] \quad (51) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial a},$$

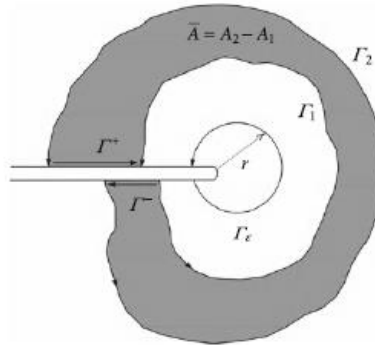
μετατρέπουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε χωρικό ολοκλήρωμα μέσω του θεωρήματος απόκλισης του Gauss, ενώ εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας $\sigma_{ij,j} = 0$, αντίστοιχα, εξαφανίζεται ο τελευταίος όρος της εξίσωσης που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες. Το πρώτο ολοκλήρωμα μπορεί επίσης να μετατραπεί από το θεώρημα Gauss και να μετασχηματιστεί χρησιμοποιώντας το μήκος τόξου ds κατά μήκος της διαδρομής Γ

$$\int_A U_j \delta_{1j} dA = \int_{\Gamma} U ds = \int_{\Gamma} U dx_2 \quad (52)$$

Με τον τρόπο αυτό ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας G μπορεί να υπολογισθεί κατά μήκος της καμπύλης Γ , χρησιμοποιώντας ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα που δηλώνεται ως

$$G = \frac{-d\Pi}{da} = J = \int_{\Gamma} \left[U dx_2 - \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right] \quad (53)$$

Για να αποδείξουμε ότι το J είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της περιοχής A και της διαδρομής Γ , συγκρίνουμε δύο διαφορετικές διαδρομές Γ_1 και Γ_2 γύρω από το άκρο της ρωγμής, βλ. Εικ. 18.



Εικόνα 18

Οι διαδρομές συμπληρώνονται από τα τμήματα Γ^+ και Γ^- κατά μήκος των ανώτερων και κατώτερων επιφανειών ρωγμών αντίστοιχα, με αποτέλεσμα την κλειστή καμπύλη $C = \Gamma_2 + \Gamma^+ + \Gamma_1 + \Gamma^-$. Τα ολοκληρώματα πάνω στα Γ^+ και Γ^- είναι μηδενικά, επειδή στις επιφάνειες ρωγμών είναι $t_i = 0$. Αξιολογώντας το J κατά μήκος της καμπύλης C , το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μετατρέπεται πάλι σε επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια $A_2 - A_1$ ως εξής

$$\int_C \left[U n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] ds = \int_C \left[U \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] n_j ds = \int_{\bar{A}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[U \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] d\bar{A} \quad (54)$$

Η ενέργεια παραμόρφωσης U είναι συνάρτηση των παραμορφώσεων ϵ_{ij} και η διαφόριση της παρέχει τις τάσεις σ_{ij} σε περίπτωση (μη) γραμμικού-ελαστικού υλικού. Έτσι, παίρνουμε

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1} - \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (55)$$

Λόγω των συνθηκών ισορροπίας, εξαφανίζεται ο 2^{ος} όρος, δεδομένου ότι δεν λαμβάνονται υπόψη οι δυνάμεις αδρανείας και όγκου. Επιπλέον, στον 3^ο όρο χρησιμοποιήθηκε η συμμετρία του τανυστή των τάσεων $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, αντισταθμίζοντας έτσι τον 1^ο όρο. Τελικά, λαμβάνεται

$$\int_C (-) ds = \int_{\Gamma_1} (-) ds - \int_{\Gamma_2} (-) ds + \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} (-) ds = 0 \quad (56)$$

Απο τη στιγμή που τα επιφανειακά ολοκληρώματα πάνω στα τμήματα Γ^+ και Γ^- είναι μηδέν, έχει αποδειχθεί η ανεξαρτησία της διαδρομής

$$J_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} (-) ds = J_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} (-) ds \quad (57)$$

Ο αριθμητικός υπολογισμός του κλασικού ολοκληρώματος-J θα εξηγηθεί στα πλαίσια της ανάλυσης FEM για 2D προβλήματα. Στην LEFM (γραμμική ελαστική μηχανική των θραύσεων), το J είναι ταυτόσημο με το ρυθμό απελευθέρωσης ελαστικής ενέργειας G, που σχετίζεται άμεσα με τους συντελεστές K_I , K_{II} και K_{III} σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} G_I &= \frac{\kappa+1}{8\mu} K_I^2 \\ G_{II} &= \frac{\kappa+1}{8\mu} K_{II}^2 \\ G_{III} &= \frac{K_{III}^2(1+\nu)}{E} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Στην περίπτωση που έχουμε σύνθετη καταπόνηση, ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις:

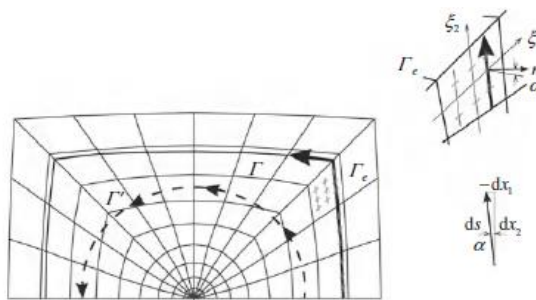
$$G = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{\kappa+1}{8\mu} K_I^2 + \frac{\kappa+1}{8\mu} K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2(1+\nu)}{E} \quad (59)$$

$$J = \int_{\Gamma} \left[U n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] ds \quad (60)$$

Όπως παρουσιάζεται στην Εικ. 19, η διαδρομή ολοκλήρωσης υποδιαιρείται σε τμήματα Γ_e ανά στοιχείο, δηλαδή είναι

$$\Gamma = \sum_{e=1}^{n_E} \Gamma_e \quad (61)$$

Η πιο κοινή μέθοδος προβλέπει να τοποθετήσουμε τη διαδρομή ολοκλήρωσης πάνω στα σημεία ολοκλήρωσης του στοιχείου. Αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι οι τάσεις είναι συνήθως γνωστές από την ανάλυση FEM, και με τον τρόπο αυτόν επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ακρίβεια. Η ολοκλήρωση πάνω στο Γ_e θα πρέπει να γίνεται μέσω των φυσικών συντεταγμένων $\xi_1 = \text{σταθερά}$ και $\xi_2 \in [-1, +1]$ ως παράμετρο καμπύλης.



Εικόνα 19

Επιπλέον, ισχύει:

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \cos a \\ \sin a \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} dx_2 \\ -dx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} d\xi_2 \quad (62)$$

Για το γραμμικό στοιχείο ds εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός $ds = J_L dx_2$. Ο 1^{ος} όρος του ολοκληρώματος είναι η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης του U , η οποία δίνεται από το τύπο

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + 2\tau_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}) \quad (63)$$

Στο 2^ο όρο υπάρχουν τα διανύσματα

$$t_{ij} = \sigma_{ij}n_j \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 \\ \tau_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Οι παράγωγοι των μετατοπίσεων u_i ως προς x_1 γράφονται στη μορφή

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \sum_{a=1}^{nk} \frac{\partial N_a(\xi_1, \xi_2)}{\partial x_1} u_i^{(a)} \quad (66)$$

Για τη παραγωγή χρησιμοποιείται το αντίστροφο του Ιακωβιανού μητρώου, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_a}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Έτσι, το ολοκλήρωμα J πάνω στο στοιχείο e λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} J^{(e)} &= \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + 2\tau_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\varepsilon_{22})n_1 - (\sigma_{11}n_1 + \tau_{12}n_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - (\tau_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\} J_L d\xi_2 \\ &= \int_{-1}^{+1} F(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \approx \sum_{g=1}^{n_g} F(\xi_1 = \text{σταθερα}, \xi_2^g) w_g \quad (68) \end{aligned}$$

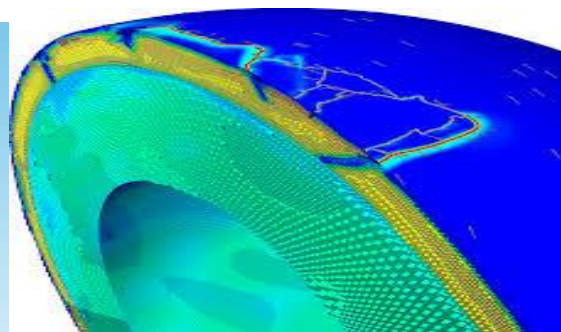
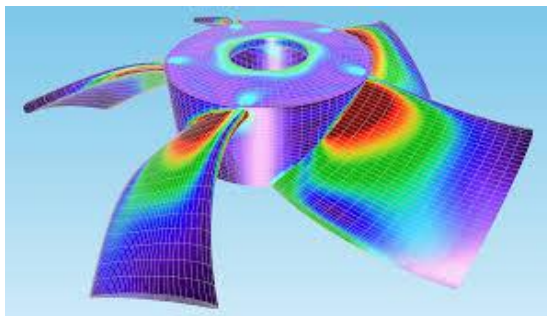
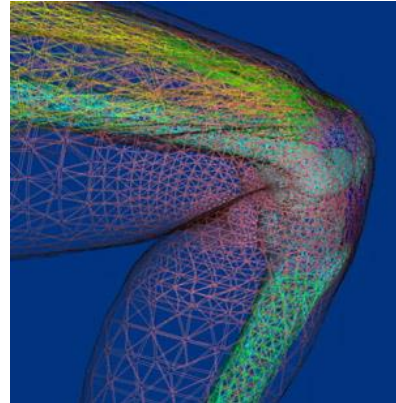
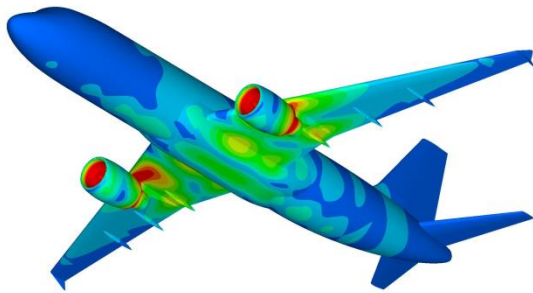
Τέλος, η συνολική τιμή του J προκύπτει με άθροιση των $J^{(e)}$ όλων των στοιχείων πάνω στη διαδρομή ολοκλήρωσης Γ

$$J = \sum_{e=1}^{n_E} J^{(e)} \quad (69)$$

Δεδομένου ότι το περίγραμμα αποτελείται από μονοπάτια $\xi_1 = \text{σταθ.}$ μέσω γειτονικών στοιχείων, υπάρχουν περιορισμοί σε σχέση με το σχεδιασμό του πλέγματος FEM ώστε να πλαισιώσει μια συνεχή, κλειστή διαδρομή ολοκλήρωσης. Η αρίθμηση των κόμβων στο στοιχείο πρέπει να ρυθμιστεί έτσι, ώστε το Γ_e να βρίσκεται πάντα στο $\xi_1 = \text{σταθ.}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^{[1],[14],[15]}

2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αριθμητική μέθοδος (δηλ. μέθοδος υπολογισμού με χρήση Η/Υ) για τον υπολογισμό προσεγγιστικών λύσεων μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Η αναλυτική λύση των εξισώσεων, με τις οποίες περιγράφονται τα διάφορα τεχνικά προβλήματα, είναι δυνατή μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπου οι καταπονήσεις και τα γεωμετρικά σχήματα είναι πάρα πολύ απλά. Όμως, στη περίπτωση πιο σύνθετων σχημάτων, οι αναλυτικές λύσεις δεν μπορούν να δώσουν αποτέλεσμα, γι' αυτό και αναπτύχθηκαν προσεγγιστικές μέθοδοι ανάλυσης σύνθετων κατασκευών. Μία τέτοια μέθοδος είναι και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Πρόκειται μεν για προσεγγιστική μέθοδο, που μπορεί όμως να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και έχει το ουσιαστικό πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα προβλήματα. Το μειονέκτημά της είναι οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, ιδίως όταν εφαρμόζεται σε

σύνθετα μοντέλα. Αυτό όμως το μειονέκτημα τείνει να ξεπεραστεί τα τελευταία χρόνια χάρη στη ραγδαία ανάπτυξη των υπολογιστών.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μία εξέλιξη των μητρωϊκών μεθόδων αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και έγινε από διαφόρους σπουδαιούς επιστήμονες όπως ο Ιωάννης Αργύρης, ο Ρέι Κλαφ, ο Βάλτερ Ριτζ, ο Μπόρις Γκαλέρκιν και άλλοι.

Όταν πραγματοποιείται ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, τα πρώτα βήματα πρέπει να αποφασίζουν για τον τύπο του στοιχείου που πρέπει να χρησιμοποιηθεί και για το πλέγμα που θα χρησιμοποιηθεί για να διακριθεί ο όγκος του σχετικού σώματος. Διαφορετικοί τύποι στοιχείων χρησιμοποιούν διαφορετικές λειτουργίες παρεμβολής για μετατοπίσεις σε κάθε στοιχείο. Κάθε τύπος έχει εγγενή ικανότητα να ασχολείται με κλίσεις τάσης μέσα στο στοιχείο. Για παράδειγμα, οι απλούστεροι τύποι στοιχείων είναι τα τριγωνικά στοιχεία. Εάν γίνει προσπάθεια να χρησιμοποιηθούν αυτά τα στοιχεία για την ανάλυση ενός σώματος με μεγάλες κλίσεις τάσης, πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα πολύ λεπτό πλέγμα που αποτελείται από πολλά στοιχεία. Αυτό θα είναι πολύ αναποτελεσματικό ως προς τον υπολογιστικό χρόνο. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με χρήση στοιχείων υψηλότερης τάξης που έχουν την ικανότητα να αντιπροσωπεύουν γραμμικές ή παραβολικές κατανομές τάσης μέσα σε αυτά.

2.2 Αρχή των Δυνατών Έργων

Στην περίπτωση μιας ράβδου, μήκους L , το δυνατό έργο αναφέρεται στα στοιχειώδη μήκη dx , στα οποία μπορεί να υποδιαιρεθεί η ράβδος. Κάνοντας τη συνήθη υπόθεση ότι για κάθε x τα σημεία κάθε διατομής έχουν κοινή αξονική μετατόπιση $u(x)$, το δυνατό έργο των αδρανειακών δυνάμεων είναι

$$\delta W_m = \int_V \underbrace{\delta u}_{\substack{\text{Δυνατή} \\ \text{μετατόπιση}}} \cdot \underbrace{\rho \ddot{u}}_{\substack{\text{Δύναμη} \\ \text{ανά} \\ \text{μονάδα} \\ \text{όγκου}}} \cdot dV = \int_0^L \delta u \cdot \rho A \ddot{u} \cdot dx \quad (70)$$

Το δυνατό έργο των ελαστικών δυνάμεων ισούται με

$$\delta W_k = \int_V \underbrace{\delta \varepsilon}_{\substack{\text{Δυνατή} \\ \text{παραμόρφωση}}} \cdot \underbrace{\sigma}_{\substack{\text{αξονική} \\ \text{τάση}}} \cdot dV = \int_0^L \delta \varepsilon \cdot EA \cdot \varepsilon \cdot dx \quad (71)$$

Η μετατόπιση δίνεται από το τύπο

$$u(x, t) = N_1(x) \cdot u_1(t) + N_2(x) \cdot u_2(t) \quad (72)$$

όπου: N_1, N_2 είναι οι συναρτήσεις σχήματος με

$$\left. \begin{aligned} N_1(0) = 1, N_1(L) = 0 \\ N_2(L) = 1, N_2(0) = 0 \\ N_i(x_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Επίσης, για τη μετατόπιση και την επιτάχυνση ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις :

$$\delta u(x,t) = N_1(x) \cdot \delta u_1(t) + N_2(x) \cdot \delta u_2(t) = \begin{bmatrix} \delta u_1(t) & \delta u_2(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\ddot{u}(x,t) = N_1(x) \cdot \ddot{u}_1(t) + N_2(x) \cdot \ddot{u}_2(t) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} \quad (75)$$

Με αντικατάσταση στην εξ. (70), προκύπτει

$$\begin{aligned} \delta W_m &= \int_0^L \begin{bmatrix} \delta u_1(t) & \delta u_2(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} \cdot \rho A \cdot \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} dx \\ &= \begin{bmatrix} \delta u_1(t) & \delta u_2(t) \end{bmatrix} \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} \cdot \rho A \cdot \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} dx \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix}^T \cdot \int_0^L \rho A \cdot \begin{bmatrix} N_1^2(x) & N_1(x)N_2(x) \\ N_2(x)N_1(x) & N_2^2(x) \end{bmatrix} dx \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix}^T \cdot \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} \quad (76) \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις των συναρτήσεων μορφής ως προς x, παίρνουμε την ανηγμένη παραμόρφωση ως

$$\begin{aligned} \varepsilon &\equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial N_1(x)}{\partial x} \cdot u_1(t) + \frac{\partial N_2(x)}{\partial x} \cdot u_2(t) \Rightarrow \delta \varepsilon = \frac{\partial N_1(x)}{\partial x} \cdot \delta u_1(t) + \frac{\partial N_2(x)}{\partial x} \cdot \delta u_2(t) \Rightarrow \\ \delta \varepsilon &= \begin{bmatrix} \delta u_1(t) & \delta u_2(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(x)/\partial x \\ N_2(x)/\partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} N_1'(x) \\ N_2'(x) \end{bmatrix} \quad (77) \end{aligned}$$

