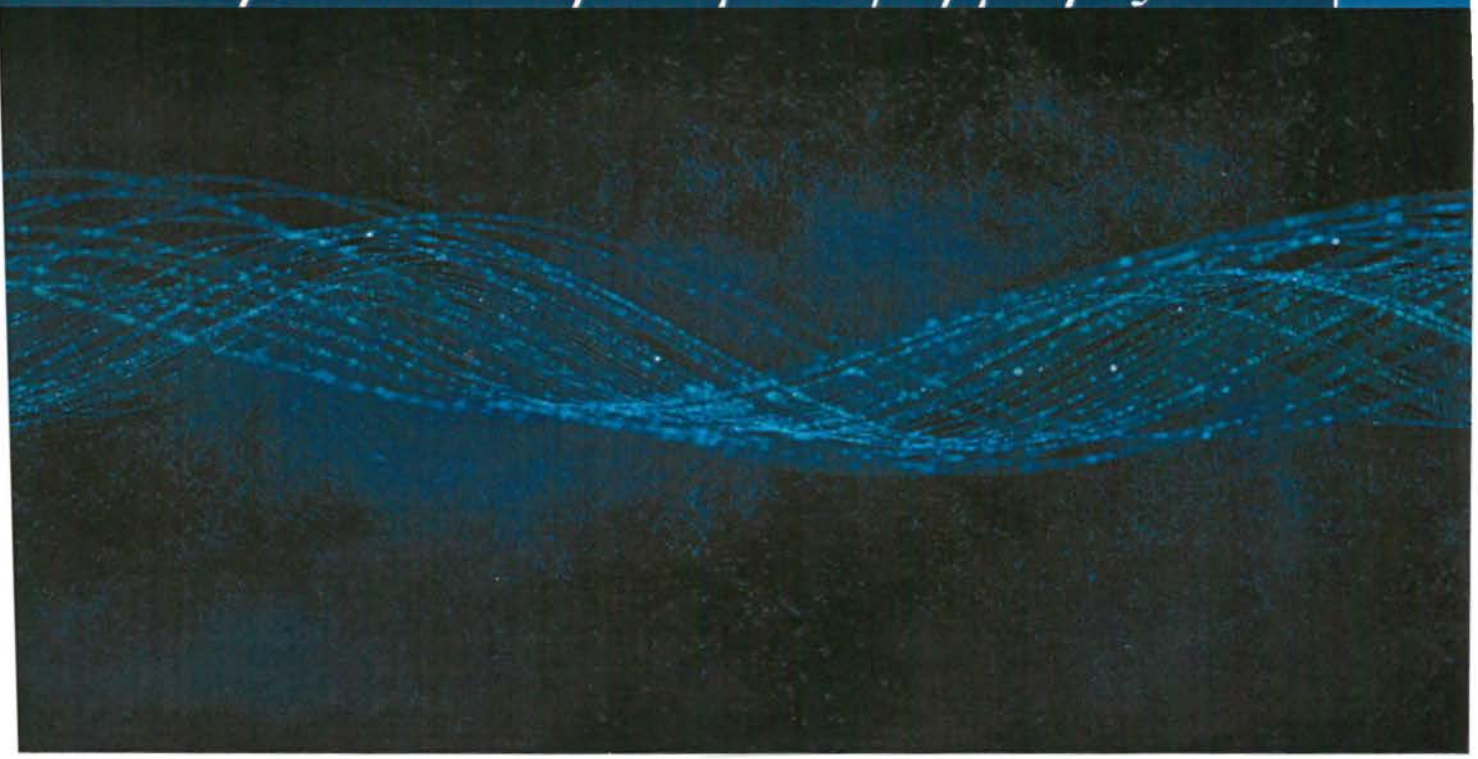
Τμήμα
Ηλεκτρονικών Υπολογιστικών Συστημάτων

ΗΥΣ
82

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤ
ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ

Πτυχιακή Εργασία

«Ανάλυση και Σχεδίαση Ψηφιακών και Αναλογικών Φίλτρων με Εφαρμογές»



Των φοιτητριών

Βασιλάκη Γεωργία[Α.Μ.:32522] - Βε Παρασκευή[Α.Μ.:33158]

Επιβλέπουσα καθηγήτρια : Βελώνη Αναστασία

Αθήνα, Ιούνιος 2014

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΤΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΦΙΛΤΡΩΝ 6

1.1 Εισαγωγή 6

1.2 Αναλογικά και Ψηφιακά Φίλτρα 6

1.3 Διαφορές Αναλογικών και Ψηφιακών Φίλτρων 7

1.3.1 Κατηγορίες Φίλτρων και Βασικές Ιδιότητες 8

1.3.2 Ευστάθεια και Αιτιατότητα 10

1.4 Ιδανικές Προδιαγραφές Φίλτρων 10

1.4.1 Ιδανικές Χαρακτηριστικές 11

1.4.2 Είδη Κλασικών Ιδανικών Φίλτρων 13

1.4.3 Ιδανική Κρουστική Απόκριση Φίλτρου 15

1.5 Προσέγγιση Ιδανικών Χαρακτηριστικών 17

1.5.1 Απόκριση Πλάτους και Συνάρτηση Φάσης 17

1.5.2 Γραμμική Φάση και Καθυστέρηση Ομάδας 18

1.5.3 Ζώνες Μετάβασης 23

1.5.4 Ακρίβεια Προσέγγισης 25

1.5.5 Συνάρτηση Βάρους 27

1.6 Σύγκριση FIR και IIR Φίλτρων 29

1.7 Μεταβατικά Φαινόμενα 29

1.7.1 Μεταβατικά Φαινόμενα σε FIR Φίλτρα 30

1.7.2 Μεταβατικά Φαινόμενα σε IIR Φίλτρα 31

2 ΑΡΧΕΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ 35

2.1. Αναλογικό Φιλτράρισμα 35

2.2. Ψηφιακό Φιλτράρισμα 36

2.3. Μετατροπείς A / D και D / A 37

2.3.1. Δειγματοληψία 37

2.3.2. Κβάντιση 40

2.3.3. Ανακατασκευή σήματος (μετατροπή D / A) 42

2.4. Γραμμικά συστήματα 45

2.4.1. Διακριτή συνέλιξη 45

2.4.3. Γραμμικά συστήματα στο πεδίο της συχνότητας 50

2.4.4. Φιλτράρισμα διακριτού χρόνου αναλογικών σημάτων 51
2.4.5. Ιδανικά φίλτρα διακριτού χρόνου 54
2.4.5.1. Ιδανική Καθυστέρηση 54
2.4.5.2. Ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας 56
2.4.5.3. Ιδανικός διαφοριστής και μετασχηματιστής Hilbert 59
2.4.5.4 Ιδανικό φίλτρο ανορθωμένου συνημίτονου διαμόρφωσης παλμού 61
2.5. Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων 61
2.5.2 Σχεδίαση FIR φίλτρων με τη μέθοδο παραθύρου Kaiser 66
2.6. Επιπτώσεις του κβαντισμού στα ψηφιακά φίλτρα 73
2.6.1. Κβάντιση συντελεστών 73
2.6.2. Στρογγυλοποίηση σε υλοποιήσεις σταθερής υποδιαστολής 75
2.6.2.1. Στρογγυλοποίηση σε φίλτρα FIR 75
2.6.2.2. Υλοποιήσεις κινητής υποδιαστολής 77
2.6.2.3. Αυτόματη γεννήτρια κώδικα 77
2.7. Σχεδιασμός FIR τράπεζας φίλτρων 78
2.7.1. Ελάττωση (decimation) και παρεμβολή (interpolation) 79
2.7.1.1. Δειγματοληψία προς τα κάτω (downsampling) 79
2.7.1.2. Δειγματοληψία προς τα πάνω (upsampling) 80
2.7.1.3. Διαδικασίες Decimation & Interpolation με ρητούς ρυθμούς 81
2.7.2. Τράπεζες φίλτρων δύο ζωνών 81
2.7.2.1. Αναίρεση της επικάλυψης 82
2.7.2.2. Quadrature mirror filters (QMF) 83
2.7.2.3. Conjugate quadrature filters (CQF) 83
2.7.2.4. Τράπεζες φίλτρων γραμμικής φάσης τέλειας ανακατασκευής (PR) 85
2.7.2.5. Τράπεζες φίλτρων μικρής καθυστέρησης 85
2.7.3. Τράπεζες φίλτρων πολλών ζωνών 86
2.7.3.1. Συστήματα δομής - δέντρου 86
2.7.3.2.Τράπεζες φίλτρων διαμόρφωσης συνημίτονου 87
2.8. Κβάντιση συντελεστών φίλτρων 88
2.8.1. Κβάντιση συντελεστών φίλτρων FIR 88
3 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ- Σχεδιασμός φίλτρων Φίλτρα IIR, μέθοδος του αναλλοίωτου της κρουστικής, Διγραμμικός μετασχηματισμός 90
3.1 Φίλτρα- Σύντομη επεξήγηση γενικών ορισμών 90

3.2 Σχεδιασμός φίλτρων ΔΧ από φίλτρα ΣΧ 93
3.3 Σχεδιασμός φίλτρων ΔΧ – αναλλοίωτο της κρουστικής απόκρισης 93
4. Ψηφιακά φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR) 134
4. 1 Χαρακτηριστικά των FIR φίλτρων 134
4.1.1 Γραμμική απόκριση φάσης 137
4.1.2 Ευστάθεια των φίλτρων – Πόλοι και μηδενικά 139
4.2 Τύποι και προδιαγραφές των FIR φίλτρων 140
4.3 Μέθοδοι σχεδίασης των FIR φίλτρων 141
4.3.1 Μέθοδοι των παραθύρων 142
4.3.2 Ιδιότητες και τύποι των παραθύρων 146
4.3.3 Μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων 149
4.4 Θέματα υλοποίησης FIR φίλτρων 150
4.4.1 Δομές πραγματοποίησης των FIR φίλτρων 150
4.4.2 Σφάλμα από την κβάντιση των συντελεστών 152
5. FIR Filter – (Τρόποι σχεδίασης και παραδείγματα) 154
5.1 Σχεδίαση μη αναδρομικών φίλτρων (FIR) 154
5.1.1 Ιδανική απόκριση συχνότητας 154
5.1.2 Ιδανική κρουστική απόκριση φίλτρου 155
5.1.3 Προσέγγιση ιδανικών χαρακτηριστικών 156
5.1.4 Υπολογισμός συντελεστών 158
5.1.5 Σχεδίαση με χρήση παραθύρων - Βήματα 158
5.1.6 Διαγραμματική επεξήγηση 172
5.2 Παραδείγματα Σχεδίασης FIR φίλτρων 174
5.3 Σχεδιασμός FIR φίλτρων με χρήση matlab 190
6.Ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR) 194
6. 1 Αναλογικά φίλτρα 195
6.1.1. Γνωστά βαθυπερατά αναλογικά φίλτρα 197
6.1.2. Μετασχηματισμοί συχνότητας αναλογικών φίλτρων 202
6.2 Σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων 206
6.2.1 Γραφική μέθοδος 206
6.2.2 Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής 207
6.2.3 Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού 211
6.3 Υλοποίηση IIR ψηφιακών φίλτρων 212

7. FAQs [Frequently asked questions] για τα φίλτρα. 217

1 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΦΙΛΤΡΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Τα σήματα τα οποία μας ενδιαφέρουν περιέχουν πληροφορία αναμεμιγμένη με θόρυβο. Βασικό βήμα, πριν από οποιαδήποτε επεξεργασία, είναι να προσδιοριστούν χαρακτηριστικά τα οποία διαφοροποιούν τα δύο είδη σημάτων, προκειμένου στην συνέχεια, στηριζόμενοι στις εν λόγω διαφορές, να επιτύχουμε απομάκρυνση του θορύβου. Όπως γνωρίζουμε, οι μέθοδοι επεξεργασίας, στηρίζονται στην υπόθεση ότι το σήμα πληροφορίας και ο θόρυβος **δεν έχουν κοινές συχνότητες** και επομένως διαφοροποιούνται μέσω των συχνοτήτων τους.

Η υιοθέτηση της βασικής υπόθεσης επιτρέπει την πλήρη απομάκρυνση του θορύβου με απλή γνώση των **συχνοτικών ζωνών του σήματος πληροφορίας και θορύβου**, δίχως να είναι απαραίτητη η ακριβής γνώση του συχνοτικού περιεχομένου των σημάτων που μας ενδιαφέρουν. Η τελευταία ιδιότητα καθιστά τις τεχνικές που θα παρουσιαστούν ιδιαίτερα ελκυστικές, αφού για την εφαρμογή τους απαιτείται ελάχιστη εκ των προτέρων γνώση του σήματος πληροφορίας και του θορύβου.

Όσον αφορά στη βασική υπόθεση, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι υπάρχουν πολλές εφαρμογές στις οποίες η υπόθεση αυτή είναι αληθής ή τουλάχιστον πολύ κοντά στην πραγματικότητα. Σε προβλήματα στα οποία η βασική υπόθεση δεν ισχύει, οι μέθοδοι επεξεργασίας που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια είναι ακατάλληλες. Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει κανείς να ανατρέξει σε προχωρημένες τεχνικές επεξεργασίας, οι οποίες απαιτούν ακριβέστερο προσδιορισμό των προς επεξεργασία σημάτων.

Η βασική υπόθεση επιτρέπει την απομάκρυνση του θορύβου με τη χρήση απλών γραμμικών, χρονικά σταθερών, συστημάτων. Τα συστήματα αυτά καλούνται *φίλτρα* και η αντίστοιχη επεξεργασία *φιλτράρισμα*. Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι να παρουσιαστούν οι βασικές κατηγορίες φίλτρων που εφαρμόζονται στην πράξη, ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται οι προδιαγραφές τους, καθώς και οι χαρακτηριστικές ιδιότητες, οι οποίες επηρεάζουν την υλοποίησή τους.

1.2 Αναλογικά και Ψηφιακά Φίλτρα

Υπάρχουν δύο βασικά είδη φίλτρων, ανάλογα με το είδος του σήματος στο οποίο απευθύνονται. Συγκεκριμένα τα φίλτρα με τα οποία επεξεργαζόμαστε αναλογικά σήματα καλούνται αναλογικά, ενώ τα αντίστοιχα που εφαρμόζονται στην επεξεργασία ψηφιακών

σημάτων ψηφιακά. Τα φίλτρα, στα οποία θα επικεντρωθούμε, είναι γραμμικά χρονικά σταθερά συστήματα και, επομένως, μπορούν να περιγραφούν πλήρως, είτε από την κρουστική τους απόκριση $h(t)$ (για αναλογικά) και h_n (για ψηφιακά), είτε ισοδύναμα από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και $H(z)$ αντίστοιχα. Επειδή τέλος μας ενδιαφέρει πολύ η συμπεριφορά των φίλτρων στο πεδίο της συχνότητας, το σημαντικότερο ρόλο στο σχεδιασμό ενός φίλτρου θα παίξει η απόκριση συχνότητας, δηλαδή το $H(j\Omega)$ (για αναλογικά) και $H(e^{j\omega})$ (για ψηφιακά). Μάλιστα, όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, οι προδιαγραφές καθώς και ο όλος σχεδιασμός των φίλτρων πραγματοποιείται στο πεδίο της συχνότητας.

1.3 Διαφορές Αναλογικών και Ψηφιακών Φίλτρων

Τα δύο είδη φίλτρων δεν είναι ισοδύναμα ως προς τη συμπεριφορά τους σε πρακτικές εφαρμογές. Ανάλογα με την περίπτωση, άλλοτε είναι προτιμητέο το ένα είδος και άλλοτε το άλλο. Οι βασικές διαφορές τους είναι οι ακόλουθες .

Τα αναλογικά φίλτρα υλοποιούνται με κλασικά ηλεκτρικά αναλογικά κυκλώματα και η επεξεργασία των αντίστοιχων σημάτων είναι άμεση δίχως καμία καθυστέρηση. Αντίθετα, τα ψηφιακά φίλτρα υλοποιούνται με τη βοήθεια ψηφιακών επεξεργαστών και το αποτέλεσμα της επεξεργασίας εξάγεται με καθυστέρηση, η οποία είναι συνάρτηση της πολυπλοκότητας της επεξεργασίας και της ταχύτητας του επεξεργαστή.

Οι χαρακτηριστικές των αναλογικών φίλτρων είναι συνάρτηση των τιμών των στοιχείων των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Οι τιμές αυτές αλλάζουν με θερμοκρασία, υγρασία, γήρανση, με αποτέλεσμα να μεταβάλλονται και οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές των φίλτρων. Τα ψηφιακά φίλτρα είναι απολύτως σταθερά, εφόσον φυσικά ο επεξεργαστής λειτουργεί σωστά.

Με ψηφιακά φίλτρα είναι δυνατό να προσεγγίσουμε τις ιδανικές προδιαγραφές με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια. Αντίστοιχη ιδιότητα δεν διαθέτουν (πρακτικά) τα αναλογικά φίλτρα, διότι αυτό απαιτεί πολύπλοκα κυκλώματα με απροσδιόριστα αποτελέσματα, λόγω της μη ακριβούς γνώσης των τιμών των στοιχείων του κυκλώματος.

Τα ψηφιακά φίλτρα (συγκεκριμένα τα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης) έχουν πολύ μεγάλη ευελιξία στο σχεδιασμό τους. Πρακτικά είναι δυνατό να σχεδιαστεί φίλτρο με οποιαδήποτε χαρακτηριστική. Τα αναλογικά φίλτρα περιορίζονται στην υλοποίηση των λεγόμενων κλασικών φίλτρων. Ορισμένα φίλτρα, όπως τα αντιαναδίπλωσης και ανακατασκευής, δεν μπορεί να είναι παρά μόνο αναλογικά.

1.3.1 Κατηγορίες Φίλτρων και Βασικές Ιδιότητες

Ας επικεντρωθούμε κατ' αρχήν στα αναλογικά φίλτρα, τα οποία υλοποιούνται με κλασικά ηλεκτρικά κυκλώματα, δηλαδή κυκλώματα που περιέχουν αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία. Είναι γνωστό ότι σε τέτοια συστήματα η σχέση μεταξύ πηγής (εισόδου) και οποιασδήποτε τάσης ή έντασης στο κύκλωμα (εξόδου), στο πεδίο του Μετασχηματισμού Laplace, είναι της μορφής

$$H(s)=\frac{b_0 s^K + b_1 s^{K-1} + \cdots + b_K}{s^L + a_1 s^{L-1} + \cdots + a_L} \qquad (1.1)$$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος είναι μια ρητή συνάρτηση (λόγος πολυωνύμων) του s. Ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή L αποτελεί σημαντική παράμετρο και καλείται *τάξη* του φίλτρου.

Το γεγονός ότι οι συναρτήσεις μεταφοράς στην πράξη μπορούν να έχουν μόνο τη μορφή (1.1) επιβάλλει, όπως είναι ευνόητο, να περιοριστούμε αποκλειστικά στην ανάλυση φίλτρων αυτής της μορφής. Θα πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι ακόμη και για την περιορισμένη αυτή κλάση φίλτρων **δεν είναι δυνατή** η υλοποίηση οιασδήποτε ρητής συνάρτησης του s με κλασικά κυκλώματα.

Ας εξετάσουμε τώρα τα ψηφιακά φίλτρα. Εάν h_n, x_n, y_n είναι η κρουστική απόκριση, η είσοδος και η έξοδος του φίλτρου και $H(z), X(z), Y(z)$ η συνάρτηση μεταφοράς και ο Μετασχηματισμός Z εισόδου και εξόδου, τότε ισχύει

$$y_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l x_{n-l} \qquad (1.2)$$

$$Y(z) = H(z)X(z) \qquad (1.3)$$

Απαραίτητη προϋπόθεση για την υλοποίηση μιας ψηφιακής επεξεργασίας είναι προφανώς **το πεπερασμένο των αριθμητικών πράξεων ανά δείγμα εξόδου**. Υπάρχουν δύο κατηγορίες ψηφιακών φίλτρων που ικανοποιούν το βασικό αυτό περιορισμό. Η πρώτη αναφέρεται στην Εξίσωση (1.2). Συγκεκριμένα, εάν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένη, της μορφής δηλαδή $h_0, \ldots, h_{L-1}$, τότε η (1.2) γράφεται

$$y_n = h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + \cdots + h_{L-1} x_{n-L+1}$$

και, κατά συνέπεια, απαιτεί πεπερασμένο αριθμό πράξεων για τον υπολογισμό του y_n.

Τα εν λόγω φίλτρα καλούνται *πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης* (Finite Impulse Response) και θα τα συμβολίζουμε σαν FIR. Η παράμετρος L καλείται *μήκος* του φίλτρου. Η δεύτερη κατηγορία αναφέρεται στη Σχέση (1.3). Συγκεκριμένα, εάν το $H(z)$ είναι της μορφής

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Kz^{-K}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Lz^{-L}} \qquad (1.4)$$

δηλαδή ρητή συνάρτηση (λόγος πολυωνύμων) του z^{-1}, τότε με αντικατάσταση στην (1.3) και απαλοιφή παρονομαστή καταλήγουμε

$$Y(z)=-a_1z^{-1}Y(z)-\cdots-a_Lz^{-L}Y(z)+b_0X(z)+\cdots+b_Kz^{-K}X(z)$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο Μετασχηματισμό Z στην προηγούμενη εξίσωση διαπιστώνουμε την ακόλουθη σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου στο πεδίο του χρόνου

$$y_n=-a_1y_{n-1}-\cdots-a_Ly_{n-L}+b_0x_n+\cdots+b_Kx_{n-K}$$

που επίσης απαιτεί πεπερασμένο αριθμό πράξεων για τον υπολογισμό του y_n.

Η παράμετρος L, όπως και στην περίπτωση των αναλογικών φίλτρων, καλείται *τάξη* του φίλτρου. Επειδή η κρουστική απόκριση ενός συστήματος της μορφής (1.4) είναι άπειρη, τα φίλτρα αυτά καλούνται *άπειρης κρουστικής απόκρισης* (Infinite Impulse Response) και θα τα συμβολίζουμε σαν IIR. Η ονομασία IIR θα υιοθετηθεί επίσης και για τα αναλογικά συστήματα της Σχέσης (1.1), λόγω ομοιότητας με τα αντίστοιχα ψηφιακά της σχέσης (1.4). Πρέπει, βέβαια, να τονίσουμε ότι τα IIR φίλτρα **δεν είναι οποιαδήποτε γραμμικά συστήματα άπειρης κρουστικής απόκρισης**, αλλά συστήματα των οποίων η κρουστική απόκριση, όταν $K<L$, είναι της μορφής (βλέπε Άσκηση 1.1)

$$\begin{aligned} h_n &= p_1(n)z_1^n+\cdots+p_r(n)z_r^n, n\geq 0 && \text{, διακριτός χρόνος} \\ h(t) &= p_1(t)e^{s_1t}+\cdots+p_r(n)e^{s_rt}, t\geq 0 && \text{, συνεχής χρόνος} \end{aligned} \qquad (1.5)$$

όπου τα $p_i(n), p_i(t)$ είναι πολυώνυμα πεπερασμένης τάξης του n και t και τα z_i, s_i είναι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ και $H(s)$ αντίστοιχα.

1.3.2 Ευστάθεια και Αιτιατότητα

Τα φίλτρα που επιθυμούμε να σχεδιάσουμε, αφού είναι γραμμικά χρονικά σταθερά συστήματα, θα πρέπει να διέπονται από την βασική ιδιότητα της **ευστάθειας**, ώστε το αποτέλεσμα της επεξεργασίας να έχει πρακτικό νόημα. Επίσης πρέπει τα συστήματα αυτά να είναι **αιτιατά**, ώστε για τον υπολογισμό της εξόδου τη χρονική στιγμή n να χρησιμοποιούνται είσοδοι που είναι διαθέσιμες έως τη χρονική αυτή στιγμή. Από το συνδυασμό ευστάθειας και αιτιατότητας απορρέουν συνθήκες που εξασφαλίζουν ευστάθεια στα συστήματα που μας ενδιαφέρουν .

Ευστάθεια Αιτιατών Φίλτρων : Οι περιορισμοί ανά κατηγορία φίλτρου είναι οι ακόλουθοι :

Τα FIR ψηφιακά φίλτρα είναι πάντοτε ευσταθή.

Τα IIR ψηφιακά φίλτρα είναι ευσταθή, όταν οι πόλοι (ρίζες του παρονομαστή που δεν απαλείφονται από ρίζες του αριθμητή) της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Τα IIR αναλογικά φίλτρα είναι ευσταθή, όταν οι πόλοι (ρίζες του παρονομαστή που δεν απαλείφονται από ρίζες του αριθμητή) της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Οι περιορισμοί για ευστάθεια στα IIR φίλτρα θα λαμβάνονται σοβαρά υπόψη στις μεθοδολογίες σχεδιασμού των εν λόγω φίλτρων.

1.4 Ιδανικές Προδιαγραφές Φίλτρων

Στηριζόμενοι στη βασική υπόθεση που παρουσιάσαμε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου θα επιχειρήσουμε το φιλτράρισμα όλων των συχνοτήτων που ανήκουν στον θόρυβο και τη διατήρηση των συχνοτήτων που ανήκουν στην πληροφορία. Θα αναφερθούμε αρχικά στα *ιδανικά φίλτρα*, τα οποία εκτελούν στο ακέραιο την επιθυμητή επεξεργασία, χωρίς ωστόσο να είναι πρακτικά υλοποιήσιμα. Με $D(\cdot)$ θα συμβολίζουμε την απόκριση συχνότητάς τους, δηλαδή την *ιδανική χαρακτηριστική*, σε αντιδιαστολή με το $H(\cdot)$ που θα συμβολίζει τις χαρακτηριστικές των υλοποιήσιμων φίλτρων.

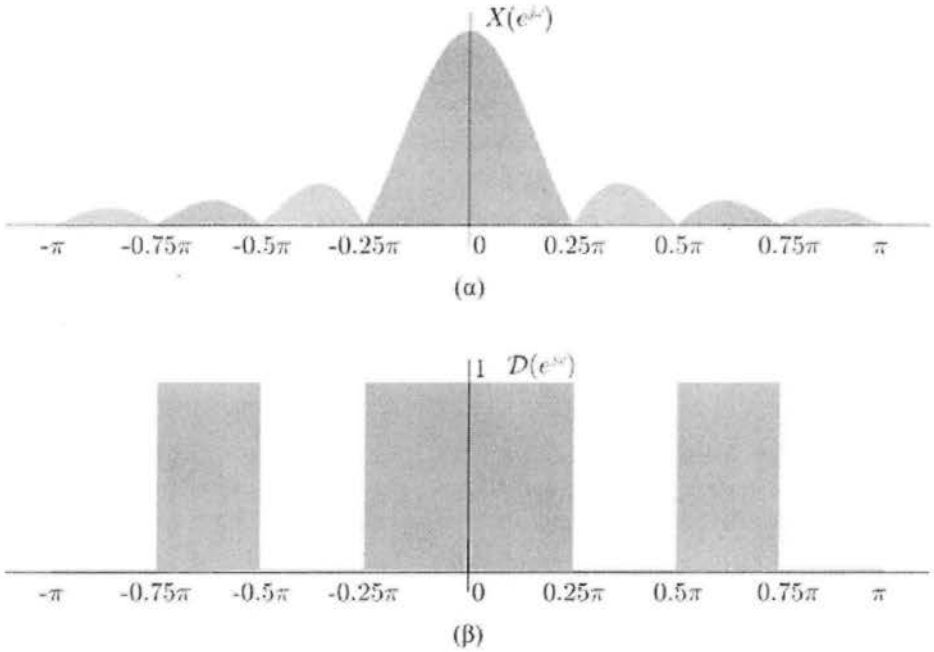
1.4.1 Ιδανικές Χαρακτηριστικές

Αφού τα φίλτρα που μας ενδιαφέρουν είναι γραμμικά χρονικά σταθερά συστήματα, η επίδραση τους στο συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος είναι

$$Y(j\Omega) = D(j\Omega)X(j\Omega) \qquad \text{για αναλογικά,} \qquad (1.6)$$

$$Y(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \qquad \text{για ψηφιακά,} \qquad (1.7)$$

όπου $X(\cdot)$ το συχνοτικό περιεχόμενο του προς επεξεργασία σήματος (είσοδος), $D(\cdot)$ η ιδανική απόκριση συχνότητας του φίλτρου και $Y(\cdot)$ το συχνοτικό περιεχόμενο της εξόδου του φίλτρου. Είναι προφανές ότι επιλέγοντας την ιδανική απόκριση συχνότητας του φίλτρου $D(\cdot)$ **ώστε να είναι 0 στις συχνότητες του θορύβου και 1 στις συχνότητες της πληροφορίας** επιτυγχάνουμε ακριβώς το επιθυμητό αποτέλεσμα, το πλήρες δηλαδή φιλτράρισμα του θορύβου. Τονίζουμε πάλι, ότι το είδος αυτό της επεξεργασίας είναι απόλυτα επιτυχές λόγω της Βασικής Υπόθεσης, της υπόθεσης δηλαδή ότι η πληροφορία και ο θόρυβος δεν περιέχουν κοινές συχνότητες. Επειδή στην πράξη τα σήματα περιέχουν ζώνες συχνοτήτων, θα υποθέσουμε ότι όλες οι διαθέσιμες συχνότητες διαιρούνται σε ένα σύνολο από ζώνες, όπου κάθε μια ανήκει είτε στην πληροφορία είτε στο θόρυβο. Στο Σχήμα 1.1(α) παρουσιάζεται μια τυπική



Σχήμα 1.1 : (α) Παράδειγμα συχνοτικού περιεχομένου συνδυασμού πληροφορίας (κυανό) και θορύβου (γκρι), (β) Ιδανική χαρακτηριστική φίλτρου που φιλτράρει εντελώς το θόρυβο.

περίπτωση συχνοτικού περιεχομένου $X(e^{j\omega})$ ενός ψηφιακού σήματος. Με γκρι εμφανίζονται οι συχνότητες θορύβου, ενώ με κυανό το συχνοτικό περιεχόμενο της πληροφορίας.

Στο Σχήμα 1.1(β) παρουσιάζεται η ιδανική απόκριση συχνότητας $D(e^{j\omega})$ του φίλτρου που απομακρύνει πλήρως το θόρυβο μέσω της Σχέσης (1.7). Παρατηρούμε ότι τα ιδανικά φίλτρα είναι συνήθως παραθυρικής μορφής, δηλαδή συχνοτικά παράθυρα που εφαρμόζονται πάνω στις ζώνες συχνοτήτων της πληροφορίας.

Οι ζώνες συχνοτήτων που επιθυμούμε να διατηρήσουμε καλούνται *ζώνες διάβασης*, ενώ αυτές που επιθυμούμε να εξαλείψουμε *ζώνες αποκοπής* του φίλτρου.
Επομένως στο παράδειγμα του σχήματος ζώνες διάβασης είναι οι $[0, 0.25\pi], [0.5\pi, 0.75\pi]$, ενώ ζώνες αποκοπής οι $[0.25\pi, 0.5\pi]$ και $[0.75\pi, \pi]$.

Εξ όσων προηγήθηκαν, είναι φανερό ότι ο καθορισμός των προδιαγραφών ενός ιδανικού φίλτρου έγκειται στον καθορισμό των ζωνών διάβασης και αποκοπής, όπου στις πρώτες η απόκριση του φίλτρου είναι μοναδιαία, ενώ στις δεύτερες μηδενική. Αυτή είναι η συνηθέστερη περίπτωση φίλτρων που εμφανίζονται στην πράξη (κλασικά φίλτρα).

Πέρα από την απλή απομάκρυνση του θορύβου και την διατήρηση της πληροφορίας, είναι δυνατό να μας ενδιαφέρει επίσης η τροποποίηση της πληροφορίας κατά τρόπο συμβατό προς τη Σχέση (1.6) ή (1.7). Δηλαδή επεξεργασία της πληροφορίας μέσα σε κάθε ζώνη με ένα συγκεκριμένο γραμμικό σύστημα. Η γενική επομένως περίπτωση ιδανικής απόκρισης συχνότητας που θα μας απασχολήσει είναι της ακόλουθης μορφής

$$D(j\Omega) = \begin{cases} D_i(j\Omega) & \Omega_{l_i} \le \Omega \le \Omega_{u_i} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases} \qquad \text{για αναλογικά,}$$

και

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} D_i(e^{j\omega}) & \omega_{l_i} \le \omega \le \omega_{u_i} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases} \qquad \text{για ψηφιακά.}$$

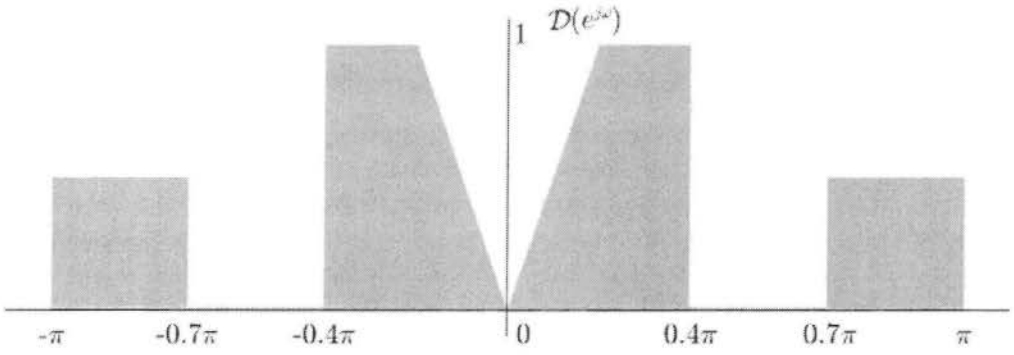
Όπου $[\Omega_{l_i}, \Omega_{u_i}]$ (αντίστοιχα $[\omega_{l_i}, \omega_{u_i}]$) είναι οι ζώνες διάβασης του φίλτρου και $D_i(\cdot)$ η τροποποίηση που επιθυμούμε να εκτελεί το φίλτρο στις συχνότητες της αντίστοιχης ζώνης διάβασης. Η συνηθέστερη περίπτωση είναι, όπως αναφέραμε, τα κλασικά φίλτρα, όπου $D_i(\cdot) = 1$.

Συνοψίζοντας τις ιδανικές προδιαγραφές έχουμε τα ακόλουθα.

Οι ιδανικές προδιαγραφές ενός φίλτρου συνίστανται στον :

- Καθορισμό των ζωνών διάβασης και αποκοπής.
- Καθορισμό των ιδανικών χαρακτηριστικών στις ζώνες διάβασης.

Παράδειγμα 1.1 : Στο Σχήμα 1.2 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ιδανικών προδιαγραφών, όπου τα διαστήματα $[0, 0.4\pi]$ και $[0.7\pi, \pi]$ αποτελούν ζώνες διάβασης, ενώ το $[0.4\pi, 0.7\pi]$ ζώνη αποκοπής.



Σχήμα 1.2 : Παράδειγμα ιδανικής χαρακτηριστικής φίλτρου.

Παρατηρούμε ότι στην πρώτη ζώνη διάβασης η ιδανική απόκριση συχνότητας αντιστοιχεί σε μη κλασικό φίλτρο. Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε ορισμένες γενικές παρατηρήσεις οι οποίες αφορούν στην ιδανική απόκριση συχνότητας $D(\cdot)$ και ισχύουν για κάθε περίπτωση ιδανικών προδιαγραφών. Η ιδανική απόκριση $D(\cdot)$ είναι γνωστή σε όλες τις συχνότητες. Οι ζώνες διάβασης είναι δυνατό να συνδυαστούν έτσι, ώστε να μην είναι επικαλυπτόμενες, ούτε να έχουν κοινό άκρο. Στην περίπτωση αυτή οι ζώνες διάβασης και αποκοπής εναλλάσσονται. Η ιδανική απόκριση $D(\cdot)$ εμφανίζει ασυνέχειες στα άκρα των ζωνών διάβασης, αφού στο ένα άκρο έχει την τιμή του αντίστοιχου $D_i(\cdot)$, ενώ στο άλλο την τιμή 0, λόγω της ζώνης αποκοπής.

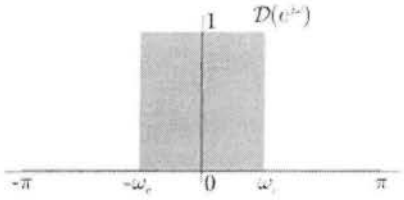
1.4.2 Είδη Κλασικών Ιδανικών Φίλτρων

Όπως τονίσαμε παραπάνω, τα πλέον συνηθισμένα φίλτρα που εμφανίζονται στην πράξη είναι τα κλασικά $0 - 1$ φίλτρα, τα οποία, είτε αποκόπτουν εντελώς, είτε αφήνουν αναλλοίωτη κάθε συχνότητα. Διακρίνουμε τα ακόλουθα είδη κλασικών φίλτρων, τα

οποία, εάν και παρουσιάζουμε για την περίπτωση των ψηφιακών, έχουν τα ακριβή αντίστοιχά τους στην περίπτωση και των αναλογικών φίλτρων.

Κατωπερατά ή Κατωδιαβατά Φίλτρα: Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

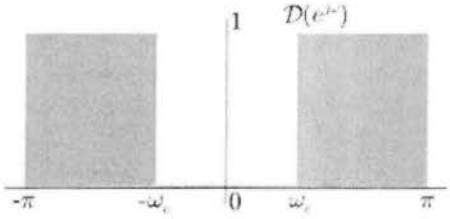
$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \le \omega \le \omega_c \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$



όπου η συχνότητα ω_c καλείται *συχνότητα αποκοπής*.

Ανωπερατά ή Ανωδιαβατά Φίλτρα: Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

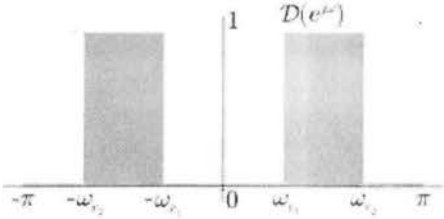
$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_c \le \omega \le \pi \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$



όπου ω_c η συχνότητα αποκοπής.