Ομοίως, με αντικατάσταση στην εξ. (71), λαμβάνουμε για το δυνατό έργο των ελαστικών δυνάμεων

$$\begin{aligned} \delta W_k &= \int_0^L \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} N_1'(x) \\ N_2'(x) \end{bmatrix} \cdot EA \cdot \begin{bmatrix} N_1'(x) & N_2'(x) \end{bmatrix} \cdot dx \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix}^T \cdot \underbrace{\int_0^L EA \cdot \begin{bmatrix} N_1'^2(x) & N_1'(x)N_2'(x) \\ N_2'(x)N_1'(x) & N_2'^2(x) \end{bmatrix} dx}_{[k]} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix}^T \cdot \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (78) \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν εύκολα τα μητρώα μάζας και στιβαρότητας, τα οποία δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (79)$$

$$[M]_{consistent} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

2.3 Συναρτήσεις Μορφής

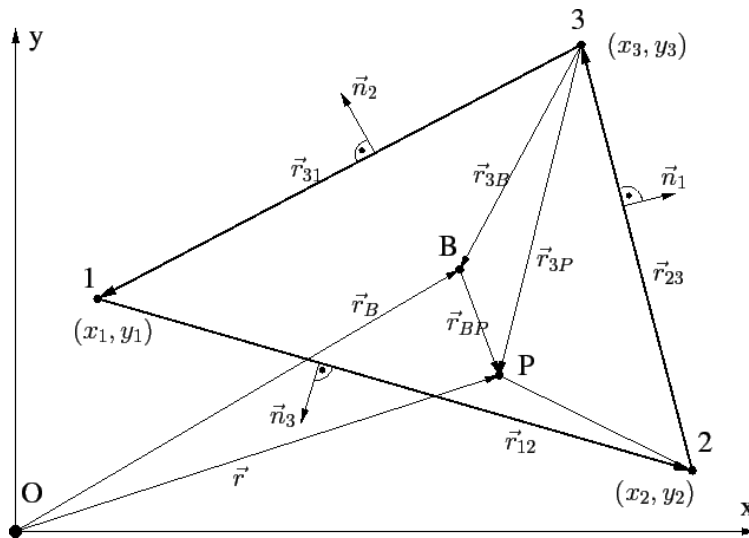
Ο πιο συνήθης τρόπος περιγραφής των συναρτήσεων βάσης είναι μέσω σειρών Taylor για δύο ή τρεις διαστάσεις

$$\varphi(x,y) = \varphi(0) + \frac{x}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) + \frac{y}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) + \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0) + \frac{y^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0,0) \dots \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) = \varphi(0) + \frac{x}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0,0) + \frac{y}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0,0) + \frac{z}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0,0,0) + \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0,0) \\ + \frac{y^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0,0,0) + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(0,0,0) \dots, \end{aligned}$$

2.3.1 Τρικομβικά στοιχεία

Μέσα σε κάθε τρικομβικό στοιχείο, βλ. Εικ. 20, η μετατόπιση εκφράζεται με ένα πολυώνυμο, το οποίο περιέχει τόσους όρους, όσοι είναι οι κόμβοι του στοιχείου, δηλαδή τρεις. Δηλαδή θα είναι της μορφής $\phi(x,y)=a+bx+cy$. Και στη περίπτωση που πρέπει να εισαχθεί και ο χρόνος, θα είναι της μορφής $\phi(x,y,t)=a(t)+b(t)x+c(t)y$.



Εικόνα 20 Χαρακτηριστικά τρικομβικού στοιχείου

Εάν εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση σε κάθε κόμβο του στοιχείου, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= a + bx_1 + cy_1 \\ \phi_2 &= a + bx_2 + cy_2 \\ \phi_3 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Η επίλυση του συστήματος ως προς τους συντελεστες a, b, c δίνει :

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \phi_1 & x_1 & y_1 \\ \phi_2 & x_2 & y_2 \\ \phi_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) \phi_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \phi_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \phi_3}{J} \\
 b &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & \phi_1 & y_1 \\ 1 & \phi_2 & y_2 \\ 1 & \phi_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{(y_2 - y_3) \phi_1 + (y_3 - y_1) \phi_2 + (y_1 - y_2) \phi_3}{J} \\
 c &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \phi_1 \\ 1 & x_2 & \phi_2 \\ 1 & x_3 & \phi_3 \end{vmatrix} = \frac{(x_3 - x_2) \phi_1 + (x_1 - x_3) \phi_2 + (x_2 - x_1) \phi_3}{J}.
 \end{aligned} \tag{83}$$

όπου: $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$ είναι οι βαθμοί ελευθερίας στους κόμβους 1,2,3 αντίστοιχα,

$$J = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{23}) \cdot \vec{e}_z = (\vec{r}_{23} \times \vec{r}_{31}) \cdot \vec{e}_z = (\vec{r}_{31} \times \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_z = 2F_e, \tag{84}$$

η ορίζουσα Jacobi και F_e το εμβαδό του τριγωνικού στοιχείου.

Με αντικατάσταση των τιμών των a , b , c στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) &= \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{J} \phi_1 + \\
 &+ \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{J} \phi_2 + \\
 &+ \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{J} \phi_3 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^e(x, y) \phi_i,
 \end{aligned} \tag{85}$$

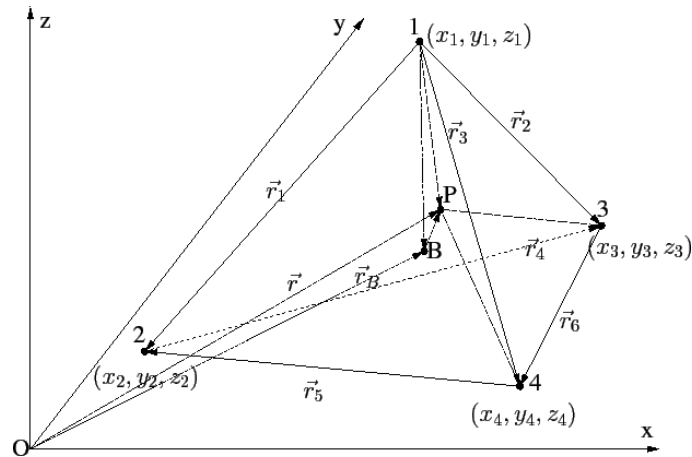
Οι συναρτήσεις μορφής για το τριγωνικό στοιχείο είναι:

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_1^e &= \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{J} \\
 \lambda_2^e &= \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{J} \\
 \lambda_3^e &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{J}
 \end{aligned} \right\} \tag{86}$$

2.3.2 Τετραεδρικό στοιχείο

Κατα αντιστοιχία με όσα αναφέρθηκαν για το τριγωνικό στοιχείο, για το τετρακομβικό τετραεδρικό στοιχείο, βλ. Εικ. 21, για τη μετατόπιση απαιτείται ένα πολυώνυμο με 4 όρους,

της μορφής $\phi(x,y,z)=a+bx+cy+dz$. Εάν εφαρμόσουμε την σχέση αυτή σε κάθε κόμβο του στοιχείου, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων :



Εικόνα 21 Χαρακτηριστικά τετραεδρικού στοιχείου

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= a + bx_1 + cy_1 + dz_1 \\ \phi_2 &= a + bx_2 + cy_2 + dz_2 \\ \phi_3 &= a + bx_3 + cy_3 + dz_3 \\ \phi_4 &= a + bx_4 + cy_4 + dz_4 \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Από την επίλυση του συστήματος των εξ. (87) και με αντικατάσταση στη βασική εξίσωση, προκύπτουν οι εξής εκφράσεις τιμές για τους συντελεστές a, b, c, d:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \phi_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \phi_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \phi_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ \phi_4 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \phi_1 - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \phi_2 + \\ &+ \frac{1}{J} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \phi_3 - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \phi_4 = \\ &= a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3 + a_4\phi_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & \phi_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & \phi_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & \phi_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & \phi_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \phi_1 + \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \phi_2 - \\ &- \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \phi_3 + \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \phi_4 = \\ &= b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3 + b_4\phi_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \phi_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & \phi_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & \phi_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & \phi_4 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \phi_1 - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \phi_2 + \\
 &+ \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \phi_3 - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \phi_4 = \\
 &= c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + c_3 \phi_3 + c_4 \phi_4 \\
 d &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \phi_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & \phi_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & \phi_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & \phi_4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \phi_1 + \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \phi_2 - \\
 &- \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \phi_3 + \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \phi_4 = \\
 &= d_1 \phi_1 + d_2 \phi_2 + d_3 \phi_3 + d_4 \phi_4.
 \end{aligned} \tag{88}$$

Με ίδιο τρόπο προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος και το τετρακομβικό τετραεδρικό στοιχείο

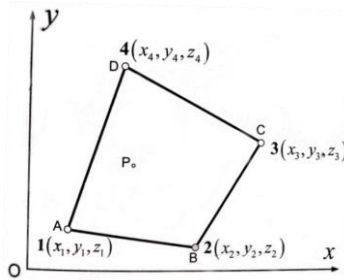
$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_1^e &= \frac{1}{J} \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} z \right) \\
 \lambda_2^e &= \frac{1}{J} \left(-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} z \right) \\
 \lambda_3^e &= \frac{1}{J} \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} z \right) \\
 \lambda_4^e &= \frac{1}{J} \left(-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} z \right)
 \end{aligned} \right\} \tag{89}$$

όπου: η ορίζουσα Jacobi, J , λαμβάνει την τιμή

$$J = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_3 = 6V_e \tag{90}$$

2.4 Ισοπαραμετρικά στοιχεία

Εστω το τετρακομβικό στοιχείο της Εικ. 22.



Εικόνα 22

Απο την εφαρμογή της εξίσωσης στους κόμβους συμπεραίνουμε ότι κάθε κόμβος επηρεάζεται όχι μόνο από τις πλευρές που περνούν από αυτόν, αλλά και από τη πλευρά που βρίσκεται απεναντί του. Μετά από σειρά αναλυτικών υπολογισμών, λαμβάνονται οι εξισώσεις σχήματος που έχουν την ακόλουθη γενική μορφή

$$(N_3)_{12} = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \cdot \overbrace{(x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_4 + x_4 y_1 + x_2 y_4 - x_4 y_2)}{\Pi}}{\Pi}$$

Ο λόγος που ένας κόμβος θα πρέπει να επιδρά μόνο στις πλευρές που διέρχονται από αυτόν είναι ότι οι κόμβοι 3 και 4 θα πρέπει να μπορούν να λάβουν αυθαίρετες τιμές, χωρίς να επηρεάζονται από τη στήριξη στην πλευρά 1-2. Επίσης, αν συμβαίνει αυτό, δεν μπορούμε να κάνουμε γραμμική παρεμβολή στην πλευρά 1-2. Η μόνη δυνατότητα για άρση αυτού του προβλήματος είναι οι πλευρές του στοιχείου να είναι παράλληλες προς τους άξονες x και y, δηλαδή το στοιχείο να είναι ορθογώνιο. Για το σκοπό αυτόν, δεν χρησιμοποιούμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y), αλλά τις συντεταγμένες (ξ,η) ή (r,s), οι οποίες προκύπτουν από αναγωγή των καρτεσιανών στο μήκος κάθε πλευράς.

Σε κάθε ισοπαραμετρικό στοιχείο γνωρίζουμε τις εκφράσεις των συναρτήσεων μορφής, από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς τις φυσικές συντεταγμένες. Έτσι, για κάθε ζεύγος (ξ,η) που αντιστοιχεί σε σημείο (x,y) γνωρίζουμε τις τιμές των τοπικών παραγώγων και αναζητούμε τις τιμές των αντίστοιχων καθολικών παραγώγων, που συνδέονται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{[J]} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (91)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (92)$$

Επίσης, μέσω της ισοπαραμετρικής θέσης μπορούμε να θέσουμε

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta) \cdot x_j \\ y &= \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta) \cdot y_j \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

όπου: n το πλήθος των κόμβων του ισοπαραμετρικού στοιχείου.

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους ως προς ξ και η ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_j \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_j \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_j \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_j \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Οπότε εύκολα προκύπτει το Ιακωβιανό μητρώο του μετασχηματισμού $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (95)$$

Το αντίστροφο μητρώο είναι

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21})}} \cdot \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (96)$$

Οι καθολικές παράγωγοι προκύπτουν από την εξίσωση

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \equiv [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (97)$$

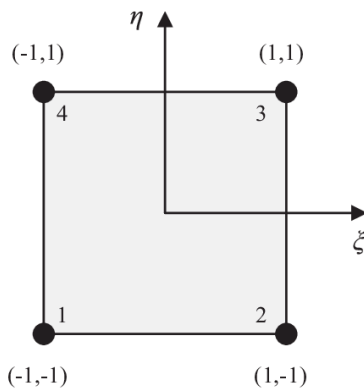
Αντίστοιχα, για το τριδιάστατο πρόβλημα θα έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (98)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (99)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \cdot x_{j, κλπ.} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \cdot y_{j, κλπ.} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \cdot z_{j, κλπ.} \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Κάνοντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς του συστήματος αξόνων, καταλήγουμε σε ένα νέο στοιχείο, βλ. Εικ. 25.



Εικόνα 23 Ισοπαραμετρικό στοιχείο 4 κόμβων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{[5],[1],[13],[8]}

3. Σύνδεση πεπερασμένων στοιχείων με αναλυτικές λύσεις θραυστομηχανικής

Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται ευχερώς σε αριθμητικές μεθόδους είναι των Sih-Rice-Loeber-Muskhelishvili, η οποία οφείλει την ευκολία εφαρμογής της στο ότι οδηγεί σε λύση με διπλές σειρές, που περιλαμβάνει τις άγνωστες τιμές K σε μορφή αξιοποιήσιμη για τα πεπερασμένα στοιχεία. Αυτή η αναλυτική μέθοδος ξεκινάει με ίδιο τρόπο με τη μέθοδο Westergaard, δηλαδή από τις εξισώσεις ισορροπίας για την επίπεδη ελαστικότητα. Για τη πληρότητα του κειμένου θα αναφερθούν πάλι οι διέπουσες εξισώσεις, δηλαδή

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (101)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (102)$$

Οι σχέσεις αυτές ικανοποιούνται ταυτοτικά, εάν οι συνιστώσες της τάσης εκφράζονται σε σχέση με τη συνάρτηση του Airy, δηλαδή

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (103)$$

Για να υπολογίσουμε τις τάσεις, θα πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{\partial^2(\sigma_x - \nu \sigma_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\sigma_y - \nu \sigma_x)}{\partial x^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (104)$$

όπου: ∇^2 είναι ο συνήθης συντελεστής Laplace.

Από το συνδυασμό των εξισώσεων, προκύπτει η σχέση

$$\nabla^2(\nabla^2 A) = 0 \quad (105)$$

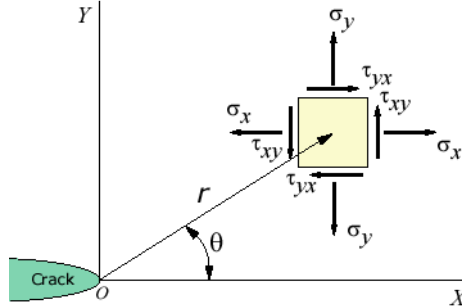
Ο Muskhelishvili έδειξε ότι κάθε αρμονική συνάρτηση $A(x,y)$ μπορεί να παρασταθεί με τη χρήση δύο μιγαδικών συναρτήσεων $\phi(z)$ και $\chi(z)$, με $z=x+iy$. Οπότε λαμβάνονται τελικά οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} A &= \text{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)] \\ \sigma_x + \sigma_y &= 4 \text{Re} \phi'(z) = 2[\phi'(z) + \bar{\phi}'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2j\sigma_{xy} &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \chi''(z)] \\ 2\mu(u + jv) &= \kappa\phi(z) - z\bar{\phi}'(z) - \bar{\chi}'(z) \end{aligned} \quad (106)$$

Στις πιο πάνω εκφράσεις το Re δηλώνει το πραγματικό μέρος μιγαδικού z και μ είναι το μέτρο διατμησης του υλικού [$\mu=E/2(1+\nu)$].

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε μιγαδικές ιδιοσυναρτήσεις με ιδιοτιμές λ_n ($n=0,1,2,\dots$) πραγματικούς αριθμούς και A_n, B_n μιγαδικές σταθερές της μορφής $(\alpha_n^1 + \alpha_n^2)$ και $(b_n^1 + b_n^2)$, αντίστοιχα. Από την Εικ. 24 προκύπτει ότι οι επιφάνειες της ρωγμής πρέπει να είναι ελεύθερες τάσεων [$\sigma_y = \sigma_{yx} = 0$ για $\theta = \pm\pi$] και, επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{\lambda_n} \\ \chi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{\lambda_n+1} \end{aligned} \right\} \quad (107)$$



Εικόνα 24

Από τις παραπάνω εξισώσεις εύκολα μπορεί να προκύψει η σχέση

$$\sigma_y + i\sigma_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\varphi''(z) + \chi''(z) \quad (108)$$

Και με εισαγωγή των εκφράσεων για τις φ και χ , καταλήγουμε στην

$$\sigma_y + i\sigma_{xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \lambda_n r^{(\lambda_n-1)} \left[A_n e^{i\theta(\lambda_n-1)} + \overline{A_n} e^{-i\theta(\lambda_n-1)} + (\lambda_n - 1) e^{i\theta(\lambda_n-3)} + B_n (\lambda_n + 1) e^{i\theta(\lambda_n-1)} \right] \right\} \quad (109)$$

Επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες για τις επιφάνειες της ρωγμής, παίρνουμε τις ακόλουθες 2 εξισώσεις:

(i) Για $\theta=\pi$

$$0 = A_n \lambda_n + \overline{A_n} (\cos 2\pi\lambda_n - i \sin 2\pi\lambda_n) + B_n (\lambda_n + 1) \quad (110)$$

(ii) Για $\theta=-\pi$

$$0 = A_n \lambda_n + \overline{A_n} (\cos 2\pi\lambda_n + i \sin 2\pi\lambda_n) + B_n (\lambda_n + 1) \quad (111)$$

Αφαιρώντας αυτές τις 2 εξισώσεις κατά μέλη, προκύπτει

$$\sin(2\pi\lambda_n) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (112)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για $\theta=-\pi$, έχουμε

$$\frac{n}{2} A_n + (-1)^n \overline{A_n} + B_n \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = 0 \quad (113)$$

Η αντικατάσταση των A_n και B_n και με τον διαχωρισμό τους σε παραγματικά και μιγαδικά μέρη δίνει

$$\left. \begin{aligned} -b_n^1 &= \frac{a_n^1 \left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right)}{\left(\frac{n}{2} + 1 \right)} \\ -b_n^2 &= \frac{a_n^2 \left(\frac{n}{2} - (-1)^n \right)}{\left(\frac{n}{2} + 1 \right)} \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Εισάγοντας την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών και διαχωρίζοντας σε πραγματικά και μιγαδικά μέρη, καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις των τάσεων

$$\begin{aligned} \sigma_x + i\sigma_{xy} &= 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) + \bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[\left(a_n^1 + ia_n^2 \right) \frac{n}{2} r^{(n/2-1)} e^{i\theta(n/2-1)} \right] + \left(a_n^1 + ia_n^2 \right) r e^{-i\theta} \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) r^{(n/2-2)} e^{i\theta(n/2-2)} \right. \\ &\quad \left. + \left(b_n^1 + ib_n^2 \right) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \frac{n}{2} r^{(n/2-1)} e^{i\theta(n/2-1)} \right\} \quad (115) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{(n/2-1)} \times \left\{ a_n^1 \left[\left(2 - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) a_n^2 \left[\left(2 - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \right] \right\} \quad (116) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{(n/2-1)} \times \left\{ a_n^1 \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta \right] \right. \\ &\quad \left. - a_n^2 \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta - \left(\frac{n}{2} - (-1)^n \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta \right] \right\} \quad (117) \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε για την σ_x

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{(n/2-1)} \times \left\{ \alpha_n^1 \left[\left(2 + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \right] \right. \\ &\quad \left. - \alpha_n^2 \left[\left(2 + \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \right] \right\} \quad (118) \end{aligned}$$

Για τις συνιστώσες της μετατόπισης u και v ισχύει

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \quad (119) \\ 2\mu(u + iv) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{n/2} \left\{ \kappa \left(a_n^1 + ia_n^2 \right) \left(\cos \frac{n}{2} \theta + i \sin \frac{n}{2} \theta \right) - \frac{n}{2} \left(a_n^1 + ia_n^2 \right) \left(\cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \left(b_n^1 - ib_n^2 \right) \left(\cos \frac{n}{2} \theta - i \sin \frac{n}{2} \theta \right) \right\} \quad (120) \end{aligned}$$

Τελικά διαχωρίζοντας τα πραγματικά μέρη από τα μιγαδικά καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2\mu} \times \left\{ \alpha_n^1 \left[\left(\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \right. \\ &\quad \left. - \alpha_n^2 \left[\left(\kappa + \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \sin \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \right\} \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2\mu} \times \left\{ \alpha_n^1 \left[\left(\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \sin \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha_n^2 \left[\left(\kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις είναι φανερό ότι η τάση είναι συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας της ακτίνας $1/(\nu r)$, το οποίο μας οδηγεί σε άπειρη τάση στο άκρο της ρωγμής, ενώ οι όροι υψηλότερης τάξης δίνουν μηδενική τάση στο ίδιο άκρο. Ως εκ τούτου, μόνον ο πρώτος όρος του άπειρου αναπτύγματος συσχετίζεται με την ιδιομορφία της τάσης στο άκρο της ρωγμής. Εφαρμόζοντας την ειδική περίπτωση για $n=1$, καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων κοντά στο άκρο της ρωγμής

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{a_1^1}{\sqrt{r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{a_1^2}{\sqrt{r}} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_y &= \frac{a_1^1}{\sqrt{r}} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{a_1^2}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{a_1^1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \\ u &= \frac{a_1^1 \sqrt{r}}{4\mu} \left\{ (2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right\} - \frac{a_1^2 \sqrt{r}}{4\mu} \left\{ (2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right\} \\ v &= \frac{a_1^1 \sqrt{r}}{4\mu} \left\{ (2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right\} + \frac{a_1^2 \sqrt{r}}{4\mu} \left\{ (2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Για $\theta=0$, έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{a_1^1}{\sqrt{x}} \\ \sigma_y &= \frac{a_1^1}{\sqrt{x}} \\ \sigma_{xy} &= \frac{a_1^2}{\sqrt{x}} \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Απο τις εκφράσεις του Irwin είναι:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^1 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \\ \alpha_1^2 &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Με αντικατάσταση των α_1^1 και α_1^2 στους παραπάνω τύπους, παίρνουμε τις τάσεις στο άκρο της ρωγμής συναρτήρηση των συντελεστών έντασης τάσεων

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + O(r^0) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r^0) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + O(r^0) \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Στη περίπτωση που έχουμε τριδιάστατο πεδίο τάσεων γύρω από τη ρωγμή και για αμελητέο πάχος πλάκας, ο γενικός τύπος για σύνθετη φόρτιση προκύπτει από την επαλληλία των επιμέρους τάσεων των 3 τύπων I,II,III διάνοιξης της ρωγμής, δηλαδή είναι

$$\sigma_{ij}^{(Total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (127)$$

Για τον τύπο I

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[1 - \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (128)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[1 + \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (129)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{(Επίπεδη εντατική κατάσταση)} \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{(Επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση)} \end{cases} \quad (130)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \quad (131)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (132)$$

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (133)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (134)$$

$$u_z = 0 \quad (135)$$

Για τον τύπο II

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[2 + \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (136)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \quad (137)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{(Επίπεδη εντατική κατάσταση)} \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{(Επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση)} \end{cases} \quad (138)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (139)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (140)$$

$$u_x = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (141)$$

$$u_y = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (142)$$

$$u_z = 0 \quad (143)$$

Για τον τυπο III

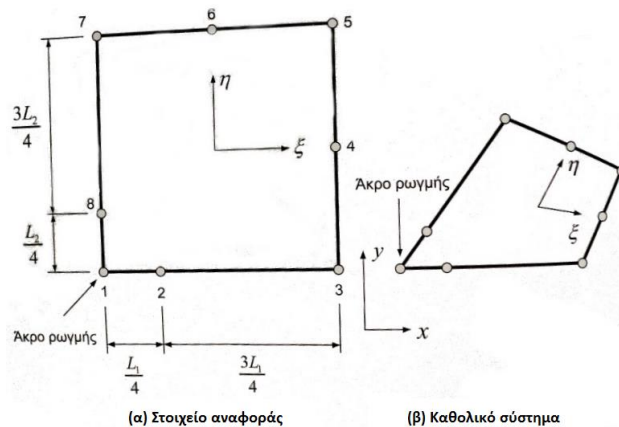
$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0 \quad (144)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (145)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (146)$$

$$u_x = u_y = 0 \quad (147)$$

$$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (148)$$



Εικόνα 25

Ενώ για την περίπτωση μιας κεντρικής ρωγμής κάθετης προς μια ομοιόμορφη φόρτιση ισοπαχούς ελάσματος υπάρχουν θεωρητικοί τύποι – μερικοί από αυτούς καταγράφονται παραπάνω – οι οποίοι μας δίνουν τον συντελεστή έντασης τάσεων, σε μια γενική περίπτωση απαιτείται να εφαρμόσουμε μια υπολογιστική μέθοδο για να καταφέρουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές έντασης τάσεων. Θεωρούμε ότι έχουμε ένα τετραγωνικό οκτακομβικό ισοπαραμετρικό πεπερασμένο στοιχείο [Εικ. 25], όπου το άκρο της ρωγμής εφαρμόζεται στον κόμβο 1. Μετακινούμε τους κόμβους 2 και 8 από το μέσο των πλευρών 1-3 και 1-7, αντιστοίχα, στο ¼ της πλευράς. Αφού το στοιχείο είναι ισοπαραμετρικό, η πλευρά 1-3 περιγράφεται από τη σχέση $\eta = -1$ και οι συναρτήσεις σχήματος για τους κόμβους 1, 2 και 3 είναι αντίστοιχα

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ N_2 &= (1-\xi^2) \\ N_3 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{aligned} \right\} (149)$$

Από την ισοπαραμετρική σχέση έχουμε για τον άξονα x

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = -\frac{1}{2}\xi(1+\xi)L + (1-\xi^2)\frac{L}{4} \quad (150)$$

και αντίστοιχη σχέση υπάρχει και για τον άξονα y.

Εάν τοποθετήσουμε την αρχή των αξόνων στον κόμβο 1 και συμβολίζοντας το μήκος της πλευράς 1-3 ως L και κάνοντας τους μετασχηματισμούς $x_1=0$, $x_2=L/4$ και $x_3=L$, παίρνουμε

$$x = +(1-\xi^2)L + \frac{1}{2}\xi(1-\xi)\cdot\frac{L}{4} \quad (151)$$

Το Ιακωβιανό μητρώο του στοιχείου είναι

$$J^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} x_i^{(e)} & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} y_i^{(e)} \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} x_i^{(e)} & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} y_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (152)$$

όπου: $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2}(1+\xi) = \sqrt{Lx}$

Άρα, το Ιακωβιανό μητρώο είναι ιδιόμορφο στον κόμβο 1, όπου $x=0$.

Η μεταβολή της μετατόπισης κατα μήκος της 1-3 δίνεται από την ισοπαραμετρική σχέση, δηλαδή θα ισχύει

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)u_1 + (1-\xi)^2 u_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)u_3 \quad (153)$$

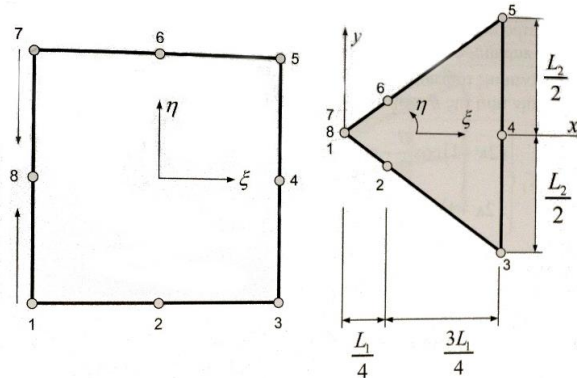
$$u = -\frac{1}{2}\left(-1+2\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left(2-2\sqrt{\frac{x}{L}}\right)u_1 + 4\left(\sqrt{\frac{x}{L}}-\frac{x}{L}\right)u_2 + \left(-1+2\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left(2\sqrt{\frac{x}{L}}\right)u_3 \quad (154)$$

Ομοίως, για την ανηγμένη παραμόρφωση είναι

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi \partial u}{\partial x \partial \xi} = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{\sqrt{xL}}-\frac{4}{L}\right]u_1 + \left[\frac{2}{\sqrt{xL}}-\frac{4}{L}\right]u_2 + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{xL}}+\frac{4}{L}\right]u_3 \quad (155)$$

Παρατηρούμε ότι η παραμόρφωση έχει τη ζητούμενη μορφή $1/\sqrt{r}$. Όμως, κατά μήκος των ακτίνων μέσα στο στοιχείο η παραμόρφωση δεν έχει αυτή τη μορφή. Για να το πετύχουμε αυτό, θα μετατρέψουμε το αρχικό στοιχείο, όπου οι κόμβοι είναι στα μέσα των πλευρών, σε τριγωνικό ενώνοντας τους κόμβους 1,7,8 σε έναν κόμβο, όπως φαίνεται στην Εικ. 26. Και

σε αυτή την περίπτωση μετακινούμε τους ενδιάμεσους κόμβους 2, 6 των πλευρών στο $\frac{1}{4}$ της πλευράς.



Εικόνα 26

Κατα μήκος του άξονα $\eta=0$ έχουμε

$$\left. \begin{aligned} N_1 = N_3 = N_5 = N_7 &= -\frac{1}{4}(1-\xi^2) \\ N_2 = N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2) \\ N_4 = N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi) \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

Και μετά την εκτέλεση των πράξεων παίρνουμε

$$x_1 = x_7 = x_8 = 0 \quad (157)$$

$$x_2 = x_6 = L_{1/4} \quad (158)$$

$$x_3 = x_4 = x_5 = L_1 \quad (159)$$

$$x = \frac{L_1}{4}(1+\xi)^2 \quad (160)$$

$$\xi = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L_1}} \quad (161)$$

Η κατανομή της μετατόπισης στον άξονα x δίνεται από τη σχέση

$$u = -\frac{1}{4}(1-\xi^2)(u_1 + u_3 + u_5 + u_7) + \frac{1}{4}(1-\xi^2)(u_2 + u_6) + \frac{1}{2}(1-\xi)(u_4 + u_8) \quad (162)$$

και η κατανομή της παραμόρφωσης από την εξίσωση

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi \partial u}{\partial x \partial \xi} = \frac{1}{L}(2u_1 + u_3 + u_5 - 2u_2 - 2u_6) - \frac{1}{2\sqrt{L_1 x}}(3u_1 + u_3 + u_4 + u_5 - 2u_2 - 2u_6) \quad (163)$$

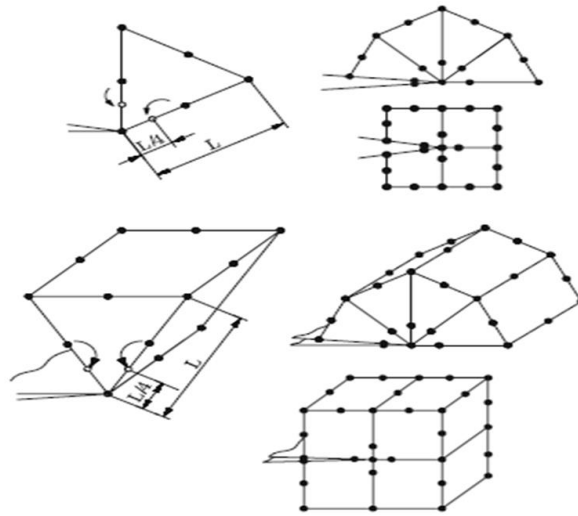
Παρατηρούμε ότι πετύχαμε αυτό που επιδιώκαμε, δηλαδή η παραμόρφωση να έχει την ιδιομορφία $1/\sqrt{r}$. Αφού, λοιπόν, μέσω του τριγωνικού στοιχείου έχουμε επιτύχει την επιδιωκόμενη ιδιομορφία στο άκρο της ρωγμής, μένει να εξάγουμε τις σχέσεις για τους συντελεστές έντασης τάσεων. Οι αναλυτικές εκφράσεις για τη μεταβολή της μετατόπισης κατα μήκος των πλευρών που πηγάζουν από το άκρο της ρωγμής έχουν την ακόλουθη μορφή

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left[(2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left[(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left[(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

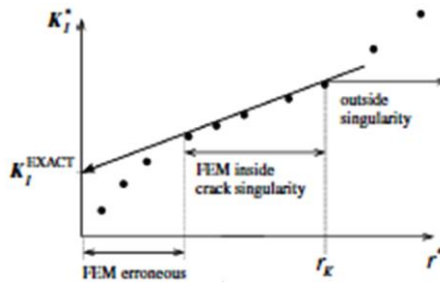
από τις οποίες προκύπτουν για τους συντελεστές έντασης τάσεων οι σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} K_{II} \left\{ \begin{aligned} &-(2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \\ &(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} &= 4\mu \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left\{ \begin{aligned} &4u_2 - u_3 - 3u_1 \\ &4v_2 - v_3 - 3v_1 \end{aligned} \right\} \\ K_I \left\{ \begin{aligned} &(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \\ &(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} &= 4\mu \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left\{ \begin{aligned} &u \\ &v \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Η προηγηθείσα ανάλυση αναφέρεται σε διδιάστατα προβλήματα. Μπορούμε να επεκτείνουμε την ανάλυση κατά μήκος του εμπρόσθιου τμήματος της ρωγμής στην τρίτη διάσταση, βλ. Εικ. 27. Με αυτόν τον τρόπο, σχηματίζονται εξαεδρικά και πενταεδρικά στοιχεία που ομαδοποιούνται γύρω από κάθε τμήμα του εμπρόσθιου τμήματος της ρωγμής



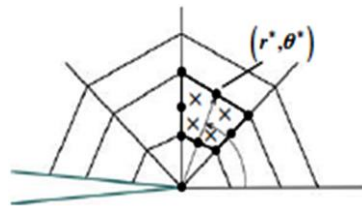
Εικόνα 27



Εικόνα 28

Στην Εικόνα 28 φαίνεται ένα διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή έντασης τάσεων, όπως προκύπτει από την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και από αναλυτική προσέγγιση. Στο διάγραμμα διακρίνονται 3 περιοχές. Τα στοιχεία που βρίσκονται πολύ κοντά στην άκρη της ρωγμής δίνουν τιμή του συντελεστή έντασης τάσεων πολύ μικρότερη από την πραγματική. Για τα στοιχεία που βρίσκονται στο μεσαίο τμήμα, η ποιότητα της λύσης πεπερασμένων στοιχείων κρίνεται επαρκής. Έξω από την περιοχή κυριαρχίας $r^* > r_c$, η εξίσωση που δίνει τον συντελεστή έντασης τάσεων αποκλίνει σημαντικά, διότι υπεισέρχονται και επιπλέον όροι.