Ζωνοπερατά ή Ζωνοδιαβατά Φίλτρα: Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

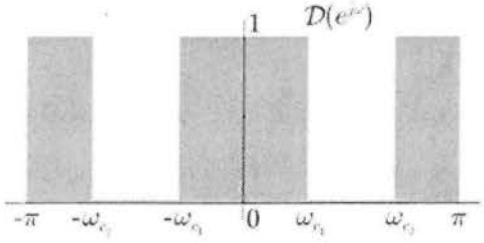
$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_{c_1} \le \omega \le \omega_{c_2} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$



όπου ω_{c_1} , ω_{c_2} οι συχνότητες αποκοπής.

Φίλτρα Αποκοπής Ζώνης: Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

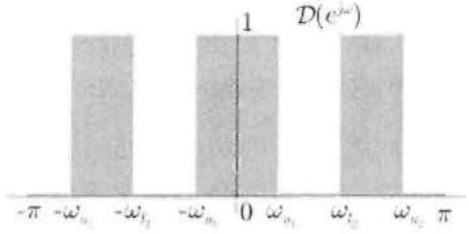
$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_{c_1} \le \omega \le \omega_{c_2} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$



όπου ω_{c_1} , ω_{c_2} οι συχνότητες αποκοπής.

Πολυπερατά ή Πολυδιαβατά Φίλτρα: Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_{l_i} \le \omega \le \omega_{u_i}, i = 1,2,\ldots \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$



όπου ω_{l_i} , ω_{u_i} η κάτω και η άνω συχνότητα αποκοπής της i-οστής ζώνης διάβασης.

Ολοπερατά ή Ολοδιαβατά Φίλτρα: Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

$$D(e^{j\omega}) = 1$$

Συνεπώς τα φίλτρα αυτά δεν απομακρύνουν καμία συχνότητα.
Βασικός τους στόχος είναι η αλλαγή της κατανομής της φάσης ανά συχνότητα.

1.4.3 Ιδανική Κρουστική Απόκριση Φίλτρου

Όταν είναι γνωστή η απόκριση συχνότητας ενός γραμμικού συστήματος, είναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε την κρουστική του απόκριση με τη βοήθεια του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier. Εάν καλέσουμε $d(t)$ ή d_n την ιδανική κρουστική απόκριση, τότε

$$d(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega, \qquad \text{για αναλογικά,}$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega, \qquad \text{για ψηφιακά.}$$

Στην πράξη, βέβαια, ενδιαφερόμαστε κυρίως για επεξεργασία πραγματικών σημάτων.

Προκειμένου το αποτέλεσμα της επεξεργασίας να είναι πραγματικό, είναι φανερό ότι η κρουστική απόκριση του φίλτρου θα πρέπει να είναι επίσης πραγματική. Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζεται με την ακόλουθη συνθήκη (γνωστή από τις ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier).

Πραγματική Κρουστική Απόκριση Φίλτρου :
Η συνθήκη που εξασφαλίζει το πραγματικό της κρουστικής απόκρισης είναι

$$D(-j\Omega) = D^*(j\Omega), \qquad \text{για αναλογικά,}$$
$$D(e^{-j\omega}) = D^*(e^{j\omega}), \qquad \text{για ψηφιακά.}$$

Εάν επιπλέον η ιδανική απόκριση συχνοτήτων $D(\cdot)$ είναι πραγματική συνάρτηση (όπως στη περίπτωση των κλασικών φίλτρων), τότε η προηγούμενη συνθήκη ισοδυναμεί με το να είναι η $D(\cdot)$ άρτια.

Μολονότι η ιδανική κρουστική απόκριση επιτυγχάνει το επιθυμητό αποτέλεσμα, φιλτράρει δηλαδή πλήρως το θόρυβο και μετασχηματίζει τις συχνότητες πληροφορίας σύμφωνα με τις απαιτήσεις μας, εμφανίζει σημαντικά μειονεκτήματα που την καθιστούν πρακτικά ανεφάρμοστη. Συγκεκριμένα, για μεν την αναλογική περίπτωση η ιδανική κρουστική απόκριση δεν αντιστοιχεί σε IIR σύστημα της μορφής (1.1) και επομένως δεν είναι υλοποιήσιμη με ηλεκτρικά κυκλώματα, για δε την ψηφιακή δεν καταλήγει ούτε σε FIR ούτε σε IIR συστήματα της μορφής (1.4) και επομένως **απαιτεί άπειρες πράξεις** ανά δείγμα εξόδου. Τέλος, η ιδανική κρουστική απόκριση, σε καμία από τις παραπάνω περιπτώσεις, **δεν είναι αιτιατή**.
Εφόσον τα φίλτρα που μας ενδιαφέρουν είναι τα FIR και IIR, είναι προφανές ότι με τα συστήματα αυτά **δεν είναι δυνατό να ικανοποιήσουμε ακριβώς τις ιδανικές προδιαγραφές**, είναι όμως εφικτή η προσέγγισή τους. Από τη στιγμή που αναφερόμαστε σε προσεγγίσεις, είναι απαραίτητο να καθοριστούν συνθήκες, τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί η προσέγγιση, προκειμένου να θεωρείται ικανοποιητική. Ο ακριβής προσδιορισμός των κατάλληλων συνθηκών θα αποτελέσει το αντικείμενο των επόμενων εδαφίων.

1.5 Προσέγγιση Ιδανικών Χαρακτηριστικών

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ορισμένα γενικά χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας $H(\cdot)$ ενός FIR ή IIR φίλτρου, τα οποία επιδρούν στον τρόπο με τον οποίο θα υλοποιήσουμε την προσέγγιση των ιδανικών χαρακτηριστικών $D(\cdot)$. Για ευκολία θα περιοριστούμε στα ψηφιακά φίλτρα, ωστόσο όσα θα αναφέρουμε ισχύουν και για την περίπτωση των αναλογικών.

1.5.1 Απόκριση Πλάτους και Συνάρτηση Φάσης

Ας εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση των κλασικών φίλτρων. Είδαμε ότι η ιδανική χαρακτηριστική $D(e^{j\omega})$ είναι μια **πραγματική** συνάρτηση τύπου 0– 1.
Αντίθετα, η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ ενός υλοποιήσιμου φίλτρου είναι εν γένει μια **μιγαδική** συνάρτηση. Η ασυμβατότητα αυτή μεταξύ των δύο συναρτήσεων δημιουργεί πρόβλημα στον τρόπο προσέγγισης της $D(e^{j\omega})$ από την $H(e^{j\omega})$. Το επιθυμητό θα ήταν η $H(e^{j\omega})$ να είναι και αυτή πραγματική έτσι, ώστε η εν λόγω προσέγγιση να ορίζεται εύκολα. Παρατηρούμε ότι, εάν γράψουμε $H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)}\left|H(e^{j\omega})\right|$, τότε, οι συναρτήσεις $\left|H(e^{j\omega})\right|, \phi(\omega)$ είναι πραγματικές. Η πρώτη είναι γνωστή σαν *απόκριση πλάτους*, ενώ η δεύτερη σαν *συνάρτηση φάσης* της απόκρισης συχνότητας. Μάλιστα, αφού πρόκειται για πραγματικό φίλτρο, η απόκριση πλάτους $\left|H(e^{j\omega})\right|$ είναι άρτια συνάρτηση, ενώ η συνάρτηση φάσης $\phi(\omega)$ περιττή.
Μια λογική επιλογή πραγματικής συνάρτησης, με την οποία θα ήταν δυνατή η προσέγγιση της ιδανικής απόκρισης συχνότητας, είναι η συνάρτηση $R(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|$

δηλαδή η απόκριση πλάτους που είναι πραγματική.
Πράγματι, η επιλογή αυτή φιλτράρει ικανοποιητικά το θόρυβο, αφού, όταν για κάποια συχνότητα ω_0 ισχύει $R(e^{j\omega_0}) \approx 0$, τότε συνεπάγεται ότι και $H(e^{j\omega_0}) \approx 0$.
Με την εν λόγω επιλογή μπορούμε να γράψουμε

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} R(e^{j\omega}) \qquad (1.8)$$

όπου, το επαναλαμβάνουμε, η προσέγγιση των ιδανικών χαρακτηριστικών $D(e^{j\omega})$ επιτυγχάνεται μέσω της συνάρτησης $R(e^{j\omega})$.

Την παραπάνω ιδέα μπορούμε να την επεκτείνουμε στην προσέγγιση μιας γενικής ιδανικής χαρακτηριστικής $D(e^{j\omega})$. Θεωρούμε ότι η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$

αναλύεται στη μορφή (1.8), όπου όμως οι συναρτήσεις $R(e^{j\omega})$ και φ(ω) δεν είναι υποχρεωτικά το πλάτος και η φάση της $H(e^{j\omega})$, αλλά εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη μορφή της ιδανικής χαρακτηριστικής $D(e^{j\omega})$ και το είδος του φίλτρου (FIR ή IIR) που επιθυμούμε να εφαρμόσουμε. Για την προσέγγιση της $D(e^{j\omega})$, όπως και προηγουμένως, χρησιμοποιείται η $R(e^{j\omega})$. Επομένως η συνάρτηση αυτή επιλέγεται πάντοτε να είναι του ίδιου τύπου και να διαθέτει τις ίδιες συμμετρίες με την ιδανική $D(e^{j\omega})$.
Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε έως τώρα πρέπει να σημειώσουμε ότι, ενώ ο αρχικός μας στόχος ήταν η προσέγγιση $H(e^{j\omega}) \approx D(e^{j\omega})$, αυτό που είναι τελικά εφικτό είναι η προσέγγιση $R(e^{j\omega}) \approx D(e^{j\omega})$. Παρατηρούμε επίσης ότι το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται αποκλειστικά στη συνάρτηση $R(e^{j\omega})$, ενώ η $\phi(\omega)$ αφήνεται, κατά κάποια έννοια, "στην τύχη". Υπάρχουν συγκεκριμένοι πρακτικοί λόγοι που επιτρέπουν αυτή την αδιαφορία για τη συνάρτηση $\phi(\omega)$, τους οποίους αναπτύσσουμε στη συνέχεια.

1.5.2 Γραμμική Φάση και Καθυστέρηση Ομάδας

Μολονότι χρησιμοποιείται το $R(e^{j\omega})$ για την προσέγγιση των ιδανικών χαρακτηριστικών, η τελική επεξεργασία γίνεται με το φίλτρο $H(e^{j\omega})$, με τις δύο συναρτήσεις να συνδέονται μέσω της (1.8). Εάν εφαρμόσουμε το φίλτρο $H(e^{j\omega})$ σε ένα σήμα με συχνοτικό περιεχόμενο $X(e^{j\omega})$, τότε η έξοδος του φίλτρου γράφεται

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)}Y^{\in}(e^{j\omega}) \qquad (1.9)$$

όπου $Y^{\in}(e^{j\omega}) = R(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$ είναι η επιθυμητή έξοδος (αφού $R(e^{j\omega}) \approx D(e^{j\omega})$).

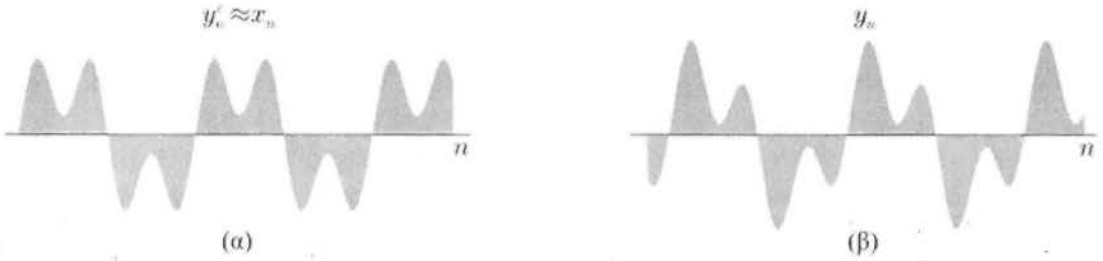
Το ερώτημα, φυσικά, που τίθεται είναι κατά πόσο το γινόμενο $Y(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)}Y^{\in}(e^{j\omega})$ μεταβάλλει σημαντικά το επιθυμητό συχνοτικό περιεχόμενο $Y^{\in}(e^{j\omega})$.
Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $\left|Y(e^{j\omega})\right| = \left|Y^{\in}(e^{j\omega})\right|$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι **η επιθυμητή και η ουσιαστική έξοδος περιέχουν τις ίδιες συχνότητες με την ίδια ακριβώς ενέργεια**. Η διαφορά, επομένως, στο συχνοτικό περιεχόμενο των δύο σημάτων έγκειται καθαρά στη διαφορά φάσης κάθε συχνότητας, την οποία εισάγει το φίλτρο επεξεργασίας. Από την (1.9) άμεσα διαπιστώνουμε ότι

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \phi(\omega) + \angle Y^{\in}(e^{j\omega})$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ επιθυμητής και ουσιαστικής εξόδου, σε πολλές εφαρμογές, κυρίως επεξεργασίας ήχου[1], δεν θεωρείται σημαντική, με αποτέλεσμα η επεξεργασία με το φίλτρο $H(e^{j\omega})$ να κρίνεται ικανοποιητική. Υπάρχουν βέβαια ενδιαφέρουσες εφαρμογές, στις οποίες η μεταβολή της φάσης είναι ανεπιθύμητη. Οι εφαρμογές αυτές δίνουν συνήθως ιδιαίτερη σημασία όχι τόσο στο συχνοτικό περιεχόμενο, αλλά **στη μορφή του σήματος**. Δυστυχώς η μορφή ενός σήματος[2] παρουσιάζει **εξαιρετικά μεγάλη ευαισθησία στις μεταβολές φάσης**. Συγκεκριμένα, το σήμα $y(t)$ με συχνοτικό περιεχόμενο $Y(e^{j\omega})$, μπορεί να έχει πολύ διαφορετική μορφή από το επιθυμητό σήμα $y^{\epsilon}(t)$ με συχνοτικό περιεχόμενο $Y^{\epsilon}(e^{j\omega})$, λόγω της διαφοράς φάσης που δημιουργεί ο όρος $e^{j\phi(\omega)}$ σε κάθε συχνότητα.

Ας διαπιστώσουμε το γεγονός αυτό με δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.2 : Η διαφορά που προκύπτει στη μορφή ενός σήματος λόγω της συνάρτησης φάσης $\phi(\omega)$ μπορεί να είναι σημαντική ακόμη και σε πολύ απλά σήματα. Στο Σχήμα 1.3(α) παρουσιάζεται το $x_n = \sin(2\pi 0.05n) + 0.7\sin(2\pi 0.15n)$. Εάν επεξεργαστούμε το x_n με ένα κλασικό κατωπερατό IIR φίλτρο Butterworth, τάξης 21 και συχνότητας αποκοπής 0.35π,



Σχήμα 1.3 : Παράδειγμα επεξεργασίας όπου μεταβάλλονται οι φάσεις ανά συχνότητα: (α) Επιθυμητή έξοδος και (β) Ουσιαστική έξοδος.

παρατηρούμε ότι και οι δύο συχνότητες του σήματος ανήκουν στη ζώνη διάβασης.

---

[1] Θεωρείται ότι το σύστημα ακοής παρουσιάζει ευαισθησία κυρίως στην ενέργεια συχνοτήτων και όχι τόσο στις διαφορές φάσης τους.

[2] Ακριβέστερα, το σύστημα όρασης, το οποίο είναι υπεύθυνο για το την αντίληψη της μορφής ενός σήματος, εμφανίζει ευαισθησία στη φάση.

Επομένως, το επιθυμητό σήμα είναι το ίδιο με το αρχικό, δηλαδή $y_n^{\epsilon} \approx x_n$. Η ουσιαστική έξοδος $y_n = \sin(2\pi 0.05n + \phi_1) + 0.7\sin(2\pi 0.15n + \phi_2)$ του φίλτρου παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.3(β) και, όπως παρατηρούμε, είναι πολύ διαφορετική της επιθυμητής y_n^{ϵ} . Αυτό οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στο γεγονός ότι το φίλτρο που χρησιμοποιήσαμε πρόσθεσε τις δύο φάσεις ϕ_1 , ϕ_2 στις δύο συχνότητες. Είναι σημαντικό να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι, εάν ακούσουμε τα δύο σήματα x_n , y_n , είναι αδύνατο να διακρίνουμε οποιαδήποτε διαφορά.

Παράδειγμα 1.3 : Στο δεύτερο παράδειγμά μας, αντί για μονοδιάστατο σήμα θα χρησιμοποιήσουμε σήμα δύο διαστάσεων, δηλαδή μια εικόνα. Ο λόγος είναι ότι στην περίπτωση των εικόνων γίνεται πολύ ευκολότερα εμφανής η εξάρτηση του συστήματος όρασης από τη φάση.

Σε μια εικόνα θα εφαρμόσουμε δισδιάστατο ΔΜF προκειμένου να υπολογίσουμε το συχνοτικό περιεχόμενό της. Στην περίπτωση των εικόνων το πεδίο συχνότητας είναι και αυτό δισδιάστατο και ο ΔΜF δειγματοληπτεί τον μετασχηματισμό Fourier με κανονικό τρόπο και στις δύο κατευθύνσεις. Κάθε σημείο δειγματοληψίας, όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση, είναι ένας μιγαδικός αριθμός ο οποίος έχει πλάτος και φάση. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η εξάρτηση του συστήματος όρασης είναι πολύ μεγαλύτερη από τις φάσεις των μιγαδικών αυτών αριθμών και πολύ λιγότερο από τα αντίστοιχα πλάτη. Για το σκοπό αυτό στη συνέχεια δημιουργούμε δύο εικόνες. Για την πρώτη εικόνα, μετατρέπουμε όλα τα πλάτη του ΔΜF σε 1 και διατηρούμε αναλλοίωτες τις φάσεις. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών που προκύπτουν εφαρμόζουμε δισδιάστατο ΑΔΜF ο οποίος μας δημιουργεί την πρώτη εικόνα. Για τη δεύτερη εικόνα, θέτουμε στο ΔΜF όλες τις φάσεις ίσες προς 0, διατηρώντας στην περίπτωση αυτή αναλλοίωτα τα πλάτη.

(α) (β) (γ)

Σχήμα 1.4 : (α) Αρχική εικόνα. (β) Εικόνα που προκύπτει χρησιμοποιώντας αποκλειστικά πληροφορία φάσης. (γ) Εικόνα που προκύπτει χρησιμοποιώντας αποκλειστικά πληροφορία πλάτους.

Εφαρμόζουμε και πάλι δυσδιάστατο ΑΔΜF για τη δημιουργία της δεύτερης εικόνας.
Τα αποτελέσματα των μετασχηματισμών που περιγράψαμε παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.4.
Στο (α) εμφανίζεται η αρχική εικόνα, στο (β) η εικόνα που προκύπτει εάν διατηρήσουμε μόνο τη φάση και στο (γ) εάν διατηρήσουμε μόνο το πλάτος. Είναι εμφανές ότι βασισμένοι στην πληροφορίας της φάσης ήμαστε σε θέση να διακρίνουμε αρκετές λεπτομέρειες τις αρχικής εικόνας, κάτι που είναι αδύνατο με αποκλειστική χρήση της πληροφορίας του πλάτους.
Ας εξετάσουμε τώρα κάτω από ποιες συνθήκες είναι δυνατό να διατηρηθεί η μορφή του σήματος αναλλοίωτη. Έστω τα δύο σήματα $y_n^{\in}$, y_n με συχνοτικά περιεχόμενα $Y^{\in}(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$ που συνδέονται μέσω της Σχέσης (1.9). Εφαρμόζοντας Αντίστροφο Μετασχηματισμό Fourier μπορούμε να γράψουμε

$$y_n^{\in} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y^{\in}(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|Y^{\in}(e^{j\omega})\right|e^{j(n\omega+\angle Y^{\in}(e^{j\omega}))}d\omega \qquad (1.10)$$

Ο ίδιος μετασχηματισμός όταν χρησιμοποιηθεί στη περίπτωση της $Y(e^{j\omega})$, με χρήση της Σχέσης (1.9), αποδίδει

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|Y^{\in}(e^{j\omega})\right|e^{j(n\omega+\angle Y^{\in}(e^{j\omega}))}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|Y^{\in}(e^{j\omega})\right|e^{j(\omega(n+\frac{\phi(\omega)}{\omega})+\angle Y^{\in}(e^{j\omega}))}d\omega \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Συγκρίνοντας (1.10) και (1.11) διαπιστώνουμε ότι εάν

$$\frac{\varphi(\omega)}{\omega} = -\mathrm{K} \qquad \text{Ή } \varphi(\omega) = -\mathrm{K}\omega$$

όπου Κ σταθερά, εάν έχουμε δηλαδή **γραμμική φάση**, τότε

$$Yn = Y^{\in}n - K$$

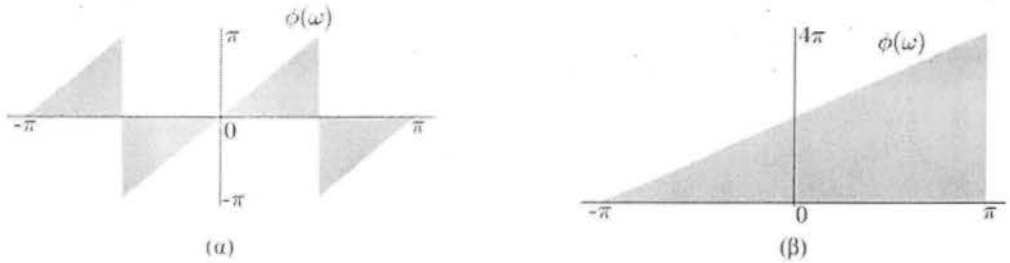
γεγονός που συνεπάγεται ότι η έξοδος y_n είναι μια **καθυστερημένη**, κατά Κ χρονικές στιγμές, έκδοση της επιθυμητής $y_n^{\in}$ και, επομένως, **η μορφή της ουσιαστικής εξόδουείναι ίδια με αυτή της επιθυμητής**. Η ακόλουθη πρόταση αναφέρεται με μεγαλύτερη ακρίβεια στο θέμα αυτό. Αναλλοίωτο της Μορφής της Επιθυμητής Εξόδου :

Η συνθήκη, η οποία εξασφαλίζει το αναλλοίωτο της μορφής της επιθυμητής εξόδου σε ένα φίλτρο με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} R(e^{j\omega})$ είναι ***η φάση*** φ(ω) ***στις ζώνες διάβασης να είναι γραμμική***, δηλαδή $\varphi(\omega) = -K\omega$

Η απαίτηση γραμμικής φάση μόνο στις ζώνες διάβασης και όχι σε κάθε συχνότητα οφείλεται στο ότι, όταν μια συχνότητα δεν έχει ενέργεια (ανήκει δηλαδή στη ζώνη αποκοπής), τότε δεν μας απασχολεί και η φάση της. Από τις δύο κατηγορίες φίλτρων που αναφέραμε, τα FIR μπορούν να σχεδιαστούν ώστε να έχουν γραμμική φάση, σε αντίθεση με τα IIR, στα οποία η ιδιότητα αυτή είναι δυνατή μόνο προσεγγιστικά.
Για τις περιπτώσεις φίλτρων μη γραμμικής φάσης, είναι συχνά επιθυμητό να γνωρίζουμε το ποσοστό καθυστέρησης, το οποίο υφίσταται κάθε συχνότητα. Η συνάρτηση με την οποία ποσοτικοποιείται η καθυστέρηση ανά συχνότητα καλείται *συνάρτηση καθυστέρησης ομάδας* και ορίζεται σαν

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \qquad (1.12)$$

Παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση ενός φίλτρου γραμμικής φάσης, η καθυστέρηση ομάδας είναι ίση προς την κλήση K της συνάρτησης φάσης και, επομένως, ίση προς την κοινή καθυστέρηση που εισάγει το φίλτρο σε όλες τις συχνότητες.
Στη μη γραμμική περίπτωση, η καθυστέρηση ομάδας αντιστοιχεί στην τοπική κλήση της συνάρτησης φάσης και δηλώνει το ποσοστό καθυστέρησης που υφίσταται η αντίστοιχη συχνότητα, στην οποία υπολογίζεται η παράγωγος. Ένα λεπτό σημείο που χρήζει ιδιαίτερης προσοχής είναι ότι στη Σχέση (1.12) η συνάρτηση φ(ω) πρέπει να είναι **η μη αναδιπλωμένη μορφή** της συνάρτησης φάσης.

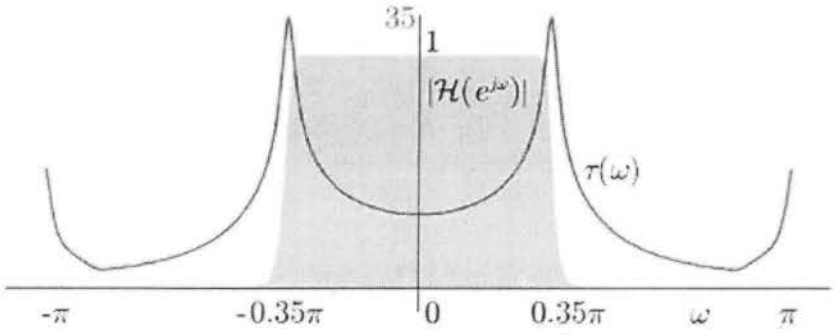


Σχήμα 1.5 : Παράδειγμα (α) αναδιπλωμένης και (β) μη αναδιπλωμένης μορφής συνάρτησης φάσης.

Η μορφή, δηλαδή, στην οποία δεν εμφανίζονται ασυνέχειες μεγέθους 2π, λόγω αλλαγής προσήμου της φ(ω) και του γεγονότος ότι, από σύμβαση, το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού παίρνει τιμές αποκλειστικά στο διάστημα (−π, π]. Για να γίνει σαφές τι εννοούμε, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση H(e j ω) = cos 2ω + j sin 2ω = ej 2ω . Τότε, στο

μεν Σχήμα 1.5(α) παρουσιάζεται η αναδιπλωμένη μορφή της φ(ω), η συνάρτηση δηλαδή που προκύπτει εάν υπολογίσουμε το όρισμα (στο διάστημα (−π, π]) του μιγαδικού αριθμού cos 2ω + j sin 2ω για κάθε ω, ενώ στο Σχήμα 1.5(β) παρουσιάζεται η μη αναδιπλωμένη μορφή της, όπου έχουν διορθωθεί οι ασυνέχειες μεγέθους 2π. Παρατηρούμε ότι στη δεύτερη περίπτωση η συνάρτηση φ(ω) δεν παίρνει πλέον τιμές στο διάστημα (−π, π].

Παράδειγμα 1.4 : Στο Σχήμα 1.6 παρουσιάζεται το μέτρο (γραμμοσκιασμένο) και η συνάρτηση καθυστέρησης ομάδας (κυανό) ενός IIR φίλτρου Butterworth τάξης 21 με συχνότητα αποκοπής 0.35π, το οποίο αποτελεί παράδειγμα φίλτρου με μη γραμμική φάση. Παρατηρούμε ότι στη ζώνη διάβασης, στις χαμηλές συχνότητες έως 0.2π, η καθυστέρηση ομάδας είναι περίπου σταθερή, δηλαδή το φίλτρο είναι σχεδόν γραμμικής φάσης. Όσο πλησιάζουμε όμως στη συχνότητα αποκοπής 0.35π, η καθυστέρηση αρχίζει να μεταβάλλεται αισθητά φθάνοντας την τιμή 35 (δείγματα). Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχει έντονη μεταβλητότητα στην καθυστέρηση ομάδας και στις υψηλές συχνότητες. Το γεγονός αυτό όμως δεν είναι ιδιαίτερα ενοχλητικό, επειδή οι εν λόγω συχνότητες ανήκουν στη ζώνη αποκοπής και, επομένως, έχουν πολύ μικρή ενέργεια, όπως άλλωστε διαπιστώνουμε από την απόκριση πλάτους.



Σχήμα 1.6 : Μέτρο (γραμμοσκιασμένο) και καθυστέρηση ομάδας (κυανό) IIR φίλτρου Butterworth τάξης 21.

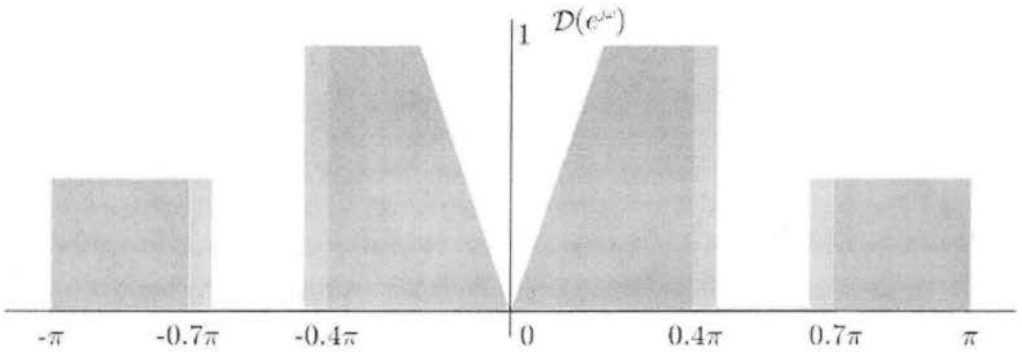
1.5.3 Ζώνες Μετάβασης

Το επόμενο χαρακτηριστικό που θα μας απασχολήσει είναι οι ασυνέχειες που εμφανίζονται στην ιδανική απόκριση συχνοτήτων. Με τα FIR και IIR φίλτρα και τις αντίστοιχες συναρτήσεις $R(e^{j\omega})$ που προκύπτουν από τη Σχέση (1.8), δεν είναι δυνατό, στο πεδίο της συχνότητας, να επιτύχουμε μεταβάσεις της μορφής αυτής, αφού οι αποκρίσεις συχνοτήτων των φίλτρων και συνεπώς και η συνάρτηση $R(e^{j\omega})$, είναι παραγωγίσιμες, άρα ομαλές, συνεχείς συναρτήσεις. Προκειμένου να υπάρξει κάποια

μορφή ελέγχου στον τρόπο με τον οποίο τα φίλτρα υλοποιούν τις απότομες αλλαγές των ιδανικών χαρακτηριστικών, προτείνεται η χρήση μιας τρίτης κατηγορίας ζωνών. Οι ζώνες αυτές καλούνται *ζώνες μετάβασης* και μεσολαβούν σε όλα τα σημεία, στα οποία εμφανίζεται ασυνέχεια στην ιδανική απόκριση.

Οι ζώνες μετάβασης αποτελούν μέρος των προδιαγραφών, ορίζονται επομένως από τον σχεδιαστή. Ωστόσο, στις ζώνες αυτές **δεν καθορίζεται εκ των προτέρων η μορφή της ιδανικής απόκρισης συχνότητας**, με στόχο το φίλτρο να έχει απόλυτη ελευθερία στον τρόπο με τον οποίο θα επιτελέσει τη απαιτούμενη μετάβαση. Ο έλεγχος που έχει ο σχεδιαστής πάνω στις ζώνες αυτές είναι μόνο στο εύρος και στην ακριβή τους θέση.

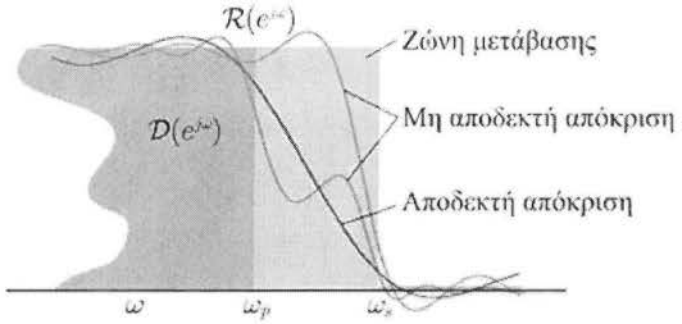
Παράδειγμα 1.5 : Στο Σχήμα 1.7 παρουσιάζουμε την τροποποίηση της ιδανικής απόκρισης συχνότητας του Παραδείγματος 1.1 του Σχήματος 1.2 με τη χρήση ζωνών μετάβασης.
Στο εν λόγω παράδειγμα έχουμε διατηρήσει αμετάβλητες τις ζώνες διάβασης, ενώ η ζώνη αποκοπής έχει τροποποιηθεί στην [0.45π, 0.65π] και έχουν εισαχθεί δύο ζώνες μετάβασης η [0.4π, 0.45π] και η [0.65π, 0.7π], οι οποίες σημειώνονται με γκρι σκίαση. Με κυανή σκίαση εμφανίζονται εκ νέου οι ιδανικές χαρακτηριστικές, οι οποίες, όπως παρατηρούμε, δεν καθορίζονται στις ζώνες μετάβασης.



Σχήμα 1.7 : Παράδειγμα ζωνών μετάβασης (γκρι), για προδιαγραφές φίλτρου. [0.65π, 0.7π], οι οποίες σημειώνονται με γκρι σκίαση. Με κυανή σκίαση εμφανίζονται εκ νέου οι ιδανικές χαρακτηριστικές, οι οποίες, όπως παρατηρούμε, δεν καθορίζονται στις ζώνες μετάβασης.

Μολονότι δεν προσδιορίζουμε επακριβώς την ιδανική μορφή του φίλτρου στις ζώνες μετάβασης δεν θεωρείται επιτρεπτή οποιαδήποτε μορφή της τελικής απόκρισης. Εν γένει κρίνεται πρακτικά επιθυμητό, η απόκριση του φίλτρου να εμφανίζει **μονοτονία** κατά τη μετάβαση από τη μια τιμή στην άλλη και να αποφεύγονται "εξογκώματα" στη ζώνη μετάβασης όπως αυτά του Σχήματος 1.8 που εμφανίζονται στην περίπτωση των δύο μη αποδεκτών αποκρίσεων. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν είναι ασύνηθες, ειδικά στην περίπτωση σχεδίασης FIR φίλτρων, να παρατηρούνται μη πρακτικά αποδεκτές συμπεριφορές της μορφής αυτής. Ευτυχώς η θεραπεία του προβλήματος είναι πολύ

εύκολη αφού μια απλή ελαφρά μετακίνηση των άκρων της ζώνης μετάβασης είναι συνήθως αρκετή ώστε να εξαλείφθεί εντελώς το ανεπιθύμητο αυτό φαινόμενο.



Σχήμα 1.8 : Αποδεκτή και μη αποδεκτή απόκριση φίλτρου στη ζώνη μετάβασης μια απλή ελαφρά μετακίνηση των άκρων της ζώνης μετάβασης είναι συνήθως αρκετή ώστε να εξαλειφθεί εντελώς το ανεπιθύμητο αυτό φαινόμενο.

1.5.4 Ακρίβεια Προσέγγισης

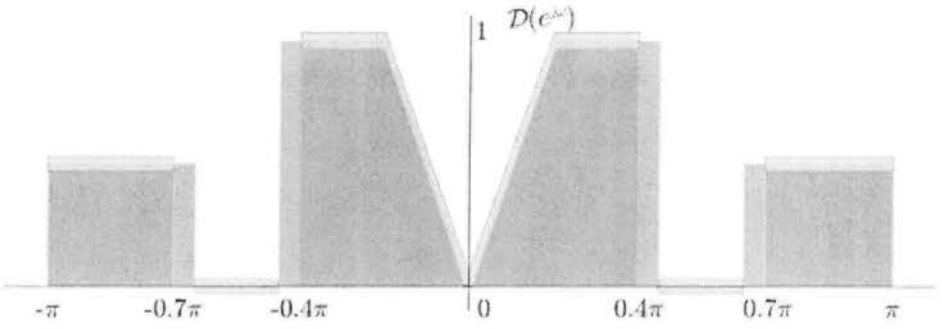
Με τη συνάρτηση $R(e^{j\omega})$ **δεν είναι δυνατό να επιτύχουμε ακριβώς τις τιμές που καθορίζονται στην ιδανική απόκριση συχνότητας στις ζώνες διάβασης και αποκοπής**. Για παράδειγμα, σε ένα κλασικό φίλτρο η συνάρτηση $R(e^{j\omega})$ δεν έχει τη δυνατότητα να είναι ακριβώς 1 στις ζώνες διάβασης και ακριβώς 0 στις ζώνες αποκοπής . Μπορεί, ωστόσο, η συνάρτηση αυτή να προσεγγίζει το 1 ή το 0. Επιβάλλεται επομένως να προσδιορίσουμε πότε η προσέγγιση θα θεωρείται ικανοποιητική.
Ο συνηθέστερος τρόπος μέτρησης της ποιότητας προσέγγισης είναι μέσω του μέγιστου απόλυτου σφάλματος μεταξύ ιδανικής χαρακτηριστικής $D(e^{j\omega})$ και συνάρτησης $R(e^{j\omega})$, ανά ζώνη ενδιαφέροντος (διάβασης ή αποκοπής). Η συνάρτηση $R(e^{j\omega})$ θα θεωρείται αποδεκτή προσέγγιση, εφόσον

$$|\,\mathrm{D}(\mathrm{e}^{j\omega}) - R(\mathrm{e}^{j\omega})| \le \delta_i \text{ για } \omega_{li} \le \omega \le \omega_{u_i}\,, \qquad (1.13)$$

όπου $[\omega_{li}, \omega_{u_i}]$οι ζώνες διάβασης ή αποκοπής και δi θετικές ποσότητες που προσδιορίζουν το μέγιστο αποδεκτό σφάλμα ανά ζώνη ενδιαφέροντος. Η Σχέση (1.13) θα πρέπει προφανώς να ισχύει **για όλες τις ζώνες διάβασης και αποκοπής**. Οι ποσότητες δi μπορούν τέλος να είναι διαφορετικές ανά ζώνη ενδιαφέροντος, υποδηλώνοντας τη διαφορετική σημασία που αποδίδει ο σχεδιαστής στο πρόβλημα προσέγγισης της ιδανικής χαρακτηριστικής, ανά ζώνη ενδιαφέροντος.