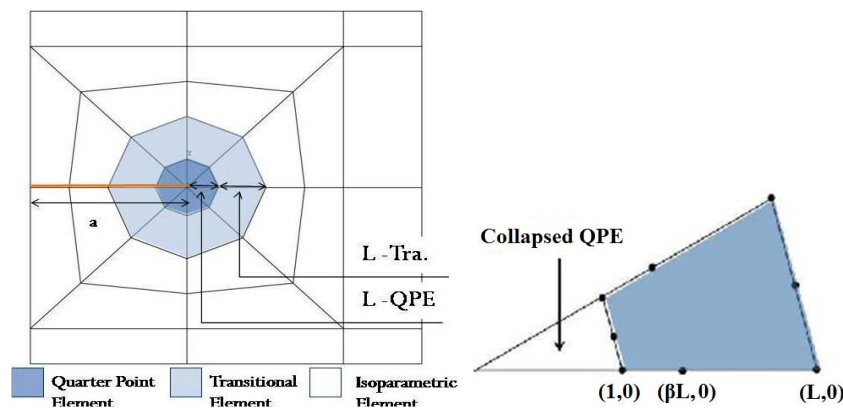
Τα οκτακομβικά στοιχεία (στα οποία οι τρεις κόμβοι έχουν γινει ένας) βρίσκονται γύρω από την άκρη της ρωγμής έτσι, ώστε να ικανοποιείται η ιδιαιτερότητα του πεδίου τάσης και παραμόρφωσης, βλ. Εικ. 29.



Εικόνα 29

Τα μεταβατικά στοιχεία αναπτύσσονται ακριβώς δίπλα από τα στοιχεία αυτά. Τέλος, η υπόλοιπη περιοχή της πλάκας πλεγματοποιείται με τα στοιχεία CPE8, βλ. Εικ. 30.

Γενικά, δεν υπάρχουν βέλτιστες τιμές για το μέγεθος κάθε στοιχείου. Το μέγεθος του πλέγματος πρέπει να προσδιορίζεται σε κάθε πρόβλημα έτσι, ώστε να επιτυγχάνεται καλή ακρίβεια. Ωστόσο, υπάρχουν ορισμένες προτάσεις για τον ορισμό του μεγέθους του πλέγματος. Για το συρρικνούμενο οκτακομβικό στοιχείο QPE, ο συνιστώμενος λόγος για το μήκος ρωγμών και την απόσταση μεταξύ του άκρου ρωγμών και του μήκους του στοιχείου στο ακρο της ρωγμής είναι περίπου $L-QPE/a = 0,05 \sim 0,10$, όπου a είναι η απόσταση μεταξύ του άκρου ρωγμής και του μήκους του στοιχείου στο ακρο της ρωγμής. Επίσης, προτείνεται αριθμός στοιχείων γύρω από τη ρωγή ίσος με 7. Επειδή μεγαλύτερος αριθμός περιμετρικών στοιχείων θα κάνει τα στοιχεία αυτά υπερβολικά παραμορφωμένα, ο αριθμός των στοιχείων στην περιφερειακή κατεύθυνση θα πρέπει να είναι 6-8. Τα στοιχεία μετάβασης αναμένεται να είναι μεγαλύτερα από τα στοιχεία στο άκρο της ρωγμής και είναι γνωστό ότι ο λόγος $L-Tra / L-QPE \approx 2.5$.



Εικόνα 30

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

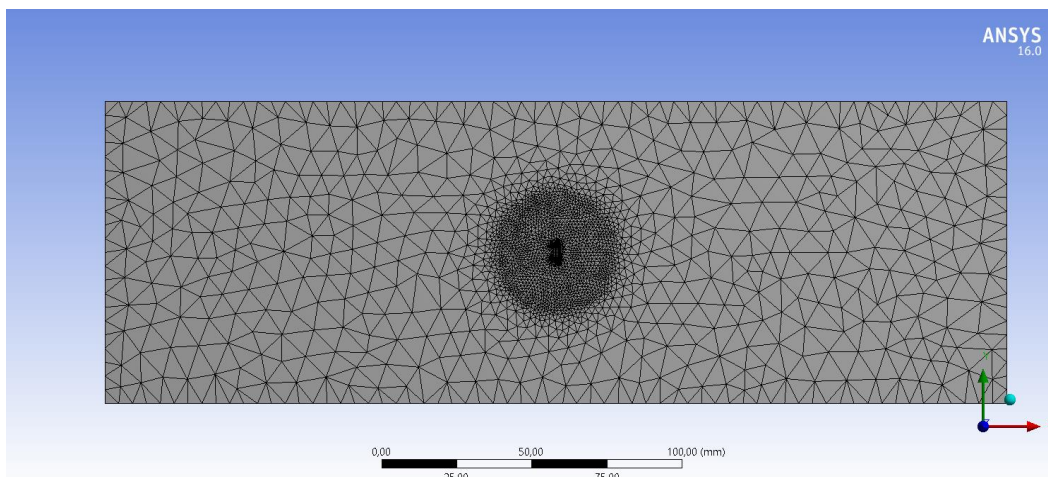
4. ΠΡΩΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

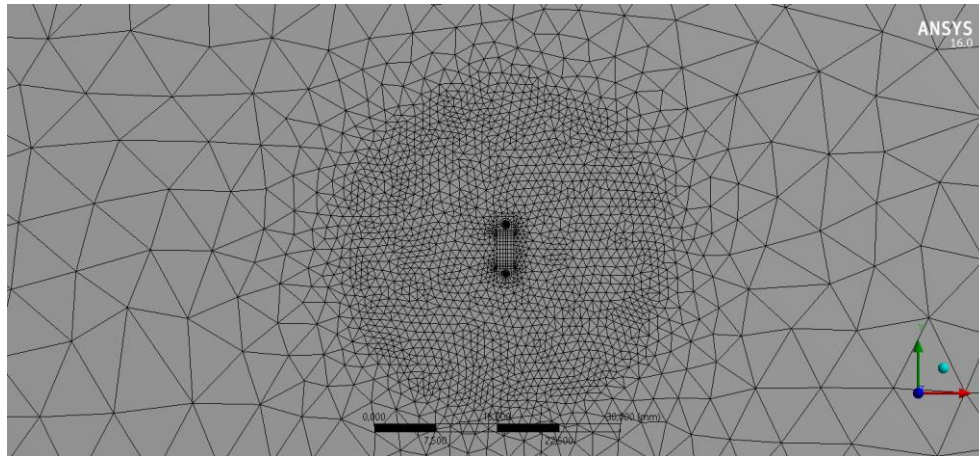
Για τη διερεύνηση της αξιοπιστία των αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκε σύγκριση ενός αναλυτικού θεωρητικού μοντέλου με το αντίστοιχο αριθμητικό με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Το αναλυτικό θεωρητικό μοντέλο στηρίχτηκε στις βασικές αρχές της Θραυστομηχανικής για τον υπολογισμό του συντελεστή έντασης τάσεων σε ημιελλiptική ρωγμή στην ελαστική περιοχή, με το δοκίμιο να καταπονείται σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Επιλέχθηκε επιβαλλόμενο εφελκυστικό φορτίο 100 kN σε ημιελλiptική ρωγμή με μέγιστο βάθος 1,2 mm με και μήκος 1,5mm. Το είδος του πλέγματος που εφαρμόστηκε είναι το Adaptive, το οποίο έχει την ιδιαιτερότητα ότι, όπου η λύση δεν συγκλίνει, το πλέγμα πυκνώνει έτσι, ώστε να επιτυγχάνεται η σύγκλιση. Τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται είναι τα τετραεδρικά 10 κομβικά στοιχεία, με κόμβους στις κορυφές και στα μέσα των πλευρών. Το πλέγμα κοντά στη ρωγμή είναι πιο πυκνό, για να αυξηθεί η ακρίβεια. Για τη δόμηση του πλέγματος στη γειτονιά της ρωγμής επιλέχθηκε η μέθοδος πλεγματοποίησης Hexdominant. Το πλέγμα Hexdominant αποτελείται από πενταεδρικά στοιχεία με 15 κόμβους στο άκρο της ρωγμής και εξαεδρικά στοιχεία με 20 κόμβους στην αμέσως γειτονική περιοχή των πενταεδρικών. Επίσης, σε μια περιοχή ακτίνας 20 mm γύρω από το άκρο της ρωγμής το πλέγμα είναι πιο πυκνό για ενίσχυση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων. Το υπόλοιπο πλέγμα δομείται με τη μέθοδο Patch Conforming. Η μέθοδος αυτή μεταβάλλει το μέγεθος των στοιχείων ανάλογα με τις γεωμετρικές περιοχές, που προκύπτουν από το σύστημα CAD που έχει εφαρμοστεί, βλ Εικ. 31 και 32.



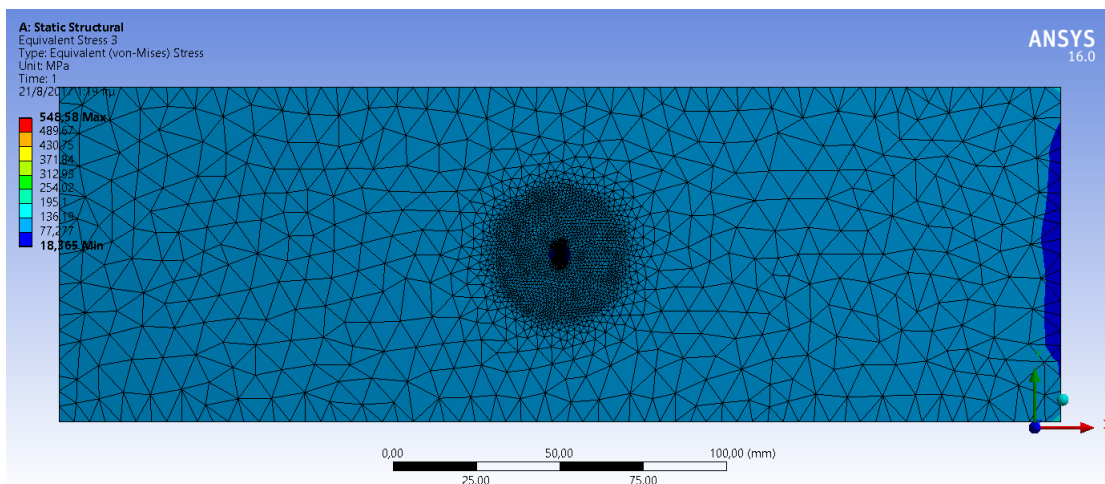
Εικόνα 31



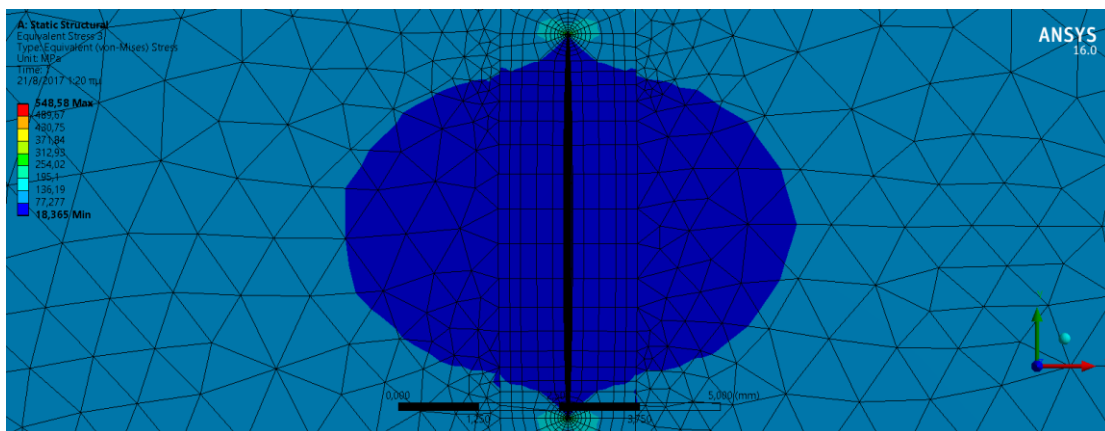
Εικόνα 32

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ

Όπως αναμενόταν, οι μέγιστες τάσεις εμφανίζονται στα άκρα της ρωγμής και στο μέγιστο βάθος της. Σημειώνεται ότι οι τάσεις αυτές είναι οι ισοδύναμες τάσεις κατά von Mises, βλ. Εικ. 33 και 34.

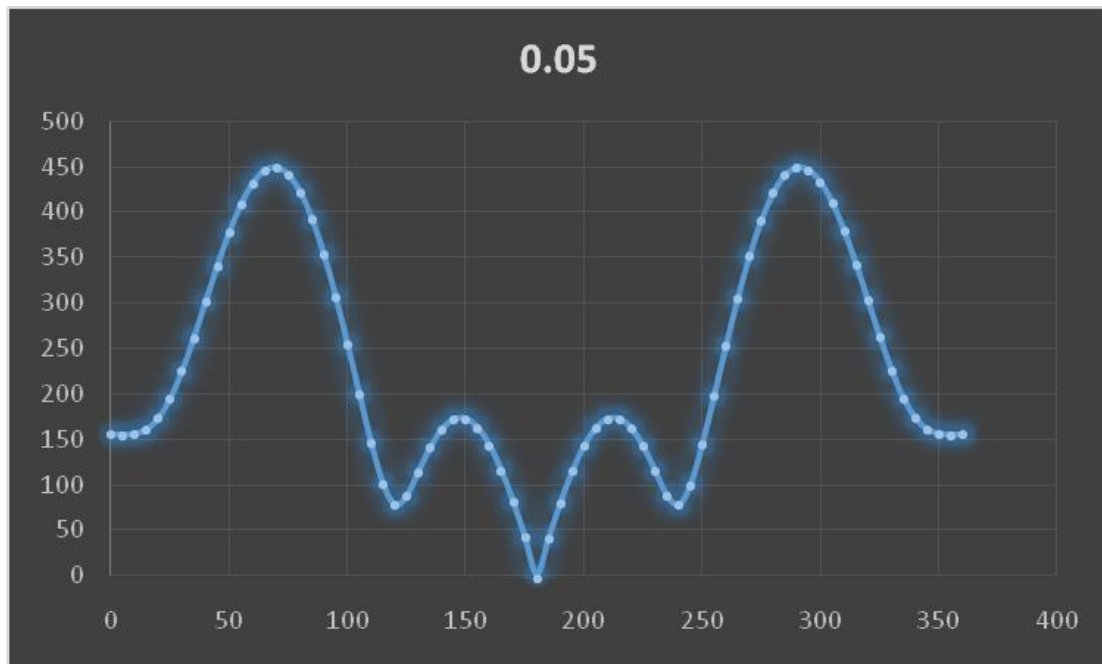


Εικόνα 33

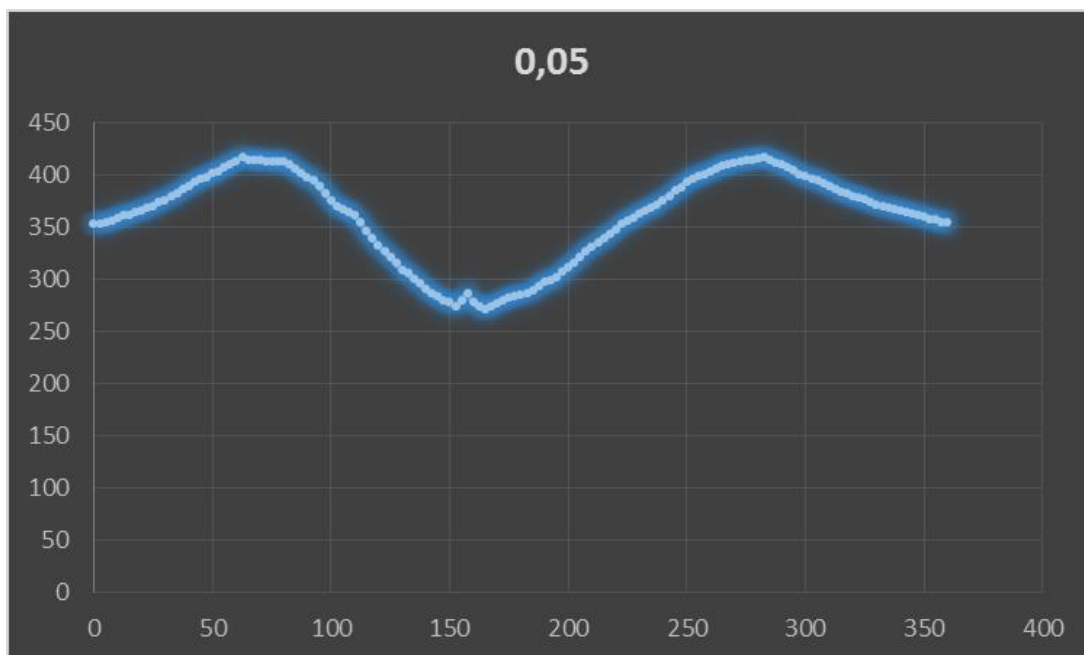


Εικόνα 34

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα διαγράμματα μεταβολής των τάσεων για διάφορες τιμές της απόστασης r και με τη γωνία θ από 0-360°. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αναλυτικά με εφαρμογή του μοντέλου του Irwin, βλ Εικ. 35-38 αμέσως παρακάτω..