Παράδειγμα 1.6 : Το Σχήμα 1.9 περιλαμβάνει το πλήρες σύνολο των πρακτικών

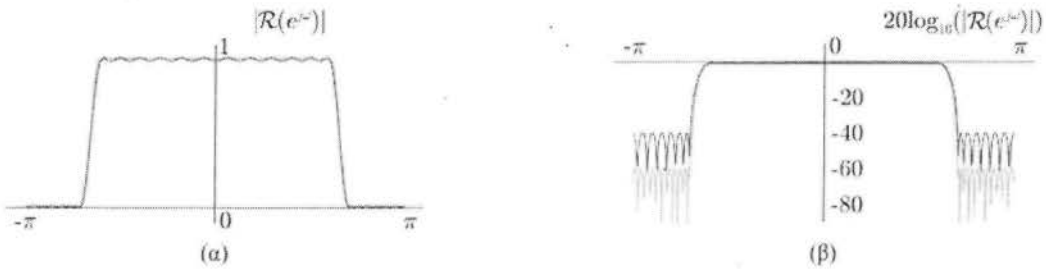
προδιαγραφών του παραδείγματος των Σχημάτων 1.2 και 1.7. Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται επίσης τα επιτρεπτά όρια, στα οποία είναι δυνατό να κινηθεί η απόκριση συχνότητας του φίλτρου, ώστε να θεωρηθεί



Σχήμα 1.9 : Παράδειγμα πρακτικών προδιαγραφών φίλτρου.

αποδεκτή η προσέγγιση των ιδανικών χαρακτηριστικών. Στις ζώνες μετάβασης δεν υπάρχει φυσικά λόγος να ορισθεί κάποιο μέγιστο αποδεκτό σφάλμα, αφού δεν υπάρχει ιδανική απόκριση.

Ο τρόπος με τον οποίο καθορίζονται τα σφάλματα δi είναι, είτε σε απόλυτες τιμές π.χ. δ = 0.001, είτε ισοδύναμα σε dB, δηλαδή δdB = −20 log10 (δ),
οπότε η προηγούμενη τιμή αντιστοιχεί σε δdB = 60 dB. Η λογαριθμική κλίμακα έχει ορισμένα χαρακτηριστικά πλεονεκτήματα σε σχέση με την απόλυτη τιμή. Π.χ. εάν απεικονίσουμε γραφικά το πλάτος $|R(e^{j\omega})|$ σε απόλυτες τιμές, είναι αδύνατο να διακρίνουμε μέγιστα σφάλματα της τάξης του 0.01 από αντίστοιχα της τάξης του 0.001, αφού και οι δύο περιπτώσεις συμπίπτουν (στο αντίστοιχο σχήμα) με την τιμή μηδέν. Εάν όμως χρησιμοποιήσουμε λογαριθμική κλίμακα, δηλαδή 20 log10 ($|R(e^{j\omega})|$), τότε, η πρώτη περίπτωση είναι ισοδύναμη με -40, ενώ η δεύτερη με -60, με αποτέλεσμα η διαφορά να γίνεται εμφανής. Στο Σχήμα 1.10 παρουσιάζουμε δύο παραδείγματα FIR κατωπερατών



Σχήμα 1.10 : Απεικόνιση απόκρισης συχνοτήτων FIR φίλτρων σε (α) κανονική και (β) λογαριθμική κλίμακα.

φίλτρων με ζώνη διάβασης [0, 0.6π], ζώνη αποκοπής [0.7π, π], από τα οποία το πρώτο φίλτρο έχει μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα δ = 0.01, ενώ το δεύτερο δ = 0.001 και στις δύο ζώνες.

Στο Σχήμα 1.10(α) απεικονίζεται η $|R(e^{j\omega})|$ σε κανονική κλίμακα, ενώ στο (β) σε λογαριθμική. Στο (α) είναι αδύνατο να διακρίνουμε διαφορά στη συμπεριφορά των δύο φίλτρων, ενώ στο (β) η διαφορά είναι εμφανής.

1.5.5 Συνάρτηση Βάρους

Ας καλέσουμε T την ένωση όλων των ζωνών ενδιαφέροντος, δηλαδή την ένωση των ζωνών διάβασης και αποκοπής. Αντί του καθορισμού των μέγιστων αποδεκτών σφαλμάτων προσέγγισης ανά ζώνη ενδιαφέροντος, είναι δυνατό να ορίσουμε εναλλακτικά την ποιότητα μιας προσέγγισης μέσω της *συνάρτησης βάρους*. Εάν συμβολίσουμε τη συνάρτηση βάρους με W(ω), τότε αυτή έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

Η W(ω) ορίζεται για όλες τις συχνότητες που ανήκουν σε ζώνη διάβασης ή σε ζώνη αποκοπής, δηλαδή σε όλο το σύνολο T .

Η W(ω) ικανοποιεί W(ω) ≥ 1 και η τιμή της είναι μεγαλύτερη στα σημεία, όπου επιθυμούμε το σφάλμα προσέγγισης να είναι μικρότερο.

Η συνάρτηση βάρους πρέπει να συνοδεύεται από μια ποσότητα $\delta_{\max}$ που αποτελεί το μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα προσέγγισης.

Η προσέγγιση χαρακτηρίζεται σαν αποδεκτή, εφόσον ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα στις ζώνες διάβασης και αποκοπής, δηλαδή στο σύνολο T

$$W(\omega)\,|\,\mathrm{D}(\mathrm{e}^{j\omega}) - R(\mathrm{e}^{j\omega})\,| \le \delta_{\max}, \forall \omega \in \mathrm{T} \qquad (1.14)$$

Εάν ισχύει η (1.14), τότε όντως, σημεία, στα οποία η συνάρτηση βάρους είναι μεγαλύτερη, εμφανίζουν μικρότερο απόλυτο σφάλμα, αφού

$$|\mathrm{D}(\mathrm{e}^{j\omega}) - R(\mathrm{e}^{j\omega})| \leq \frac{\delta_{\max}}{W(\omega)}$$

Μάλιστα, απαιτώντας σε κάποιο σημείο η συνάρτηση βάρους να είναι άπειρη, εξασφαλίζουμε ότι σε αυτό το σημείο το απόλυτο σφάλμα είναι μηδέν. Η (1.14) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα με τον ακόλουθο τρόπο που θα χρησιμοποιηθεί πολύ συχνά σε επόμενα

$$\max_{\omega \in \mathrm{T}} W(\omega)\,|\mathrm{D}(\mathrm{e}^{j\omega}) - R(\mathrm{e}^{j\omega})| \leq \delta_{\max} \qquad (1.15)$$

Είναι εύκολο να μετατρέψουμε τις προδιαγραφές του προηγουμένου εδαφίου σε προδιαγραφές που περιλαμβάνουν συνάρτηση βάρους. Εάν ορίσουμε δmax = maxi δi , τότε, η συνάρτηση βάρους W(ω) ορίζεται στις ζώνες διάβασης και αποκοπής και είναι σταθερή σε κάθε ζώνη με

$$W(\omega) = \frac{\delta_{\max}}{\delta_i} \qquad \text{για } \omega_{l_i} \leq \omega \leq \omega_{u_i}.$$

Διαπιστώνουμε επίσης ότι, εάν ισχύει η ανισότητα (1.14), τότε αυτόματα ισχύει και η (1.13).

Η συνάρτηση βάρους μπορεί να είναι μια γενική συνάρτηση και όχι αναγκαστικά τμηματικά σταθερή, όπως στην περίπτωση που καθορίζεται το μέγιστο σφάλμα ανά ζώνη ενδιαφέροντος. Υπάρχει επομένως μεγαλύτερη ευελιξία στον έλεγχο του σφάλματος ανά συχνότητα. Επιπλέον, σε ορισμένες μεθόδους σχεδιασμού είναι ευκολότερο να ελέγξουμε τη Σχέση (1.14) από ότι την (1.13). Μπορούμε τώρα να συνοψίσουμε τις πρακτικές προδιαγραφές.

Πρακτικές Προδιαγραφές Φίλτρων : Οι προδιαγραφές που είναι απαραίτητο να ορισθούν για τον σχεδιασμό ενός φίλτρου είναι οι ακόλουθες

- Καθορισμός των ζωνών διάβασης, αποκοπής και μετάβασης.
- Καθορισμός ιδανικών χαρακτηριστικών στις ζώνες διάβασης.
- Καθορισμός συνάρτησης βάρους και μέγιστου αποδεκτού σφάλματος προσέγγισης στις ζώνες διάβασης και αποκοπής.

Προκειμένου ο σχεδιαστής να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις τις οποίες θέτει μέσω των προδιαγραφών, έχει στη διάθεσή του παραμέτρους, με τις οποίες είναι δυνατό

να"πειραματιστεί". Οι παράμετροι αυτές, για μεν τα IIR φίλτρα, είναι οι συντελεστές των πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς καθώς και η τάξη του φίλτρου, για δε τα FIR, οι όροι της κρουστικής απόκρισης και το μήκος του φίλτρου.

1.6 Σύγκριση FIR και IIR Φίλτρων

Μολονότι οι δύο κατηγορίες φίλτρων θα αναπτυχθούν διεξοδικά στα επόμενα κεφάλαια, στο σημείο αυτό θεωρείται σκόπιμο να αναφερθούν ορισμένα σημαντικά χαρακτηριστικά τους και να γίνει μια πρώτη σύγκριση, ως προς τις δυνατότητές τους. Ως γνωστόν τα υλοποιήσιμα αναλογικά φίλτρα ανήκουν στην κατηγορία των IIR φίλτρων.

Στον αναλογικό κόσμο δεν υπάρχει επομένως πρόβλημα επιλογής, αφού διατίθεται ένα είδος φίλτρου. Ας επικεντρώσουμε τώρα την προσοχή μας στα ψηφιακά φίλτρα, τα οποία μπορεί να είναι FIR ή IIR. Τα FIR φίλτρα μπορούν να υπολογιστούν κατά **βέλτιστο τρόπο** με ελαχιστοποίηση κριτηρίων απόστασης μεταξύ της ιδανικής συνάρτησης $D(e^{j\omega})$ και της προσεγγίζουσας $R(e^{j\omega})$. Στα IIR δεν υπάρχει αντίστοιχη μεθοδολογία, δεν είναι δηλαδή (πρακτικά) δυνατό να υπολογίσουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή ελαχιστοποιώντας κάποιο κριτήριο απόστασης. Με τα FIR φίλτρα μπορούμε να σχεδιάσουμε χαρακτηριστικές που είναι πολύ γενικής μορφής. Τα IIR εφαρμόζονται κυρίως σε περιπτώσεις κλασικών 0-1 φίλτρων. Τα FIR φίλτρα μπορούν να είναι γραμμικής φάσης με μηδενικό επιπλέον κόστος. Τα IIR δεν είναι γραμμικής φάσης. Από καθαρά υπολογιστική άποψη, για τον ίδιο βαθμό προσέγγισης της ιδανικής χαρακτηριστικής, τα IIR φίλτρα απαιτούν σημαντικά λιγότερες πράξεις από ότι τα FIR φίλτρα. Το είδος του φίλτρου που είναι κατάλληλο εξαρτάται αποκλειστικά από τη φύση της εφαρμογής για την οποία προορίζεται. Ο γενικός κανόνας είναι ότι επιλέγει κανείς FIR, όταν επιθυμεί γραμμική φάση ή σχεδίαση μη κλασικών φίλτρων. Διαφορετικά είναι προτιμότερα τα IIR φίλτρα, λόγω της μικρότερης υπολογιστικής πολυπλοκότητας.

1.7 Μεταβατικά Φαινόμενα

Η έξοδος ενός γραμμικού, χρονικά σταθερού συστήματος σε ημιτονική είσοδο $e^{jn\omega_0}$ $H(e^{j\omega_0})$, $H(e^{j\omega})$ η απόκριση συχνότητας. Η σημαντική αυτή ιδιότητα, η οποία αποτελεί και τη βάση της θεωρίας φίλτρων, ισχύει, εφόσον **η είσοδος καλύπτει όλους τους όρους της κρουστικής απόκρισης**.

Λόγω αιτιατότητας, η έξοδος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή n είναι γραμμικός συνδυασμός προηγούμενων εισόδων. Το γεγονός ότι στην πράξη το φίλτρο

τροφοδοτείται με εισόδους από κάποια χρονική στιγμή (που από σύμβαση καλούμε " 0 ") και μετά, έχει σαν συνέπεια, για ένα χρονικό διάστημα, το φίλτρο να συμπεριφέρεται διαφορετικά από ότι καθορίζει η απόκριση συχνότητας. Η ανεπιθύμητη αυτή φάση είναι παροδική και τα φαινόμενα που παρουσιάζονται κατά τη διάρκειά της καλούνται *μεταβατικά*. Η διάρκεια και η μορφή των μεταβατικών φαινομένων εξαρτώνται από το είδος του φίλτρου που χρησιμοποιούμε.

1.7.1 Μεταβατικά Φαινόμενα σε FIR Φίλτρα

Η έξοδος yn ενός FIR φίλτρου σχετίζεται με την είσοδο xn και την πεπερασμένη κρουστική απόκριση μέσω της σχέσης $y_n = h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + \ldots h_{L-1} x_{n-L+1}$.

Είναι προφανές ότι, για να εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή για n ≥ 0, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την είσοδο από τη χρονική στιγμή $-L+1$ και μετά.

Όπως αναφέραμε, η είσοδος είναι γνωστή μόνο μετά τη χρονική στιγμή 0 με συνέπεια, για τις εισόδους που αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές $-L+1,\ldots,-1$, να χρησιμοποιούνται αυθαίρετες (συνήθως μηδενικές) τιμές. Προφανώς το FIR φίλτρο συμπεριφέρεται σωστά, όταν όλοι οι όροι της κρουστικής του απόκρισης πολλαπλασιάζονται με πραγματικές εισόδους. Αυτό είναι δυνατό μόνο για n ≥ L − 1. Με άλλα λόγια, κατά τις χρονικές στιγμές $0,\ldots,L-2$, έχουμε μεταβατικά φαινόμενα, των οποίων η διάρκεια είναι $L-1$. Άρα η διάρκεια των μεταβατικών φαινομένων σε ένα FIR φίλτρο είναι ίση προς το μήκος του φίλτρου.

Παράδειγμα 1.7 : Έστω κατωπερατό FIR φίλτρο μήκους L = 101, με ζώνη διάβασης [0, 0.2π] και ζώνη αποκοπής [0.25π, π]. Ενδιαφερόμαστε να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά του όταν σαν είσοδο χρησιμοποιήσουμε το σήμα $x_n = \cos 0.3\pi n$.

Σχήμα 1.11 : Παράδειγμα μεταβατικών φαινομένων σε FIR φίλτρο.

Στο Σχήμα 1.11 παρουσιάζεται η έξοδος y_n του φίλτρου. Η κυκλική συχνότητα 0.3π ανήκει στη ζώνη αποκοπής, επομένως η έξοδος του φίλτρου y_n αναμένεται να έχει πολύ

μικρό πλάτος. Παρατηρούμε ότι μεσολαβεί ένα διάστημα, περίπου ίσο προς το μήκος του φίλτρου, στο οποίο οι τιμές της εξόδου είναι ακαθόριστες και όχι σύμφωνες με την τελική συμπεριφορά που συνεπάγεται η απόκριση συχνότητας του φίλτρου (δηλαδή έξοδο σχεδόν μηδενική).

1.7.2 Μεταβατικά Φαινόμενα σε IIR Φίλτρα

Η ανάλυση των μεταβατικών φαινομένων στα IIR φίλτρα είναι ελαφρώς δυσκολότερη από ό,τι στα φίλτρα της προηγούμενης κατηγορίας. Για το λόγο αυτό θα περιοριστούμε μόνο στην ποιοτική τους ανάλυση.

Η σχέση εισόδου-εξόδου ενός IIR συστήματος είναι $y_n = h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + \ldots + h_n x_0 + h_{n+1} x_{-1} + \ldots$ πράγμα που σημαίνει ότι **για οποιαδήποτε χρονική στιγμή** $n \geq 0$ **η έξοδος εξαρτάται από εισόδους που δεν είναι διαθέσιμες** (αυτές που έχουν αρνητικό δείκτη), με συνέπεια τα μεταβατικά φαινόμενα να είναι άπειρης διάρκειας. Η παρατήρηση αυτή είναι θεωρητικά μόνο σωστή, διότι στην πράξη τα μεταβατικά φαινόμενα γίνονται αμελητέα μετά την πάροδο πεπερασμένου χρόνου. Πράγματι, σε IIR συστήματα με κρουστική απόκριση της μορφής (1.5), οι όροι της κρουστικής απόκρισης φράσσονται από μια εκθετική ακολουθία της μορφής (βλέπε Άσκηση 1.12) $|h_n| \leq A\rho^n$, όπου $\rho \geq \max\{|z_1|,\ldots,|z_r|\}$ και z_i οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς H(z) του φίλτρου. Αφού πρόκειται για ευσταθές σύστημα, οι πόλοι βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, επομένως είναι πάντοτε δυνατή η επιλογή $\rho < 1$, πράγμα που δηλώνει εκθετική μείωση των όρων της κρουστικής απόκρισης. Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει, για n αρκετά μεγάλο και για φραγμένο σήμα x_n, το άπειρο άθροισμα των όρων, που δεν είναι διαθέσιμοι, να φράσσεται ως εξής

$$|h_n + 1x_{-1} + h_n + 2x_{-2} + \ldots| \leq AM(\rho^{n+1} + \rho^{n+2} + \ldots) = \frac{AM}{1-\rho}\rho^{n+1}$$

όπου M ένα άνω φράγμα για το x_n.

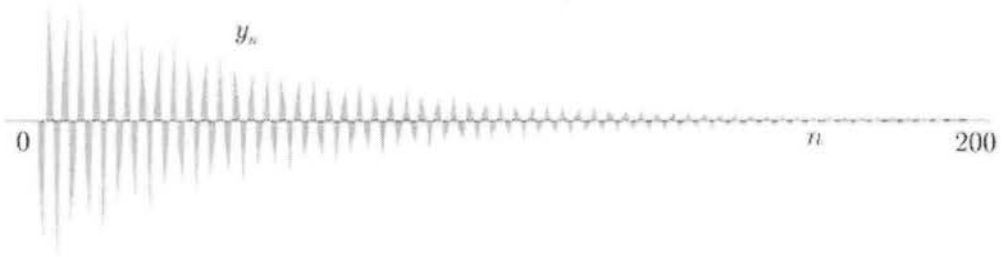
Η εν λόγω ποσότητα, που ουσιαστικά συνοψίζει το μη διαθέσιμο τμήμα της εισόδου, τείνει με εκθετική ταχύτητα στο μηδέν. Αφού ο ρυθμός μείωσης των όρων εξαρτάται από το ρ, δηλαδή το μέγιστο από τα πλάτη των πόλων του συστήματος, είναι φανερό ότι, όσο μικρότερη είναι η ποσότητα αυτή, όσο δηλαδή εγγύτερα στο μηδέν βρίσκονται **όλοι** οι πόλοι, τόσο μικρότερη διάρκεια θα έχουν τα μεταβατικά φαινόμενα.
Σε εκθετικές συναρτήσεις χρόνου συνηθίζεται να ορίζεται σαν *ενεργή διάρκεια* η ποσότητα $T = \frac{1}{1-\rho}$, η οποία μπορεί να παίξει το ρόλο ενός μέτρου διάρκειας των μεταβατικών φαινομένων στα IIR φίλτρα.

Παράδειγμα 1.8 : Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = 0.9802 \frac{1 + 0.18z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.6057z^{-1} + 0.9604z^{-2}}$$

Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε τα μεταβατικά φαινόμενα όταν η είσοδος του συστήματος είναι η $\cos 0.6\pi$ n. Μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε ότι η απόκριση συχνότητας του φίλτρου μας στη συχνότητα 0.6π είναι μηδέν δηλαδή $H(e^{j0.6\pi}) = 0$. Τα φίλτρα αυτά είναι γνωστά σαν *φίλτρα εγκοπής* και θα παρουσιαστούν αναλυτικά στο κεφάλαιο *Ειδικές Κατηγορίες Φίλτρων*.

Στο Σχήμα 1.12



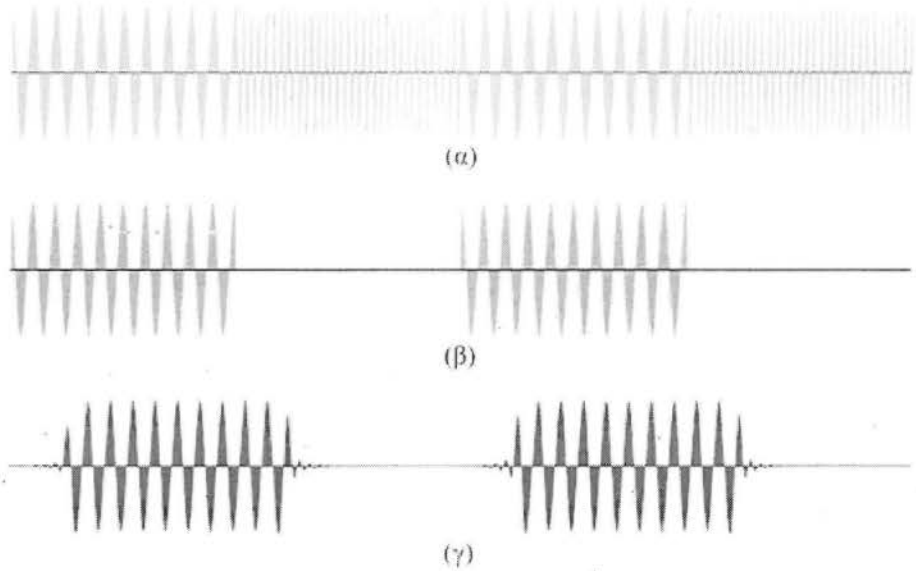
Σχήμα 1.12 : Παράδειγμα μεταβατικών φαινομένων σε IIR φίλτρο. παρουσιάζεται η έξοδος του φίλτρου όταν εφαρμόζεται στο σήμα $x_n = \cos 0.6\pi$ n.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος του φίλτρου δεν είναι μηδενική, όπως καθορίζει η απόκριση συχνότητας, εξαιτίας των μεταβατικών φαινομένων. Είναι ωστόσο εμφανές ότι τα φαινόμενα αυτά μειώνονται με εκθετική ταχύτητα. Για να υπολογίσουμε τον ρυθμό μείωσης ρ πρέπει να υπολογίσουμε τους πόλους του φίλτρου οι οποίοι είναι συζυγείς και ίσοι προς $-0.3029 \pm j0.9320$. Συνεπώς ρ = 0.98, ο ρυθμός δηλαδή είναι ίσος προς το κοινό μέτρο των δύο πόλων. Μολονότι δόθηκε η εντύπωση ότι μεταβατικά φαινόμενα εμφανίζονται μόνο στην αρχή της επεξεργασίας αυτό δεν είναι δυστυχώς αληθές. Εάν το προς επεξεργασία σήμα εμφανίζει απότομες αλλαγές στο συχνοτικό του περιεχόμενο τότε, κάθε αλλαγή, τη χρονική στιγμή που συμβαίνει, ξεκινά τη δημιουργία μεταβατικού φαινομένου με αποτέλεσμα η γραμμική επεξεργασία να αλλοιώνει το τελικό επιθυμητό αποτέλεσμα. Ας διαπιστώσουμε το παραπάνω γεγονός, σε συνδυασμό με την καθυστέρηση ομάδας, με ένα ενδιαφέρον παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.9 : Έστω το FIR φίλτρο, μήκους L=101, του Παραδείγματος 1.7 το οποίο εφαρμόζεται σε ένα ημιτονικό σήμα $\cos \omega_0 n$ με περιοδικά μεταβαλλόμενη συχνότητα ω_0

. Η συχνότητα ω_0, κάθε 200 δείγματα, εναλλάσσεται μεταξύ των δύο τιμών 0.1π και 0.3π. Να βρεθεί η έξοδος του φίλτρου.

Οι συχνότητες επελέγησαν έτσι, ώστε η 0.1π να ευρίσκεται στη ζώνη διάβασης ενώ η 0.3π, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1.7, στη ζώνη αποκοπής. Στο Σχήμα 1.13(α) παρουσιάζεται το αρχικό σήμα όπου είναι εμφανής η εναλλαγή των συχνοτήτων. Εάν το φίλτρο επεξεργασίας ήταν ιδανικό η έξοδος θα έπρεπε να είναι της μορφής του Σχήματος 1.13(β), να εξαφανίζονται δηλαδή εντελώς τα τμήματα με συχνότητα 0.3π.
Αντί της ιδανικής εξόδου, το FIR φίλτρο δημιουργεί το σήμα του Σχήματος 1.13(γ). Παρατηρούμε ότι η έξοδος είναι καθυστερημένη κατά 50 δείγματα (το ήμισυ του μήκους του FIR φίλτρου) λόγω της καθυστέρησης ομάδας του FIR φίλτρου. Παρατηρούμε επίσης τα μεταβατικά φαινόμενα τα οποία ξεκινούν στα σημεία των απότομων αλλαγών της συχνότητας. Η εμφάνισή τους έχει σαν αποτέλεσμα την αλλοίωση της επιθυμητής εξόδου. Η εν λόγω αλλοίωση καθιστά



Σχήμα 1.13 : Παράδειγμα μεταβατικών φαινομένων και καθυστέρησης ομάδας: α) Το προς επεξεργασία σήμα. β) Αποτέλεσμα ιδανικής επεξεργασίας. γ) Αποτέλεσμα επεξεργασίας με χρήση FIR φίλτρου.

επίσης δυσδιάκριτη την χρονική στιγμή της αλλαγής με αποτέλεσμα να δυσκολεύει σημαντικά η ακριβής εκτίμησή της. Ας σημειωθεί ότι εκτιμήσεις της μορφής αυτής είναι απαραίτητες σε σημαντικές εφαρμογές όπως π.χ. στη σεισμολογία όπου χρησιμοποιείται στον προσδιορισμό του σεισμικού επικέντρου.

Αντιμετώπιση Μεταβατικών Φαινομένων
Είναι φανερό, από την ανάλυση που προηγήθηκε, ότι τα μεταβατικά φαινόμενα μπορούν να αλλοιώσουν τη μορφή της ιδανικής εξόδου. Πρέπει επομένως να γίνεται προσπάθεια

ώστε να περιοριστούν όσον είναι δυνατό. Για την περίπτωση FIR φίλτρων, προτιμητέα είναι φίλτρα μικρού μήκους, ενώ για την περίπτωση των IIR, φίλτρα των οποίων οι πόλοι βρίσκονται όσο το δυνατό πλησιέστερα στο μηδέν, δηλαδή, όσο το δυνατόν μικρότερου πλάτους.

2 ΑΡΧΕΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

2.1. Αναλογικό Φιλτράρισμα

Στον τομέα των σημάτων και των συστημάτων διακριτού χρόνου (αναλογικά) η έννοια του φιλτραρίσματος αναδεικνύεται από το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί Fourier εισόδου και εξόδου ενός γραμμικού και αμετάβλητου στη μετατόπιση συστήματος συνδέονται με τη σχέση

$$Y_\alpha(\omega) = H_\alpha(\omega)X_\alpha(\omega) \qquad (2.1),$$

όπου Ηα(ω) είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, η οποία ονομάζεται και απόκριση συχνότητας του συστήματος, αφού, αν

$$x_\alpha(t) = e^{j\omega t} \qquad (2.2),$$

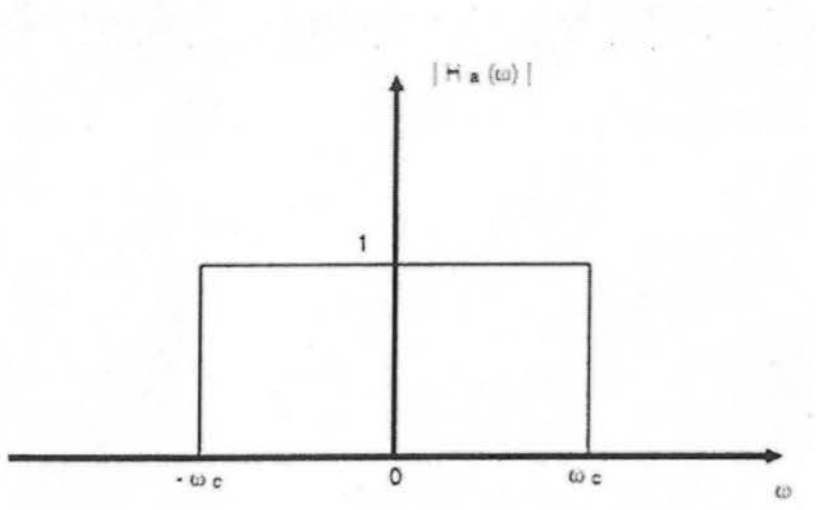
τότε η έξοδος είναι

$$y_\alpha(t) = H_\alpha(\omega)e^{j\omega t} \qquad (2.3).$$

Επειδή η Ηα(ω) είναι μιγαδική, η απόκριση συχνότητας του συστήματος ενεργεί, ώστε να μεταβάλει το πλάτος και τη φάση του εκθετικού μιγάδα σύμφωνα με τη σχέση

$$y_\alpha(t) = | H_\alpha(\omega) | e^{j(\omega t + \arg(H_\alpha(\omega)))} \qquad (2.4)$$

Είναι φανερό από αυτή την εξίσωση ότι, αν $| H_\alpha(\omega) | = 0$, τότε η έξοδος για έναν εκθετικό μιγάδα στη συχνότητα ω_0 θα είναι μηδενική. Επίσης, αν $\arg(H_\alpha(\omega)) = -\omega t_0$, κάθε συχνοτική συνιστώσα της μορφής $e^{j\omega t}$ θα παρουσιάζει καθυστέρηση κατά t_0. Επομένως, σχεδιάζοντας ένα γραμμικό και αμετάβλητο στη μετατόπιση σύστημα, που να παρουσιάζει επιλεκτική συχνοτική συμπεριφορά στο πλάτος του σήματος εισόδου και με γραμμική φάση (σχήμα 2.1), μπορούν να επιλεγούν μόνο οι επιθυμητές για την εκάστοτε εφαρμογή συχνότητες, ενώ οι υπόλοιπες υφίστανται έντονη απόσβεση.

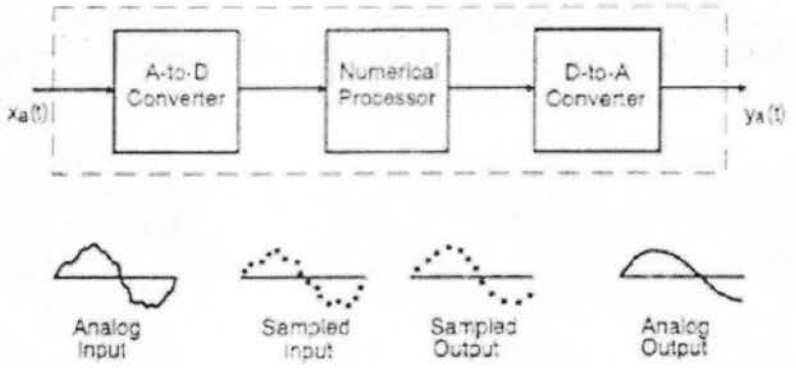


Σχήμα 2.1. Απόκριση ιδανικού αναλογικού χαμηλοπερατού φίλτρου –ideal analog lowpass filter response

Το φίλτρο της μορφής αυτής λέγεται ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο και αποτελεί τη μαθηματική βάση για το σχεδιασμό και άλλης συχνοτικής συμπεριφοράς φίλτρων, τόσο αναλογικών όσο και ψηφιακών.

2.2. Ψηφιακό Φιλτράρισμα

Τα αναλογικά φίλτρα μπορούν να υλοποιηθούν με διάφορους τρόπους, όμως πολλές φορές προτιμάται το φιλτράρισμα αναλογικού σήματος με ψηφιακές μεθόδους.



Σχήμα 2.2. Ψηφιακό φιλτράρισμα αναλογικού σήματος

Το μπλοκ διάγραμμα, που χρησιμοποιείται για ψηφιακό φιλτράρισμα αναλογικού σήματος φαίνεται στο σχήμα 2.2 και αποτελείται από τρία κύρια μέρη

• Μετατροπέα αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (A / D)
• Μονάδα αριθμητικής επεξεργασίας
• Μετατροπέα ψηφιακού σήματος σε αναλογικό (D / A)

Κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία έχει τις δικές του σημαντικές παραμέτρους και χαρακτηριστικά. Εδώ αναφερόμαστε στις πτυχές αυτές του προβλήματος, οι οποίες σχετίζονται με την σχεδίαση - υλοποίηση των φίλτρων μέσω του πακέτου DFDP.

Από το σχήμα φαίνεται ότι το πρώτο βήμα για το ψηφιακό φιλτράρισμα αναλογικού σήματος είναι η δειγματοληψία του αναλογικού, ώστε να ληφθεί μία ακολουθία κβαντισμένων δειγμάτων. Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι αρκετά υψηλός και ο κβαντισμός των δειγμάτων ικανοποιητικός, τότε το αρχικό σήμα μπορεί να ανακτηθεί με αυθαίρετη ακρίβεια από τα δείγματα.

Αφού τα δείγματα είναι απλοί αριθμοί, μέσω μιας αριθμητικής διαδικασίας μπορεί να παραχθεί μία νέα ακολουθία δειγμάτων. Η ακολουθία αυτή μπορεί να μετατραπεί σε αναλογικό σήμα μέσω ενός μετατροπέα ψηφιακού σήματος σε αναλογικό.

Επομένως, για τη ρύθμιση του συστήματος του σχήματος 2.2 ενδιαφερόμαστε για το σχεδιασμό αριθμητικών υπολογιστικών αλγορίθμων, έτσι, ώστε το προκύπτον σήμα εξόδου να συνδέεται με την είσοδο μέσω ενός μετασχηματισμού φιλτραρίσματος (σχέση 2.1).

2.3. Μετατροπείς A / D και D / A

Ένας A / D μετατροπέας δειγματολαμβάνει περιοδικά ένα αναλογικό σήμα και κβαντίζει τα δείγματα, έτσι, ώστε αυτό να αναπαρίσταται από μία ακολουθία δυαδικών λέξεων πεπερασμένου μήκους. Η ακολουθία αυτή χρησιμοποιείται ως η αναπαράσταση διακριτού χρόνου - διακριτού πλάτους του αναλογικού σήματος. Για την εμβάθυνση σχετικά με τη φύση και την ακρίβεια αναπαραστάσεων αυτού του είδους εξετάζονται χωριστά τα θέματα της δειγματοληψίας και του κβαντισμού.

2.3.1. Δειγματοληψία

Υποθέτοντας ότι το αναλογικό σήμα συμβολίζεται ως $x_a(t)$, η περιοδική δειγματοληψία θα έχει ως αποτέλεσμα την ακολουθία δειγμάτων

$$x[n] = x_a(nT) \qquad (2.5),$$

όπου T η περίοδος δειγματοληψίας.

Η διαδικασία της δειγματοληψίας αναπαριστάται με τον πολλαπλασιασμό της *xa(t)* με ένα περιοδικό συρμό ώσεων

$$x_s(t) = x_a(t) * \sum \delta(t - nT) = \sum x_a(nT) * \delta(t - nT) \qquad (2.6)$$

με όρια αθροίσεων από μείον άπειρο έως συν άπειρο.

Αν και δεν είναι αυτός ο τρόπος με τον οποίο γίνεται πραγματικά η δειγματοληψία σε έναν A /D, το αποτέλεσμα του μαθηματικού τελεστή είναι ο σχηματισμός των επιθυμητών δειγμάτων. Η προκύπτουσα εξίσωση οδηγεί στην παραγωγή του κυρίου αποτελέσματος του θεωρήματος της δειγματοληψίας.

Ο μετασχηματισμός Fourier των δειγμάτων, που ορίζεται ως

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \qquad (2.7),$$

σχετίζεται με το μετασχηματισμό Fourier του αναλογικού σήματος $X_a(\omega)$ με τη σχέση

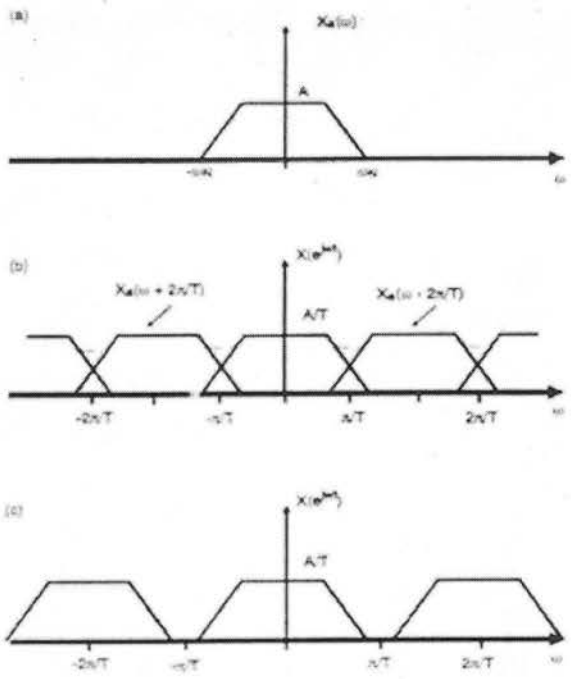
$$x(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_n(\omega + \frac{2\pi k}{T}) \qquad (2.8),$$

όπου Ω είναι η συχνότητα του FT διακριτού χρόνου, ω η συχνότητα του FT συνεχούς χρόνου και συνδέονται με τη σχέση

$$\Omega = \omega T \qquad (2.9).$$

Επομένως, η μεταβλητή συχνότητας διακριτού χρόνου είναι μία κανονικοποιημένη μορφή της μεταβλητής συχνότητας συνεχούς χρόνου. Αυτή η κανονικοποίηση συχνότητας, που είναι ενδογενής στη διαδικασία δειγματοληψίας, αποτελεί μία βασική παράμετρο αυτής, η οποία βοηθάει στην κατανόηση του πως οι αριθμητικοί αλγόριθμοι επεξεργασίας επηρεάζουν το σήμα.

Το σχήμα 2.3 δείχνει την σχέση του αναλογικού FT με τον FT των δειγμάτων.



Σχήμα 2.3 Frequency-domain interpretation

Στο σχήμα 2.3α δίνεται ο FT ενός σήματος συνεχούς χρόνου το οποίο είναι ζωνοπεριορισμένο, έτσι, ώστε $X_a(\omega) = 0$ για συχνότητες πάνω από την ω_N.

Το σχήμα 2.3b απεικονίζει τη σχέση (2.8) σχεδιασμένη για τον συγκεκριμένο FT συνεχούς χρόνου στην περίπτωση, κατά την οποία η ποσότητα $2\pi / T$ είναι μικρότερη του $2\omega_N$.

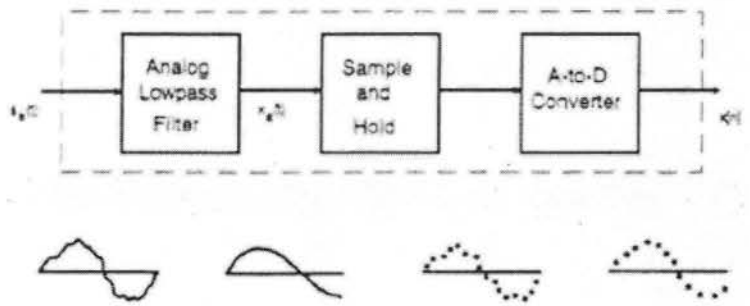
Σημειώνεται ότι η $X(e^{j\omega T})$ είναι περιοδική συνάρτηση της μεταβλητής συνεχούς χρόνου, ω, με περίοδο $2\pi / T$. Όμοια, η $X(e^{j\Omega})$ είναι περιοδική συνάρτηση της μεταβλητής διακριτού χρόνου, Ω, με περίοδο 2π.

Το σχήμα 2.3c απεικονίζει την ίδια σχέση για την περίπτωση όπου η $2\pi / T$ είναι μεγαλύτερη του $2\omega_N$.

Συγκρίνοντας τα παραπάνω σχήματα, φαίνεται ότι στο 2.3c κάθε περίοδος του $X(e^{j\omega})$ είναι ένα κλιμακωμένο αντίγραφο του FT του αναλογικού σήματος εισόδου, ενώ στο 2.3b τα επιμέρους αντίγραφα του αρχικού φάσματος επικαλύπτονται φαινόμενο που ονομάζεται παραμόρφωση επικάλυψης.

Προφανώς, αν θέλουμε να διατηρήσουμε αναλλοίωτο το σήμα εισόδου θα πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας $2\pi / T$ να είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της υψηλότερης συχνότητας του φάσματος της εισόδου, παρατήρηση που παραπέμπει ευθέως στο γνωστό θεώρημα δειγματοληψίας.

Η παραπάνω ανάλυση προϋποθέτει κάτι, το οποίο δε μπορεί να παραβλεφθεί, αναφορικά με το ψηφιακό φιλτράρισμα αναλογικών σημάτων. Η είσοδος πρέπει να είναι ζωνοπεριορισμένη (άπειρη διάρκεια στο πεδίο του χρόνου) για να αποφεύγονται φαινόμενα παραμόρφωσης επικάλυψης. Γενικά, αυτό υποθέτει την ύπαρξη ενός αναλογικού φίλτρου πριν από τον A / D.
Ακόμα και αν το σήμα μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά ζωνοπεριορισμένο, είναι πιθανό να απαιτηθεί επιπλέον φιλτράρισμα για την εξάλειψη υψηλών αρμονικών θορύβου, που μπορεί να επικαλυφθεί με τις συχνότητες του σήματος βασικής ζώνης.
Η διαδικασία της δειγματοληψίας σε μετατροπές αναλογικού σήματος σε ψηφιακό επιτυγχάνεται με ένα σύστημα συγκράτησης. Αυτό είναι απαραίτητο, αφού οι περισσότεροι μετατροπείς δεν αποκρίνονται στιγμιαία. Το κύκλωμα συγκράτησης δειγματολαμβάνει την είσοδο για ένα μικρό διάστημα και κρατάει την τιμή της εισόδου για μία ολόκληρη περίοδο δειγματοληψίας. Κατά τη διάρκεια της περιόδου αυτής, ο μετατροπέας, που συνδέεται στην έξοδο του κυκλώματος συγκράτησης, έχει ένα σταθερό σήμα εισόδου. Επομένως, η μετατροπή μπορεί να συμβεί σε ολόκληρο το διάστημα T δευτερολέπτων της περιόδου δειγματοληψίας, αν αυτό απαιτηθεί.
Το μπλοκ διάγραμμα του σχήματος 2.4 δείχνει τη διάταξη ενός πρακτικού συστήματος δειγματοληψίας για ψηφιακό φιλτράρισμα. Το αναλογικό φίλτρο υλοποιείται με τελεστικούς ενισχυτές ή ολοκληρωμένα κυκλώματα σχεδιασμένα ειδικά για το σκοπό αυτό. Τα κυκλώματα συγκράτησης και μετατροπής μπορεί να βρίσκονται στη ίδια ψηφίδα ή όχι. Όλα τα στοιχεία του μπλοκ διαγράμματος μπορούν να υλοποιηθούν σε μία ψηφίδα. Επίσης, μπορεί να προηγείται της διάταξης ένας πολυπλέκτης για την μετατροπή πολλών σημάτων.

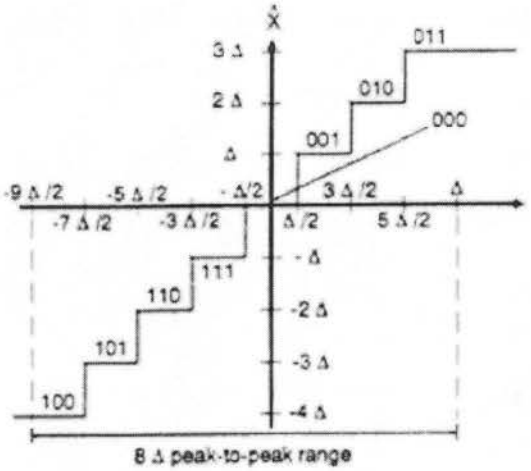


Σχήμα 2.4 Πρακτικό σύστημα δειγματοληψίας για ψηφιακό φιλτράρισμα

2.3.2. Κβάντιση

Ο μετατροπέας A / D αντιστοιχίζει μία δυαδική αναπαράσταση σε κάθε δείγμα πλάτους του σήματος εισόδου (έξοδος του κυκλώματος συγκράτησης). Στο σχήμα 2.5 δίνεται η διαδικασία αυτή για μετατροπέα 3 bits εξόδου. Επομένως, υπάρχουν 8 επίπεδα πλάτους, στα οποία πρέπει να αντιστοιχηθεί κάθε δείγμα της εισόδου.
Στο σχήμα χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση αριθμητική συμπληρώματος του δύο

(αυθαίρετα). Η αναπαράσταση αυτή εξαρτάται από το σύστημα του επεξεργαστή, που θα επιτελέσει το φιλτράρισμα.



Σχήμα 2.5 είσοδος-έξοδος 3 bit κβαντιστή 8 επιπέδων (for an 8-level/ 3 bit quantizer)

Στο σχήμα παρατηρούνται δύο σημαντικά χαρακτηριστικά της κβάντισης :

1. Για σήματα εύρους από $-9\Delta/2$ μέχρι $7\Delta/2$ το μέγιστο σφάλμα κβάντισης είναι $\Delta/2$.
2. Για δείγματα μεγαλύτερα του $7\Delta/2$ ή μικρότερα του $-9\Delta/2$ το σήμα θα ψαλιδιστεί και το σφάλμα θα είναι μεγαλύτερο του $\Delta/2$.

Επομένως, το δίλημμα, που παρουσιάζεται κατά τον κβαντισμό, έχει ως εξής :
• Για ελαχιστοποίηση του σφάλματος κβάντισης το Δ πρέπει να είναι μικρό.
• Για να μεγιστοποιηθεί η κλίμακα μη ψαλιδιζόμενων πλατών των σημάτων θα πρέπει το Δ να είναι μεγάλο.

Φυσικά, το Δ μπορεί να μικρύνει κρατώντας το εύρος peak-to-peak σταθερό αυξάνοντας τον αριθμό των επιπέδων κβάντισης (ισοδύναμα αυξάνοντας τον αριθμό των bits τις δυαδικής εξόδου).
Αν δεν υπάρχει ψαλιδισμός, ο μέσος όρος της ισχύος του θορύβου κβαντισμού θα είναι ανάλογη του Δ^2. Όμοια, η μέση ισχύς του σήματος θα είναι ανάλογη του τετραγώνου του εύρους peak-to-peak του πλάτους που γενικά δίνεται ως

$$peak-to-peak\ range = 2^B * \Delta \qquad (2.10),$$

όπου B ο αριθμός των bits αναπαράστασης.

Με αυτή την υπόθεση, ο λόγος ισχύων σήματος προς θόρυβο του μετατροπέα A / D είναι

της μορφής

$$SNR = 10\log\left(\frac{signal\ power}{noise\ power}\right) = 6B + const \qquad (2.11).$$

Η σταθερά στη σχέση (2.11) εξαρτάται από την κατανομή των πλατών της εισόδου και σε πρώτη προσέγγιση μπορεί να αγνοηθεί. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο SNR είναι περίπου 6dB ανά bit αναπαράστασης. Σε πολλές εφαρμογές 12 bits δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σχετικά με το δυναμικό εύρος και το θόρυβο κβαντισμού. Για υψηλής ποιότητας ήχο, όμως, απαιτούνται 16 ή 18 bits. Μετατροπείς των 12 - 16 bits είναι διαθέσιμοι για ρυθμούς δειγματοληψίας μέχρι και μερικές εκατοντάδες KHz. Υψηλότεροι ρυθμοί γενικά επιτυγχάνονται με χρήση λιγότερων bits.

2.3.3. Ανακατασκευή σήματος (μετατροπή D / A)

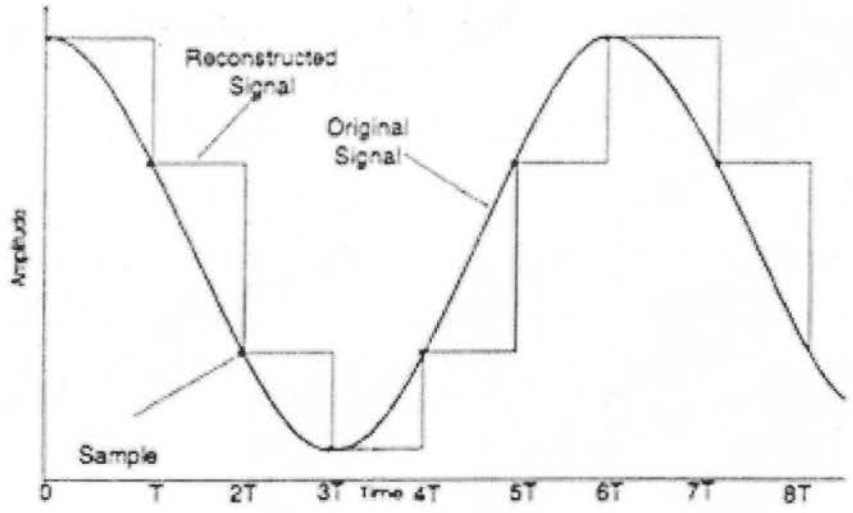
Σε εφαρμογές ψηφιακού φιλτραρίσματος συχνά απαιτείται η ακολουθία δειγμάτων να μετατραπεί σε αναλογικό σήμα εξόδου. Ένας D / A μετατροπέας μετασχηματίζει δυαδικούς αριθμούς (δείγματα) σε ένα συρμό παλμών, που συμβαίνουν με τη συχνότητα δειγματοληψίας.
Η έξοδος ενός τέτοιου μετατροπέα μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] * p_r(t - nT) \qquad (2.12),$$

όπου $x[n] = x_\alpha(nT)$ είναι το n-οστό δείγμα του σήματος προς ανακατασκευή και ο παλμός pr(t) είναι της μορφής

$$p_r(t) = 1 \quad \gamma\iota\alpha\ -T/2 \le t \le T/2 \qquad (2.13)$$
$$= 0 \quad \alpha\lambda\lambda o\acute{u}$$

Το σχήμα 2.6 δείχνει μία ημιτονική κυματομορφή με τα δείγματά της και την ανακατασκευασμένη έξοδο του μετατροπέα D / A.



Σχήμα 2.6 Μετατροπή ψηφιακού σε αναλογικό με την χρήση ZOH(zero-order Hold)

Αποδεικνύεται ότι η $X_r(\omega)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$X_r(\omega) = X(e^{j\omega T}) * P_r(\omega) \qquad (2.14),$$

όπου

$$P_r(\omega) = \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega}{2}} \qquad (2.15).$$

Το σχήμα 2.7 δείχνει την αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας της διαδικασίας ανακατασκευής αναλογικού σήματος για μία τυπική είσοδο D / A.
Από τη σχέση (2.8) και το σχήμα 2.3c φαίνεται ότι, όταν το σήμα είναι ζωνοπεριορισμένο και ο ρυθμός δειγματοληψίας αρκετά υψηλός, ο FT του αρχικού αναλογικού σήματος συνδέεται με τον FT διακριτού χρόνου των (μη κβαντισμένων) δειγμάτων με τη σχέση

$$X_\alpha(\omega) = T * X(e^{j\omega T}) \quad -\pi T \le \omega \le \pi/T \qquad (2.16)$$
$$= 0 \qquad \alpha\lambda\lambda o\acute{u}$$

Άρα, για την ακριβή ανακατασκευή της επιθυμητής εξόδου απαιτείται ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο, το οποίο ενσωματώνει μία διόρθωση για την παλμοειδή μορφή της εξόδου του D / A.

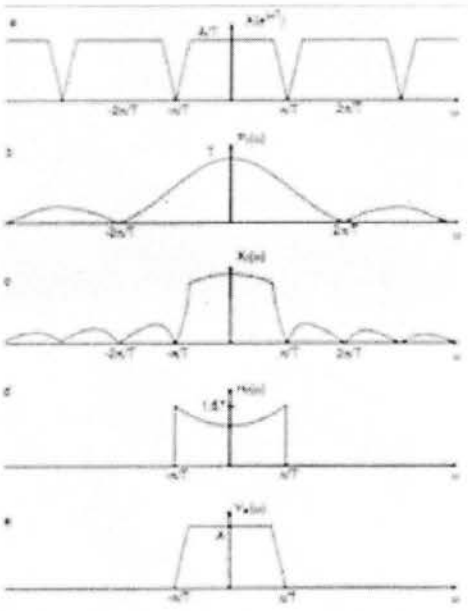
Από τις (2.14) και (2.16) είναι φανερό ότι, αν

$$H_r(\omega) = T / P_r(\omega) \quad -\pi/T \le \omega \le \pi/T$$
$$= 0 \qquad\qquad \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \qquad (2.17),$$

τότε

$$X_a(\omega) = X_r(\omega) * H_r(\omega) \qquad (2.18).$$

Το σχήμα 2.7a δείχνει τον FT της ακολουθίας, το 2.7b την απόκριση συχνότητας συγκρατητή μηδενικής τάξης, το 2.7c τον FT της εξόδου του μετατροπέα. Στο σχήμα 2.7d απεικονίζεται το απαιτούμενο βαθυπερατό φίλτρο συμπεριλαμβανόμενης και της διόρθωσης για το κύκλωμα συγκράτησης του μετατροπέα. Ένα τέτοιο φίλτρο δε μπορεί να υλοποιηθεί επακριβώς, αλλά με ικανοποιητική ακρίβεια για πρακτικούς σκοπούς. Αν το φίλτρο ανακατασκευής έχει την απόκριση συχνότητας του σχήματος 2.7d, τότε το ανακατασκευασμένο αναλογικό σήμα εξόδου θα είναι παρόμοιο με το αρχικό σήμα εισόδου *xa(t)* και ο FT του σήματος εξόδου θα είναι αυτός του σχήματος 2.7e. Συχνά η παλμοειδής μορφή εξόδου του D/A αγνοείται και η ανακατασκευή επιτυγχάνεται με απλό βαθυπερατό φιλτράρισμα.



Σχήμα 2.7 Ανακατασεκυή σήματος

2.4. Γραμμικά συστήματα

Μιας και τα σήματα σε διακριτή μορφή αναπαρίστανται από ακολουθίες δειγμάτων, ένα διακριτό σύστημα ή ψηφιακός επεξεργαστής σήματος είναι απλά ένας υπολογιστικός αλγόριθμος μετασχηματισμού της ακολουθίας δειγμάτων εισόδου σε μία ακολουθία εξόδου. Όπως και στα αναλογικά συστήματα, ένα γραμμικό διακριτό σύστημα ακολουθεί την αρχή της υπέρθεσης, ενώ αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση σύστημα είναι αυτό, του οποίου ο αλγόριθμος μετασχηματισμού εισόδου - εξόδου δεν αλλάζει με τη χρονική μετατόπιση (γενικά με τη μετατόπιση).
Αφού τα γραμμικά και αμετάβλητα κατά τη μετατόπιση συστήματα είναι σχετικά εύκολο να σχεδιαστούν και να υλοποιηθούν, είναι εξαιρετικά σημαντικά στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος, ενώ χρησιμοποιούνται για

- Διαχωρισμό σήματος από θόρυβο
- Εξομάλυνση από προηγούμενες γραμμικές παραμορφώσεις
- Διαχωρισμό συστατικών σήματος από προσθετικό συνδυασμό σημάτων
- Μοντελοποίηση πολλών κλάσεων σημάτων

2.4.1. Διακριτή συνέλιξη

Άμεσο αποτέλεσμα της γραμμικότητας και της αμεταβλητότητας κατά τη μετατόπιση είναι η ακολουθία εξόδου κάθε γραμμικού, χρονοαμετάβλητου συστήματος να συνδέεται με την είσοδό του με τη σχέση συνελικτικού αθροίσματος

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] * x[n-k] \quad , -\infty \le n \le \infty \qquad (2.19),$$

όπου η h[n] είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Το άθροισμα της συνέλιξης μοιάζει με τη μορφή του συνελικτικού ολοκληρώματος, που περιγράφει τη συμπεριφορά ενός γραμμικού, χρονοαμετάβλητου συστήματος συνεχούς χρόνου. Σε αντίθεση με την περίπτωση του αναλογικού σήματος, το άθροισμα της συνέλιξης (2.19) δεν αποτελεί απλά μία θεωρητική περιγραφή των συστημάτων διακριτού χρόνου, αλλά χρησιμοποιείται για την υλοποίηση πλήθους σημαντικών συστημάτων.

2.4.2. Εξισώσεις διαφορών

Υπάρχουν δύο κατηγορίες γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων :

1. Τα συστήματα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)
2. Τα συστήματα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR)

Τα FIR συστήματα είναι αυτά, που η κρουστική απόκριση έχει πεπερασμένο μήκος (π.χ. $h[n]=0$ για $n<0$ & $n>M$). Για τα συστήματα αυτά είναι προφανές ότι το άθροισμα της συνέλιξης έχει πεπερασμένα όρια

$$y[n]=\sum_{k=0}^{H} h[k]*x[n-k] \qquad (2.20),$$

έτσι, ώστε ο υπολογισμός κάθε τιμής της ακολουθίας εξόδου να απαιτεί M+1 πολλαπλασιασμούς και M προσθέσεις. Επομένως, το συνελικτικό άθροισμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν υλοποίηση FIR συστημάτων.

Γενικά, δεν είναι εφικτή η υλοποίηση IIR συστημάτων μέσω της (2.19), αφού θα χρειαζόταν άπειροι υπολογισμοί για την εξαγωγή έστω και ενός δείγματος εξόδου. Υπάρχει όμως μία ενδιαφέρουσα και σημαντική κατηγορία IIR συστημάτων, στα οποία ισχύει μία γραμμική και με σταθερούς συντελεστές εξίσωση διαφορών, που συνδέει είσοδο με έξοδο και είναι της μορφής

$$y[n]=-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]+\sum_{k=0}^{H} b_k x[n-k]*x[n-k] \qquad (2.21)$$

Για τέτοια συστήματα, η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναδρομικά για τον υπολογισμό της εξόδου από την ακολουθία εισόδου και από N προηγούμενα υπολογισμένα δείγματα εξόδου.
Όταν όλοι οι συντελεστές a_k είναι 0, η (2.21) μεταπίπτει στην (2.20) με $h[k]=b_k$.
Επομένως, η (2.21) αναδεικνύεται σε μία γενική περιγραφή όλων των υπολογιστικά υλοποιήσιμων γραμμικών και χρονοαμετάβλητων συστημάτων.

Ο μετασχηματισμός Z (ZT) μίας ακολουθίας δειγμάτων ορίζεται ως

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \qquad (2.22).$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι ZT των ακολουθιών εισόδου και εξόδου ενός γραμμικού, αμετάβλητου στη μετατόπιση συστήματος υπακούουν στη σχέση

$$Y(z) = H(z)X(z) \qquad (2.23),$$

όπου $H(z)$ είναι ο ZT της κρουστικής απόκρισης και αποκαλείται συνάρτηση συστήματος. Για συστήματα, που περιγράφονται από την (2.21), η συνάρτηση συστήματος είναι

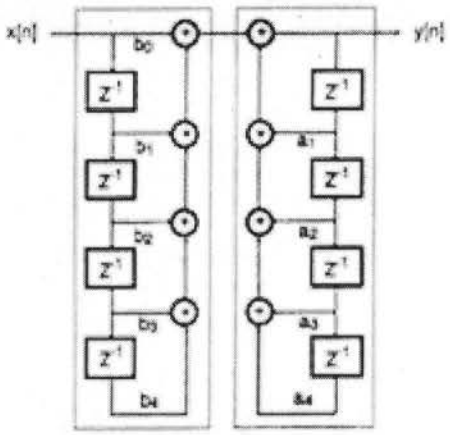
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{H} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \qquad (2.24).$$

Σημειώνεται ότι, αφού ο όρος $b_k x[n-k]$ έχει ZT $b_k z^{-k} X(z)$ και ο όρος $a_k y[n-k]$ έχει ZT $a_k z^{-k} Y(z)$, υπάρχει μία αντιστοιχία όρων μεταξύ της (2.21) και της (2.24).

Άρα, αν μας δοθεί η συνάρτηση ενός συστήματος διακριτού χρόνου, είναι απλό να εξάγουμε από αυτή μια εξίσωση διαφορών, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την υλοποίηση του συστήματος πάνω σε έναν προγραμματιζόμενο επεξεργαστή.

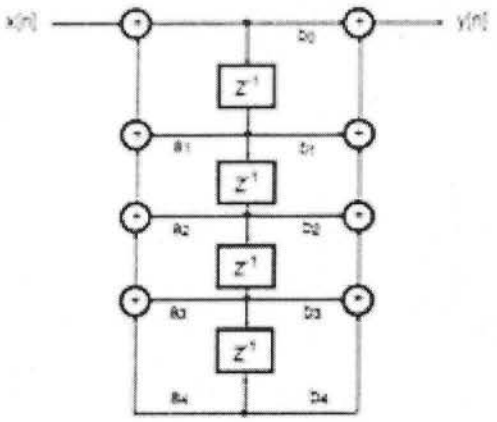
Πολύ χρήσιμα για την κατανόηση της υπολογιστικής διαδικασίας υλοποίησης ψηφιακών φίλτρων είναι τα μπλοκ διαγράμματα. Στο σχήμα (2.8) φαίνονται δύο συστήματα, των οποίων η είσοδος και έξοδος ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών (2.21) και, επομένως, έχουν την συνάρτηση συστήματος (2.24).

Οι λειτουργίες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού αναπαρίστανται με την κλασική μορφή των μπλοκ διαγραμμάτων, ενώ οι καθυστερήσεις και οι μετατοπίσεις αναπαρίστανται με συστήματα συνάρτησης z^{-1}. Στο σχήμα είναι M=N=4 για λόγους σχεδίασης. Η δομή του σχήματος 2.8 ονομάζεται ευθεία μορφή 1 για ένα σύστημα με συνάρτηση (2.24). Αν N=0, τότε πρόκειται για σύστημα FIR. Επομένως, το αριστερό μισό του σχήματος 2.8 αντιστοιχεί στη γενική ευθεία μορφή FIR συστήματος. Τονίζεται ότι γενικά το αριστερό μισό του σχήματος υλοποιεί τον αριθμητή (μηδενικά), ενώ το δεξί μισό υλοποιεί τον παρονομαστή (πόλους) της συνάρτησης συστήματος.



Σχήμα 2.8 Ευθεία μορφή 1 για ένα σύστημα με συνάρτηση (direct form I diffence equation)

Το σχήμα 2.9 προέρχεται από το 2.8 με αντιμετάθεση των επιμέρους συστημάτων, μιας και για γραμμικά χρονοαμετάβλητα συστήματα η ολική συνάρτηση συστήματος είναι το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων. Άρα, η ολική συνάρτηση συστήματος παραμένει η ίδια ανεξάρτητα από το ποιο υποσύστημα υλοποιείται πρώτο. Αν τα δύο υποσυστήματα αντιστραφούν οι κλάδοι των καθυστερητών μπορούν να συνδυαστούν δίνοντας έτσι την ευθεία μορφή 2 του σχήματος 2.9.
Και οι δύο μορφές έχουν τον αριθμό αριθμητικών λειτουργιών, η ευθεία μορφή 2, όμως, μπορεί να απαιτήσει μέχρι και 50% λιγότερη μνήμη για αποθήκευση προηγούμενων τιμών εισόδου και εξόδου.



Σχήμα 2.9 direct form II difference equation

Αν και οι δύο δομές έχουν την ίδια συνάρτηση συστήματος, εντούτοις δεν αναπαριστούν την ίδια εξίσωση διαφορών.

Η εξίσωση του σχήματος 2.8 είναι η (2.21) ενώ αυτή του σχήματος 2.9 είναι η (2.22).

$$w[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k w[n-k] + x[n]$$
$$y[n] = \sum_{k=0}^{H} b_k w[n-k] \qquad (2.25)$$

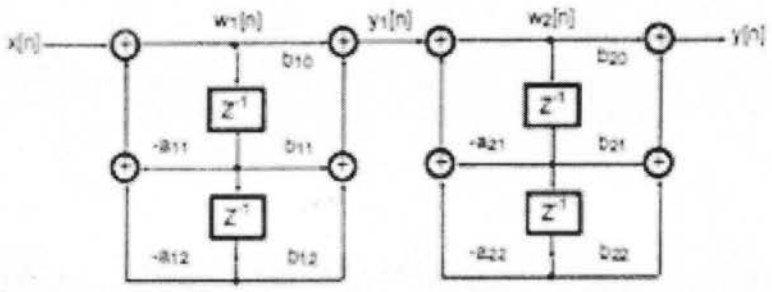
Άλλες δομές υλοποίησης μιας συνάρτησης συστήματος μπορούν να προκύψουν με χειρισμό της συνάρτησης. Η δομή καταρράκτη προκύπτει παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή σε δεύτερης τάξης πολυωνυμικούς όρους και ομαδοποιώντας αριθμητές και παρονομαστές, ώστε να σχηματίσουμε συνάρτηση της μορφής

$$H(z)=\prod_{i=1}^{(N+1)/2}\frac{b_{i0}+b_{i1}z^{-1}+b_{i2}z^{-2}}{1+a_{i1}z^{-1}+a_{i2}z^{-2}} \qquad (2.26),$$

όπου (N+1) / 2 είναι ο μέγιστος ακέραιος που περιέχεται στον όρο (N+1) / 2.

Όταν το N είναι περιττό ή διάφορο του M, κάποιοι από τους συντελεστές της (2.26) θα είναι μηδενικοί. Η δομή, που υπονοείται από την (2.26), μπορεί να υλοποιηθεί με καταρράκτη από τμήματα δεύτερης τάξης οποιασδήποτε δομής.
Το σχήμα 2.10 δείχνει ένα παράδειγμα για N=M=4, όπου οι δευτεροβάθμιοι όροι υλοποιούνται στην ευθεία μορφή 2. Το σχετικό σετ εξισώσεων διαφορών είναι

$$\begin{aligned} y_0[n] &= x[n] \\ w_i[n] &= y_{i-1}[n]-a_{i1}w_i[n-1]-a_{i2}w_i[n-2] \\ y_i[n] &= b_{i0}w_i[n]-b_{i1}w_i[n-1]-b_{i2}w_i[n-2] \quad ,i=1,2,\ldots\frac{N+1}{2} \\ y[n] &= y_{\frac{N+1}{2}}[n] \end{aligned} \qquad (2.27)$$



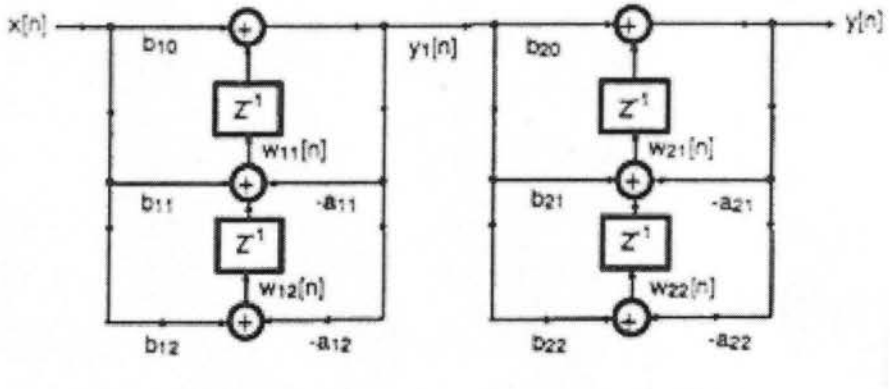
Σχήμα 2.10 Υλοποίηση δευτεροβάθμιων όρων στην ευθεία μορφή 2, για N=M=4 (direct form II cascade structure for N=M=4)

Άλλες μορφές μπορούν να προκύψουν εφαρμόζοντας το θεώρημα της αντιστροφής για γραμμικά, χρονοαμετάβλητα συστήματα μίας εισόδου - μίας εξόδου. Το θεώρημα αυτό έχει ως εξής :

• Αν όλες οι ροές των σημάτων (της δομής) αντιστραφούν, όλοι οι κόμβοι γίνουν αθροιστές, όλοι οι αθροιστές γίνουν κόμβοι και οι έξοδος και είσοδος αντιστραφούν, η ολική συνάρτηση συστήματος θα παραμείνει η ίδια .

Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του θεωρήματος στη δομή καταρράκτη δίνεται στο σχήμα 2.11 με τις σχετικές εξισώσεις να είναι

$$
\begin{aligned}
&y_0[n] = x[n] \\
&y_i[n] = b_{i0} y_{i-1}[n] - w_{i1}[n-1] \\
&w_{i1}[n] = b_{i1} y_{i-1}[n] - a_{i1} y_i[n] - w_{i2}[n-1] \\
&w_{i2}[n] = b_{i2} y_{i-1}[n] - a_{i2} y_i[n] \quad ,i = 1,2,\ldots \frac{N+1}{2} \\
&y[n] = y_{\frac{N+1}{2}}[n]
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$



Σχήμα 2.11 Αντιμετάθεση από μορφή καταρράκτη, για N=M=4
(transposed form cascade structure for N=M=4)

Για μία συνάρτηση συστήματος μπορούν να βρεθούν άπειρες δομές υλοποίησης, οι προαναφερθέντες τρόποι, όμως, είναι οι πιο συχνοί στην πράξη. Το πακέτο DFDP4/plus χρησιμοποιεί την ευθεία για όλες τις υλοποιήσεις FIR συστημάτων, ενώ για τα IIR χρησιμοποιεί τη δομή αντεστραμμένου καταρράκτη δευτεροβάθμιων όρων (2.28).

2.4.3. Γραμμικά συστήματα στο πεδίο της συχνότητας

Ο FT μιας ακολουθίας ορίστηκε στην (2.7), ενώ ο ZT στην (2.22). Συγκρίνοντας τις δύο αυτές εξισώσεις, φαίνεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ουσιαστικά ο μετασχηματισμός Z υπολογισμένος πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου z. Άρα, από την (2.23) φαίνεται ότι οι FTs των ακολουθιών εισόδου και εξόδου συστήματος διακριτού χρόνου συνδέονται με τη σχέση

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega}) \qquad (2.29),$$

όπου $H(e^{j\Omega})$ είναι η συνάρτηση συστήματος υπολογισμένη πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού z - επιπέδου.

Επιπλέον, η $H(e^{j\Omega})$ αποτελεί τον FT της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Επομένως, η $H(e^{j\Omega})$ παίζει τον ίδιο ρόλο όπως και η απόκριση συχνότητας αναλογικού συστήματος και, άρα, καλείται απόκριση συχνότητας συστήματος διακριτού χρόνου.

Μία κύρια διαφορά μεταξύ της απόκρισης συχνότητας συστήματος διακριτού χρόνου με αυτή αναλογικού συστήματος είναι μία ενδογενής περιοδικότητα της απόκρισης συχνότητας διακριτού χρόνου. Αφού

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega} \qquad (2.30),$$

διακρίνεται εύκολα ότι $H(e^{j\Omega}) = H(e^{j(\Omega+2\pi)})$, δηλαδή η απόκριση συχνότητας είναι περιοδική με περίοδο 2π. Αυτό γίνεται επίσης αντιληπτό από τις (2.24) και (2.26) με αντικατάσταση $z = e^{j\Omega}$ για να βρεθεί η απόκριση συχνότητας συστήματος, του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν μία εξίσωση διαφοράς.

2.4.4. Φιλτράρισμα διακριτού χρόνου αναλογικών σημάτων

Για να δούμε πώς ένα σύστημα διακριτού χρόνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το φιλτράρισμα αναλογικού σήματος, ας υποθέσουμε ότι ένα αναλογικό σήμα, $x_\alpha(t)$, με FT $X_\alpha(\omega)$, δειγματολαμβάνεται δίνοντας ακολουθία $x[n] = x_\alpha(nT)$.
Τότε, όπως δείχθηκε προηγουμένως, ο FT του $x[n]$ θα δίνεται από την (2.8) με όρους της αναλογικής συχνότητας ω. Αν η ακολουθία είναι είσοδος γραμμικού και χρονοαμετάβλητου συστήματος, έπεται από την (2.29) ότι

$$Y(e^{j\omega T}) = H(e^{j\omega T})X(e^{j\omega T}) \qquad (2.31),$$

όπου $H(e^{j\omega T})$ είναι η απόκριση συχνότητας του συστήματος διακριτού χρόνου εκφρασμένη με όρους της αναλογικής συχνότητας ω, όπως δίνεται από την (2.9) $\Rightarrow \Omega = \omega T$
Αν έπειτα τα δείγματα εξόδου του διακριτού συστήματος $y[n]$ οδηγηθούν στην είσοδο ενός D / A μετατροπέα, που ακολουθείται από ένα ιδανικό φίλτρο ανακατασκευής, προκύπτει ότι ο FT της εξόδου του βαθυπερατού φίλτρου ανακατασκευής θα είναι

$$Y_\alpha(\omega) = TH(e^{j\omega T})X(e^{j\omega T}) \quad ,|\omega| < \pi/T$$
$$= 0 \qquad\qquad\qquad ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \qquad (2.32).$$

Αν το αρχικό σήμα είναι ζωνοπεριορισμένο και ο ρυθμός δειγματοληψίας αρκετά υψηλός (δεν υπάρχουν φαινόμενα επικάλυψης), τότε

$$X(e^{j\omega T}) = 1/TX_\alpha(\omega) \quad ,|\omega| < \pi/T \qquad (2.33)$$

και από τις (2.32) και (2.33)

$$Y_\alpha(\omega) = H_{eff}(\omega) * X_\alpha(\omega) \qquad (2.34),$$

όπου

$$H_{eff}(\omega) = H(e^{j\omega T}) \quad ,|\omega| < \pi/T$$
$$= 0 \qquad\qquad\qquad ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \qquad (2.35).$$

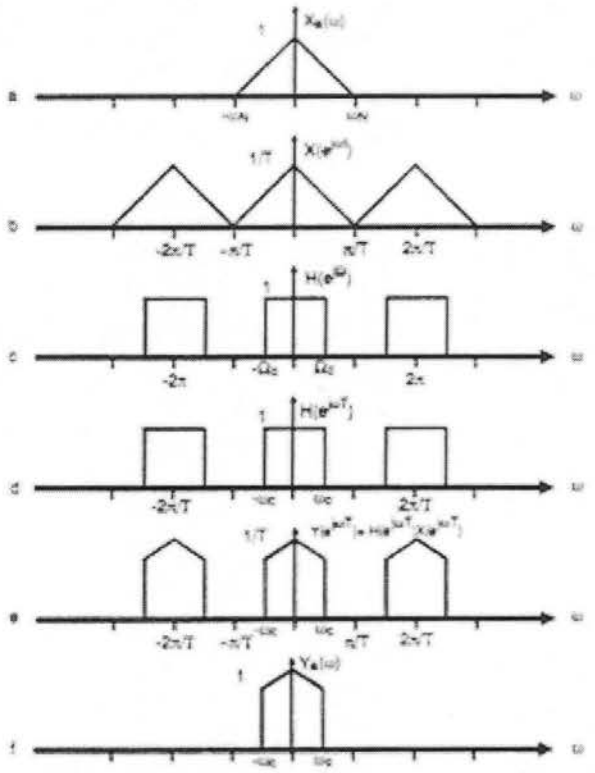
Αυτό σημαίνει ότι αν η είσοδος δειγματολαμβάνεται με υψηλό ρυθμό και το φίλτρο ανακατασκευής εξόδου είναι τέλεια ζωνοπερατό, ολόκληρο το σύστημα συμπεριφέρεται σαν ένα αναλογικό φίλτρο, του οποίου η ενεργή απόκριση συχνότητας είναι ίση με μία περίοδο της απόκρισης συχνότητας του εσωτερικού διακριτού συστήματος. Σχεδιάζοντας κατάλληλα την απόκριση του συστήματος διακριτού χρόνου το όλο σύστημα μπορεί να επιτελέσει οποιαδήποτε γραμμική λειτουργία φιλτραρίσματος σε ένα ζωνοπεριορισμένο αναλογικό σήμα.
Στο σχήμα 2.12 δίνεται η αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας της διαδικασίας ψηφιακού φιλτραρίσματος ενός αναλογικού σήματος.