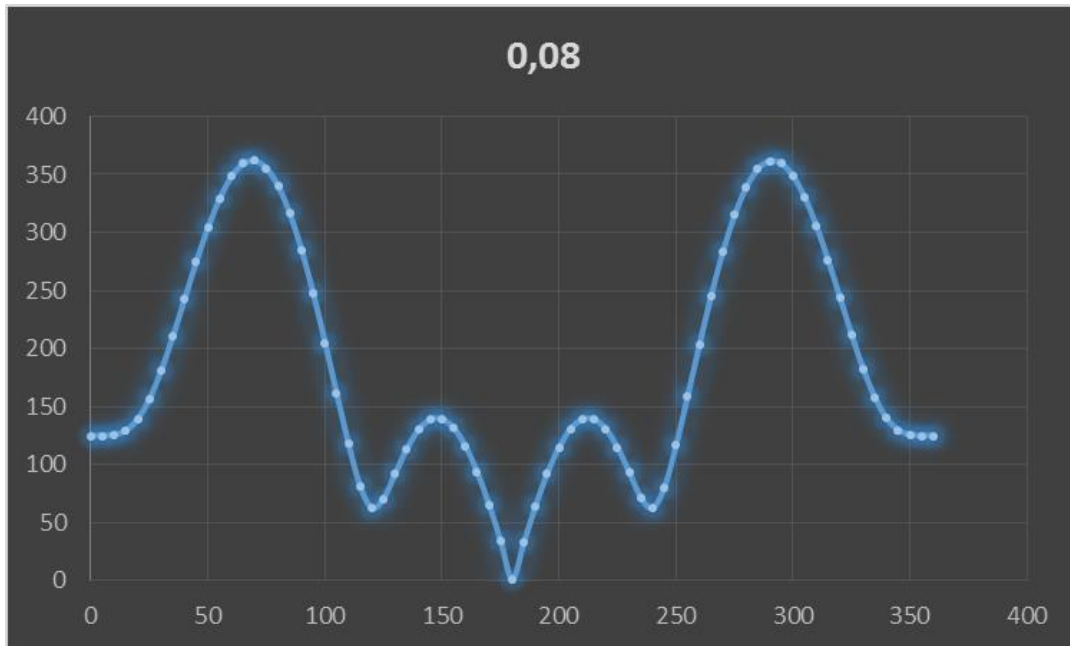


(α)

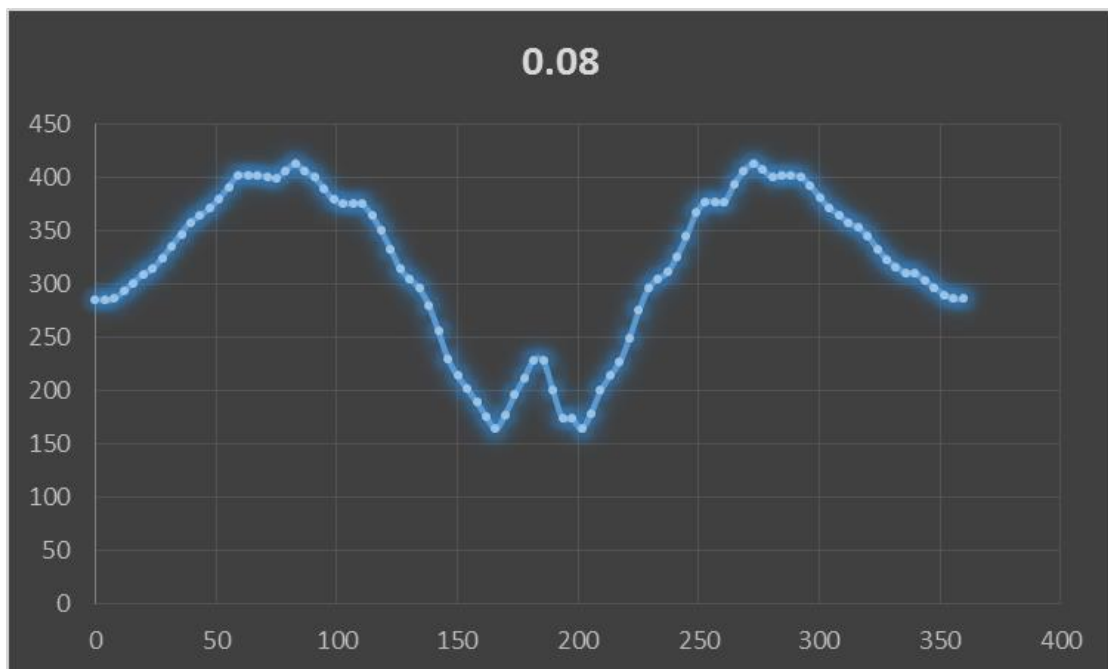


(β)

Εικόνα 35 (α) Με εφαρμογή μοντέλου Irwin, (β) από FEM

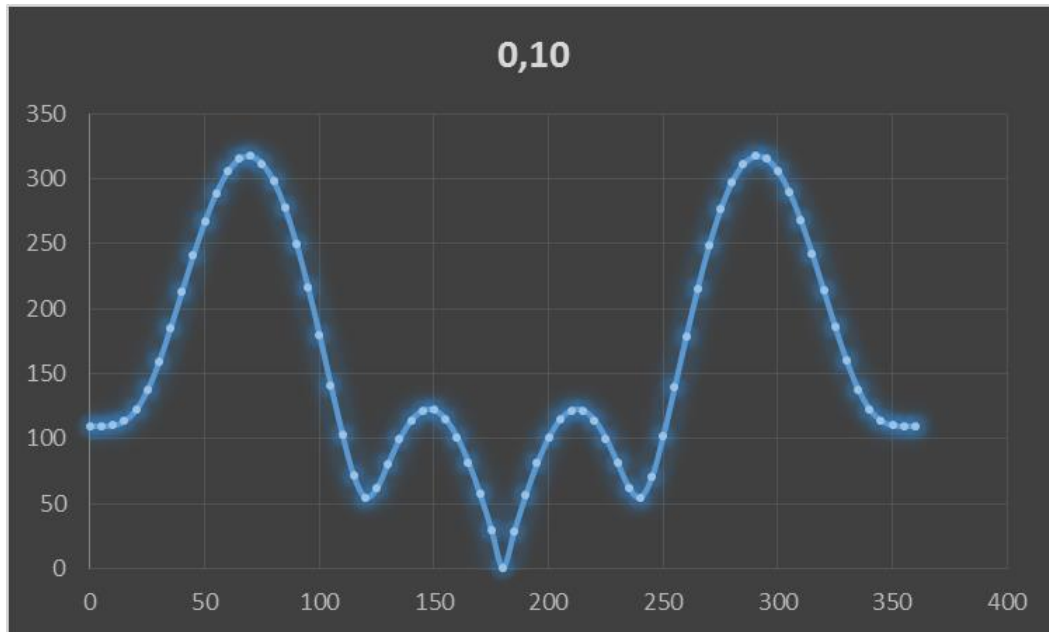


(α)

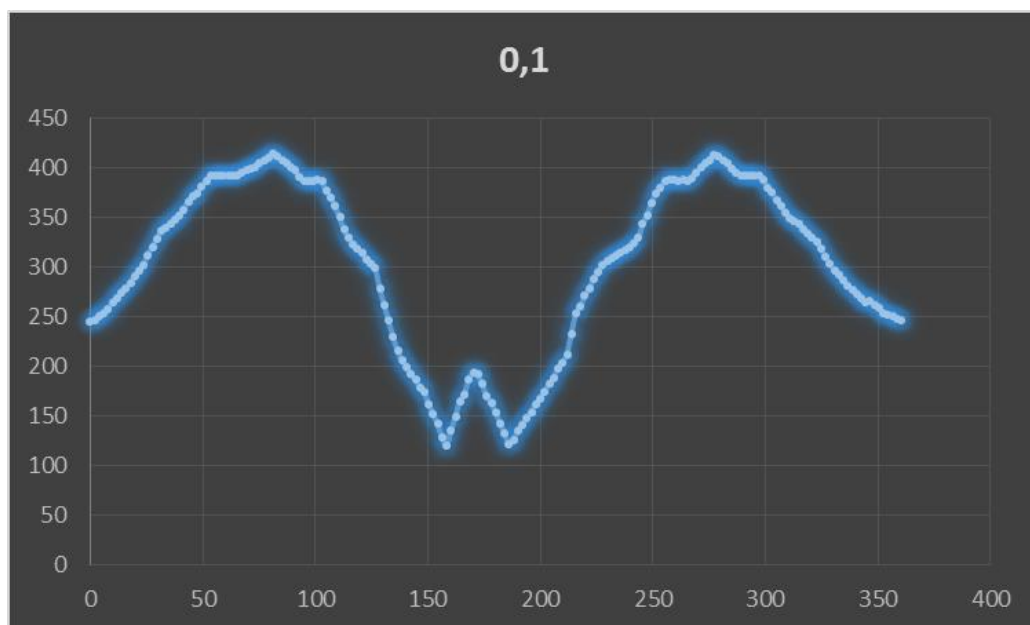


(β)

Εικόνα 36 (α) Με εφαρμογή μοντέλου Irwin, (β) από FEM

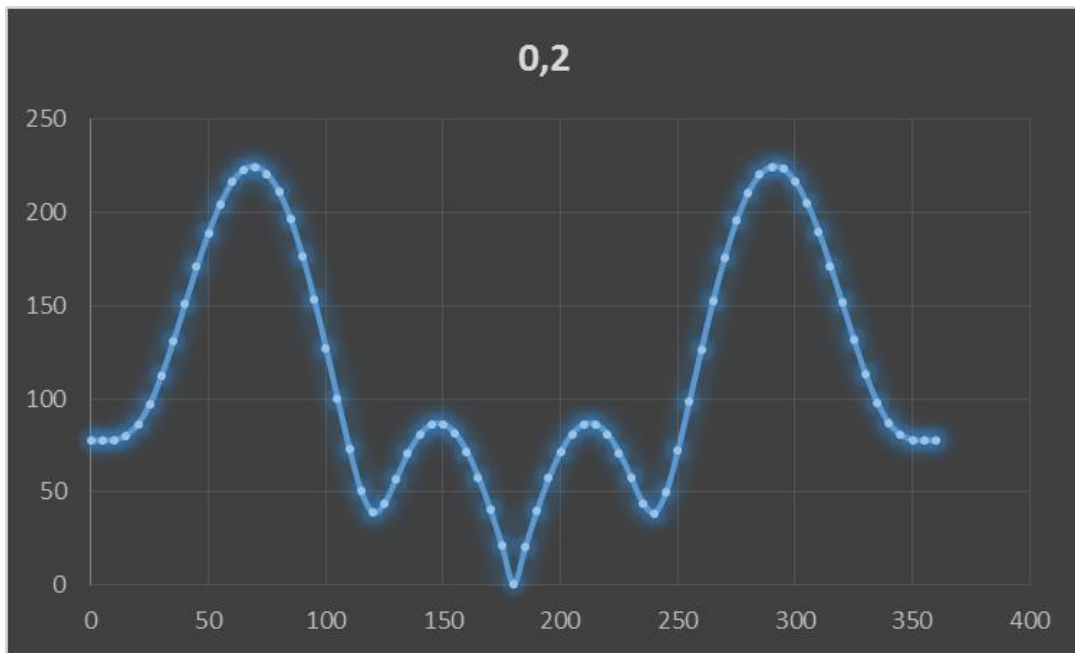


(α)

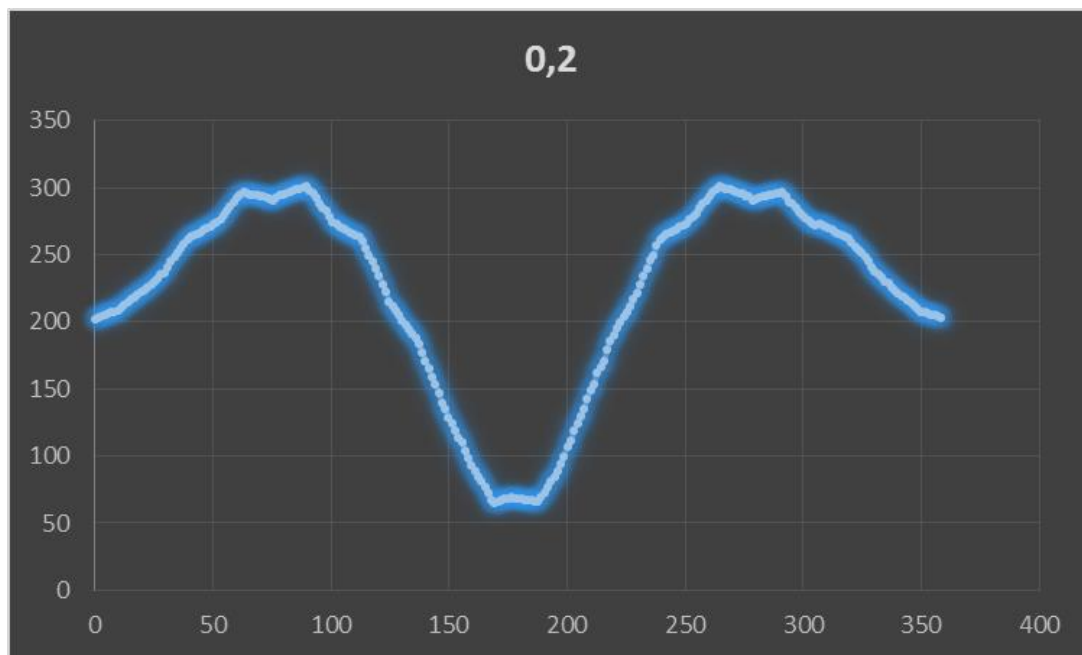


(β)

Εικόνα 37 (α) Με εφαρμογή μοντέλου Irwin, (β) από FEM



(α)



(β)

Εικόνα 38 (α) Με εφαρμογή μοντέλου Irwin, (β) από FEM

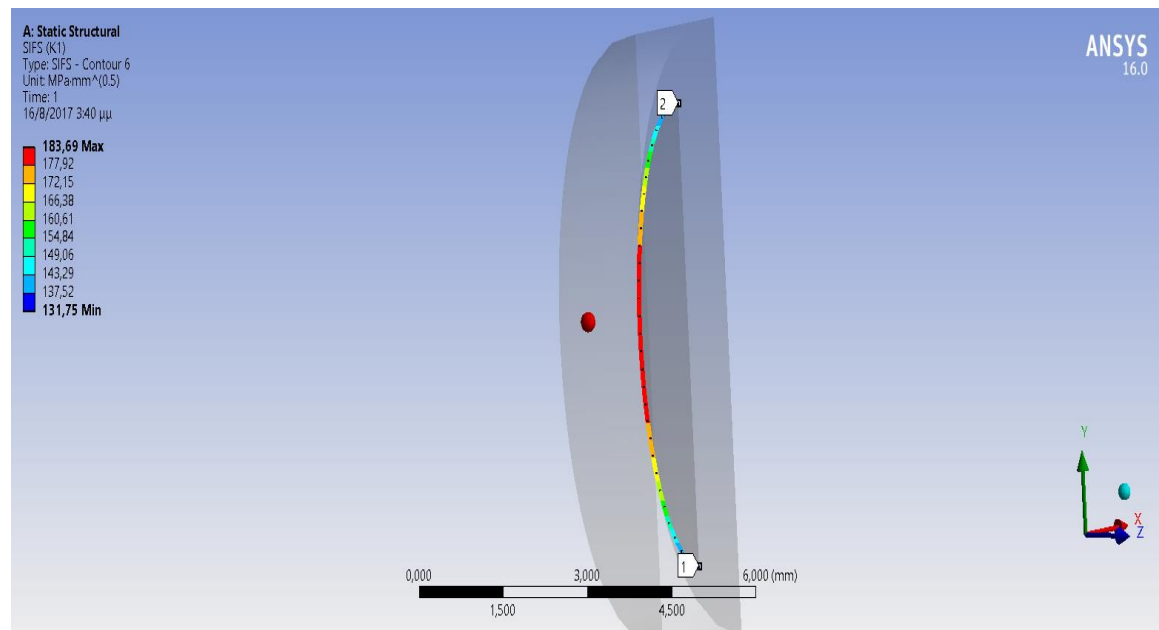
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΑΣΕΩΝ

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, υφίσταται μόνο ο συντελεστής έντασης τάσεων K_1 . Ο συντελεστής έντασης τάσεων υπολογίστηκε με εφαρμογή του ANSYS και συγκρίθηκε με το θεωρητικό τύπο του Griffith, ο οποίος για ημιαλλυπτική ρωγμή είναι $K = 0,8\sigma\sqrt{\pi a}$. Προέκυψαν οι τιμές (Εικ. 39):

Θεωρητικός συντελεστής από Griffith: $K_{1\theta} = 173$

Συντελεστής με χρήση FEM: $K_{1\pi} = 183$.

Δηλαδή, παρατηρείται απόκλιση μόλις 5%.