Το σχήμα 2.12a δείχνει τον FT ενός ζωνοπεριορισμένου σήματος.

Στο 2.12 b δίνεται ο FT της ακολουθίας δειγμάτων του ζωνοπεριορισμένου σήματος, όταν η περίοδος δειγματοληψίας είναι αρκετά χαμηλή, ώστε να αποφευχθεί η επικάλυψη.

Στο 2.12c δίνεται η απόκριση συχνότητας του φίλτρου διακριτού χρόνου, σχεδιασμένη σαν συνάρτηση της κανονικοποιημένης συχνότητας διακριτού χρόνου Ω.

Στο 2.12d φαίνεται η ίδια απόκριση ως συνάρτηση της αναλογικής συχνότητας. Σημειώνεται ότι η συχνότητα αποκοπής του διακριτού φίλτρου είναι η Ω_c. Η ερμηνεία αυτής σε όρους αναλογικής συχνότητας εξαρτάται αποκλειστικά από το ρυθμό δειγματοληψίας της ακολουθίας εισόδου, δηλαδή η ενεργός συχνότητα αποκοπής αναφορικά με το αρχικό σήμα είναι $\omega_c = \Omega_c / T$.



Σχήμα 2.12 frequency damain representation

Επίσης, σημειώνεται ότι η απόκριση συχνότητας του διακριτού συστήματος πρέπει να είναι περιοδική, ώστε το γινόμενο $H(e^{j\omega T})X(e^{j\omega T})$ να είναι επίσης περιοδικό και, επομένως, να υπάρχει ο FT της ακολουθίας δειγμάτων.

Το σχήμα 2.12e δείχνει το γινόμενο αυτό, που είναι ο FT της εξόδου του διακριτού συστήματος.
Τέλος, το 2.12f δείχνει την έξοδο ιδανικού μετατροπέα D / A, δηλαδή ενός ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με αποκοπή στο π/T και ενσωματωμένη εξομάλυνση για την παλμοειδή μορφή του D / A.
Συγκρίνοντας τα σχήματα 2.12a και 2.12f, φαίνεται ότι η ολική απόκριση συχνότητας είναι αυτή που δίνεται από την (2.35). Από αυτό το παράδειγμα, επίσης, προκύπτει ότι για ένα βαθυπερατό φίλτρο διακριτού χρόνου, όπως το παραπάνω, δεν είναι απαραίτητο να αποφύγουμε απολύτως την επικάλυψη.

Πράγματι, η ίδια έξοδος θα προέκυπτε στο εξιδανικευμένο αυτό παράδειγμα για $2\pi / T > (\omega_c + \omega_N)$. Για άλλους τύπους φίλτρων, όμως, είναι γενικά απαραίτητο να διατηρούμε τον περιορισμό του θεωρήματος δειγματοληψίας $(2\pi / T > 2\omega_N)$.

2.4.5. Ιδανικά φίλτρα διακριτού χρόνου

Για την ανάλυση λειτουργιών φιλτραρίσματος είναι βολικό να εισάγουμε την ιδέα του ιδανικού φίλτρου. Τότε, οι τεχνικές σχεδιασμού φίλτρων γίνονται μέθοδοι προσέγγισης για την απόκτηση υλοποιήσιμων συστημάτων, που προσεγγίζουν τη λειτουργία του ιδανικού συστήματος. Παρακάτω ασχολούμαστε με τα χαρακτηριστικά όλων των τύπων ιδανικών φίλτρων που μπορούν να προσεγγιστούν από το DFDP4/plus.

2.4.5.1. Ιδανική Καθυστέρηση

Η έννοια της καθυστέρησης είναι σημαντική στο σχεδιασμό φίλτρων, καθώς αποτελεί ενδογενή ανάγκη για την υλοποίηση πρακτικών φίλτρων. Γι' αυτό το λόγο, πριν συνεχίσουμε με τους διάφορους τύπους ιδανικών φίλτρων, αναφερόμαστε στην απεικόνιση στο πεδίο της συχνότητας της καθυστέρησης σε ένα σύστημα διακριτού χρόνου.

Η εξίσωση διαφορών για μια ιδανική καθυστέρηση (n_0) δείγματος είναι

$$y[n] = x[n-n_0] \qquad (2.36).$$

Υπολογίζοντας τους FTs και των δύο μελών της (2.36) καταλήγουμε στη γνωστή σχέση για την απόκριση συχνότητας ιδανικής καθυστέρησης

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})} = e^{-j\omega n_0 T} \qquad (2.37).$$

Παρατηρούμε ότι η απόκριση συχνότητας της ιδανικής καθυστέρησης έχει σταθερό πλάτος για όλες τις συχνότητες και η φάση είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega T})| &= 1 \\ arg\left[H(e^{j\omega T})\right] &= -\omega n_0 T \end{aligned} \qquad (2.38)$$

Η κλίση της γραμμικής συνάρτησης φάσης είναι $-n_0 T$, που είναι η αντίθετη της καθυστέρησης σε δευτερόλεπτα. Αν η κλίση διαιρεθεί με την περίοδο Τ, τότε είναι η αντίθετη της καθυστέρησης σε δείγματα.

Εξαιτίας της ιδιόμορφης σχέσης μεταξύ της κλίσης της συνάρτησης φάσης και της καθυστέρησης, συνηθίζεται να θεωρείται η συνάρτηση καθυστέρησης ομάδας, που ορίζεται ως

$$\tau(\omega T) = \frac{d\ arg\left[H(e^{j\omega T})\right]}{d\omega} \qquad (2.39).$$

Αν και η συνάρτηση καθυστέρησης ομάδας έχει ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία διάδοσης κύματος, η χρήση της για χαρακτηρισμό φίλτρων ενδείκνυται κυρίως από το γεγονός ότι, για ένα σύστημα με τέλεια γραμμική φάση, η καθυστέρηση ομάδας είναι ίση με την καθυστέρηση του συστήματος. Μη γραμμικότητα της απόκρισης φάσης είναι γενικά ανεπιθύμητη και θεωρείται ως εισαγωγή παραμόρφωσης στην έξοδο του συστήματος. Γενικά, όμως, η καθυστέρηση δια μέσω ενός συστήματος δεν είναι επιζήμια στην απόδοσή του και γι' αυτό η γραμμική φάση αποτελεί μία ανεκτή μορφή παραμόρφωσης φάσης. Άρα, η απόκλιση καθυστέρησης ομάδας του συστήματος από μία σταθερά είναι ένα βολικό μέτρο της μη γραμμικότητας της συνάρτησης φάσης και, επομένως, αποτελεί μέτρο της παραμόρφωσης φάσης του συστήματος.
Αφού η γραμμική φάση είναι επιθυμητό χαρακτηριστικό των φίλτρων, είναι ενδιαφέρον να βρούμε περιορισμούς των συντελεστών μιας εξίσωσης διαφορών ή της κρουστικής απόκρισης, έτσι, ώστε η απόκριση συχνότητας να έχει ακριβώς γραμμική φάση. Αυτοί οι περιορισμοί μπορούν εν συνεχεία να ενσωματωθούν στον αλγόριθμο σχεδιασμού για να εξασφαλιστεί η γραμμικότητα της φάσης και η απουσία παραμόρφωσης φάσης.

Τέτοιες συνθήκες είναι οι εξής :

Αν η κρουστική απόκριση ικανοποιεί τη συνθήκη

$$h[M-n] = h[n] \quad ,-\infty < n < \infty \qquad (2.40),$$

τότε η απόκριση συχνότητας είναι της μορφής

$$H(e^{j\omega T}) = R(\omega T)e^{-j\omega MT/2} \qquad (2.41),$$

όπου $R(\omega T)$ είναι πραγματική περιοδική συνάρτηση, τέτοια, ώστε $R(\omega T) = R(-\omega T)$.

Όμοια, αν

$$h[M-n] = -h[n] \quad ,-\infty < n < \infty \qquad (2.42),$$

τότε η απόκριση συχνότητας είναι της μορφής

$$H(e^{j\omega T}) = jI(\omega T)e^{-j\omega MT/2} \qquad (2.43),$$

όπου $I(\omega T)$ είναι πραγματική περιοδική συνάρτηση, τέτοια, ώστε $I(\omega T) = I(-\omega T)$

Αν επιπλέον εφαρμοστεί η συνθήκη αιτιότητας ($h[n]=0$ για $n<0$), φαίνεται ότι, για να ικανοποιείται η (2.40) ή η (2.42), θα πρέπει $h[n]=0$ και για $n<M$.

Επομένως, τα μόνα αιτιατά συστήματα, των οποίων η απόκριση φάσης μπορεί να είναι επακριβώς γραμμική με τη συχνότητα, είναι αυτά με πεπερασμένη κρουστική απόκριση (FIR).
Αφού οι συναρτήσεις $R(\omega T)$ και $I(\omega T)$ μπορούν να είναι αρνητικές, η φάση θα είναι γραμμική με εξαίρεση των π ακτινίων, όποτε οι συναρτήσεις αυτές αλλάζουν πρόσημο.
Τα προγράμματα σχεδιασμού FIR, window FIR και PMFIR φίλτρων ενσωματώνουν τους περιορισμούς γραμμικότητας της φάσης και, επομένως, οι κρουστικές αποκρίσεις και οι αποκρίσεις συχνότητας των φίλτρων, που σχεδιάζονται με αυτά τα προγράμματα, θα έχουν τις ιδιότητες συμμετρίας, που εκφράζεται με τις σχέσεις (2.40) - (2.43).
Ο όρος $e^{-j\omega n_0 T}$ αντιστοιχεί σε καθυστέρηση n0 δειγμάτων, αλλά τι συμβαίνει, αν n_0 δεν είναι ακέραιος; Στην περίπτωση αυτή η (2.36) δεν έχει νόημα. Η (2.35), όμως, δείχνει ότι, αν ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας, που δίνεται από την (2.37), μπορεί να υλοποιηθεί με n0 όχι ακέραιο, θα είχε οπωσδήποτε ολική καθυστέρηση $n_0 T$ δευτερολέπτων της αναλογικής εξόδου ενός συστήματος για φιλτράρισμα διακριτού χρόνου αναλογικών ζωνοπεριορισμένων σημάτων.
Επομένως, ένας μη ακέραιος αριθμός δειγμάτων καθυστέρησης σε σύστημα διακριτού χρόνου απαιτεί από το σύστημα να προσθέσει εσωτερικά το αρχικό αναλογικό σήμα και να επαναλάβει τη δειγματοληψία σε σημεία μετατοπισμένα από τα σημεία δειγματοληψίας εισόδου κατά ένα κλάσμα της περιόδου δειγματοληψίας.
Γενικά, τέτοιες μη ακέραιες καθυστερήσεις δε μπορούν να υλοποιηθούν ακριβώς. Από τις (2.41) και (2.43), όμως, φαίνεται ότι τα FIR συστήματα μπορούν να έχουν τέλεια γραμμική φάση αντιστοιχιζόμενη σε καθυστέρηση $M/2$ δειγμάτων. Άρα, όταν το μήκος της κρουστικής απόκρισης, $M+1$, είναι άρτιος ακέραιος, η καθυστέρηση θα είναι ένας ακέραιος συν μισό δείγμα. Αυτή η καθυστέρηση μισού δείγματος δε μπορεί να επιτευχθεί χωρίς παραμόρφωση πλάτους, δηλαδή η $R(\omega T)$ δε μπορεί να είναι σταθερή, αν $M/2$ δεν είναι ακέραιο.

2.4.5.2. Ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας

Τα πιο συνηθισμένα σε χρήση γραμμικά φίλτρα είναι τα κλασικά φίλτρα επιλογής συχνότητας. Τα φίλτρα αυτά έχουν απόκριση πλάτους, που είναι μονάδα εντός μιας περιοχής συχνοτήτων, που ονομάζεται ζώνη διάβασης και μηδενική στη ζώνη αποκοπής. Για παράδειγμα το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= 1 \quad ,|\omega| < \omega_c \\ &= 0 \quad ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{aligned} \qquad (2.44).$$

Θεωρώντας ότι το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο έχει γραμμική φάση αντίστοιχη με καθυστέρηση n_0 δειγμάτων, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h[n]=\frac{\sin\left(\omega_c\left[n-n_0\right]\right)}{\pi\left[n-n_0\right]} \quad ,-\infty<n<\infty \qquad (2.45).$$

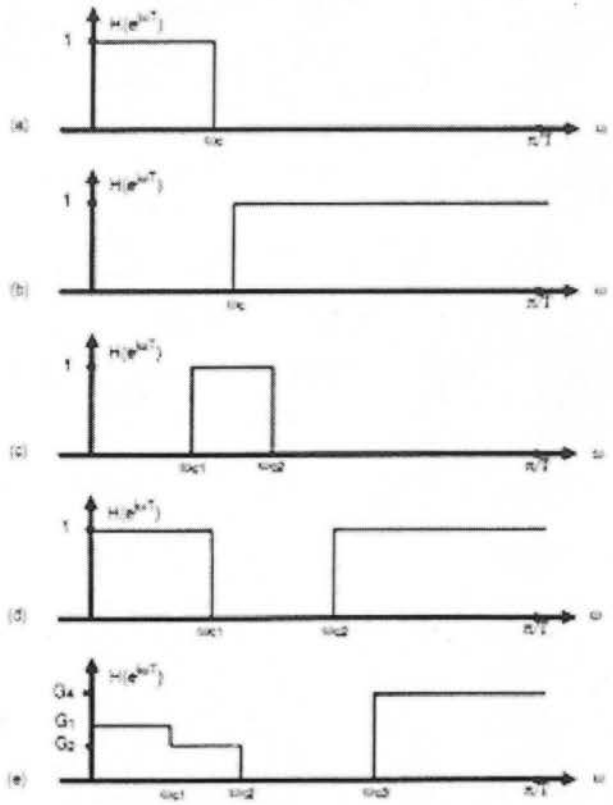
Για την περίπτωση αυτή η απόκριση συχνότητας θα είναι της μορφής (2.41).
Προφανώς, το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο είναι μη αιτιατό και καμία καθυστέρηση δε μπορεί να το κάνει αιτιατό. Επομένως, δεν είναι υλοποιήσιμο από κανένα πεπερασμένο υπολογιστικό αλγόριθμο. Η απόκριση πλάτους του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου δίνεται στο σχήμα 2.13.

Στο σχήμα αυτό δίνεται η μπάντα συχνοτήτων από 0 μέχρι π/T. Αυτό είναι επαρκές για τον προσδιορισμό της απόκρισης πλάτους για κάθε ω, αφού ξέρουμε ότι

1) το πλάτος της απόκρισης συχνότητας για ένα σύστημα με πραγματική κρουστική απόκριση είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας

2) η απόκριση συχνότητας συστήματος διακριτού χρόνου είναι περιοδική ως προς ω με περίοδο $2\pi/T$.

Επομένως, ολόκληρη η συνάρτηση απόκρισης πλάτους μπορεί να κατασκευαστεί από το σχήμα 13 απλά επεκτείνοντας την $|H(e^{j\omega T})|$ συμμετρικά γύρω από το $\omega=0$ και επαναλαμβάνοντας την περιοδικά με περίοδο $2\pi/T$.
Επίσης, αν θέλουμε να σχεδιάσουμε την απόκριση σαν συνάρτηση της μεταβλητής της ψηφιακής συχνότητας **Ω**, πρέπει απλά να πολλαπλασιάσουμε τις αναλογικές συχνότητες με T. Παρόμοια, η απόκριση συχνότητας μπορεί να σχεδιαστεί συναρτήσει της αναλογικής κυκλικής συχνότητας σε Hz, διαιρώντας το ω με 2π, ή σε KHz διαιρώντας το ω με 2000π. Τα σχήματα, που παράγονται από το DFDP4/plus είναι της μορφής του σχήματος 2.13 με τη συχνότητα σε KHz.
Άλλα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας είναι τα υψιπερατά (σχήμα 2.13b), ζωνοπερατά (σχήμα 2.13c) και ζωνοφρακτικά (σχήμα 2.13d).



Σχήμα 2.13 ideal frequency-selective filters

Σημειώνεται ότι οι υψηλές συχνότητες ενός σήματος διακριτού χρόνου εκτείνονται μόνο μέχρι $\omega = \pi/T$ και, επομένως, η ζώνη διέλευσης του ιδανικού υψιπερατού φίλτρου εκτείνεται από ω_c μέχρι π/T με το σχήμα να επαναλαμβάνεται συμμετρικά και περιοδικά με περίοδο $2\pi/T$. Αυτό ισχύει και για την άνω ζώνη διέλευσης του ιδανικού ζωνοφρακτικού φίλτρου.

Το σχήμα 2.13e είναι ένα γενικευμένο ιδανικό φίλτρο επιλογής συχνότητας, όπου μπορεί να υπάρχει αυθαίρετος αριθμός ζωνών, κάθε μία με διαφορετικό κέρδος.

Φανερά, λοιπόν, οι κλασικές μορφές, που περιγράφηκαν, είναι ειδικές περιπτώσεις της γενικευμένης αυτής ιδανικής απόκρισης. Αποδεικνύεται ότι η μοναδιαία απόκριση δείγματος ενός τέτοιου συστήματος είναι της μορφής

$$h[n] = \sum_{k=1}^{B} \frac{\Delta G_k \sin(\omega_c T[\mathrm{n} - \mathrm{n}_0])}{\pi[n - n_0]} \qquad (2.46),$$

όπου B είναι ο αριθμός των ζωνών συχνοτήτων και

$$\Delta G_k = G_k - G_{k+1} \quad , G_{B+1} = 0 \quad , \omega_c = \pi/T$$

Ακριβώς όπως στο ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο, η $h[n]$ του ιδανικού φίλτρου επιλογής πολλών συχνοτήτων είναι μη αιτιατή και μη υλοποιήσιμη.
Σημειώνεται ότι το γενικευμένο φίλτρο επιλογής πολλαπλών συχνοτήτων μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα κρουστικών αποκρίσεων χαμηλοπερατών φίλτρων. Κάθε ασυνέχεια της ιδανικής απόκρισης αντιστοιχεί σε ένα όρο του αθροίσματος. Αυτές οι οξείες ασυνέχειες είναι υπεύθυνες για τη μη υλοποιησιμότητα του ιδανικού φίλτρου επιλογής συχνοτήτων. Όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, οι πρακτικές μέθοδοι σχεδιασμού αντικαθιστούν την οξεία ασυνέχεια με μία ομαλή ζώνη διάβασης για να αποκτηθεί ένα υλοποιήσιμο φίλτρο.

2.4.5.3. Ιδανικός διαφοριστής και μετασχηματιστής Hilbert

Για αναλογικά συστήματα, ο ιδανικός διαφοριστής έχει απόκριση συχνότητας $H_a(\omega) = j\omega$ για κάθε συχνότητα, δηλαδή η απόκριση πλάτους αυξάνει γραμμικά με τη συχνότητα και η φάση είναι σταθερή στις 90 μοίρες. Σε ένα τέτοιο σύστημα η έξοδος είναι η είσοδος διαφορισμένη.
Αν η είσοδος είναι ζωνοπεριορισμένη, η έξοδος είναι και πάλι η διαφορισμένη είσοδος, αν η διαφορά φάσης είναι 90 μοίρες και το πλάτος αυξάνει γραμμικά μέχρι την υψηλότερη συχνότητα του σήματος. Το γεγονός αυτό αποτελεί τη βάση ορισμού του ιδανικού διαφοριστή συστήματος διακριτού χρόνου.
Προφανώς, η ιδέα της διαφόρισης ακολουθίας δεν έχει νόημα, αλλά μπορούμε να υποθέσουμε την ύπαρξη ενός συστήματος, του οποίου η έξοδος είναι μία ακολουθία δειγμάτων ενός διαφορισμένου ζωνοπεριορισμένου σήματος, όταν η είσοδος του διακριτού συστήματος είναι μία ακολουθία δειγμάτων του ζωνοπεριορισμένου σήματος. Θεωρώντας αναγκαία την ύπαρξη καθυστέρησης για μία υλοποιήσιμη προσέγγιση του ιδανικού διαφοριστή, αυτός ορίζεται σαν το σύστημα, του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= j\omega G e^{-j\omega n_0 T} && ,|\omega| < \omega_c \\ &= 0 && ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \quad ,\acute{o}\pi o u \quad \omega_c \le \pi/T \end{aligned} \qquad (2.47).$$

Φαίνεται ότι η παραπάνω εξίσωση ορίζει τον ιδανικό διαφοριστή για τη ζώνη συχνοτήτων, για την οποία $|\omega| < \pi/T$ και η $H(e^{j\omega T})$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi/T$.
Σημειώνεται ότι η απόκριση συχνότητας είναι της μορφής (2.43).
Διαπιστώνεται ότι, αν ένα τέτοιο σύστημα χρησιμοποιηθεί για το φιλτράρισμα ενός δειγματοληφθέντος ζωνοπερατού σήματος και αν η ακολουθία εξόδου μετατραπεί σε αναλογικό σήμα μέσω ενός ιδανικού D/A, η προκύπτουσα έξοδος θα είναι μία κλιμακωμένη και καθυστερημένη διαφορισμένη μορφή του ζωνοπερατού αναλογικού σήματος. Η παράμετρος κέρδους G, συμπεριλαμβάνεται για να επιτρέψει κλιμακώσεις στην εφαρμογή των υλοποιήσιμων προσεγγίσεων.

Η μοναδιαία κρουστική απόκριση του ιδανικού συστήματος είναι

$$h[n] = \frac{G\omega_c T \cos(\omega_c T[n-n_0])}{\pi[n-n_0]} - \frac{G\sin(\omega_c T[n-n_0])}{\pi[n-n_0]^2} \qquad (2.48).$$

Και πάλι το σύστημα δεν είναι υλοποιήσιμο, αλλά πολύ καλές προσεγγίσεις του ιδανικού διαφοριστή μπορούν να προκύψουν με τη χρήση συστημάτων FIR.

Ένα ακόμη σύστημα με απόκριση φάσης ίση με 90 μοίρες για όλες τις συχνότητες είναι ο ιδανικός μετασχηματιστής Hilbert. Τέτοια συστήματα χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές διαμόρφωσης / αποδιαμόρφωσης στενής ζώνης και δειγματοληψίας σημάτων στενής ζώνης.

Ο ιδανικός μετασχηματιστής Hilbert έχει απόκριση συχνότητας

$$H_\alpha(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

όπου $\mathrm{sgn}(\omega) = 1$ για $\omega > 0$ και $\mathrm{sgn}(\omega) = -1$ για $\omega < 0$.

Ένας ιδανικός μετασχηματιστής Hilbert διακριτού χρόνου με καθυστέρηση ορίζεται, επομένως, ως το σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega T}) = j\,\mathrm{sgn}(\omega)e^{-j\omega n_0 T} \quad ,\omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \qquad (2.49).$$
$$= 0 \quad ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u}$$

Σημειώνεται και πάλι ότι η (2.49) είναι της μορφής (2.43) και ότι ο ιδανικός μετασχηματιστής Hilbert έχει οριστεί σαν ένα ζωνοπερατό σύστημα. Η απόκριση πλάτους είναι μοναδιαία για τη ζώνη από ω_{c1} μέχρι ω_{c2} και η απόκριση φάσης είναι 90 μοίρες συν τη γραμμική φάση εξαιτίας της καθυστέρησης n_0 δειγμάτων.
Όπως και με τον διαφοριστή, η (2.49) ορίζει την περιοδική απόκριση για μία περίοδο, δηλαδή για $|\omega| < \pi/T$ και συχνότητες αποκοπής, που ικανοποιούν τις ανισώσεις

$\omega_{c1} > 0$ και $\omega_{c2} < \pi/T$.

Το σύστημα έχει απόκριση συχνότητας

$$h[n] = \frac{\cos(\omega_{c1}T[n-n_0]) - \cos(\omega_{c2}T[n-n_0])}{\pi[n-n_0]} \qquad (2.50),$$

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΤΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ

που είναι και πάλι μη υλοποιήσιμη.

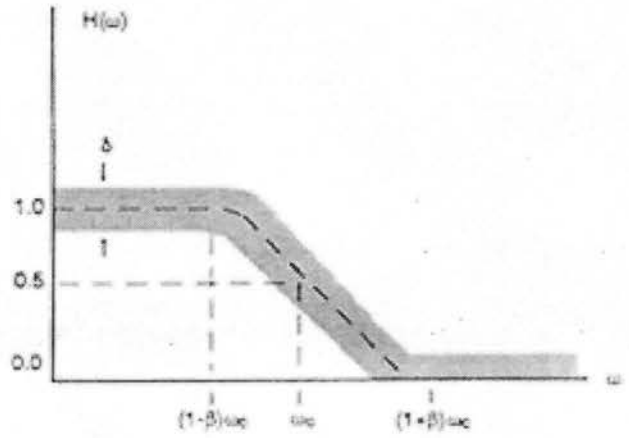
2.4.5.4 Ιδανικό φίλτρο ανορθωμένου συνημίτονου διαμόρφωσης παλμού

Ένα φίλτρο ανορθωμένου συνημίτονου διαμόρφωσης παλμού είναι ένα βαθυπερατό φίλτρο μοναδιαίου κέρδους με απόδοση ζώνης μετάβασης, που οδηγεί σε αποφυγή επικάλυψης συμβόλων σε συγκεκριμένα τηλεπικοινωνιακά συστήματα πολυπλεξίας στο χρόνο. Αν και δεν είναι τα μοναδικά φίλτρα με τη συγκεκριμένη ιδιότητα, εντούτοις, συνιστώνται σε διεθνή standards πολύ συχνά.

Η απόκριση συχνότητας των φίλτρων αυτών είναι

$$H(\omega)=\begin{cases}=1 & ,0\le|\omega|<(1-\beta)\omega_c\\ =0.5\left[1-\sin\left(\dfrac{\pi(\omega-\omega_c)}{\beta\omega_c}\right)\right] & ,(1-\beta)\omega_c\le|\omega|\le(1+\beta)\omega_c\\ =0 & (1+\beta)\omega_c\le|\omega|\le\pi/T\end{cases} \qquad (2.51)$$

και φαίνεται στο σχήμα 2.14.



Σχήμα 2.14 Ιδανική απόκριση φίλτρου ανορθωμένου συνημίτονου (ideal raised-cosine frequency response)

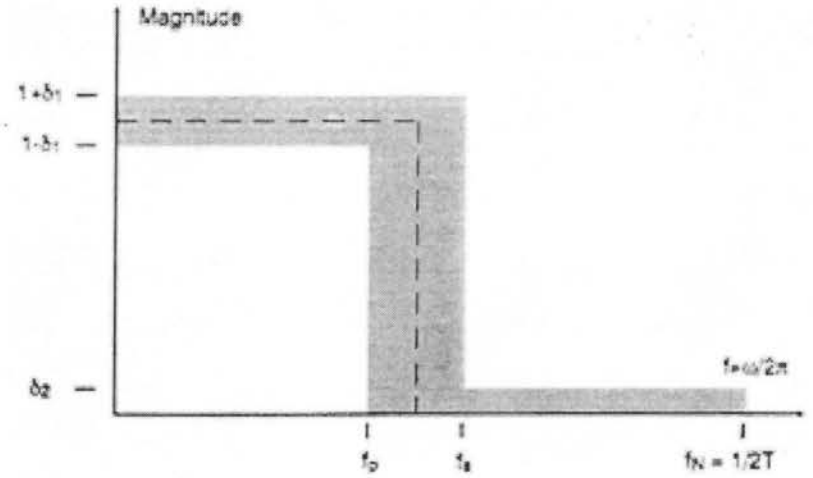
2.5. Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων

Δείξαμε προηγουμένως, ότι τα υπολογιστικά υλοποιήσιμα, γραμμικά και αμετάβλητα στη μετατόπιση συστήματα έχουν αιτιατές συναρτήσεις συστήματος της μορφής (2.24). Περιγράψαμε, επίσης, κάποια ιδανικά γραμμικά και αμετάβλητα στη μετατόπιση συστήματα με όρους εξιδανικευμένης συνάρτησης απόκρισης συχνότητας, που όμως δεν

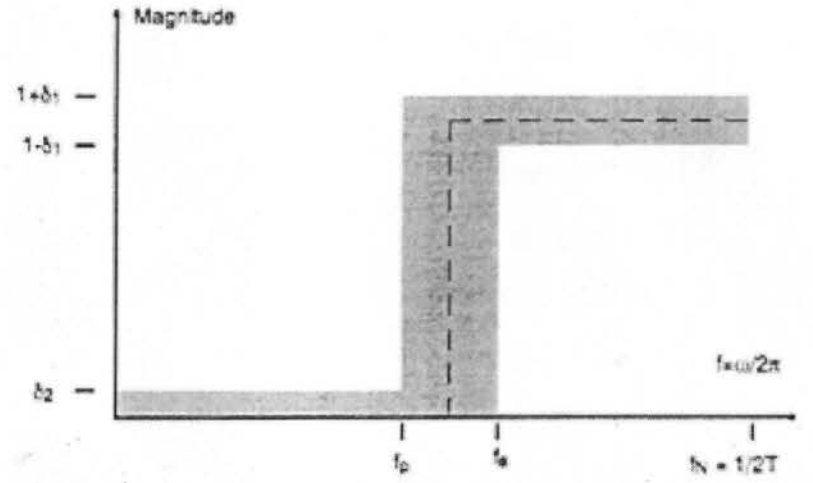
είναι αιτιατές συναρτήσεις. Οι κρουστικές αποκρίσεις δε μπορούν να υλοποιηθούν με ένα πεπερασμένο αριθμό υπολογισμών. Κρίνεται σκόπιμο, λοιπόν, λόγω της μεγάλης χρησιμότητας των φίλτρων επιλογής συχνότητας, να αναφερθούμε στη σχεδίαση υλοποιήσιμων συστημάτων, που προσεγγίζουν τις ιδανικές αποκρίσεις συχνότητας.

2.5.1. Προσέγγιση ιδανικής απόκρισης συχνότητας

Η κύρια αιτία της μη υλοποιησιμότητας των ιδανικών φίλτρων είναι οι οξείες ασυνέχειες στις συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας. Για να προσεγγίσουμε τις ιδιότητες της επιλογής συχνότητας ή της μετατόπισης φάσης κατά 90 μοίρες είναι απαραίτητο να εισάγουμε κάποια ζώνη διάβασης σε κάθε συχνότητα, όπου υπάρχει ασυνέχεια στην απόκριση του ιδανικού φίλτρου. Είναι, επίσης, αναγκαίο να επιτρέψουμε κάποια απόκλιση από το σταθερό κέρδος στην ζώνη διέλευσης και από το μηδενικό κέρδος στη ζώνες αποκοπής.
Τα σχήματα 15 έως 18 δείχνουν κάποιες ανοχές στα πρότυπα των ψηφιακών φίλτρων επιλογής συχνότητας. Η διακεκομμένη γραμμή σε κάθε σχήμα απεικονίζει την απόκριση συχνότητας του αντίστοιχου ιδανικού φίλτρου.
Οι σκιασμένες περιοχές δείχνουν τις ανεκτές αποκλίσεις από την ιδανική απόκριση. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει μία (ή περισσότερες) ζώνη διέλευσης, στην οποία το πλάτος της απόκρισης συχνότητας δε μπορεί να αποκλίνει από τη μονάδα περισσότερο από $\pm\delta_1$.
Παρόμοια, υπάρχει τουλάχιστον μία ζώνη αποκοπής, στην οποία το πλάτος της απόκρισης δε μπορεί να αποκλίνει από το μηδέν περισσότερο από δ_2. Η απόκριση συχνότητας είναι σχεδιασμένη συναρτήσει της αναλογικής κυκλικής συχνότητας $f = \omega/2\pi$.
Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιείται και κατά το σχεδιασμό αποκρίσεων του πακέτου DFDP4/plus. Οι πολύπλοκες εξισώσεις της προηγούμενης παραγράφου θα ήταν εξαιρετικά (και χωρίς ιδιαίτερη χρησιμότητα) περιπλοκότερες αν, αντί του ω, χρησιμοποιούσαμε το $2\pi f$. Στο σημείο αυτό η αλλαγή αυτή δε δημιουργεί προβλήματα. Επίσης, η απόκριση είναι σχεδιασμένη στη ζώνη από 0 μέχρι $f_N = 1/2T$ (δηλαδή στο μισό της συχνότητας δειγματοληψίας).



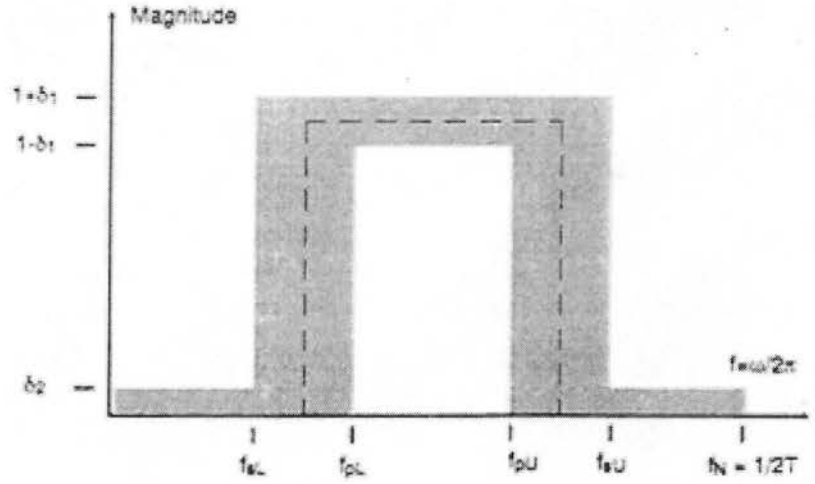
Σχήμα 2.15 Σχήμα ανοχής για χαμηλοπερατό φίλτρο (tolerance scheme for lowpass filters)



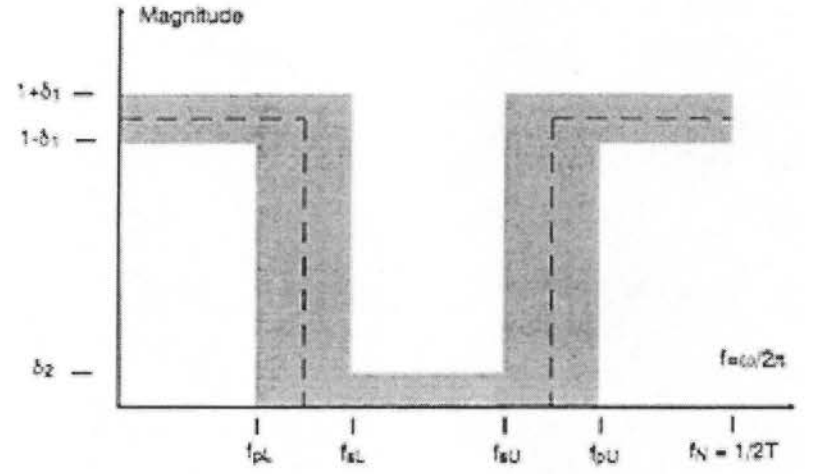
Σχήμα 2.16 Σχήμα ανοχής για υψιπερατό φίλτρο (tolence scheme for highpass filters)

Στα παραδείγματα ανοχών των σχημάτων 2.15 – 2.18 δεν υπάρχει μία συχνότητα αποκοπής για κάθε ασυνέχεια της ιδανικής απόκρισης αλλά μία συχνότητα αποκοπής στη ζώνη διέλευσης (f_p) και μία συχνότητα αποκοπής στη ζώνη αποκοπής (f_s). Η περιοχή μεταξύ των συχνοτήτων αυτών λέγεται ζώνη διάβασης. Τα σχήματα αυτά αναφέρονται μόνο στα πλάτη των αποκρίσεων.

Στα σχεδιαστικά προγράμματα του DFDP4/plus δεν ορίζουμε αυστηρά τη φάση, αλλά στις σχεδιαστικές εξισώσεις εισάγεται μία υποθετική φάση.

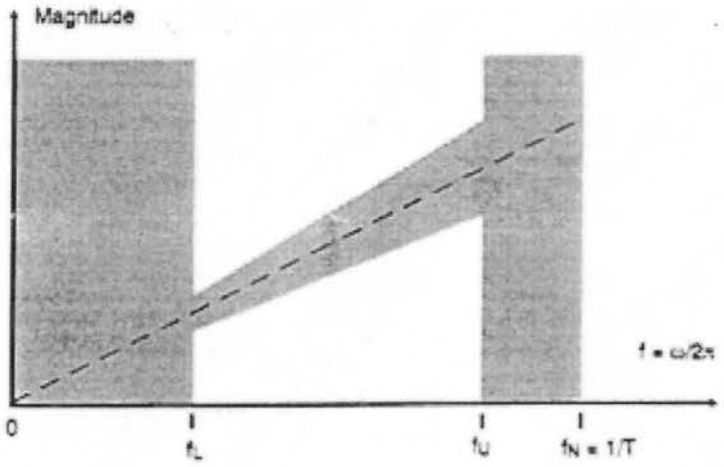


Σχήμα 2.17 Σχήμα ανοχής για ζωνοπερατό φίλτρο (tolerance scheme for bandpass filters)



Σχήμα 2.18 tolerance scheme for bandstop filters

Τα σχήματα 2.19 και 2.20 δείχνουν τις ανοχές για διαφοριστές και μετασχηματιστές Hilbert. Για το διαφοριστή, (σχήμα 2.19) το πλάτος της ζώνης ανοχής αυξάνεται ανάλογα με τη συχνότητα, δηλαδή το μέγιστο ανεκτό σφάλμα προσέγγισης ορίζεται σαν ένα σταθερό ποσοστό του πλάτους της απόκρισης συχνότητας. Αυτό φαίνεται λογικό, αφού η απόκριση πλάτους είναι πολύ μικρή κοντά στη μηδενική συχνότητα και γίνεται αρκετά μεγάλη στην περιοχή γύρω από τη μισή της συχνότητας δειγματοληψίας.

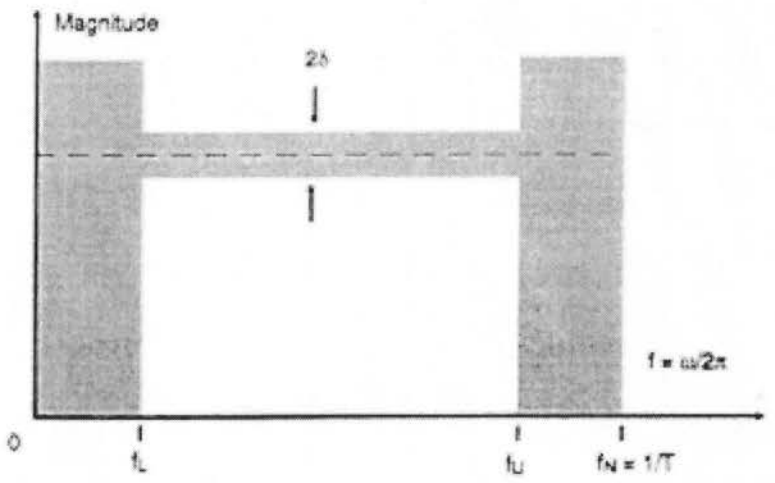


Σχήμα 2.19 tolerance scheme for differentlator

Η εικόνα 2.20 δείχνει τις ανοχές στο πλάτος της απόκρισης συχνότητας του μετασχηματιστή Hilbert. Στην περίπτωση αυτή η ιδανική απόκριση είναι μονάδα στη ζώνη διέλευσης και μηδενική στη ζώνη αποκοπής. Οι ανοχές επιτρέπουν μία κυμάτωση κατά $\pm\delta$ στη ζώνη διέλευσης. Στην προσέγγιση αυτή ενυπάρχει η υπόθεση ότι η απόκριση πλάτους είτε τείνει στο μηδέν είτε παραμένει κοντά στη μονάδα στις ζώνες μετάβασης.

Με το πακέτο DFDP4/plus οι διαφοριστές και οι μετασχηματιστές Hilbert σχεδιάζονται μόνο σαν φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης. Αυτό είναι σκόπιμο, καθώς πρέπει να διατηρηθεί μία μετατόπιση φάσης κατά 90 μοίρες σε όλες τις συχνότητες. Η απαίτηση αυτή δεν είναι δυνατό να ικανοποιηθεί με φίλτρα IIR, αλλά όπως δείξαμε προηγουμένως, η φάση ενός φίλτρου FIR μπορεί να είναι ακριβώς 90 μοίρες συν μία γραμμική συνιστώσα φάσης λόγω της καθυστέρησης του φίλτρου.

Για τα φίλτρα ανορθωμένου συνημίτονου διαμόρφωσης παλμού, τα οποία σχεδιάζονται μόνο ως FIR συστήματα, υπάρχει ανοχή σταθερού πλάτους στη ζώνη από $f = 0$ μέχρι $f = f_N$.



Σχήμα2.20 Σχήμα ανοχής για μετασχηματιστή hilbert (tolerance scheme for hilbert transformer)

Το πακέτο DFDP4/plus ενσωματώνει τρία προγράμματα σχεδιασμού φίλτρων: IIR, window FIR και PMFIR. Κάθε ένα χρησιμοποιεί διαφορετική μέθοδο σχεδιασμού. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με τη σχεδίαση FIR συστημάτων, καθώς αυτά χρησιμοποιήσαμε κατά το σχεδιασμό της τράπεζας φίλτρων.

2.5.2 Σχεδίαση FIR φίλτρων με τη μέθοδο παραθύρου Kaiser

Το πρόγραμμα σχεδιασμού FIR φίλτρων με παράθυρο στο DFDP4/plus βασίζεται στη μέθοδο του παραθύρου Kaiser. Στη μέθοδο αυτή ορίζεται μια ιδανική απόκριση συχνότητας και υπολογίζεται η αντίστοιχη ιδανική κρουστική απόκριση, μέρος της οποίας στη συνέχεια αποκόπτεται, κρατώντας ένα πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών δειγμάτων. Αν δηλαδή η ιδανική κρουστική απόκριση είναι $h_i[n]$, τότε η κρουστική απόκριση του υπό σχεδιασμό φίλτρου με τη μέθοδο παραθύρου θα είναι

$$h[n] = h_i[n]w[n] \qquad (2.56),$$

όπου $w[n]$ είναι μία συνάρτηση παραθύρου τέτοια, ώστε $w[n] = 0$ για $n < 0$ και $n > M$. Η προκύπτουσα κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένου μήκους. Αν η ιδανική κρουστική απόκριση έχει τις ιδιότητες συμμετρίας των σχέσεων (2.40) ή (2.42) και αν $w[n-M] = w[n]$, το σχεδιασμένο με τη μέθοδο παραθύρου φίλτρο θα έχει επίσης γραμμική φάση.
Το απλούστερο παράθυρο είναι το τετραγωνικό

$$\begin{aligned} w[n] &= 1 \quad ,0 \le n \le M \\ &= 0 \qquad ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{aligned} \qquad (2.57)$$

Αν όμως χρησιμοποιηθεί το παράθυρο αυτό η προκύπτουσα απόκριση συχνότητας (ο FT της $h[n]$) παρουσιάζει ταλαντώσεις Gibbs σε κάθε ασυνέχεια της ιδανικής απόκρισης συχνότητας.
Συγκεκριμένα , τα σχεδιασμένα με τη μέθοδο παραθύρου φίλτρα έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες

- Το εύρος της περιοχής διάβασης γύρω από κάθε ασυνέχεια της ιδανικής απόκρισης είναι κατά προσέγγιση συμμετρικό γύρω από το σημείο της ασυνέχειας.
- Το ονομαστικό πλάτος της ζώνης διάβασης είναι αντιστρόφως ανάλογο του μήκους του παραθύρου.
- Οι ταλαντώσεις Gibbs εκτείνονται εξίσου σε κάθε πλευρά του σημείου ασυνέχειας και η ταλαντώσεις φθίνουν σε πλάτος, καθώς οι συχνότητες αποκλίνουν από τη συχνότητα του σημείου ασυνέχειας.

Σχηματίζοντας κατάλληλα τη συνάρτηση παραθύρου είναι δυνατό να μειώσουμε το μέγεθος των ταλαντώσεων Gibbs, δίνοντας, έτσι, μία καλύτερη προσέγγιση στις ομαλές ζώνες της ιδανικής απόκρισης συχνότητας. Η βελτίωση αυτή πετυχαίνεται, όμως, σε βάρος της διεύρυνσης του πλάτους της ζώνης διάβασης γύρω από τα σημεία ασυνέχειας.

Έχουν προταθεί πολλές συναρτήσεις παραθύρων για το σκοπό αυτό, αλλά ο J.F.Kaiser ανακάλυψε μία συνάρτηση παραθύρου, η οποία έχει μία μεταβλητή παράμετρο, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το 'συμβιβασμό' μεταξύ του πλάτους κυμάτωσης και του εύρους διάβασης.
Το παράθυρο Kaiser εμπλέκει την μηδενικής τάξης συνάρτηση Bessel πρώτου είδους. Με εμπειρικά μέσα κατέληξε ότι η 'ανταλλαγή' μεταξύ της τάξης του φίλτρου, του πλάτους της κυμάτωσης και του εύρους διάβασης δίνεται από την εξίσωση

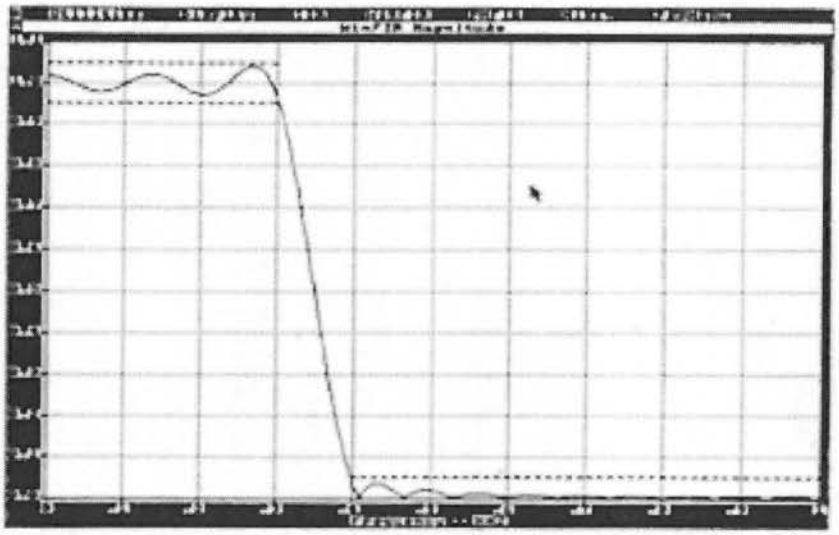
$$filter\ order = M_{KW}\frac{-20\log\delta - 8}{14.36\Delta fT} \qquad (2.58),$$

όπου δ είναι η μέγιστη κυμάτωση, Δf είναι το εύρος διάβασης στο σημείο ασυνέχειας και T είναι η περίοδος δειγματοληψίας.
Ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται από το πρόγραμμα σχεδιασμού window FIR για τον υπολογισμό της απαιτούμενης τάξης του υπό σχεδίαση φίλτρου, έτσι, ώστε να ικανοποιούνται συγκεκριμένες παράμετροι. Επειδή ο τύπος είναι εμπειρικός, δεν αναμένεται να δίνει ακριβείς υπολογισμούς για όλους τους τύπους ιδανικών φίλτρων και για κάθε συνδυασμό παραμέτρων. Γενικά, πάντως, η τάξη του φίλτρου, που παράγεται, βρίσκεται πολύ κοντά στην επιθυμητή, ελαχιστοποιώντας, έτσι, τις προσπάθειες προσέγγισης από εκεί και μετά.
Το σχήμα 2.25 δίνει την απόκριση συχνότητας ενός βαθυπερατού φίλτρου τάξης M = 27 σχεδιασμένου με τη μέθοδο παραθύρου Kaiser, ώστε να ικανοποιεί τις απαιτήσεις

$$\delta_1 = \delta_2 = 0.05 \;,\; 1/T = 2kHz \;,\; f_p = 0.3kHz \;,\; f_s = 0.4kHz$$

Σημειώνουμε ότι το πρόγραμμα του *DFDP* για σχεδιασμό *FIR* φίλτρων με τη μέθοδο παραθύρου αναφέρεται στο μήκος της κρουστικής απόκρισης ως M+*1* όπου M είναι ο βαθμός του πολυωνύμου, που αναπαριστά την απόκριση συχνότητας του φίλτρου.

Στο σχήμα 2.25 παρατηρούμε ότι η μέγιστη κυμάτωση συμβαίνει εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας της ιδανικής απόκρισης και ότι αυτή αποσβένεται, όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο αυτό. Επίσης, παρατηρούμε ότι η κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης είναι περίπου ίση σε πλάτος με την κυμάτωση της ζώνης αποκοπής.



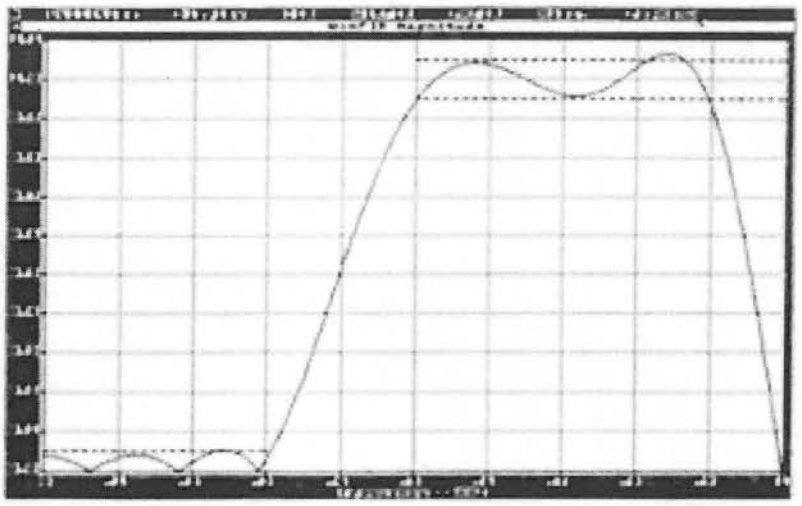
Σχήμα 2.25 Χαμηλοπερατό φίλτρο παραθύρου Kaiser (M=27) (Kaiser window lowpass filter)

Τα σχήματα 2.26 και 2.27 δείχνουν υψιπερατό φίλτρο σχεδιασμένο με προδιαγραφές

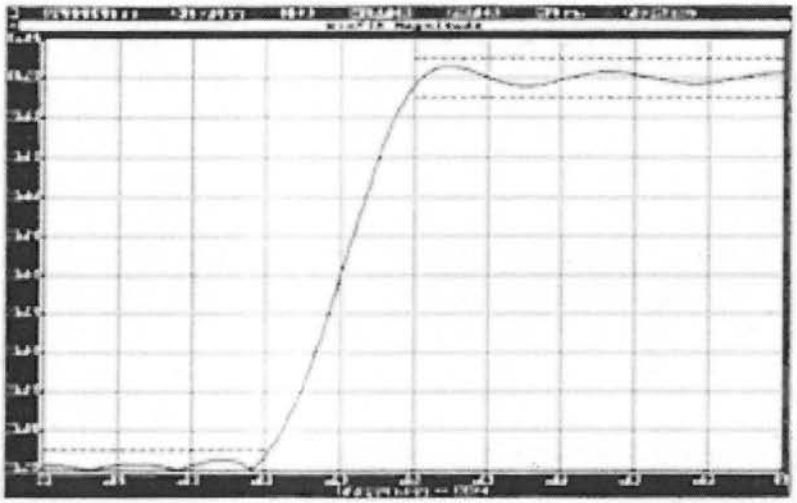
$$\delta_1 = \delta_2 = 0.05 \;,\; 1/T = 2kHz \;,\; f_p = 0.5kHz \;,\; f_s = 0.3kHz$$

για τις περιπτώσεις που M=16 και M=17 αντίστοιχα.

Διαισθητικά θα περιμέναμε ότι η προσέγγιση θα βελτιωνόταν για M=17 σε σχέση με την περίπτωση όπου M=16. Εξαιτίας, όμως, μιας περίεργης ιδιότητας των συστημάτων γραμμικής φάσης αυτό δεν ισχύει. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι, όταν το μ είναι περιττό και η κρουστική απόκριση ικανοποιεί την σχέση (2.40), το πλάτος της απόκρισης συχνότητας πρέπει να είναι μηδενικό για $f = 1/2T$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.27.



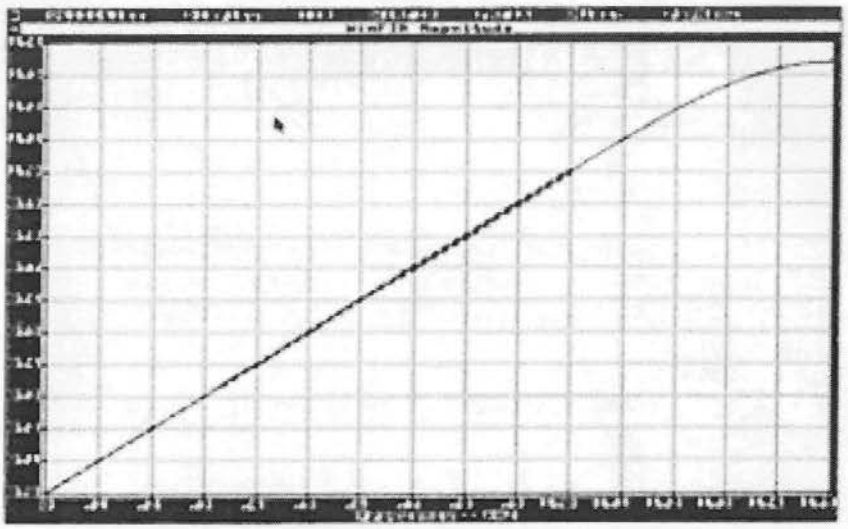
Σχήμα 2.26 Kaiser window FIR Highpass filter (M=16)



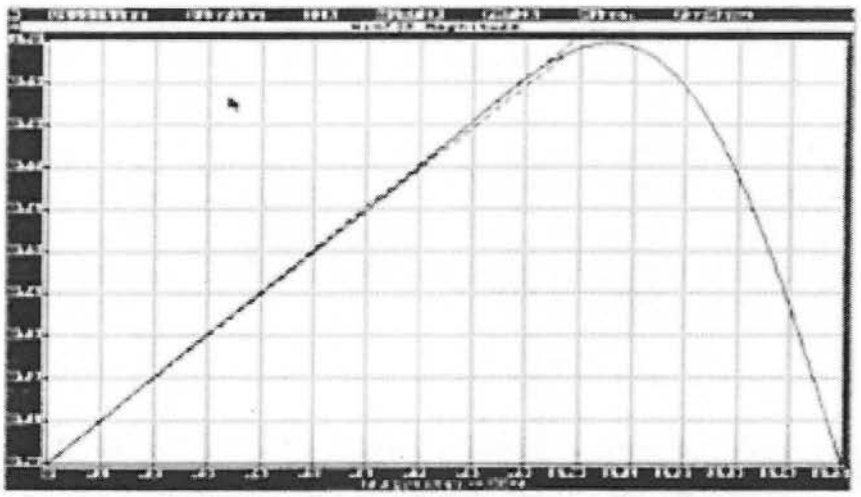
Σχήμα 2.27 Kaiser window FIR Highpass filter (M=17)

Ακόμα μία περίεργη ιδιότητα των FIR φίλτρων γραμμικής φάσης απεικονίζεται στα σχήματα 2.28 και 2.29. Αποδεικνύεται ότι, αν η κρουστική απόκριση ικανοποιεί την σχέση (2.42), όπως στις περιπτώσεις του διαφοριστή ή του μετασχηματιστή Hilbert, και αν το M είναι άρτιο, τότε η απόκριση συχνότητας είναι μηδενική τόσο για $f = 0$ όσο και $f = 1/2T$.

Από την άλλη μεριά, όταν το M είναι περιττό και η (42) ισχύει, η απόκριση συχνότητας περιορίζεται σε μηδενική τιμή μόνο για $f = 0$. Έτσι, το σχήμα 2.28 δείχνει ότι για M=12, η προσέγγιση δίνει ταλαντώσεις Gibbs λόγω της ασυνέχειας στο $f = 1/2T$, ενώ το σχήμα 2.29 δείχνει ότι για M=9 αυτές οι ταλαντώσεις δεν συμβαίνουν.



Σχήμα 2.28 Kaiser window differentiator (M=12)



Σχήμα 2.29 Kaiser window differentiator (M=9)

Σημειώνεται ότι οι περιορισμοί αυτοί προέρχονται από τη γραμμικότητα της φάσης και είναι ανεξάρτητοι της μεθόδου υλοποίησης του FIR φίλτρου. Οι περιορισμοί αυτοί αναφέρθηκαν για να αναδείξουν τις επιπτώσεις στο σχεδιασμό των φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων, όμως προκύπτουν και στην περίπτωση όπου τα φίλτρα σχεδιάζονται με τη μέθοδο PMFIR.
Γενικά, αν ένα FIR σύστημα έχει γραμμική φάση, τότε η απόκριση συχνότητας περιορίζεται σε μηδενική τιμή για $f = 1/2T$ όταν

• $h[M-n] = h[n]$ και το M είναι περιττό. Αυτό υπονοεί ότι το M θα πρέπει να είναι άρτιο (δηλαδή το μήκος της κρουστικής απόκρισης M+1 να είναι περιττό), όταν σχεδιάζονται

υψηπερατά ή ζωνοαποκοπτικά φίλτρα.

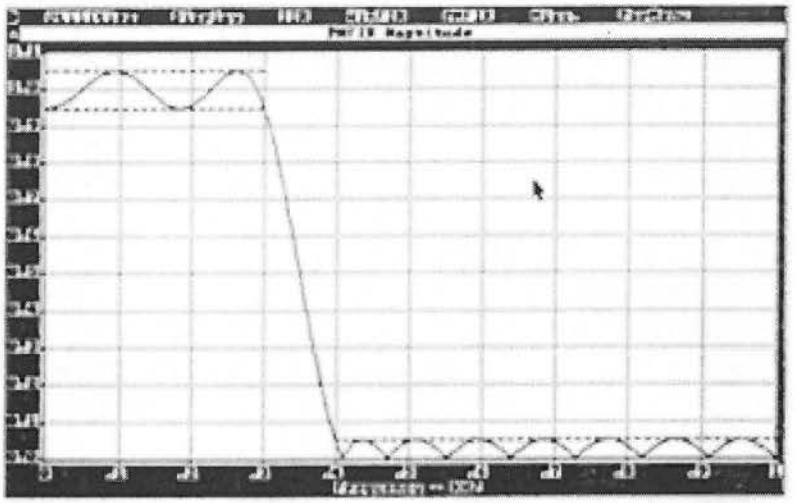
• $h[M-n]=-h[n]$ και το Μ είναι άρτιο. Αν και μερικές φορές προκύπτουν ικανοποιητικές προσεγγίσεις για διαφοριστές ή μετασχηματιστές Hilbert με Μ άρτιο, γενικά καταλήγουμε σε καλύτερες προσεγγίσεις παίρνοντας Μ περιττό (το μήκος της κρουστικής απόκρισης Μ+1 να είναι άρτιο).

Σημειώνουμε, ωστόσο, ότι, αν το Μ είναι περιττό, υπονοείται ότι η καθυστέρηση του φίλτρου δεν είναι ακέραια.

2.5.3 Σχεδίαση FIR φίλτρων με τη μέθοδο Parks-McClellan

Όπως και στην περίπτωση των IIR φίλτρων, έτσι και σ' αυτή των IIR, οι προσεγγίσεις ίσης κυμάτωσης (equirriple) καταλήγουν στη χαμηλότερη δυνατή τάξη του υπό σχεδίαση φίλτρου, ώστε να ικανοποιούνται συγκεκριμένες προδιαγραφές. Οι προσεγγίσεις αυτές μπορούν να βρεθούν μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας, που ονομάζεται αλγόριθμος ανταλλαγής Remez.
Αυτός ο αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στο σχεδιασμό FIR φίλτρων από τους T.W. Parks και J.H. McClellan.

Στην προσέγγιση αυτή, η τάξη του φίλτρου και οι άκρες των ζωνών διέλευσης και αποκοπής είναι σταθερές και οι συντελεστές της κρουστικής απόκρισης του μεταβάλλονται συστηματικά, ώστε να αποκτηθεί συμπεριφορά ίσης κυμάτωσης σε κάθε ζώνη προσέγγισης. Όταν αυτό επιτευχθεί, ο αλγόριθμος τερματίζεται και μετρώνται τα προκύπτοντα σφάλματα προσέγγισης. (Εισάγοντας μία συνάρτηση βάρους στην επαναληπτική διαδικασία είναι δυνατή η επιβολή διαφορετικών σφαλμάτων προσέγγισης για διαφορετικές ζώνες συχνοτήτων)
Τα φίλτρα, που προκύπτουν με αυτή τη μέθοδο, είναι βέλτιστα με την έννοια του ελάχιστου σφάλματος προσέγγισης για δεδομένο σετ συχνοτήτων διέλευσης και αποκοπής. Στη σχεδιαστική διαδικασία μπορεί να εισαχθεί η έννοια της γραμμικής φάσης, εφαρμόζοντας τους περιορισμούς (2.40) ή (2.42) στην κρουστική απόκριση.



Σχήμα 2.30 PMFIR lowpass filter

Η δομή της επαναληπτικής διαδικασίας είναι τέτοια, ώστε μόνο η τάξη του φίλτρου M και οι άκρες των ζωνών διέλευσης και αποκοπής να μπορούν να προσδιοριστούν εκ των προτέρων. Ο αλγόριθμος υπολογίζει την βέλτιστη προσέγγιση και στη συνέχεια μετρά το μέγιστο σφάλμα. Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιηθεί μία διαδικασία δοκιμών μέχρι να βρεθεί η ελάχιστη τάξη του φίλτρου, που δίνει το επιθυμητό σφάλμα προσέγγισης. Η διαδικασία μπορεί να επιταχυνθεί με χρήση ενός εμπειρικού τύπου

$$filter\ order = M_{PH} = \frac{-10\log_{10}\delta_1\delta_2 - 13}{14.6\Delta fT} \qquad (2.59),$$

όπου δ_1 είναι η κυμάτωση της ζώνης διέλευσης, δ_2 η κυμάτωση της ζώνης αποκοπής και Δf είναι το εύρος της ζώνης μετάβασης του βαθυπερατού φίλτρου.

Για την περίπτωση που $\delta_1 = \delta_2$, η οποία θεωρείται ότι ισχύει στην περίπτωση της μεθόδου παραθύρου Kaizer, είναι ενδιαφέρουσα η σύγκριση των σχέσεων (2.58) και (2.59). Με καλή προσέγγιση ισχύει

$$M_{PH} = M_{KW} = \frac{1}{3\Delta fT} \qquad (2.60).$$

Οι σχέσεις (2.58)-(2.60) προέκυψαν εμπειρικά. Επομένως, δε μπορούν πάντοτε να προβλέψουν τη σωστή τάξη του φίλτρου, ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτούμενες προδιαγραφές, αλλά οι προβλέψεις τους συνήθως απέχουν μία ή δύο τάξεις από την σωστή. Η (2.60) δείχνει ότι, αν το ΔfT είναι μεγάλο, υπάρχει μικρή διαφορά των απαιτούμενων τάξεων μεταξύ των μεθόδων Kaizer και ίσης κυμάτωσης. Όμως, σε φίλτρα με πολύ στενές ζώνες μετάβασης η διαφορά γίνεται σημαντική. Η σχέση (2.59)

συμπεριλαμβάνεται στο σχεδιαστικό πρόγραμμα του DFDP μέσω του αλγορίθμου PMFIR, ώστε να ελαχιστοποιεί τις απαιτούμενες δοκιμές.
Το σχήμα 30 δίνει ένα παράδειγμα βαθυπερατού φίλτρου σχεδιασμένου με τη μέθοδο PMFIR.
Στην περίπτωση αυτή, για να ικανοποιούνται οι προδιαγραφές, απαιτείται τάξη φίλτρου M=24, ενώ στην περίπτωση της μεθόδου παραθύρου Kaizer απαιτούνταν M=28.

2.6. Επιπτώσεις του κβαντισμού στα ψηφιακά φίλτρα

Τα ψηφιακά φίλτρα πρέπει να υλοποιηθούν με αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας. Οι είσοδοι και οι έξοδοι των ψηφιακών φίλτρων αναπαρίστανται από ακολουθίες δυαδικών αριθμών πεπερασμένου μήκους. Επομένως, σε κάθε πρακτική υλοποίηση ψηφιακών φίλτρων πρέπει να υπάρξει ειδική μέριμνα σχετικά με τις επιπτώσεις της πεπερασμένης αριθμητικής ακρίβειας.

Οι κύριες επιπτώσεις κατατάσσονται ως εξής :

- Κβαντισμός δειγμάτων ακολουθίας εισόδου
- Κβαντισμός των συντελεστών της εξίσωσης διαφορών
- Στρογγυλοποίηση των γινομένων ή των συσσωρευμένων γινομένων

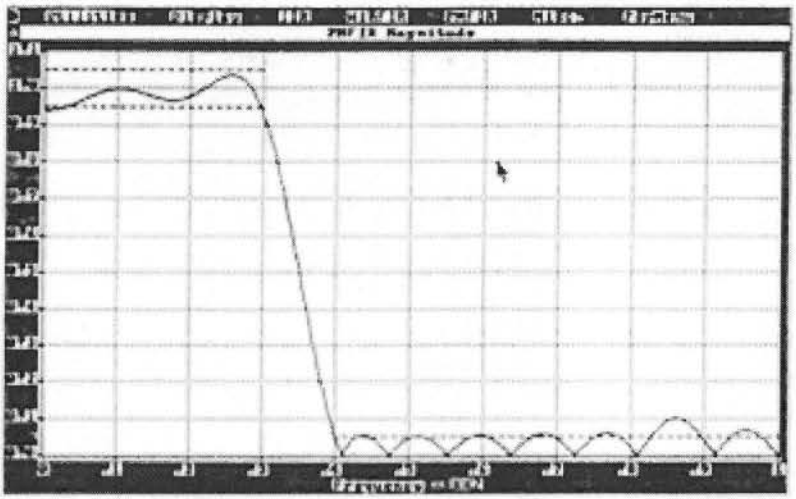
Προηγουμένως, εξετάσαμε τις επιπτώσεις του κβαντισμού στα δείγματα του σήματος. Δείξαμε εκεί ότι το θεμελιώδες πρόβλημα του κβαντισμού είναι ο 'συμβιβασμός' μεταξύ του σφάλματος κβαντισμού και του εύρους από κορυφή σε κορυφή. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η 'ανταλλαγή' αυτή περιπλέκει την υλοποίηση ενός ψηφιακού φίλτρου.

2.6.1. Κβάντιση συντελεστών

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι υλοποίησης ψηφιακών φίλτρων χρησιμοποιούν αριθμητική κινητής υποδιαστολής. Οι συντελεστές του φίλτρου, που υπολογίζονται γενικά, εκφράζονται σαν αριθμοί κινητής υποδιαστολής. Αν το φίλτρο υλοποιείται με αριθμητική σταθερής υποδιαστολής, είναι αναγκαίο να αναπαραστήσουμε τους συντελεστές σαν δυαδικούς αριθμούς σταθερής υποδιαστολής και γενικά με πολύ λιγότερη ακρίβεια από αυτή, που χρησιμοποιήθηκε στη διαδικασία σχεδιασμού.
Επομένως, το φίλτρο που υλοποιείται τελικά δεν είναι αυτό της διαδικασίας σχεδιασμού, αλλά ένα άλλο με ελαφρώς διαφοροποιημένους συντελεστές. Έτσι, υλοποιείται ένα φίλτρο, του οποίου η απόκριση συχνότητας δεν είναι αυτή, που προβλεπόταν από τη διαδικασία του σχεδιασμού, και (στην περίπτωση IIR φίλτρων, αφού τα FIR είναι πάντα ευσταθή) μπορεί αυτό τελικά να προκύψει ασταθές μέσω της διαδικασίας κβαντισμού.

Σαν παράδειγμα χρησιμοποιούμε την απόκριση συχνότητας του σχήματος 2.31. Αυτή είναι η απόκριση ενός ψηφιακού φίλτρου, που προέκυψε με κβαντισμό ακρίβειας των 6

bit ψηφιακού φίλτρου σχεδιασμένου με τη μέθοδο Parks - McClellan. Από την απόκριση του σχήματος φαίνεται ότι το φίλτρο δεν ανταποκρίνεται πλέον στις προδιαγραφές. Βέβαια, κβαντισμός των 6 bit είναι ακραία περίπτωση και χρησιμοποιείται μόνο για λόγους απεικόνισης, αλλά παρόμοια υποβάθμιση της απόκρισης συχνότητας παρατηρείται και σε φίλτρα με αυστηρότερες προδιαγραφές και πολύ καλύτερη ακρίβεια. Το παράδειγμα αυτό αναδεικνύει ένα εν δυνάμει πρόβλημα και η σοβαρότητά του εξαρτάται από κάθε εφαρμογή.



Σχήμα 2.31 equiripple FIR design (6 bit coefficients)

Γενικά, πάντως, οι παρακάτω προτάσεις έχουν κάποια ισχύ :

• Η κβάντιση των συντελεστών είναι πολύ κρίσιμο πρόβλημα, όταν οι προδιαγραφές του υπό υλοποίηση φίλτρου είναι ιδιαίτερα αυστηρές (στενή ζώνη διάβασης, μικρό σφάλμα προσέγγισης).
•Για φίλτρα IIR οι υλοποιήσεις σε μορφή συστημάτων καταρράκτη δεύτερης τάξης είναι λιγότερο ευαίσθητες στον κβαντισμό των συντελεστών από τις άλλες ευθείες μορφές.
• Αν χρησιμοποιείται ακρίβεια 12-16 bits, τότε γενικά η παρατηρούμενη υποβάθμιση της απόκρισης συχνότητας είναι μικρή.

Τα προγράμματα σχεδιασμού του DFDP4/plus επιτρέπουν τον κβαντισμό των συντελεστών, μόνο αφού ολοκληρωθεί ο σχεδιασμός με ακρίβεια των 32 bits. Στη συνέχεια, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σχεδιαστικές δυνατότητες του προγράμματος έτσι, ώστε μέσω εκτίμησης της απόκρισης συχνότητας να ελέγξουμε αν το φίλτρο με τους κβαντισμένους συντελεστές εξακολουθεί να ικανοποιεί τις αρχικές προδιαγραφές. Αν η προκύπτουσα απόκριση δεν μας ικανοποιεί, θα πρέπει να αλλάξουμε τις προδιαγραφές, να σχεδιάσουμε ένα νέο φίλτρο και να επαναλάβουμε την κβάντιση των συντελεστών του και να συγκρίνουμε ξανά τις προδιαγραφές. Σε μερικές περιπτώσεις αυτό συνεπάγεται την αύξηση της τάξης του φίλτρου.

2.6.2. Στρογγυλοποίηση σε υλοποιήσεις σταθερής υποδιαστολής

Οι εξισώσεις (2.20), (2.21), (2.25), (2.27), (2.28) είναι εξισώσεις διαφορών, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν υλοποιήσεις ψηφιακών φίλτρων. Ένα κοινό χαρακτηριστικό των εξισώσεων αυτών είναι η απαίτηση για πολλαπλασιασμό ενός δείγματος του σήματος ή μίας εσωτερικής μεταβλητής της δομής του φίλτρου με ένα σταθερό συντελεστή και η άθροιση τέτοιων γινομένων για τον υπολογισμό των εξόδων ή άλλων εσωτερικών μεταβλητών του φίλτρου.

Με δυαδική αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας για την υλοποίηση τέτοιων υπολογιστικών διαδικασιών είναι γενικά αναγκαία η αποκοπή τμήματος των γινομένων. Αυτό συμβαίνει, γιατί το αποτέλεσμα του γινομένου δύο δυαδικών αριθμών έχει μήκος σε bits το άθροισμα των μηκών λέξης τους.
Επομένως, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν καταχωρητές μεγαλύτερου μήκους λέξης για την αποθήκευση των γινομένων ή να απορριφθούν τα λιγότερο σημαντικά bits με αποκοπή ή με στρογγυλοποίηση. Για παράδειγμα θεωρούμε την τιμή σήματος $x[n]$ να πολλαπλασιάζεται με μία σταθερά β. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού μετά από κβαντισμό με αποκοπή ή στρογγυλοποίηση μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$Q(\beta x[n]) = \beta x[n] + e[n] \qquad (2.61),$$

που σημαίνει ότι το κβαντισμένο αποτέλεσμα αναπαριστάται σαν άθροισμα της πραγματικής τιμής και ενός σφάλματος. Αν ο κβαντισμός δεν είναι χονδρικός, το σφάλμα $e[n]$ μοντελοποιείται σαν τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο λιγότερο σημαντικό επίπεδο κβαντισμού.
Επιπλέον, συνεχόμενα δείγματα μιας τέτοιας ακολουθίας σφάλματος φαίνεται να είναι ασυσχέτιστα, αν ο κβαντισμός είναι καλός.
Θεωρώντας, λοιπόν, το μοντέλο αυτό είναι φανερό ότι κατά την υλοποίηση μιας εξίσωσης διαφορών, το σφάλμα κβαντισμού συμπεριφέρεται σαν εσωτερική πηγή λευκού θορύβου. Ο 'θόρυβος στρογγυλοποίησης' αλληλεπιδρά με τα επόμενα υπολογιστικά στάδια, με αποτέλεσμα τελικά να μεταδίδεται μέχρι την έξοδο του φίλτρου. Οι επιδράσεις του θορύβου στρογγυλοποίησης είναι κάπως διαφορετικές για FIR και IIR φίλτρα. Εδώ, θα ασχοληθούμε με την επίδραση στα FIR φίλτρα.

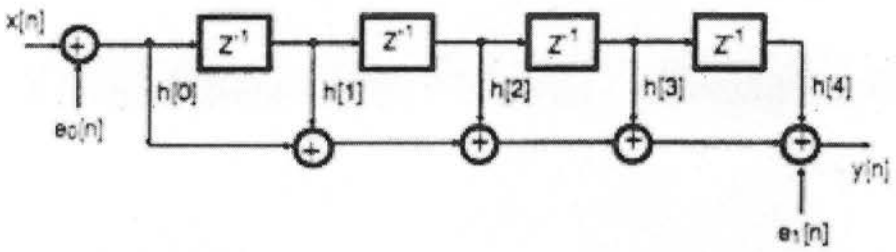
2.6.2.1. Στρογγυλοποίηση σε φίλτρα FIR

Το σχήμα 2.32 δείχνει το μπλοκ διάγραμμα της υλοποίησης ενός FIR φίλτρου.
Αναπαριστά την εξίσωση (2.20) για M=4, αλλά η γενίκευση για οποιοδήποτε M είναι φανερή. Για την αναπαράσταση των επιδράσεων της στρογγυλοποίησης έχουν προστεθεί δύο πηγές θορύβου, $e_0[n]$ και $e_1[n]$.
Υποθέτοντας ότι οι συντελεστές, οι τιμές των δειγμάτων και οι εσωτερικές μεταβλητές του φίλτρου αναπαρίστανται από δυαδικού αριθμούς σταθερής υποδιαστολής, το

γινόμενο ενός συντελεστή με μήκος λέξης Bc και ενός δείγματος πληροφορίας με μήκος λέξης Bd θα είναι ένας δυαδικός αριθμός με μήκος λέξης $Bc + Bd$.
Το γινόμενο αυτό μπορεί να στρογγυλοποιηθεί ή όχι ανάλογα με την αριθμητική μονάδα του επεξεργαστή, πριν προστεθεί με το άθροισμα των υπολοίπων γινομένων. Αυτό σημαίνει ότι, αν ο αθροιστής διαθέτει $Bc + Bd$ bits, δεν χρειάζεται κβαντισμός του γινομένου, εκτός κι αν έχουμε υπέρβαση του διαθέσιμου αριθμού bits μετά την συσσώρευση όλων των γινομένων. Αν ο αθροιστής διαθέτει Bd bits, τότε τα λιγότερο σημαντικά bits του γινομένου θα πρέπει να αποκοπούν πριν αυτό προστεθεί με τα άλλα γινόμενα. Στην περίπτωση αυτή, υπονοείται ότι εισάγεται σε κάθε σημείο άθροισης μία πηγή θορύβου με πλάτος ίσο με το λιγότερο σημαντικό bit του κβαντισμένου γινομένου.