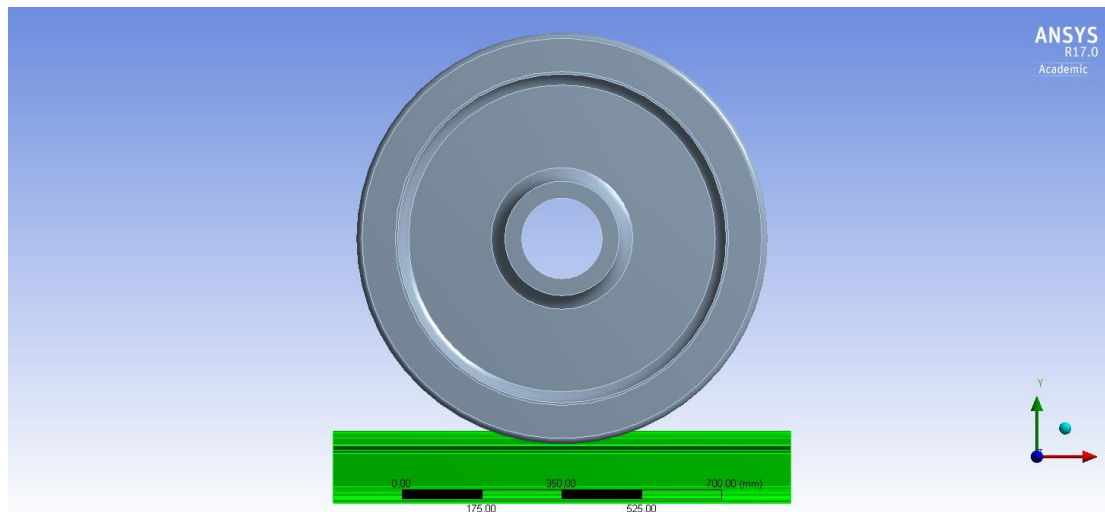


Εικόνα 39 Υπολογισμός συντελεστή έντασης τάσεων K_1

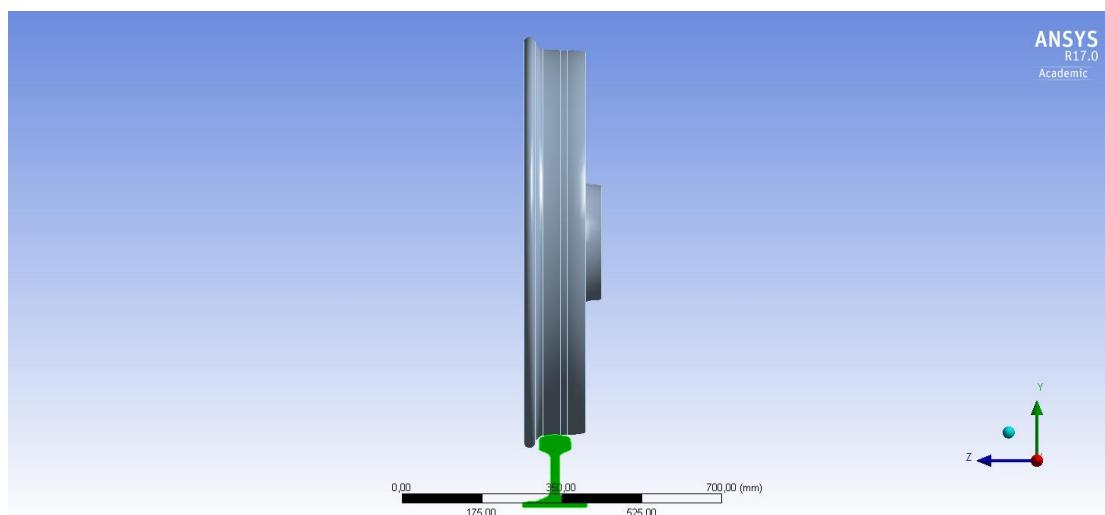
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μελετάται η επέκταση ρωγμής σε σύστημα σιδηροτροχού/σιδηροτροχιάς σε επαφή. Η ρωγμή εντοπίζεται το σιδηροτροχό. Το μοντέλο-CAD του συστήματος παρουσιάζεται στις Εικ. 40 και 41.



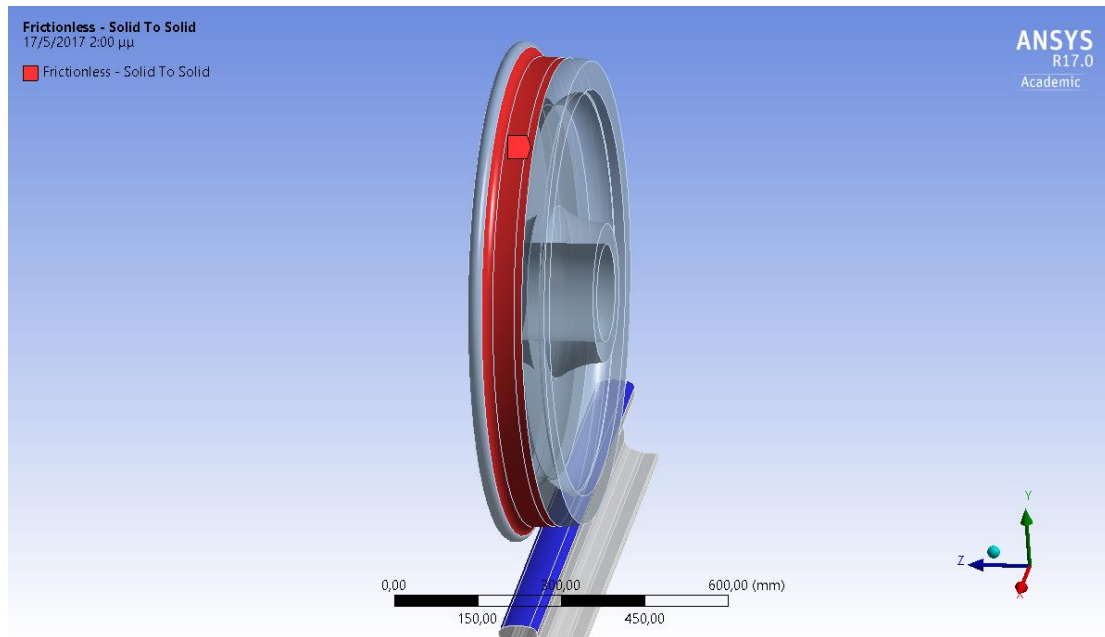
Εικόνα 40



Εικόνα 41

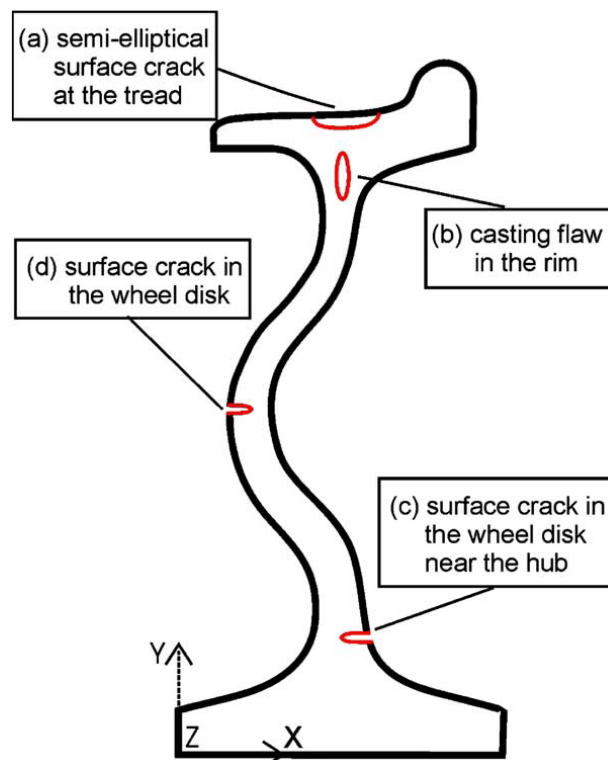
ΕΠΑΦΗ

Η επαφή θεωρήθηκε ότι περιλαμβάνει συνθήκες τριβής ολίσθησης με συντελεστή τριβής $\mu=0,15$. Από το menu του κώδικα επιλέχθηκε asymmetric συμπεριφορά επαφής, ενώ για τη penalty force εφαρμόστηκε η μέθοδος Augmented Lagrange. Επίσης, δοκιμάστηκε και η ατριβής επαφή, ώστε να προσομοιωθεί αυτή ως επαφή Hertz, βλ. Εικ. 42.



Εικόνα 42

Στην Εικ. 43 φαίνονται τα πιθανά σημεία που μπορεί να εμφανιστεί μια ρωγμή σε ένα σιδηροτροχό λόγω της καταπόνησής του κατά την επαφή με τη σιδηροτροχιά. Επιλέχθηκε ημιελλειπτική ρωγμή στην επιφάνεια, λόγω γεωμετρικών περιορισμών και είδους καταπόνησης (κόπωση).



Εικόνα 43 Πιθανές θέσεις αστοχίας σε σιδηροτροχό

ΠΛΕΓΜΑ

Για το πλέγμα ισχύουν σε γενικές γραμμές αυτά που εφαρμόστηκαν στο θεωρητικό μοντέλο του Κεφ.4. Δηλαδή, επιλέχτηκε πλέγμα Adaptive, με δυνατότητα πύκνωσης για σύγκλιση της λύσης. Τα στοιχεία του πλέγματος είναι τετραεδρικά 10 κομβικά, με κόμβους στις κορυφές και στα μέσα των πλευρών. Το πλέγμα κοντά στη ρωγμή είναι πιο πυκνό και ακολουθεί τη μέθοδο πλεγματοποίησης Hexdominant. Το πλέγμα αυτό αποτελείται από πενταεδρικά στοιχεία με 15 κόμβους στο άκρο της ρωγμής και εξαεδρικά με 20 κόμβους στην γειτονική περιοχή. Επίσης, σε μια περιοχή 40 mm γύρω από το άκρο της ρωγμής το πλέγμα έχει πυκνώσει για την επίτευξη μελύτερης ακρίβειας. Αναλυτικότερα, χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι τύποι στοιχείων:

SOLID187: Είναι ένα 10-κομβικό τετραεδρικό στοιχείο, με κόμβους στα μέσα των πλευρών. Κάθε κόμβος έχει 3 βαθμούς ελευθερίας, η μετατόπιση λόγω των ενδιάμεσων κόμβων είναι 2^ο βαθμού (προκύπτει από το τρίγωνο του Pascal).

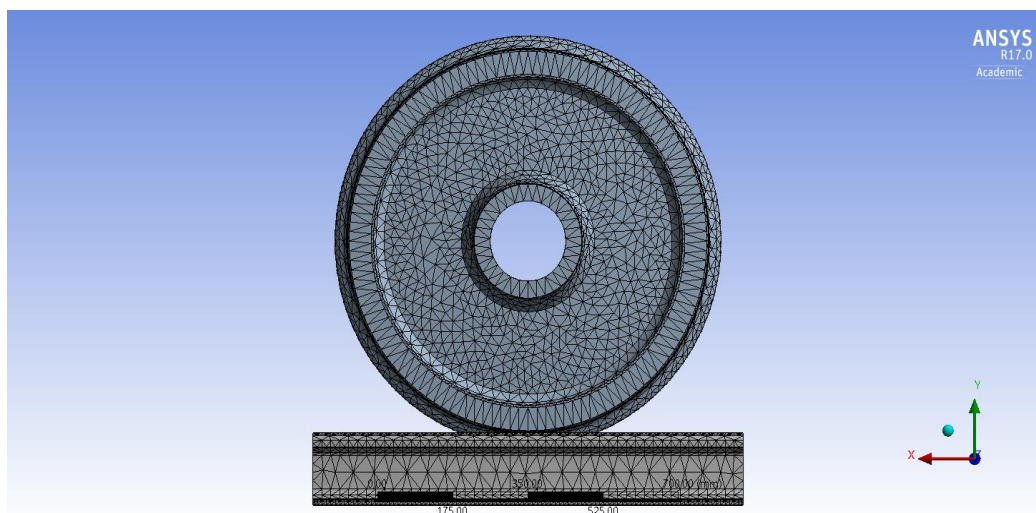
CONTA174: Είναι στοιχείο το οποίο εφαρμόζεται στην επιφάνεια που έχει οριστεί ως contact και έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια target. Είναι είτε τετραγωνικό 8-κομβικό στοιχείο είτε τριγωνικό 6-κομβικό. Μπορεί να είναι διδιάστατο ή τριδιάστατο.

SOLID186: Είναι ένα 20-κομβικό εξαεδρικό στοιχείο, με κόμβους στα μέσα των πλευρών. Κάθε κόμβος έχει 3 βαθμούς ελευθερίας και η μετατόπιση λόγω των ενδιάμεσων κόμβων είναι 3^ο βαθμού. Εμφανίζεται σε διαφορετικές μορφές, συμπύσσοντας κάποιους κόμβους κάθε φορά. Οι δυνατές μορφές είναι τετράεδρο 10 κόμβων, πυραμίδα 12 κόμβων και πρίσμα 15 κόμβων.

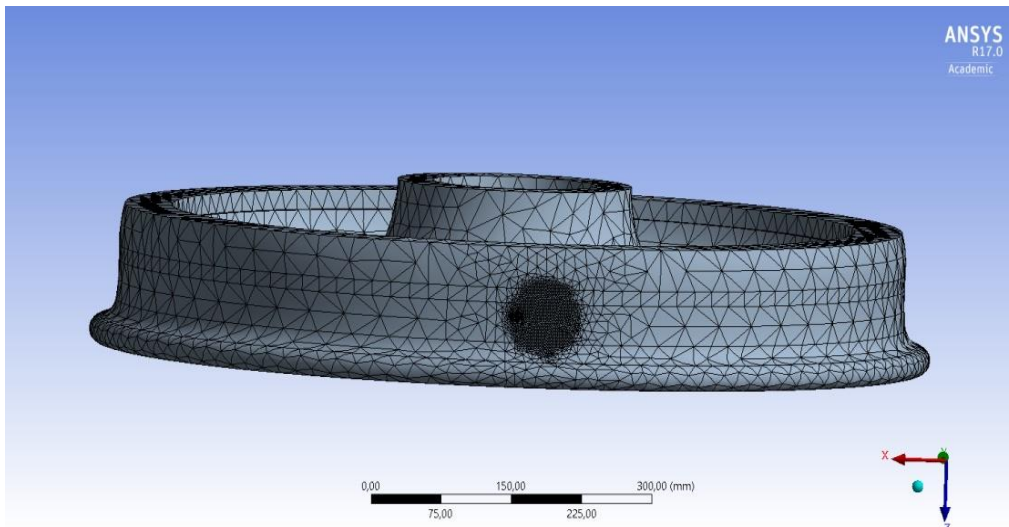
TARGE170: Είναι στοιχείο το οποίο εφαρμόζεται στην επιφάνεια που έχει οριστεί ως target και έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια contact. Αυτό το στοιχείο μπορεί να είναι ένας κόμβος, μια γραμμή με 2 κόμβους, μια γραμμή με τρεις κόμβους (TARGE169), τριγωνικό 3-κομβικό στοιχείο, τετραγωνικό 4-κομβικό στοιχείο, 6-κομβικό στοιχείο και 8-κομβικό στοιχείο, είτε διδιάστατο είτε τριδιάστατο

Η περιοχή πύκνωσης του πλέγματος αντιστοιχούσε στην περιοχή επαφής τροχού με τη σιδηροτροχιά η οποία είναι μεγαλύτερης σημασίας για το εξεταζόμενο πρόβλημα. Η μέθοδος πλεγματοποίησης είναι η Patch Conforming Method, η οποία μεταβάλλει το μέγεθος των στοιχείων ανάλογα με τις γεωμετρικές περιοχές που προκύπτουν από το CAD που χρησιμοποιείται.

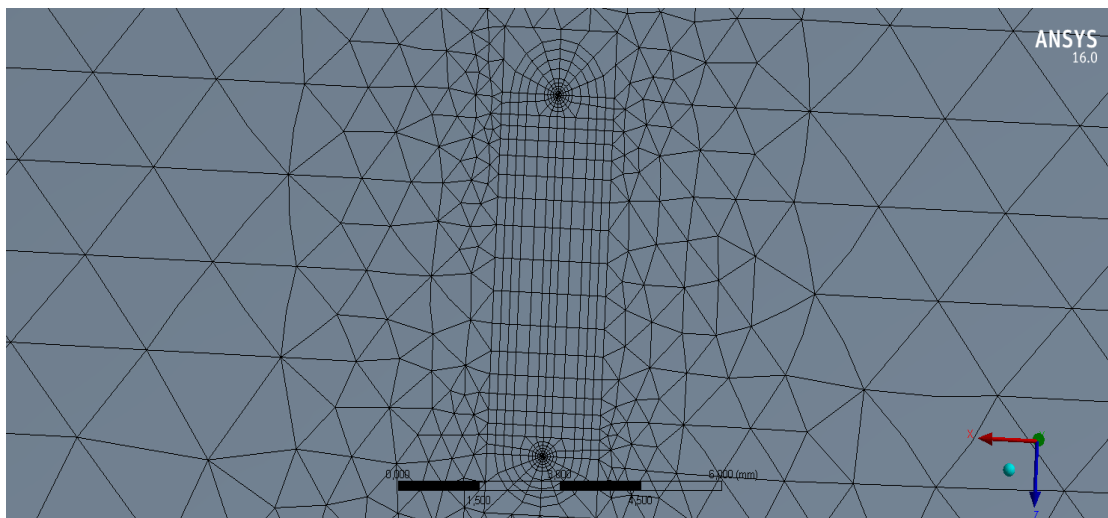
Χαρακτηριστικά του πλέγματος φαίνονται στις Εικ. 44-46.