Αυτό δε φαίνεται στο σχήμα 32, γιατί οι περισσότεροι DSP μικροεπεξεργαστές (όπως ο TMS320C25 της Texas Instruments) έχουν τη δυνατότητα να πολλαπλασιάζουν 16-bit αριθμούς με αριθμούς 16 ή 13 bits, ενώ ο συσσωρευτής δέχεται αριθμούς των 32 bits. Άρα, δεν απαιτείται κβαντισμός των γινομένων μέχρι την άθροιση τους. Αυτό απεικονίζεται από τη πηγή θορύβου $e_1[n]$ στο τελευταίο σημείο άθροισης.

Η παραπάνω ανάλυση παραβλέπει ένα σημαντικό σημείο. Υποθέτουμε ότι, όταν ένα γινόμενο προστίθεται σε ένα συσσωρευμένο άθροισμα γινομένων, δεν συμβαίνει υπερχείλιση. Συγκεκριμένα, για αριθμητική συμπληρώματος του 2 των 16 bits, είναι επαρκές να βεβαιώσουμε ότι το αποτέλεσμα της συσσώρευσης (έξοδος του φίλτρου) χωράει σε καταχωρητή των 32 bits. Το χαρακτηριστικό αυτό της αριθμητικής συμπληρώματος του 2 εκμεταλλευόμαστε στην υλοποίηση των FIR φίλτρων.



Σχήμα 2.32 FIR filter implementation for M=4

Για να σιγουρευτούμε ότι η έξοδος δε θα είναι υπερβολικά μεγάλη, πιθανόν να χρειαστεί να μειώσουμε το κέρδος του φίλτρου ή το μέγεθος του σήματος εισόδου. Μείωση του κέρδους του φίλτρου υπονοεί ότι οι συντελεστές της κρουστικής του απόκρισης θα γίνουν μικρότεροι. Αυτό σημαίνει ότι, όταν αυτοί κβαντιστούν, το σφάλμα των συντελεστών θα είναι μεγαλύτερο και η υποβάθμιση της απόκρισης συχνότητας σημαντικότερη από την περίπτωση, κατά την οποία μειώνεται το σήμα εισόδου και το

κέρδος του φίλτρου παραμένει ως είχε.
Με άλλα λόγια, η υλοποίηση με πεπερασμένη ακρίβεια ενός ψηφιακού φίλτρου καταλήγει σε ένα μη γραμμικό σύστημα. Παρ' όλα αυτά, είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε το σύστημα γραμμικό με εισόδους θορύβου στρογγυλοποίησης να προστίθενται για να αναπαρασταθούν τα σφάλματα. Αν η είσοδος ελαττωθεί, οι πηγές θορύβου διατηρούν το ίδιο πλάτος, άρα, για απόκτηση υψηλού λόγου σήματος προς θόρυβο απαιτείται διατήρηση του επιπέδου του σήματος όσο το δυνατόν υψηλότερα χωρίς, όμως, υπερχείλιση.
Το σχήμα 2.32 δείχνει μία πηγή θορύβου στην είσοδο $e_0[n]$ για την αναπαράσταση της κλιμάκωσης των δειγμάτων της εισόδου. Στην υλοποίηση αυτή, η είσοδος επίσης αναπαριστά την κβάντιση των δειγμάτων από τον μετατροπέα A/D. Αν, για παράδειγμα, έχουμε έναν μετατροπέα των 12 bits αυτά μπορούν να αποθηκευτούν στα 12 μεγαλύτερης σημασίας bits του 16-bit καταχωρητή δεδομένων. Τα τελευταία 4 bits των λέξεων αυτών έχουν ήδη σφάλμα. Άρα, κλιμακώνοντας προς τα κάτω την είσοδο κατά έναν παράγοντα ίσο με 16 δεν εισάγουμε επιπλέον σφάλμα στη είσοδο του φίλτρου.
Η ανάλυση της υλοποίησης FIR φίλτρων αναδεικνύει και πάλι την 'σύγκρουση' μεταξύ της επιθυμίας για ελαχιστοποίηση του σφάλματος κβάντισης και της επιθυμίας να καλύψουμε μία ευρεία κλίμακα σημάτων (wide dynamic range). Επίσης, τονίζει το γεγονός ότι τα θέματα του θορύβου στρογγυλοποίησης και του κβαντισμού των συντελεστών, αν και κατά κάποιο τρόπο ανεξάρτητα, συνδέονται από την ανάγκη κλιμάκωσης (προς τα κάτω) των δειγμάτων, ώστε να αποφευχθεί η υπερχείλιση. Το πρόβλημα αυτό είναι σοβαρότερο για συστήματα IIR.

2.6.2.2. Υλοποιήσεις κινητής υποδιαστολής

Ένας τρόπος για να αποφύγουμε τις περιπλοκές της υλοποίησης με αριθμητική σταθερής υποδιαστολής είναι η χρήση ενός DSP μικροεπεξεργαστή με αριθμητική κινητής υποδιαστολής, όπως ο TMS320C30 της Texas Instruments, ο Motorola 96002 ή ο AT&T DSP32C. Οι επεξεργαστές αυτοί χρησιμοποιούν αριθμητική κινητής υποδιαστολής των 32 bits και παρέχουν αυτόματα ευρεία δυναμική κλίμακα (wide dynamic range) και χαμηλό σφάλμα κβαντισμού. Στις περισσότερες περιπτώσεις ο σχεδιαστής απαλλάσσεται από την έγνοια της ακρίβειας των συντελεστών, του θορύβου κβάντισης και του ορίου κύκλων, αν και σε κάποιες περιπτώσεις χρειάζεται κβάντιση και σε αριθμητική 32 bits κινητής υποδιαστολής.

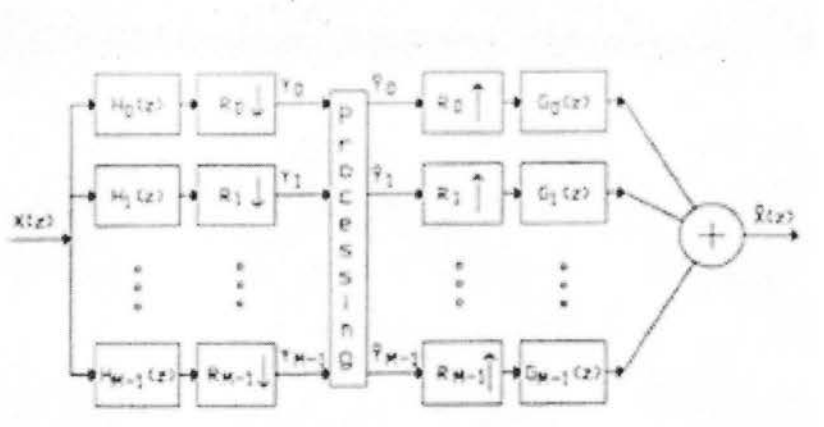
2.6.2.3. Αυτόματη γεννήτρια κώδικα

Η γνώση των επιπτώσεων του κβαντισμού ενσωματώνεται στις ρουτίνες παραγωγής κώδικα του πακέτου (ASPI's CGEN). Τα σχεδιαστικά αυτά προγράμματα παράγουν υψηλής αποτελεσματικότητας και καλά δομημένη συμβολική γλώσσα για την οικογένεια TMS320 επεξεργαστών της TI.

2.7. Σχεδιασμός FIR τράπεζας φίλτρων

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει εκτεταμένο ενδιαφέρον πάνω στο σχεδιασμό συστημάτων πολλαπλού ρυθμού ανάλυσης - σύνθεσης βασισμένων σε τράπεζες φίλτρων. Οι τράπεζες φίλτρων πολλαπλού ρυθμού χρησιμοποιούνται για αποσύνθεση χρόνου ή συχνότητας (ανάλυση) και αναδόμηση (σύνθεση) σε πολλές εφαρμογές. Οι τράπεζες φίλτρων πρωταρχικά χρησιμοποιήθηκαν για εφαρμογές ανάλυσης ομιλίας και αργότερα για κωδικοποίηση ομιλίας.
Πρόσφατα, βρήκαν εφαρμογή στην κωδικοποίηση εικόνας και βίντεο, συμπίεση και εξομάλυνση ήχου, απόρριψη ηχούς και κρυπτογράφηση φωνής.
Στον τομέα της ανάλυσης τέτοιων συστημάτων το σήμα εισόδου διαιρείται σε κανάλια χρησιμοποιώντας τράπεζα ζωνοπερατών φίλτρων και το σήμα κάθε καναλιού δειγματολαμβάνεται προς τα κάτω σε ρυθμούς κατάλληλους του εύρους ζώνης του καθενός. Στον τομέα της σύνθεσης τα σήματα καναλιού υποβάλλονται σε παρεμβολή (interpolation) και, στη συνέχεια, αθροίζονται για να δώσουν το σήμα εξόδου. Ένα γενικό, ομοιόμορφο σύστημα σύνθεσης ανάλυσης τράπεζας φίλτρων (M ζωνών) και η τυπική απόκριση συχνότητάς του δίνονται στο σχήμα 2.34. Το τμήμα ανάλυσης αποτελείται από M φίλτρα ανάλυσης $h_m[n] \quad m = 1,2,\ldots,M$ μαζί με ένα σετ από μειωτές (decimators). Στο τμήμα σύνθεσης η αναδόμηση επιτυγχάνεται με ένα σετ δειγματοληπτών προς τα πάνω σε σειρά με φίλτρα σύνθεσης, $g_m[n] \quad m = 1,2,\ldots,M$.

Το πρόβλημα του σχεδιασμού κατά το μέγιστο βαθμό decimated συστημάτων ανάλυσης σύνθεσης με ταυτόχρονη υψηλή ανάλυση συχνότητας και δυνατότητα πλήρους ανακατασκευής του σήματος εξόδου αποτελεί μία μεγάλη πρόκληση και έχει μελετηθεί ευρέως. Ακόμη και απουσία παραμόρφωσης λόγω επεξεργασίας, το σύστημα υποβαθμίζεται από τριών ειδών παραμορφώσεις. Την παραμόρφωση επικάλυψης, που είναι αποτέλεσμα της ελάττωσης των σημάτων καναλιού, την φασματική παραμόρφωση πλάτους και την φασματική παραμόρφωση φάσης.



Σχήμα 2.34 M-band Analysis/Syntesis filter bank

Η ολική απόδοση ενός συστήματος τράπεζας φίλτρων εξαρτάται από ένα συνδυασμό διαφορετικών παραγόντων, οι οποίοι κατατάσσονται ως εξής :

- Ιδιότητες των φίλτρων ανάλυσης και ανακατασκευής
- Η ολική απόδοση της τράπεζας φίλτρων
- Οι ιδιότητες του συστήματος ανάλυσης - σύνθεσης

Τα φίλτρα ανάλυσης και ανακατασκευής είναι τα κύρια δομικά στοιχεία του συστήματος και τα χαρακτηριστικά τους είναι συνήθως ζωτικής σημασίας για την ολική του απόδοση. Στις σημαντικές ιδιότητες του κάθε φίλτρου περιλαμβάνονται η κυμάτωση και το μέγεθος της ζώνης διέλευσης, το εύρος και η συμπεριφορά της ζώνης διάβασης, η κυμάτωση και το μέγεθος της ζώνης αποκοπής, τα χαρακτηριστικά φάσης, ο τύπος του φίλτρου (FIR, IIR) και η τάξη τους.
Στις ιδιότητες της τράπεζας φίλτρων περιλαμβάνονται ο αριθμός των ζωνών συχνοτήτων, το εύρος ζώνης τους (ομοιόμορφη - μη ομοιόμορφη αποσύνθεση), το ολικό φάσμα συχνοτήτων και η υπολογιστική επάρκεια της υλοποίησης της τράπεζας. Οι ιδιότητες του συστήματος ανάλυσης - σύνθεσης είναι οι ρυθμοί και οι τύποι ελάττωσης (decimation) των καναλιών (ομοιόμορφη - κατά μπλοκ ελάττωση), η παραμόρφωση επικάλυψης της ανακατασκευής, οι φασματικές παραμορφώσεις πλάτους και φάσης και η καθυστέρηση ανακατασκευής του συστήματος. Παρακάτω επικεντρωνόμαστε σε ομοιόμορφα συστήματα τραπεζών FIR φίλτρων.

2.7.1. Ελάττωση (decimation) και παρεμβολή (interpolation)

Οι ελαττωτές (decimators) και οι παρεμβολείς (interpolators) είναι τα βασικά στοιχεία των συστημάτων ψηφιακής επεξεργασίας πολλαπλού ρυθμού. Ένας ελαττωτής αποτελείται από ένα βαθυπερατό φίλτρο ακολουθούμενο από ένα δειγματολήπτη προς τα κάτω και χρησιμοποιείται για να μειώσει το ρυθμό δειγματοληψίας του σήματος εισόδου κατά έναν ακέραιο παράγοντα. Ο παρεμβολέας ή επεκτατής (expander) αποτελείται από ένα δειγματολήπτη προς τα πάνω σε σειρά με βαθυπερατό φίλτρο και χρησιμοποιείται για να αυξήσει το ρυθμό δειγματοληψίας του σήματος εισόδου κατά έναν ακέραιο παράγοντα. Για την αλλαγή του ρυθμού δειγματοληψίας του σήματος εισόδου με ρητό ρυθμό οι δύο λειτουργίες (decimation - interpolation) μπορούν να συνδυαστούν.

2.7.1.1. Δειγματοληψία προς τα κάτω (downsampling)

Η δειγματοληψία προς τα κάτω ορίζεται από τη σχέση

$$y[n] = x[Rn] \qquad (2.62),$$

όπου R είναι ο ακέραιος ρυθμός δειγματοληψίας προς τα κάτω. Στο πεδίο της συχνότητας

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{R}\sum_{k=0}^{R-1} X(e^{j(\omega-2\pi k)/R}) \qquad (2.63),$$

που είναι το άθροισμα του κλιμακωμένου φάσματος εισόδου με τα συχνοτικά μετατοπισμένα αντίγραφά του. Αφού οι μετατοπίσεις είναι ακέραια πολλαπλάσια του $2\pi/R$, αν η είσοδος $x[n]$ δεν είναι ζωνοπεριορισμένη στο π/R, θα υπάρξει επικάλυψη. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.35, το σήμα συνήθως φιλτράρεται βαθυπερατά πριν υποστεί τη προς τα κάτω δειγματοληψία για να ελαχιστοποιηθούν τα φαινόμενα επικάλυψης.

2.7.1.2. Δειγματοληψία προς τα πάνω (upsampling)

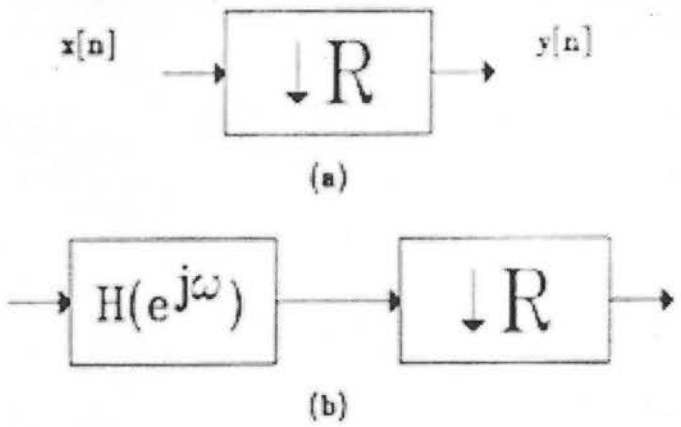
Η λειτουργία της προς τα πάνω δειγματοληψίας ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n/R] \quad ,n = kR \quad ,k\,\alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota\sigma\varsigma \\ &= 0 \qquad\quad ,\alpha\lambda\lambda\sigma\acute{\upsilon} \end{aligned} \qquad (2.64),$$

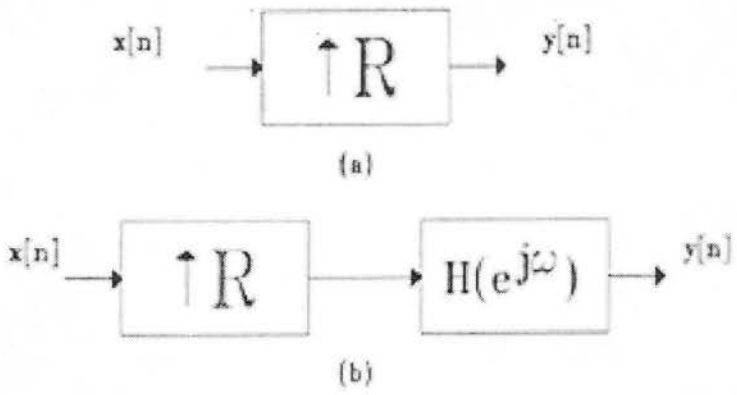
όπου R είναι ο ακέραιος συντελεστής προς τα πάνω δειγματοληψίας.
Στο πεδίο της συχνότητας είναι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega R}) \qquad (2.65),$$

που είναι μία εκδοχή της $X(e^{j\omega})$ συμπιεσμένη στη συχνότητα. Ένα χαμηλοπερατό φίλτρο χρησιμοποιείται, συνήθως, για την απόρριψη των πολλαπλών αντιτύπων του φάσματος εισόδου, ώστε να αποκτηθεί το επεκταμένο (interpolated) σήμα.Το σχήμα 2.36 δείχνει το μπλοκ διάγραμμα της λειτουργίας επέκτασης.



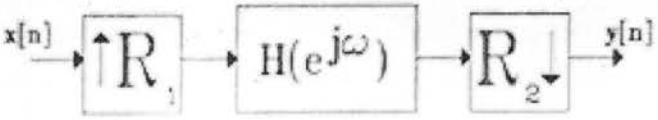
Σχήμα 2.35 (a) downsampler and (b) decimator



Σχήμα 2.36 (a) upsampler and (b) interpolator

2.7.1.3. Διαδικασίες Decimation & Interpolation με ρητούς ρυθμούς

Για τις λειτουργίες αυτές με ρητούς ρυθμούς χρησιμοποιείται η δομή του σχήματος 2.37. Σε αυτή το σήμα εισόδου δειγματολαμβάνεται προς τα πάνω κατά παράγοντα $R1$ και φιλτράρεται. Το φιλτραρισμένο σήμα δειγματολαμβάνεται προς τα κάτω κατά παράγοντα $R2$. Οι $R1$ και $R2$ είναι αυθαίρετοι ακέραιοι αριθμοί. Αν $R1 > R2$, ο ρυθμός δειγματοληψίας αυξάνεται κατά τον παράγοντα $R1/R2$, ενώ, αν $R1 < R2$, ο ρυθμός δειγματοληψίας μειώνεται κατά τον παράγοντα $R2/R1$. Η επιλογή του φίλτρου $H(z)$ είναι σημαντική για την αποφυγή σοβαρής επικάλυψης.



Σχήμα 2.37 rational decimation and interpolation

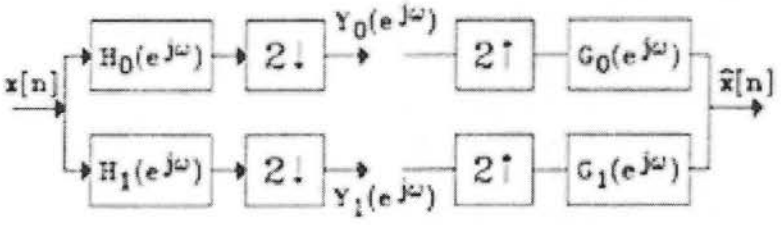
2.7.2. Τράπεζες φίλτρων δύο ζωνών

Πολλοί κωδικοποιητές ήχου χρησιμοποιούν δενδρικές δομές τραπεζών φίλτρων ανάλυσης - σύνθεσης. Τα βασικά στοιχεία των κωδικοποιητών αυτών είναι το σύστημα ανάλυσης - ανακατασκευής δύο ζωνών, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.38.
Στο σύστημα αυτό η ανάλυση πραγματοποιείται από δύο φίλτρα επιλογής συχνότητας,

$H_0(e^{j\omega})$, που είναι βαθυπερατό μισής ζώνης, και $H_1(e^{j\omega})$, που είναι υψηπερατό μισής ζώνης. Για να διατηρήσουμε το ρυθμό δειγματοληψίας του συστήματος, τα δύο σήματα καναλιού ελαττώνονται κατά το μέγιστο δυνατό σε ρυθμό 2 προς 1, καταλήγοντας σε δύο υπο-δειγματοληφθέντα σήματα $Y_0(e^{j\omega})$, $Y_1(e^{j\omega})$ που δίνονται από τις σχέσεις

$$Y_0(e^{j\omega})\frac{1}{2}[H_0(e^{j\omega/2})X(e^{j\omega/2})+H_0(-e^{j\omega/2})X(-e^{j\omega/2})] \qquad (2.66)$$

$$Y_1(e^{j\omega})\frac{1}{2}[H_1(e^{j\omega/2})X(e^{j\omega/2})+H_1(-e^{j\omega/2})X(-e^{j\omega/2})] \qquad (2.67)$$



Σχήμα 2.38 block διάγραμμα τράπεζας φίλτρων δύο ζωνών (for a two-band filter bank)

Στο τμήμα ανακατασκευής οι δύο ζώνες ξανασυνδυάζονται δίνοντας

$$\begin{aligned}\hat{X}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}[H_0(e^{j\omega})G_0(e^{j\omega})+H_1(e^{j\omega})G_1(e^{j\omega})]X(e^{j\omega})+ \\ &+\frac{1}{2}[H_0(-e^{j\omega})G_0(e^{j\omega})+H_1(-e^{j\omega})G_1(e^{j\omega})]X(e^{j\omega})\end{aligned} \qquad (2.68)$$

Η απόκριση συχνότητας του γραμμικού συστήματος δύο ζωνών περιέχεται στον πρώτο όρο της (2.68), ενώ ο δεύτερος όρος περιέχει την επικάλυψη.

2.7.2.1. Αναίρεση της επικάλυψης

Στα συστήματα δύο ζωνών η επικάλυψη αποφεύγεται ορίζοντας τα φίλτρα ανακατασκευής ως

$$G_0(e^{j\omega}) = H_1(-e^{j\omega}) \qquad (2.70)$$

$$G_1(e^{j\omega}) = H_0(-e^{j\omega}) \qquad (2.71)$$

Το τέχνασμα αυτό "συμπιέζει" την επικάλυψη στο 0 και καταλήγει σε ολική απόκριση συχνότητας του συστήματος

$$C(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} H_0(e^{j\omega}) H_1(-e^{j\omega}) - \frac{1}{2} H_0(-e^{j\omega}) H_1(e^{j\omega}) \qquad (2.72)$$

2.7.2.2. Quadrature mirror filters (QMF)

Στην περίπτωση των QMF, το υψιπερατό φίλτρο $H_1(e^{j\omega})$ και το βαθυπερατό φίλτρο $H_0(e^{j\omega})$ επιλέγονται να είναι μετατοπισμένα στη συχνότητα, όντας αντίτυπα το ένα του άλλου κατά π, ώστε να ισχύει

$$H_1(e^{j\omega}) = H_0(-e^{j\omega}) \qquad (2.73).$$

Για αυτή την κλάση συστημάτων ανάλυσης – σύνθεσης η ακριβής ανακατασκευή απαιτεί

$$H_0^2(e^{j\omega}) - H_1^2(e^{j\omega}) = 2 \qquad (2.74).$$

Με διάφορες μεθόδους έχουν σχεδιαστεί FIR φίλτρα που προσεγγίζουν αυτή την απαίτηση. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η συνθήκη αυτή δε μπορεί να ικανοποιηθεί πλήρως, που σημαίνει ότι δεν είναι δυνατό να πετύχουμε τέλεια ανακατασκευή στην έξοδο με τη μέθοδο QMF.

2.7.2.3. Conjugate quadrature filters (CQF)

Τα CQF ορίζονται ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη

$$H_1(e^{j\omega}) = -H_0(-e^{-j\omega}) e^{-j\omega(N-1)} \qquad (2.75).$$

Και με την προσθήκη συνθηκών για την απαλοιφή επικάλυψης καταλήγουν στις

$$G_0(e^{j\omega}) = H_0(e^{-j\omega}) e^{-j\omega(N-1)} \qquad (2.76),$$

$$G_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{-j\omega}) e^{-j\omega(N-1)} \qquad (2.77).$$

Όπως και στην περίπτωση των QMF, τα CQF απαλείφουν την παραμόρφωση επικάλυψης και η ολική απόκριση συχνότητας του συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως

$$C(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} e^{-j\omega(N-1)} (F(e^{j\omega}) + F(-e^{j\omega})) \qquad (2.78),$$

όπου

$$F(e^{j\omega}) = H_0(e^{j\omega}) H_0(e^{-j\omega}) \qquad (2.79),$$

και καλείται παράγωγο φίλτρο. Η συνθήκη για ακριβή ανακατασκευή είναι

$$F(e^{j\omega}) + F(e^{-j\omega}) = 2 \qquad (2.80),$$

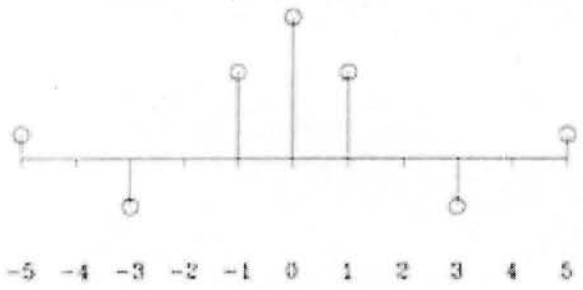
που σημαίνει ότι η $F(z)$ είναι φίλτρο μηδενικής φάσης μισής ζώνης.
Τα φίλτρα μισής ζώνης είναι σχετικά εύκολα στο σχεδιασμό και η $H_0(z)$ μπορεί να παραχθεί με τεχνικές φασματικής αποσύνθεσης. Στο πεδίο του χρόνου ένα φίλτρο μισής ζώνης μηδενικής φάσης έχει κρουστική απόκριση τέτοια, ώστε

$$t(n) = f(n) + (-1)^n f(n) = \delta(n) \qquad (2.81),$$

που σημαίνει ότι όλα τα άρτια δείγματα εκτός του δείγματοςή στιγμή 0 είναι μηδενικά

$$\begin{aligned} f(2n) &= 1 \quad , n = 0 \\ &= 0 \quad , \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{aligned} \qquad (2.82).$$

Μία τυπική κρουστική απόκριση φίλτρου μισής ζώνη μηδενικής φάσης δίνεται στο σχήμα 2.39.



Σχήμα 2.39 Κρουστική απόκριση φίλτρου μισής ζώνη μηδενικής φάσης (response of Zero-phase half band filter)

2.7.2.4. Τράπεζες φίλτρων γραμμικής φάσης τέλειας ανακατασκευής (PR)

Η λύση των CQF δεν εγγυάται γραμμική φάση που συνήθως προτιμάται σε εφαρμογές επεξεργασίας εικόνας. Από τη άλλη πλευρά, η λύση των QMF παρέχει γραμμική φάση, όμως, όχι τέλεια ανακατασκευή. Αυτές οι δύο λύσεις μπορούν να συνδυαστούν σε μία για να παράσχουν γραμμική φάση με δυνατότητες τέλειας ανακατασκευής. Στην περίπτωση αυτή, δεν υποτίθεται συσχέτιση μεταξύ των δύο φίλτρων ανάλυσης. Θεωρώντας τις συνθήκες απαλοιφής επικάλυψης, η ολική απόκρισησυχνότητας της (2.72) εκφράζεται ως

$$C(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{2}\right) F(e^{j\omega}) - \left(\frac{1}{2}\right) F(-e^{j\omega}) \qquad (2.83),$$

όπου

$$F(e^{j\omega}) = H_0(e^{j\omega}) H_1(-e^{j\omega}) \qquad (2.84),$$

και είναι το γενικό παράγωγο φίλτρο. Παρόμοια με την περίπτωση CQF, το παράγωγο φίλτρο $F(z)$ σχεδιάζεται να είναι φίλτρο μισής ζώνης. Αυτό πρέπει να αποσυντεθεί σε δύο φίλτρα ανάλυσης (γραμμικής φάσης), $H_0(e^{j\omega})$ και $H_1(e^{j\omega})$.

Αφού και τα δύο αποσυντεθειμένα φίλτρα πρέπει να είναι γραμμικής φάσης οι δύο αποκρίσεις συχνότητας $H_0(e^{j\omega})$ και $H_1(e^{-j\omega})$ θα είναι διαφορετικές, εκτός, αν όλοι οι μιγαδικοί πόλοι επιλεγούν να είναι διπλοί. Αυτή η ιδιότητα δεν υπήρχε στις προηγούμενες δύο λύσεις CQF και QMF. Η βασική διαφορά της περίπτωσης αυτή με την CQF είναι ότι, κατά τη διαδικασία αποσύνθεσης του παράγωγου φίλτρου, κάθε ζευγάρι συζυγών μιγαδικών και τα αμοιβαία ζευγάρια τους αντιστοιχούν σε ένα φίλτρο.

2.7.2.5. Τράπεζες φίλτρων μικρής καθυστέρησης

Στις τράπεζες φίλτρων μικρής καθυστέρησης η καθυστέρηση συστήματος είναι μικρότερη από N-1. Για να επιτευχθεί αυτό, πρέπει το παράγωγο φίλτρο να είναι μη συμμετρικό φίλτρο μισής ζώνης. Ένα σύστημα ελάχιστης καθυστέρησης απαιτεί φίλτρο μισής ζώνης ελάχιστης φάσης. Η συνθήκη για τράπεζες φίλτρων μικρής καθυστέρησης εκφράζεται στο πεδίο του χρόνου ως

$$\begin{aligned} f(2n) &= 1 \quad , n = (-N+1+\Delta)/2 \\ &= 0 \qquad\quad , \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{aligned} \qquad (2.85),$$

όπου Δ είναι η καθυστέρηση του συστήματος.

Το ομοιόμορφο σύστημα M ζωνών του σχήματος 2.34 με συντελεστή ελάττωσης R σε κάθε μπάντα μπορεί να έχει ελάχιστη καθυστέρηση R-1 δειγμάτων και μέγιστη

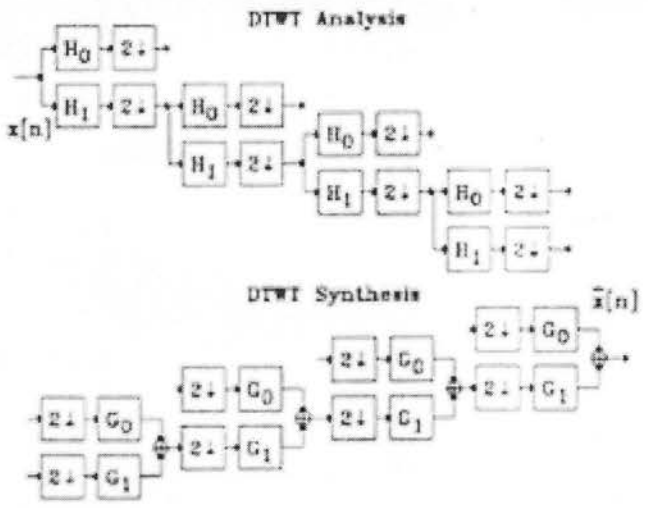
καθυστέρηση (2L-1)R -1 δειγμάτων. Με την επιβολή μικρής καθυστέρησης ανακατασκευής στα συστήματα ανάλυσης – σύνθεσης, γενικά απαιτούνται φίλτρα μη γραμμικής φάσης. Για παράδειγμα, τα περισσότερα συστήματα ανάλυσης - σύνθεσης ελάχιστης καθυστέρησης τείνουν να είναι μηδενικής φάσης ή πολύ κοντά σε μηδενική φάση. σχεδιασμός συστημάτων Μ ζωνών και η ανακατασκευή από Μ αποσυνθέσεις η συστημάτων δύο ζωνών.

2.7.3. Τράπεζες φίλτρων πολλών ζωνών

Ο σχεδιασμός συστημάτων Μ ζωνών και η ανακατασκευή από Μ αποσυνθέσεις είναι πιο περίπλοκη σε σύγκριση με την περίπτωση συστημάτων δύο ζωνών.
Δύο συνήθεις μέθοδοι σχεδιασμού είναι τα συστήματα δομής - δέντρου και τα συστήματα διαμόρφωσης συνημιτόνου.

2.7.3.1. Συστήματα δομής - δέντρου

Στα συστήματα αυτά έχουμε ουσιαστικά καταρράκτη συστημάτων δύο ζωνών, ώστε να δημιουργηθεί ο επιθυμητός αριθμός ζωνών. Στο τμήμα σύνθεσης η αποσύνθεση του τμήματος ανάλυσης αντιστρέφεται για να δώσει το αρχικό σήμα. Το σχήμα 2.40 απεικονίζει μία τυπική τράπεζα αποσύνθεσης 4 ζωνών, ου χρησιμοποιεί τράπεζα δομής - δέντρου δύο σταδίων. Θεωρώντας τέλεια ανακατασκευή των υποσυστημάτων δύο ζωνών, το τελικό σύστημα παρέχει επίσης τέλεια ανακατασκευή.



Σχήμα 2.40 Σύστημα δομής – δέντρου 4 ζωνών (tree-structured four-band system)

Επίσης, ευρείας μελέτης και εφαρμογής έχουν τύχει τα συστήματα δομής - δέντρου, που βασίζονται σε συστήματα QMF και CQF. Τέτοιες λύσεις προσφέρουν καλή ποιότητα

ανακατασκευής και επιτρέπουν υλοποιήσεις συστημάτων μη ομοιόμορφων ζωνών.
Τα συστήματα δομής - δέντρου έχουν εγγενώς μεγάλες καθυστερήσεις γεγονός που είναι ανεπιθύμητο σε πραγματικές εφαρμογές και εφαρμογές κωδικοποίησης ήχου. Οι wavelet αποσυνθέσεις που εξορισμού βασίζονται σε δομές - δέντρου οκταδικών ζωνών παρουσιάζουν το ίδιο πρόβλημα. Σε χωρικής υφής αποσυνθέσεις σημάτων οι καθυστερήσεις δεν είναι τόσο σημαντικές όσο στα σήματα παροδικής διάρκειας. σε δομές - δέντρου οι καθυστερήσεις, που εισάγονται από εσωτερικά στρώματα, συνεισφέρουνστην ολική καθυστέρηση του συστήματος, τόσο περισσότερο σε σχέση με τα εξωτερικά, όσο πιο 'βαθιά' είναι αυτά μέσα στη δομή.

Επομένως, η ολική καθυστέρηση συστήματος μπορεί να μειωθεί σημαντικά, αν επιβάλουμε στα 'βαθιά' εσωτερικά κλαδιά της δομής, μικρές καθυστερήσεις ανακατασκευής.

2.7.3.2.Τράπεζες φίλτρων διαμόρφωσης συνημίτονου

Οι τράπεζες φίλτρων διαμόρφωσης συνημίτονου χρησιμοποιούνται για τη ρύθμιση δύο βασικών προβλημάτων σε filter bank εφαρμογές. Αυτά είναι η πολυπλοκότητα της διαδικασίας σχεδιασμού και η υπολογιστική πολυπλοκότητα των υλοποιήσεων.
Σε συστήματα διαμόρφωσης συνημίτονων τα ποσυστήματα περιορίζονται να είναι της μορφής

$$h_k[n] = Ah_b[n]\cos\left(\frac{\pi}{M}(n+\theta)(k+\varphi)+\gamma\right) \quad ,k = 0,1,2,\ldots,M-1 \qquad (2.86),$$

όπου M είναι ο αριθμός των ζωνών συχνοτήτων, θ, φ, γ είναι οι ορισμένες εκ των προτέρων σταθερές και $h_b[n]$ είναι το πρωτότυπο φίλτρο βασικής ζώνης.

Για τέλεια ανακατασκευή τα φίλτρα βασικής ζώνης πρέπει να υπακούουν σε κάποιους περιορισμούς. Για την ειδική περίπτωση με άρτιο M και συνημιτονικό 'πυρήνα' με

$$A = \sqrt{\frac{2}{M}} \quad (87) \ , \quad \theta = -\frac{N-1}{2} \quad (88) \ , \quad \varphi = \frac{1}{2} \qquad (2.89) \ ,$$

$$\gamma = \left(k+\frac{1}{2}\right)(N+1)\frac{\pi}{2} \qquad (2.90),$$

Οι συνθήκες τέλειας ανακατασκευής συνοψίζονται ως

$$h_b[N-1-n] = h_b[n] \tag{2.91}$$

$$\sum_{i=0}^{2K-2s-1} h_b[n+iM]h_b[n+iM+2sM] = \delta(s) \tag{2.92}$$

για n=0,1,2...,M/2-1 . Στην περίπτωση αυτή τα φίλτρα σύνθεσης υποτίθεται ότι είναι αντεστραμμένες στον χρόνο εκδοχές των φίλτρων ανάλυσης.

$$g_k[n] = h_k[N-1-n] \tag{2.93}.$$

Οι μετασχηματισμοί MLT (modulated lapped transforms) είναι ειδική περίπτωση των τραπεζών φίλτρων διαμόρφωσης συνημίτονου όπου τα φίλτρα έχουν μήκος M. Οι MLTs μπορούν να θεωρηθούν ως μία πιο γενική κλάση των μπλοκ μετασχηματισμών από την άποψη ότι ο πίνακας μετασχηματισμού, T, είναι πίνακας 2M x M. Τέτοιοι μετασχηματισμοί εισήχθησαν για να αποτρέψουν φαινόμενα μπλοκαρίσματος σε μετασχηματισμούς μπλοκ. Στους MLTs οι βασικές συναρτήσεις έχουν μήκος 2M. Έτσι, 2M δείγματα του σήματος εισόδου μετασχηματίζονται για να αποκτήσουμε M συντελεστές του μετασχηματισμού.
Όπως και στους μετασχηματισμούς μπλοκ, ο μετασχηματισμός υπολογίζεται για κάθε M δείγματα της εισόδου. Η διαδικασία ανακατασκευής μπορεί να θεωρηθεί σαν διαδικασία επικάλυψης - πρόσθεσης.