Εικόνα 44

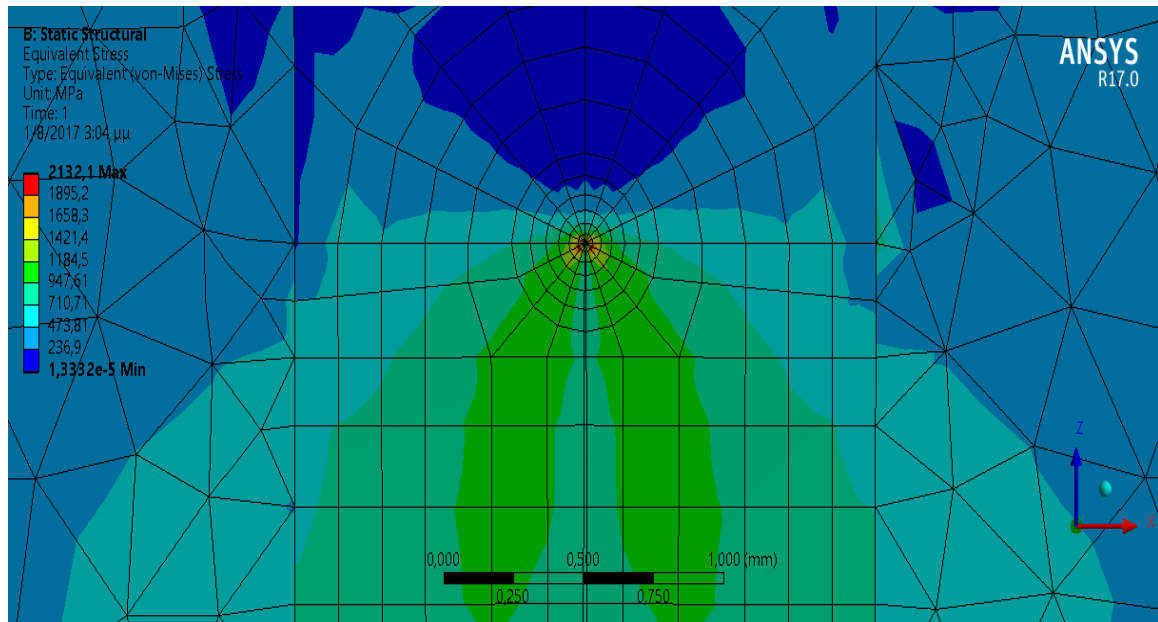


Εικόνα 45

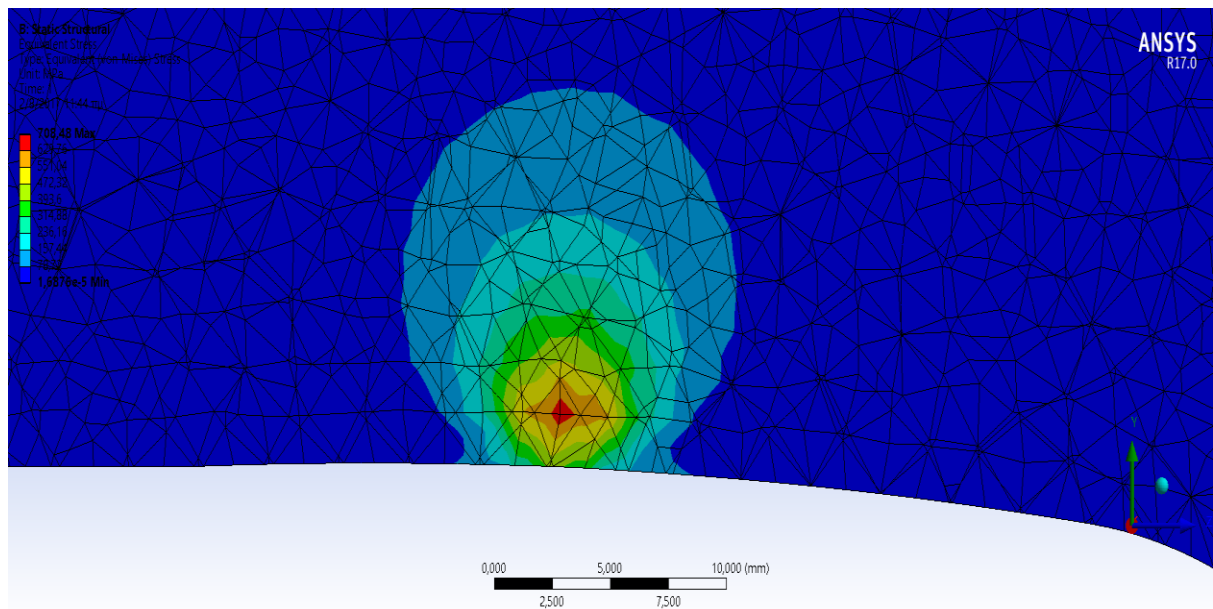


Εικόνα 46

Στις Εικ. 47 και 48 παρουσιάζεται το διάγραμμα κατανομής της τάσης γύρω από το άκρο της ρωγμής, όταν αυτή βρίσκεται ακριβώς στην επαφή τροχού/τροχιάς και όταν δεν υπάρχει επαφή, αντίστοιχα. Παρατηρούμε είναι ότι η ρωγμή γίνεται επικίνδυνη μόνο όταν βρίσκεται στο σημείο επαφής τροχού/τροχιάς, ενώ, μόλις απομακρυνθεί από την επαφή, οι τάσεις μειώνονται κατακόρυφα.

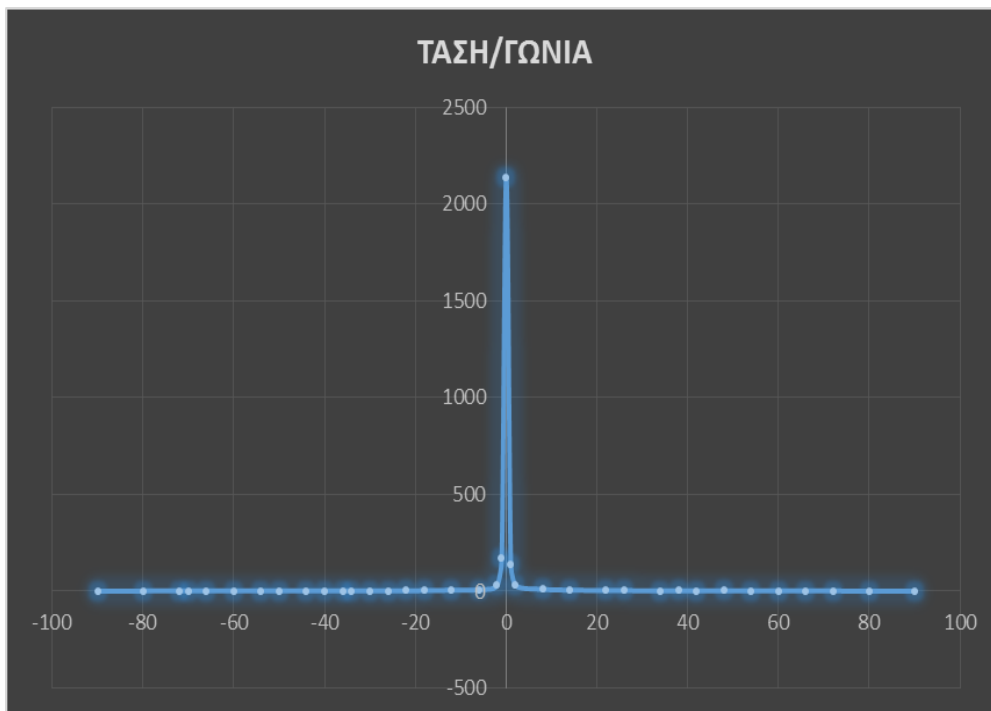


Εικόνα 47

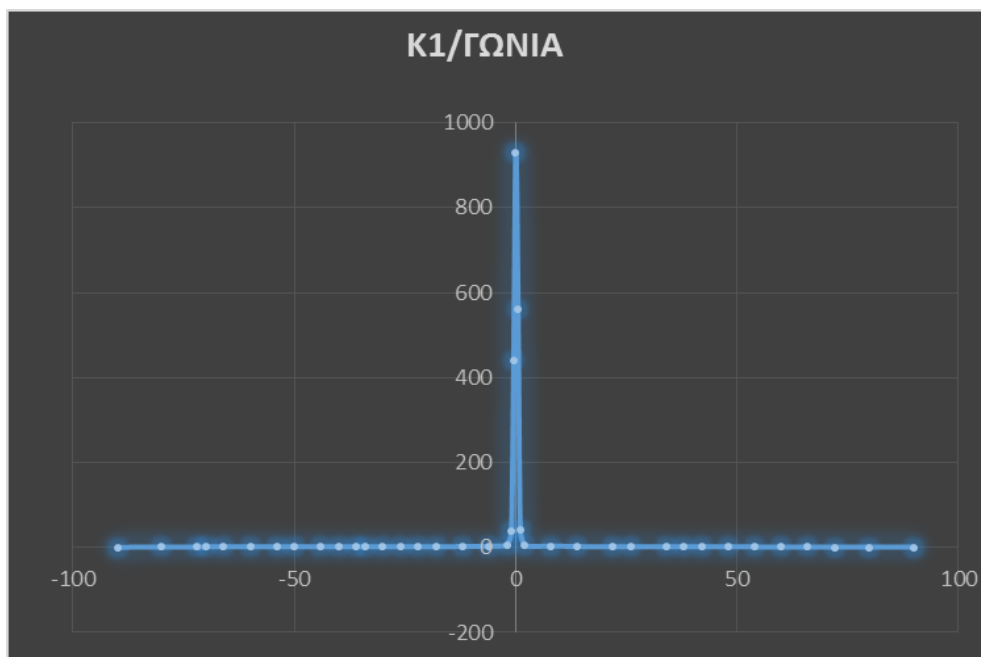


Εικόνα 48

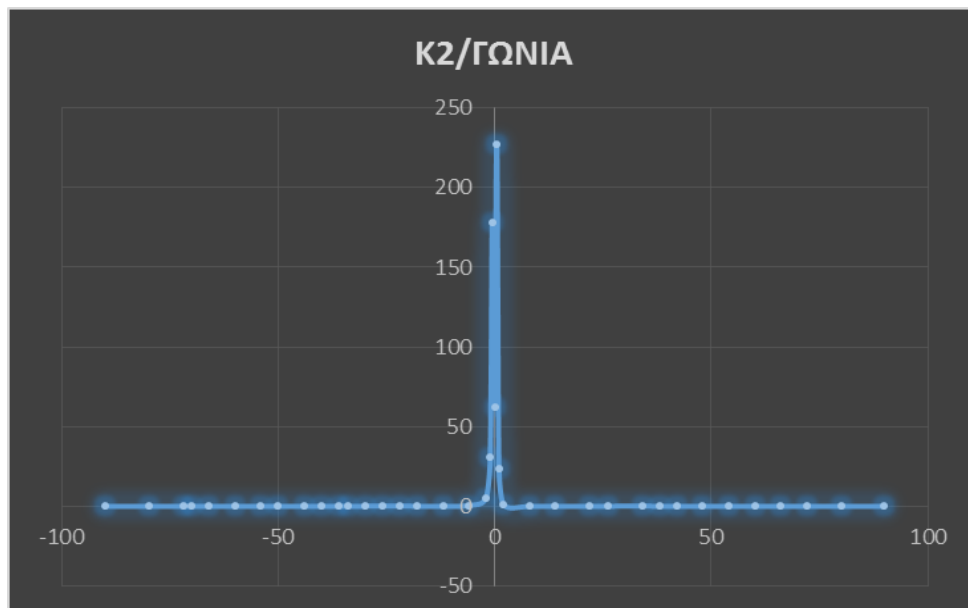
Στις επόμενες Εικόνες 49- παρατίθενται υπό μορφή διαγραμμάτων τα αποτελέσματα της εφαρμογής των πεπερασμένων στοιχείων στην επίλυση του προβλήματος. Οσο αφορά τον συντελεστή ένατασης τάσεων K1 αυτός ο συντελεστής είναι για θλιπτική φόρτιση και όχι για εφελκυστική



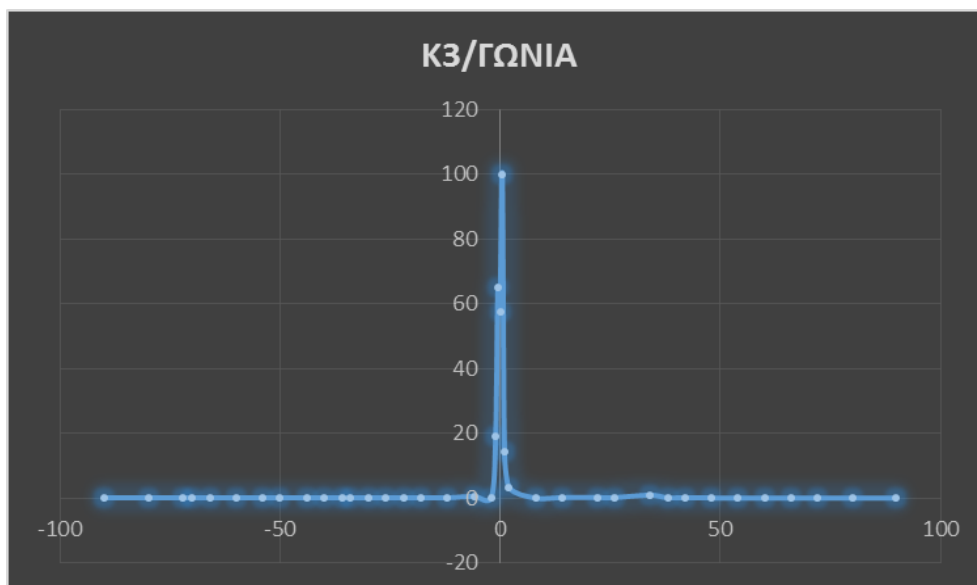
Εικόνα 49 Ισοδύναμη τάση κατά von Mises ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)



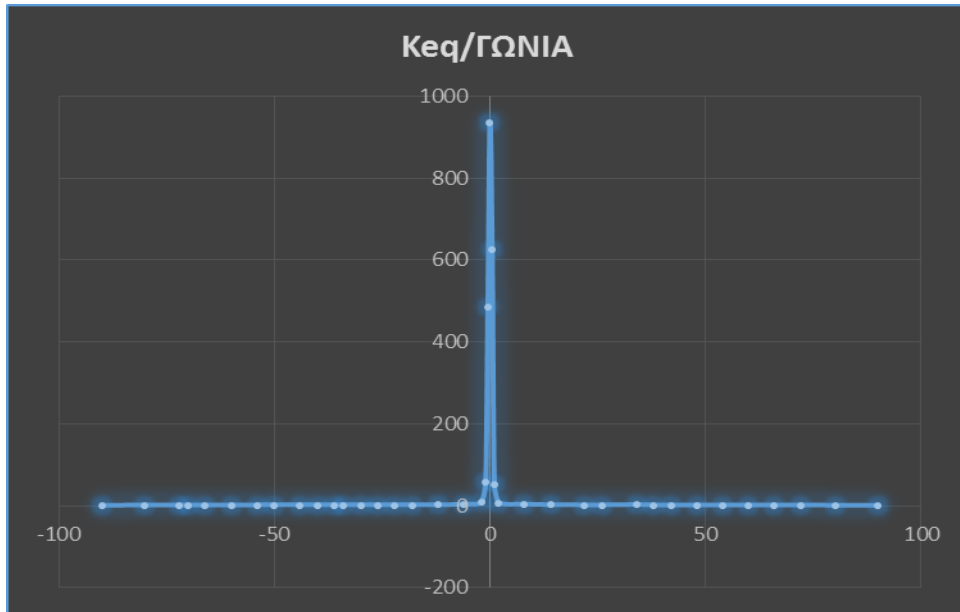
Εικόνα 50 Συντελεστής έντασης τάσης τύπου 1 ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)



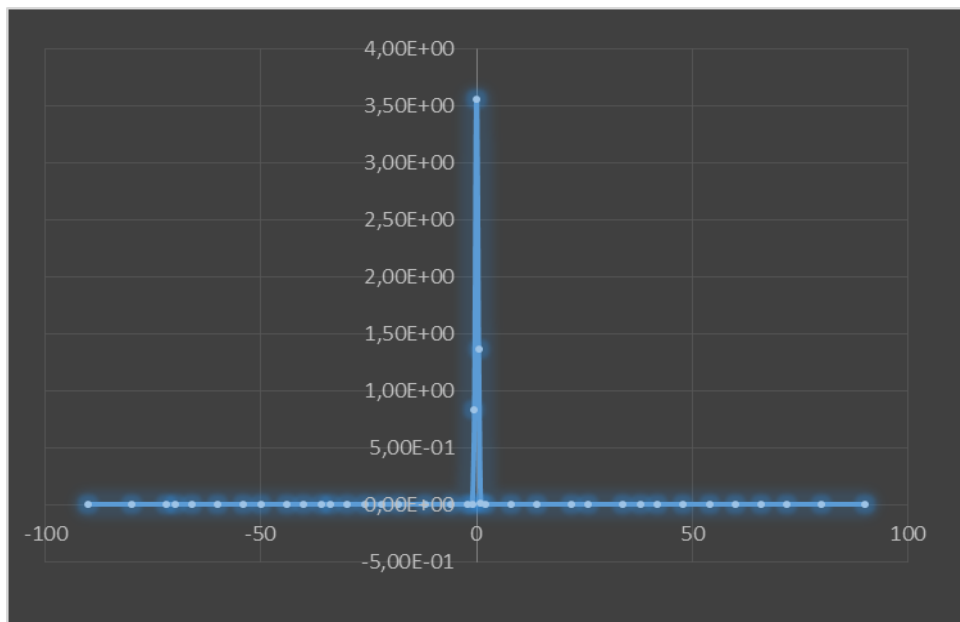
Εικόνα 51 Συντελεστής έντασης τάσης τύπου 2 ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)



Εικόνα 52 Συντελεστής έντασης τάσης τύπου 3 ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)

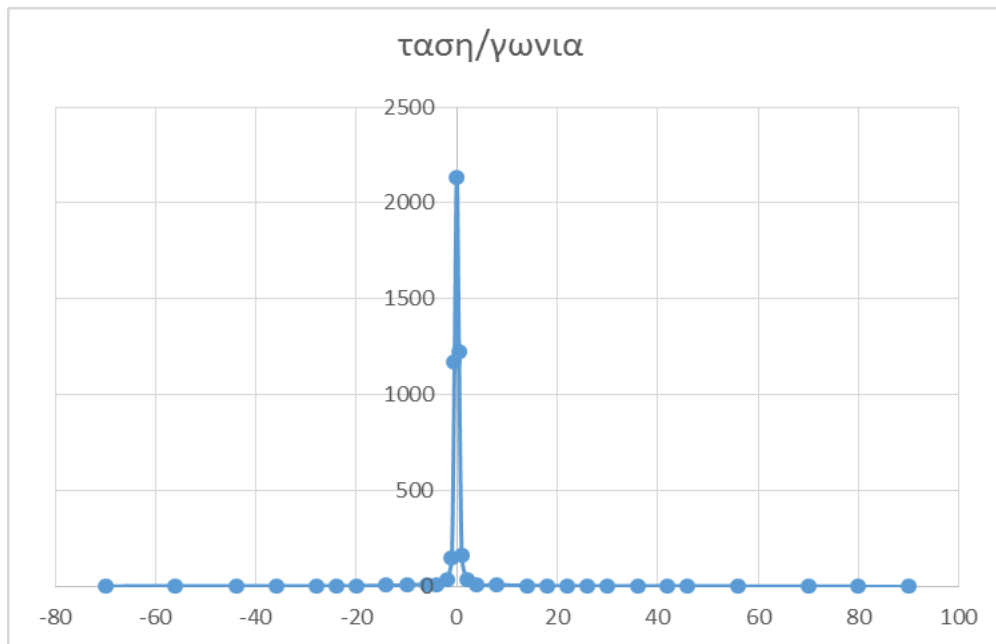


Εικόνα 53 Ισοδύναμος συντελεστής έντασης τάσης ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)

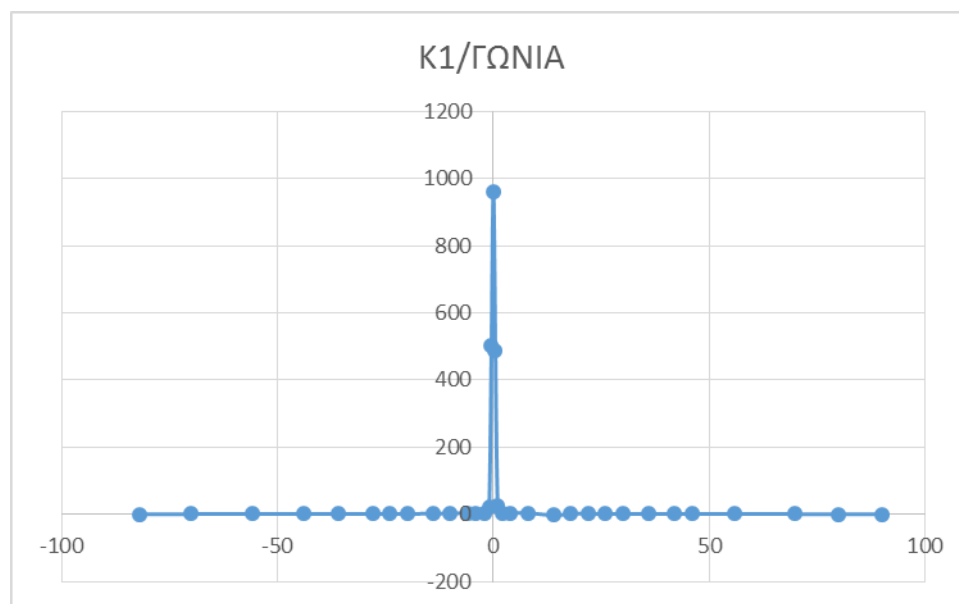


Εικόνα 54 Ολοκλήρωμα-J ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)

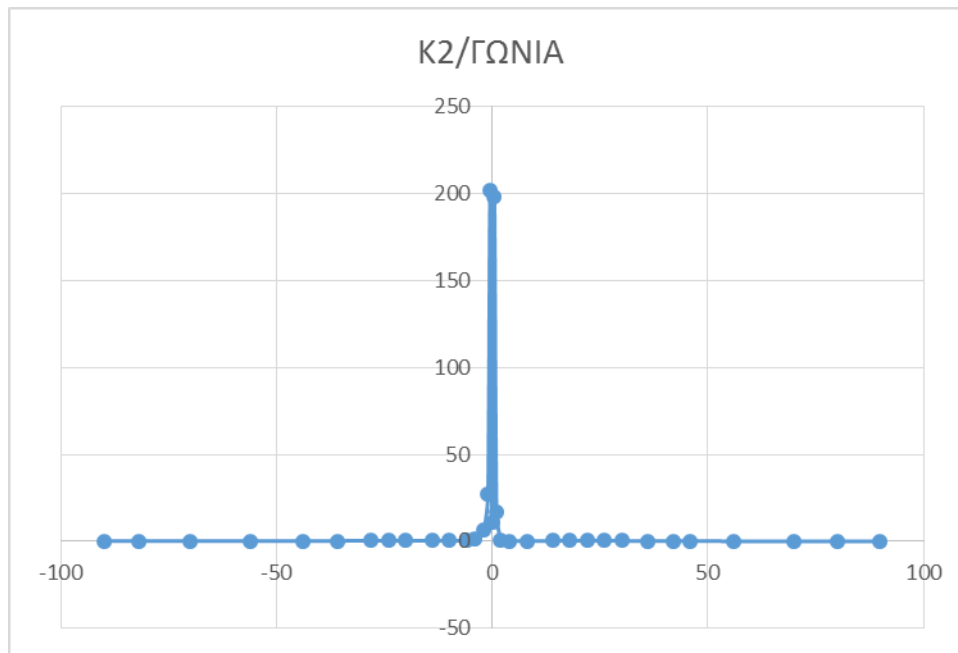
Ακολουθούν τα ίδια διαγράμματα για την περίπτωση που η επαφή τροχού/τροχιάς έχει μηδενική τριβή.



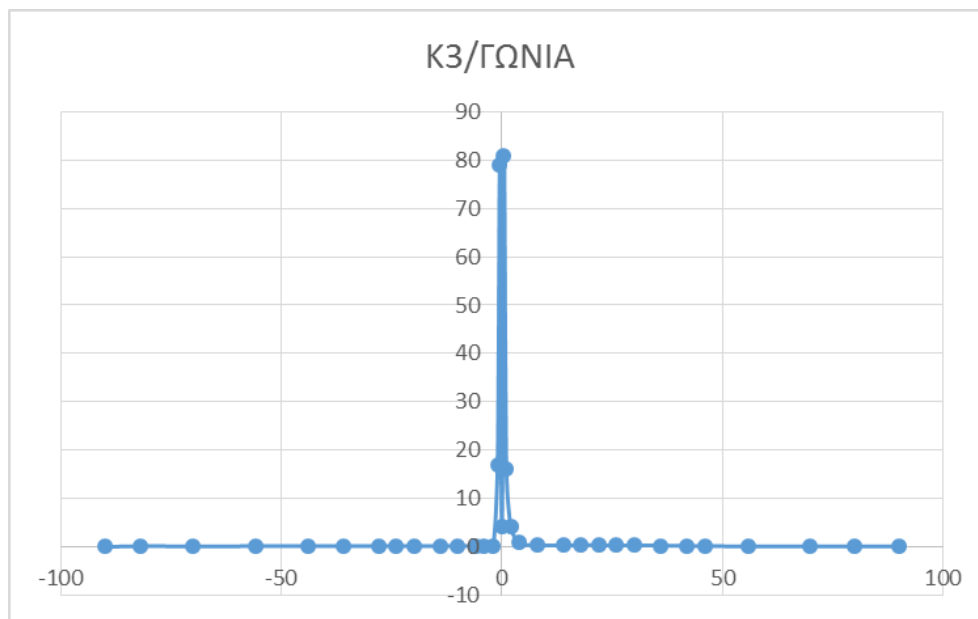
Εικόνα 55 Ισοδύναμη τάση κατά von Mises ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)



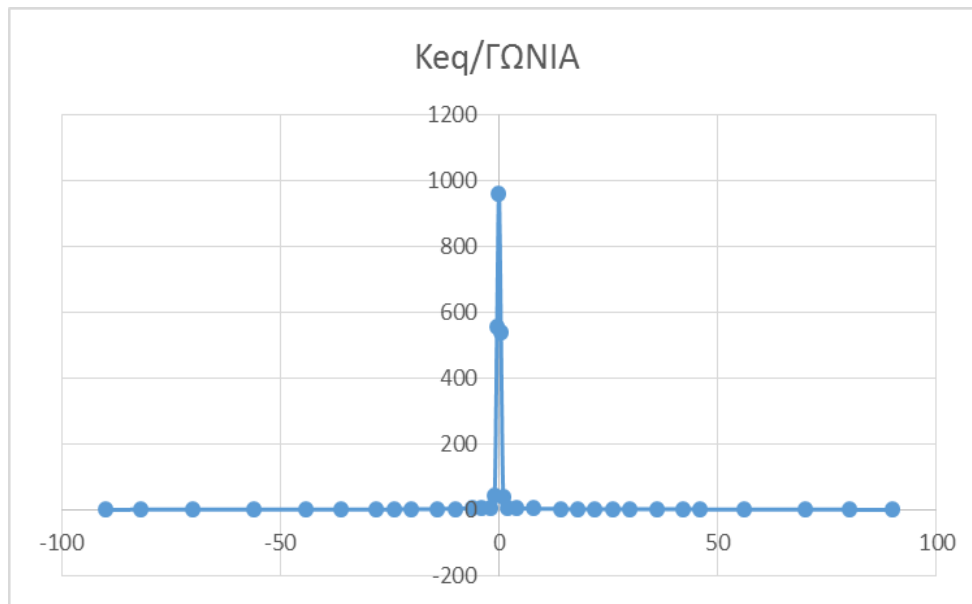
Εικόνα 56 Συντελεστής έντασης τάσης τύπου 1 ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)



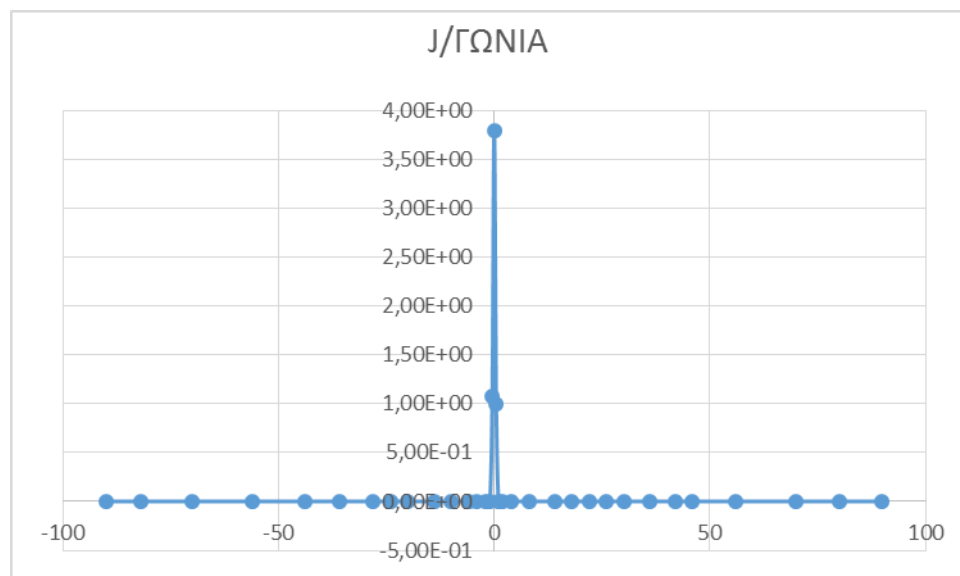
Εικόνα 57 Συντελεστής έντασης τάσης τύπου 2 ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)



Εικόνα 58 Συντελεστής έντασης τάσης τύπου 3 ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)



Εικόνα 59 Ισοδύναμος συντελεστής έντασης τάσης ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)



Εικόνα 54 Ολοκλήρωμα-J ως συνάρτηση της γωνίας στην οποία βρίσκεται η ρωγμή (γωνία 0° αντιστοιχεί στο σημείο επαφής)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6.ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη συνέχεια καταγράφονται κάποιες παρατηρήσεις που προέκυψαν από την ανάλυση που έγινε πιο πάνω:

- Η πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι στο μοντέλο χωρίς ρωγμή καθώς και σε αυτά με τη ρωγμή όταν η ρωγμή δεν είναι στο πεδίο επαφής οι μέγιστες τάσεις δεν βρίσκονται στην επιφάνεια του τροχού αλλά λίγο πιο μέσα από το οποίο συμπεραίνουμε ότι η ρωγμή συγκεντρώνει τις τάσεις στο άκρο της το οποίο βρίσκεται στην επιφάνεια και στο μέγιστο βάθος της.
- Επίσης, παρατηρούμε ότι και στις δυο περιπτώσεις έχουμε μια πολύ απότομη αύξηση όταν η ρωγμή είναι μέσα στο πεδίο της επαφής ενώ όταν είναι εκτός οι τάσεις έχουν μικρή μεταβολή και η τιμή είναι κατά πολύ μικρότερη αυτής εντός της επαφής. Από τα προηγούμενα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι η μόνη περιοχή που έχει νόημα να μελετήσουμε τη ρωγμή για να δούμε τη τάσεις θα αναπτυχθούν στο άκρο και ποιος είναι ο κρίσιμος ισοδύναμος συντελεστής έντασης τάσεων.
- Επίσης, στη σύγκριση μεταξύ θεωρητικού μοντέλου (Irwin) και των αποτελεσμάτων που βγάζουμε από το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων παρατηρούμε ότι οι τιμές δεν έχουν τόση διαφορά καθώς έχουν και πανομοιότυπη μορφή καμπύλης.
- Στη περιοχή των γωνιών 120-250 η μορφή των καμπυλών είναι διαφορετική αυτό πιθανότατα να οφείλεται στο ότι αυτές οι τιμές αντιστοιχούν στο άνοιγμα της ρωγμής και πολύ κοντά σε αυτό για αυτό στο μοντέλο δε μπορούμε να πάρουμε ακριβείς τιμές.
- Επίσης, τα διαγράμματα που αντιστοιχούν στο μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων όσο πλησιάζουμε στο άκρο της ρωγμής συγκλίνουν σε μια τιμή η οποία είναι η τιμή του έχει η τάση στο άκρο της ρωγμής ενώ ο τύπος του Irwin στο άκρο της ρωγμής $r=0$ μας δίνει άπειρη τιμή για αυτό και οι τιμές του r που πήραμε δεν είναι πάρα πολύ κοντά στο άκρο της ρωγμής αλλά λίγο πιο μακριά αλλά αρκετά κοντά έτσι ώστε να ισχύει ο τύπος του Irwin και μάλιστα να ταυτίζεται με τις τιμές του Westergaard δηλαδή $r < \alpha/10 = 0,15\text{mm}$
- Ένα ακόμα σημείο που πρέπει να αναφέρουμε είναι ότι οι μέγιστες τιμές των συντελεστών έντασης τάσεων K_{II} , K_{III} δεν εμφανίζονται στις 0 μοίρες διότι είναι συναρτήση των διατμητικών τάσεων οι οποίες όταν η ρωγμή είναι στις 0,5 μοίρες έχει μεγαλύτερες τιμές άρα σε αυτές τις μοίρες οι συντελεστές πέρνουν τις μέγιστες τιμές τους οι οποίες έχουν πολύ μικρή διαφορά μεταξύ τους.
- Ο ισοδύναμος συντελεστής έντασης τάσεων εξαρτάται κατά κύριο λόγο από το συντελεστή K_I οι οποίοι έχουν παρόμοιες κατανομές επίσης οι ισοδύναμοι συντελεστές για τα μοντέλα με και χωρίς τριβή έχουν σχεδόν ίδιες τιμές
- Ενώ στο θεωρητικό μοντέλο η μέγιστη τάση είναι στο μέγιστο βάθος στο μοντέλο με τριβή η διαφορά των τάσεων στο μέγιστο βάθος και στο άκρο είναι μικρότερη

απο το θεωρητικό ενώ στο μοντέλο χωρίς τριβή η μέγιστη τάση είναι στο άκρο της ρωγμής.

- Μια ακόμη παρατήρηση η οποία θα πρέπει να γίνει είναι ότι θεωρητικά τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται για τις ρωγμές είναι 10 κομβικά στα οποία όμως οι κόμβοι των πλευρών μετακινούνται στο $\frac{1}{4}$ του μήκους της πλευράς όπως έχει παρουσιαστεί και πιο πάνω στο πρόγραμμα όμως δεν ήταν εφικτή αυτή η μετακίνηση το οποίο μπορεί να είναι ένας από τους λόγους που προέκυψαν οι παραπάνω αποκλίσεις του θεωρητικού μοντέλου

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Χ. Γ. Προβατίδης
Πεπερασμένα Στοιχεία στην Ανάλυση Κατασκευών
Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2015
- [2] Γ.Δ. Χρυσουλάκης και Δ.Ι. Παντελής
Επιστήμη και Τεχνολογία των Μεταλλικών Υλικών
Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2003
- [3] W.D. Callister
Επιστήμη και Τεχνολογία Υλικών, 9η Έκδοση
Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2015
- [4] M. Kuna, M. Springmann, K. Madler, P. Hubner, G. Pusch
Fracture mechanics based design of a railway wheel made of austempered ductile iron
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 72, pp. 241–253, 2005
- [5] Naoto Sakakibara
Finite Element Method in Fracture Mechanics (Lecture Notes)
The University of Texas at Austin, 2008
- [6] C. T. Sun and Z.-H. Jin
Fracture Mechanics [CHAPTER 3 The Elastic Stress Field around a Crack Tip]
Academic Press, Oxford, UK, 2012
- [7] D. Radaj and M. Vormwald
Advanced Methods of Fatigue Assessment, [Ch. 2 Extended Stress Intensity Factor Concepts]
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013
- [8] Meinhard Kuna
Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory-Numerics-Applications
Solid Mechanics and Its Applications Series, Springer-Verlag, Dordrecht-Heidelberg-New York-London, 2013

Πηγές Internet

- [9] <http://www.fracturemechanics.org>
- [10] <https://en.wikipedia.org/wiki/J-integral>
- [11] https://en.wikipedia.org/wiki/Frictional_contact_mechanics
- [12] <https://www.corrosionpedia.com/definition/1037/stress-intensity-factor-k>
- [13] http://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/fracture_mechanics/fm_lefm_stress.cfm
- [14] <http://www.iue.tuwien.ac.at/phd/nentchev/node30.html>
- [15] <http://www.iue.tuwien.ac.at/phd/nentchev/node25.html>