2.8. Κβάντιση συντελεστών φίλτρων

Όλα τα σχεδιαστικά προγράμματα του DFDP4/plus επιτρέπουν την κβάντιση των συντελεστών των φίλτρων. Οι κανονες, με τους οποίους γίνεται η κβάντιση των συντελεστών των FIR φίλτρων, περιγράφονται παρακάτω.

2.8.1. Κβάντιση συντελεστών φίλτρων FIR

Στη διαδικασία κβαντισμού συντελεστών FIR φίλτρων ο χρήστης μπορεί να καθορίσει τον αριθμό N των επιθυμητών bits. Οι συντελεστές κινητής που παράγονται από τη διαδικασία σχεδιασμού, μετασχηματίζονται σε ένα σετ ακεραίων των N bits με τα ακόλουθα βήματα :

a. Εύρεση της μέγιστης απόλυτης τιμής ολόκληρου του σετ συντελεστών, έστω x_{max}. Καθορισμός του συντελεστή κλιμάκωσης δύναμης του δύο, έστω pow2, ίσου με μηδέν.
b. Αν x_{max} είναι μηδέν, τότε τίθενται όλοι οι συντελεστές ίσοι με μηδέν.

c. Αν x_{max} είναι μεγαλύτερο του ένα, συνεχίζεται η διαίρεση του με το δύο και η ελάττωση του συντελεστή δύναμης του δύο κατά 1, μέχρι το x_{max} γίνει μικρότερο ή ίσο με τη μονάδα. Αλλιώς, αν x_{max} είναι μικρότερο του 0.5, συνεχίζεται ο πολλαπλασιασμός του με το δύο και αύξηση του συντελεστή δύναμης του δύο κατά 1, μέχρι το x_{max} να γίνει μεγαλύτερο ή ίσο με το 0.5.

d. Σχηματισμός του παράγοντα κλιμάκωσης συντελεστών, έστω SF, σαν δύο υψωμένο στη δύναμη N-1+ pow2. Για N=16 και pow2=0, ο παράγοντας κλιμάκωσης συντελεστών είναι ο 32768.e. Για κάθε συντελεστή ακολουθούνται τα επόμενα βήματα : Αν ο συντελεστής είναι αρνητικός, σχηματίζεται ο συντελεστής ως (coefficient*SF-0.5). Αν ο συντελεστής είναι θετικός, σχηματίζεται κλιμακωμένος συντελεστής ως (coefficient*SF+0.5).

Ορίζεται ο συντελεστής ως long integer και αποθηκεύεται το αποτέλεσμα. Ο όρος 0.5 χρειάζεται για να στρογγυλοποιήσει την κβαντισμένη τιμή στον πλησιέστερο ακέραιο, παρά για να αποκοπεί απλά κάποιο τμήμα της.

Οι κβαντισμένοι συντελεστες κινητής υποδιαστολής βρίσκονται διαιρώντας τους ακέραιους συντελεστές με τους παράγοντες κλιμάκωσής τους.

3 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ- Σχεδιασμός φίλτρων Φίλτρα IIR, μέθοδος του αναλλοίωτου της κρουστικής, Διγραμμικός μετασχηματισμός

3.1 Φίλτρα- Σύντομη επεξήγηση γενικών ορισμών

- Φίλτρο: Γενικά, κάθε σύστημα που μορφοποιεί το φάσμα της εισόδου
- Φίλτρο επιλογής συχνοτήτων: Μετάδοση κάποιων συχνοτήτων, απόρριψη κάποιων άλλων.
- Σχεδιασμός φίλτρου: Υπολογισμός των παραμέτρων της εξίσωσης διαφορών (ή ισοδύναμα της συνάρτησης μεταφοράς) ώστε η απόκριση συχνοτήτων να προσεγγίζει μια επιθυμητή μορφή (π.χ. βαθυπερατό φίλτρο) με συγκεκριμένες προδιαγραφές μέσα σε κάποια όρια

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν αιτιατά φίλτρα καθώς και δύο βασικές κατηγορίες

- Φίλτρα FIR: Πολυωνυμική συνάρτηση μεταφοράς
- Φίλτρα IIR: Ρητή συνάρτηση μεταφοράς

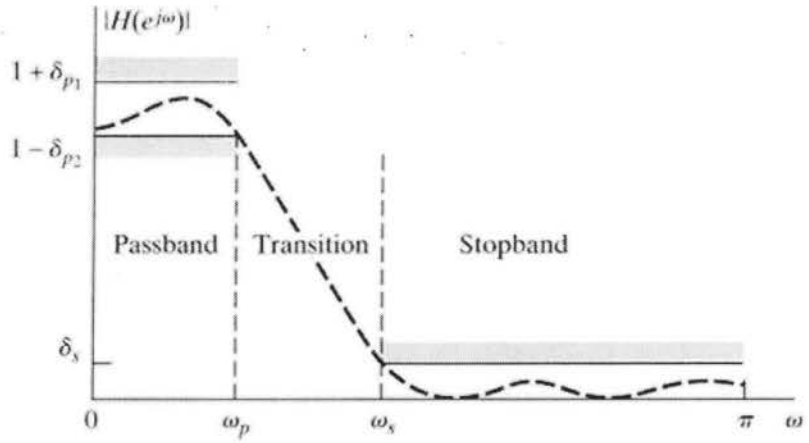
Ένας τρόπος είναι η μετατροπή φίλτρων συνεχούς χρόνου σε IIR φίλτρα διακριτού χρόνου (π.χ. με τη μέθοδο impulse invariance).

Στο σχεδιασμό φίλτρων ακολουθούμε τα ακόλουθα βήματα:

1. Προσδιορισμός προδιαγραφών (specificamons)
2. Προσέγγιση των προδιαγραφών με αιτιατό σύστημα διακριτού χρόνου
3. Υλοποίηση του συστήματος

Φίλτρα διακριτού χρόνου: Ψηφιακά φίλτρα (Digital filters)

Θα ξεκινήσουμε από το σχεδιασμό βαθυπερατών φίλτρων . Πρακτικά θέλουμε να προσεγγίσουμε όσο καλύτερα γίνεται την ιδεατή απόκριση συχνοτήτων.

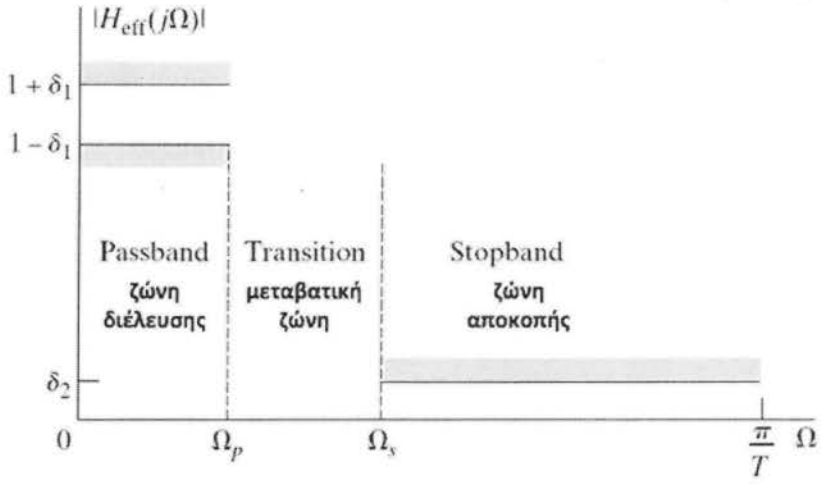


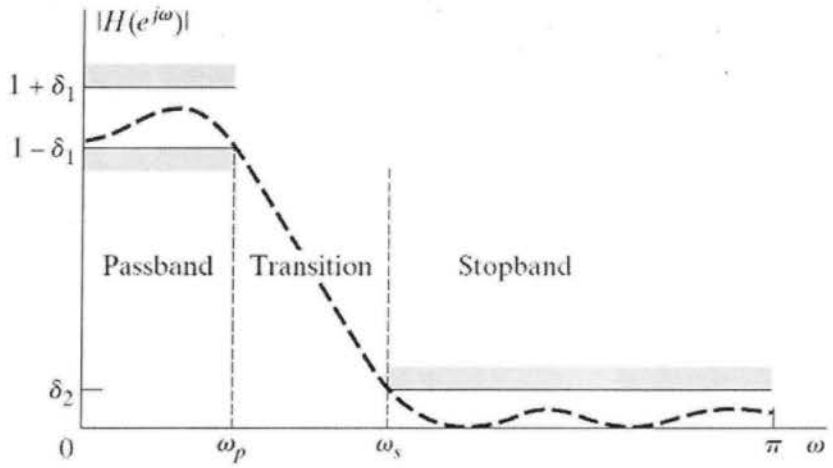
Παράδειγμα: Είδαμε ότι το σύστημα του σχήματος ισοδυναμεί με σύστημα ΣΧ με:

$$H_{\text{eff}}(j\Omega)=\begin{cases}H(e^{j\Omega T}), & |\Omega|<\pi/T\\ 0 & |\Omega|\geq\pi/T\end{cases}$$

Άρα:

$$H(e^{j\omega})=H_{\text{eff}}(j\frac{\omega}{T}), \qquad |\omega|<\pi$$



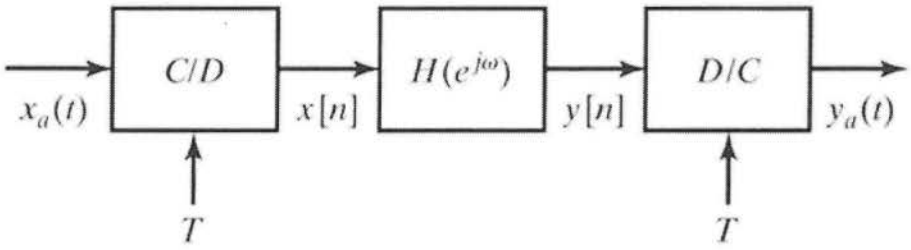


Αν έχουμε προδιαγραφές σε συνεχή χρόνο:

- $T = 10^{-4}$ sec
- Κέρδος 1±0.01 (-0.873-0.0864 dB) μεταξύ 0 και Ω s= 2π2000rad/sec
- Κέρδος < 0.001 (-60 dB) για Ω_s>2π3000rad/sec

πρέπει:

- $\delta_{p1} = \delta_{p2} = 0.01$
- $\delta_2 = 0.001$
- $\omega_p = 0.4\,\pi$ rad
- $\omega_s = 0.6\,\pi$ rad



3.2 Σχεδιασμός φίλτρων ΔΧ από φίλτρα ΣΧ

Μετατροπή από φίλτρα ΣΧ: Ιστορικά ο πρώτος τρόπος .Υπάρχουν πολλές τεχνικές για σχεδιασμό φίλτρων ΣΧ .Πολλά φίλτρα ΣΧ έχουν απλές αναλυτικές μορφές και οδηγούν σχετικά εύκολα στο αντίστοιχο φίλτρο ΔΧ. Γενικά αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ή την κρουστική απόκριση $h_c(t)$ ενός φίλτρου συνεχούς χρόνου, χρησιμοποιούμε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό για να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη $H(z)$ ή $h[n]$ σε διακριτό χρόνο

Ισοδύναμα, πρέπει να προσδιορίσουμε μια απεικόνιση από το πεδίο s στο πεδίο z .Για να πάρουμε ένα ευσταθές σύστημα ΔΧ από ένα ευσταθές σύστημα ΣΧ θα πρέπει οι πόλοι στο αριστερό επίπεδο του επιπέδου s να απεικονίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο z .

3.3 Σχεδιασμός φίλτρων ΔΧ – αναλλοίωτο της κρουστικής απόκρισης

Μπορούμε να δειγματοληπτήσουμε την κρουστική απόκριση ενός φίλτρου ΣΧ για να πάρουμε το αντίστοιχο φίλτρο ΔΧ.

Συγκεκριμένα: $h[n] = T_d h_c(nT_d)$

Η περίοδος δειγματοληψίας T_d δεν είναι αναγκαίο να ισούται με την περίοδο δειγματοληψίας T της μετατροπής C/D και D/C .

Στο πεδίο της συχνότητας:

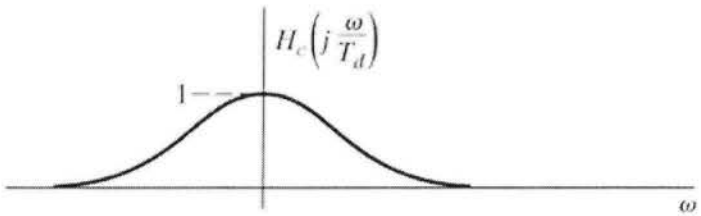
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right)$$

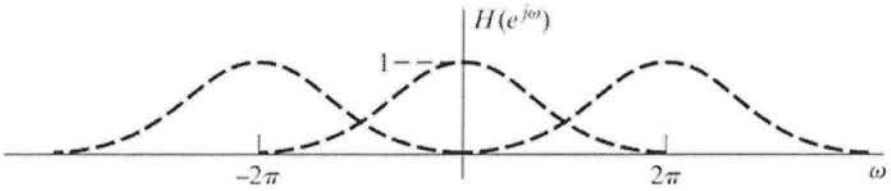
Αν το φίλτρο ΣΧ έχει περιορισμένο εύρος ζώνης

$$H_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T_d,$$

τότε:

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right), \quad |\omega| \leq \pi$$





Αν όμως το φίλτρο ΣΧ δεν έχει περιορισμένο εύρος ζώνης θα έχουμε αναδίπλωση, η οποία όμως μπορεί να είναι αμελητέα αν το φίλτρο συνεχούς χρόνου προσεγγίζει το μηδέν στις υψηλές συχνότητες .Σε αυτή την περίπτωση ξεκινώντας από τις προδιαγραφές σε διακριτό χρόνο, οι προδιαγραφές του φίλτρου ΣΧ $H_c(j\Omega)$ προκύπτουν μέσω της $\Omega = \omega/T_d$.

Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς ΣΧ είναι:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$$

Στο πεδίο του χρόνου:

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}, & t \leq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Αναλλοίωτο της κρουστικής:

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k e^{s_k n T_d} u[n] = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n]$$

Συνάρτηση μεταφοράς σε ΔΧ:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

Άρα έχουμε την εξής απεικόνιση για τους πόλους: $s_k \rightarrow z_k = e^{s_k T_d}$

Οι πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο σε ΣΧ (ευσταθές σύστημα) απεικονίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου άρα έχουμε ευσταθές σύστημα ΔΧ! Τα μηδενικά δεν απεικονίζονται με τον ίδιο τρόπο.

3.4 Φίλτρα Butterworth, Chebyshev και ελλειπτικά φίλτρα

Είναι οι πιο δημοφιλείς τεχνικές σχεδιασμού φίλτρων συνεχούς χρόνου

(Appendix B Oppenheim)

Υπάρχουν αναλυτικές εκφράσεις και για τις 3 κατηγορίες και οι ιδιότητες τους είναι:

- Butterworth – μονοτονική απόκριση συχνοτήτων στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής, επίπεδη στη ζώνη διέλευσης (maximally flat in passband)

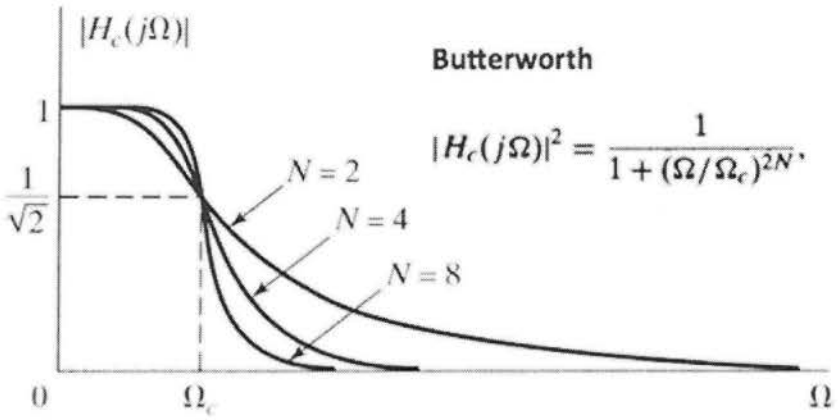
- Chebyshev

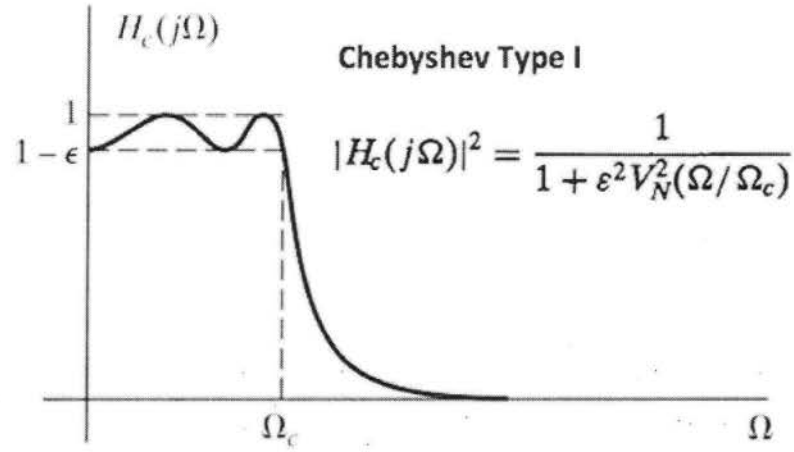
    - Type I:συμμετρική κυμάτωση (ripple) στη ζώνη διέλευσης, μονοτονική απόκριση στη ζώνη αποκοπής
    - Type II: μονοτονική απόκριση στη ζώνη διέλευσης, συμμετρική κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής

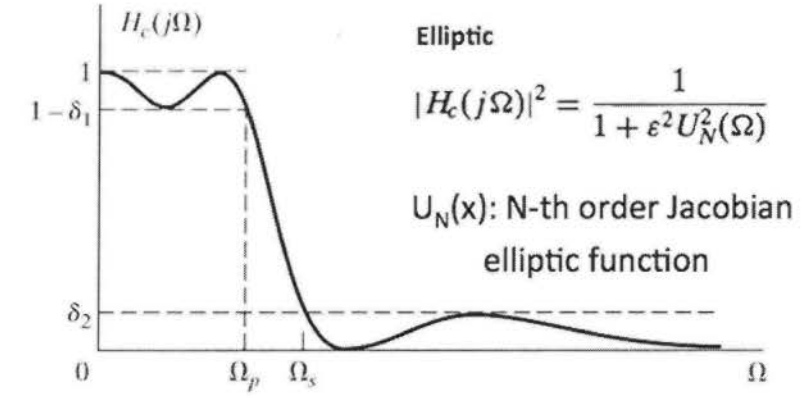
- Elliptic - συμμετρική κυμάτωση στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής

Ο σχεδιασμός φίλτρων ΔΧ Butterworth, Chebyshev, Elliptic με βάση αυτά τα αντίστοιχα φίλτρα ΣΧ και το διγραμμικό μετασχηματισμό έχει επίσης χρησιμοποιηθεί σε ευρεία κλίμακα . Εντολές στο Matlab που υλοποιούν τέτοια φίλτρα: butter, buttord, cheby1, cheby2, cheby1ord, cheby2ord, ellip, ellipord

Παραδείγματα







ε: Passband ripple parameterVN(x): N--th order Chebyshev polynomial

$$\left.\begin{array}{c} V_{N+1}(x) = 2xV_N(x) - V_{N+1}(x) \\ V_0(x) = 1, \quad V_1(x) = x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$V_2(x) = 2x^2 - 1, \quad V_3(x) = 4x^3 - 3x, \ldots$$

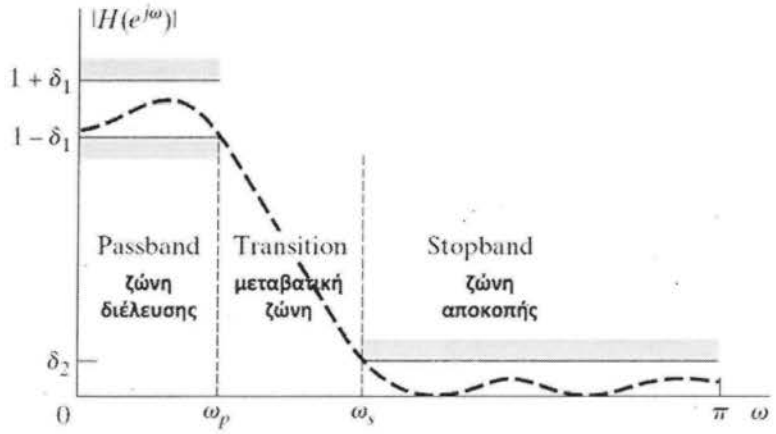
Σχεδιασμός με μέθοδο impulse invariance

Βαθυπερατό φίλτρο Butterworth με προδιαγραφές

- Passband: 0-0.2π, κέρδος -1 με 0 dB, stopband: πάνω από 0.3π, εξασθένηση τουλάχιστον 15 dB, άρα:

$$0.89125 \le \left|H(e^{j\omega})\right| \le 1, \quad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi,$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| \le 0.17783, \qquad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi$$



Βήμα 1:

Μετασχηματισμός προδιαγραφών σε συνεχή χρόνο

Μπορούμε να υποθέσουμε $T_d = 1$ άρα ($\Omega = \omega / T_d$):

$$0.89125 \le \left|H(e^{j\omega})\right| \le 1, \quad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi,$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| \le 0.17783, \qquad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi$$

Βήμα 2:

Το φίλτρο Butterworth συνεχούς χρόνου έχει μέτρο:

$$\left|H_c(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

Πρέπει:

$$\left|H_c(j0.2\pi)\right| \geq 0.89125$$

και

$$\left|H_c(j0.3\pi)\right| \geq 0.17783$$

Άρα:

$$\left.\begin{aligned} 1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} &= \left(\frac{1}{0.89125}\right)^{2} \quad (1) \\ 1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} &= \left(\frac{1}{0.17783}\right)^{2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} N &= 5.8858 \\ \Omega_c &= 0.70474 \end{aligned}$$

*N ακέραιος, άρα N=6. Μπορούμε να αλλάξουμε και την τιμή του Ω_c.

Π.χ. αντικαθιστώντας N=6 στην (1) παίρνουμε Ω_c=0.7032. Για αυτή την τιμή μάλιστα υπερβαίνουμε τις προδιαγραφές στη ζώνη αποκοπής.

Βήμα 3:

Προσδιορισμός πόλων - το κέρδος του φίλτρου συνεχούς χρόνου έχει 12 πόλους (2N=12) καθώς

$$\left|H_c(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

Για $s = j\Omega$:

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1+(s/j\Omega_c)^{2N}}$$

Επομένως οι πόλοι ικανοποιούν την:

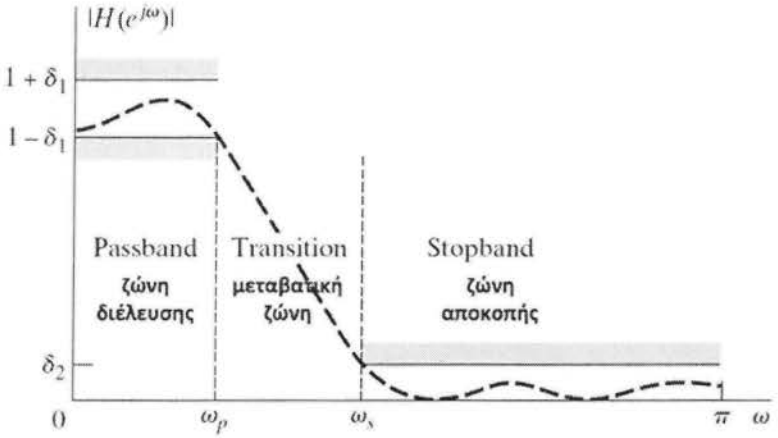
$$1+(s/j\Omega_c)^{2N} = 0$$

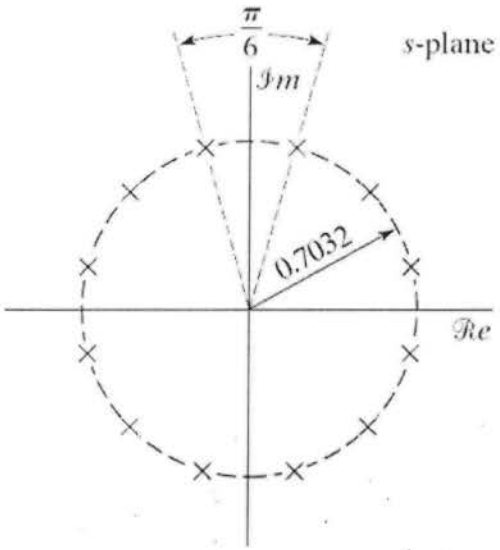
Η ποσότητα $s/j\Omega_c$ μια από τις 2N-οστές ρίζες του -1:

$$\frac{s_k}{j\Omega_c} = (-1)^{1/2N} \Rightarrow s_k = j\Omega_c e^{j\frac{2k-1}{2N}\pi} = \Omega_c e^{j\frac{2k+N-1}{2N}\pi}, \quad k = 0,1,2,\ldots,2N-1$$

Οι πόλοι βρίσκονται σε έναν κύκλο με ακτίνα Ω_c (=0.7032) και απέχουν π/6 μεταξύ τους. Οι πόλοι του κέρδους προκύπτουν σε ζευγάρια από την συνάρτηση μεταφοράς συνεχούς χρόνου, δηλ αν το s_k είναι πόλος της $H(s)$ τότε και το $-s_k$ είναι πόλος της $H(s)$. Για να είναι αιτιατό και ευσταθές το σύστημα $H(s)$ πρέπει όλοι οι πόλοι του να είναι το αριστερό ημιεπίπεδο, άρα:

Pole pair 1: $-0.182 \pm j(0.679)$,
Pole pair 2: $-0.497 \pm j(0.497)$,
Pole pair 3: $-0.679 \pm j(0.182)$.





Βήμα 4:

Προσδιορισμός της συνάρτησης μεταφοράς H(s). Πλέον γνωρίζουμε τους πόλους, άρα:

$$H_c(s) = \frac{K_0}{\prod_{k=1}^{N}(s - s_k)}$$

Πως μπορούμε να προσδιορίσουμε το K_0?

Θέτοντας $H_c(0) = 1$ παίρνουμε:

$$|H_c(s)|_{s=0} = \left| \frac{K_0}{\prod_{k=1}^{N}(-s_k)} \right|$$

Όμως

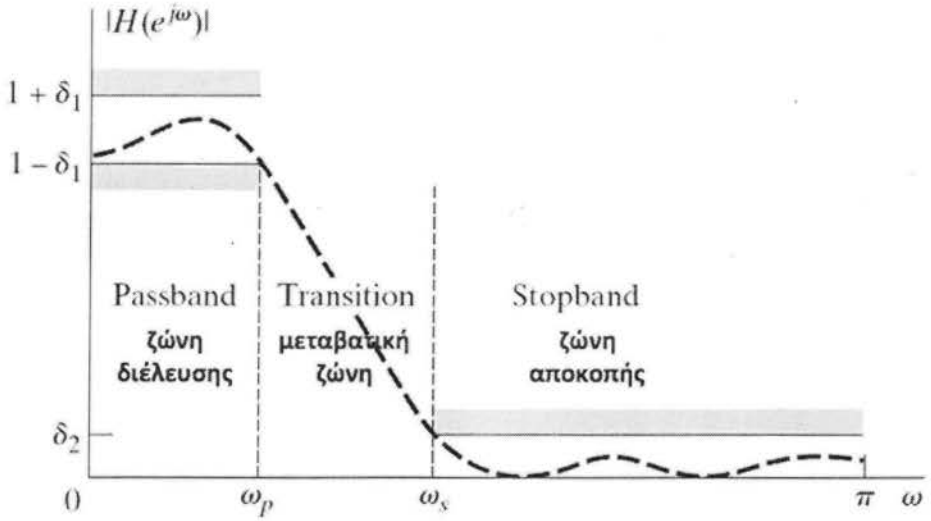
$$s_k = \Omega_c e^{j\frac{2k+N-1}{2N}\pi} \Rightarrow |s_k| = |\Omega_c|$$

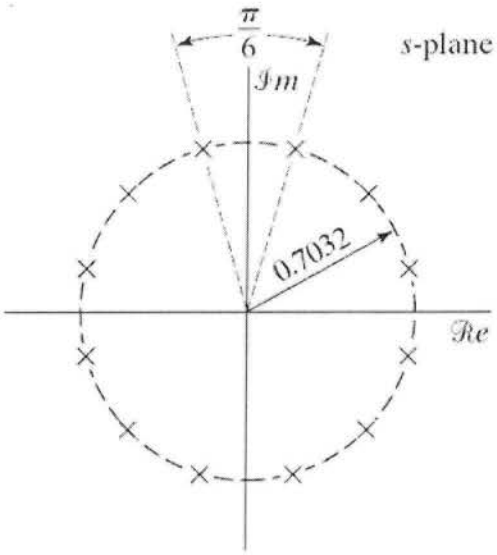
Άρα:

$$\frac{K_0}{\Omega_c^N} = 1 \quad \therefore K_0 = \Omega_c^N = (0.7032)^6 = 0.12093$$

Τελικά λοιπόν:

$$H_c(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.3640s + 0.4945)(s^2 + 0.9945s + 0.4945)(s^2 + 1.3585s + 0.4945)}$$



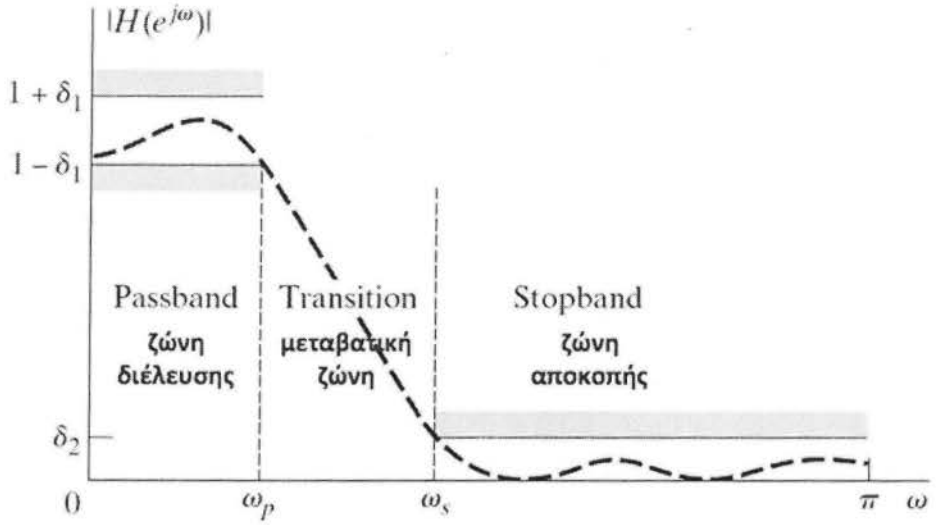


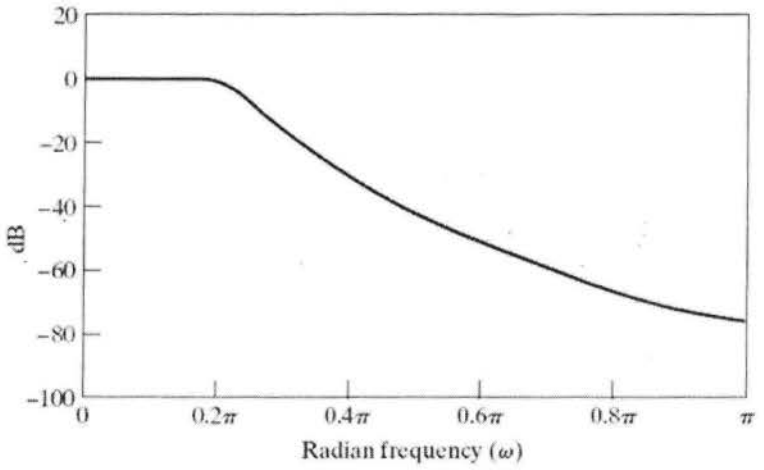
Βήμα 5:

Προσδιορισμός της συνάρτησης μεταφοράς H(z) ο Impulse invariance (μετά από ανάλυση σε μερικά κλάσματα):

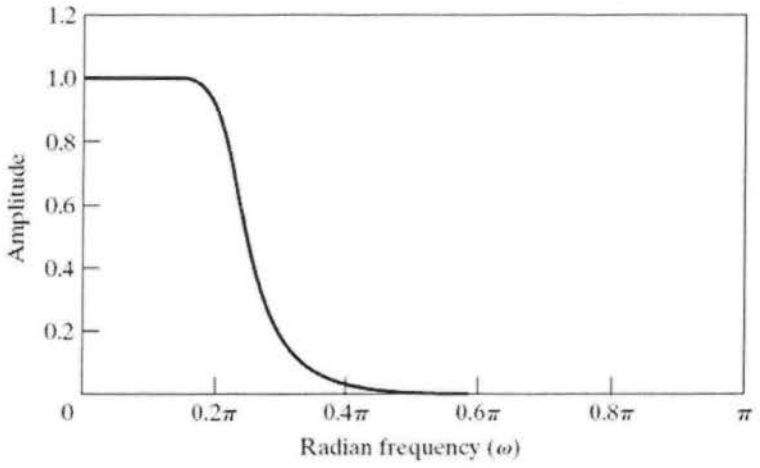
$$s_k \rightarrow z_k = e^{s_k T_d}$$

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.2971z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1455z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8557 - 0.6303z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}$$

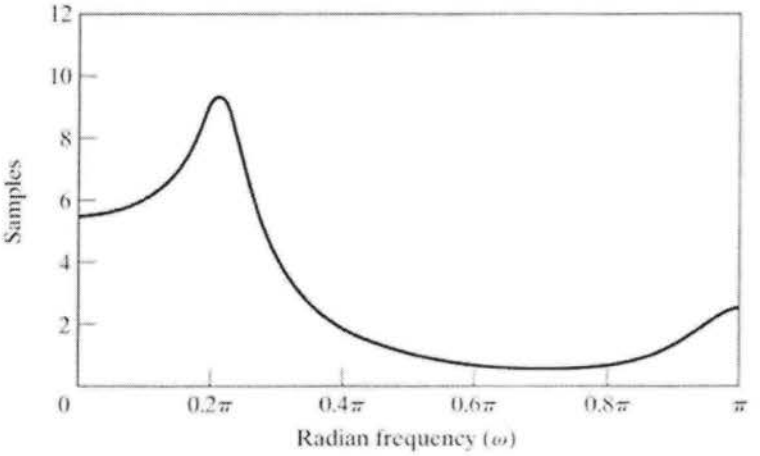

$|H(e^{j\omega})|$
$1+\delta_1$
$1-\delta_1$
Passband
ζώνη
διέλευσης
Transition
μεταβατική
ζώνη
Stopband
ζώνη
αποκοπής
δ_2
0
ω_p
ω_s
π
ω


20
0
-20
-40
-60
-80
-100
dB
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)

(a)



(b)



(c)

Το τελικό φίλτρο ΔΧ πληροί τις προδιαγραφές, άρα το φίλτρο συνεχούς χρόνου είναι αρκούντως περιορισμένου εύρους ζώνης, οπότε έχουμε μικρό ποσοστό αναδίπλωσης .Η μέθοδος impulse invariance είναι κατάλληλη μόνο για φίλτρα με περιορισμένο εύρος ζώνης (πχ βαθυπερατά). Για υψιπερατά η ζωνοφρακτικά φίλτρα δεν είναι ενδεδειγμένη!

3.5 Διγραμμικός μετασχηματισμός (bilinear transformation)

Ο διγραμμικός μετασχηματισμός αναπαριστά αλγεβρικά την μεταβλητή s στη μεταβλητή z έτσι ώστε ολόκληρος ο άξονας $j\Omega$ του επιπέδου s να αντιστοιχεί σε μια περιστροφή του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο z , δηλ: $-\infty \le \Omega \le \infty \rightarrow -\pi \le \omega \le \pi$

Ο (μη γραμμικός) μετασχηματισμός που το επιτυγχάνει είναι:

$$s=\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \qquad H(z)=H_c\left[\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right]$$

Αν μας δίνονται προδιαγραφές σε διακριτό χρόνο, η παράμετρος δειγματοληψίας T_d δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα (καθώς πηγαίνουμε από προδιαγραφές ΔΧ σε ΣΧ και πάλι πίσω σε ΔΧ). Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι:

$$z=\frac{1+(T_d/2)s}{1-(T_d/2)s}$$

Για $s=\sigma+j\Omega$ έχουμε :

$$z=\frac{1+\sigma T_d/2+j\Omega T_d/2}{1-\sigma T_d/2-j\Omega T_d/2}$$

- Αν $\sigma<0, |z|<1$ για κάθε Ω

- Αν $\sigma>0, |z|>1$ για κάθε Ω

- Άρα ευσταθή αιτιατά φίλτρα ΣΧ παραμένουν ευσταθή και αιτιατά σε ΔΧ

Για $s=j\Omega$ έχουμε :

$$z=\frac{1+j\Omega T_d/2}{1-j\Omega T_d/2}$$

άρα $|z|=1$ για κάθε Ω και ο άξονας Ω αναπαριστάται στο μοναδιαίο κύκλο.

Ισοδύναμα:

$$e^{j\omega}=\frac{1+j\Omega T_d/2}{1-j\Omega T_d/2}$$

Ποια είναι η σχέση μεταξύ Ω και ω;

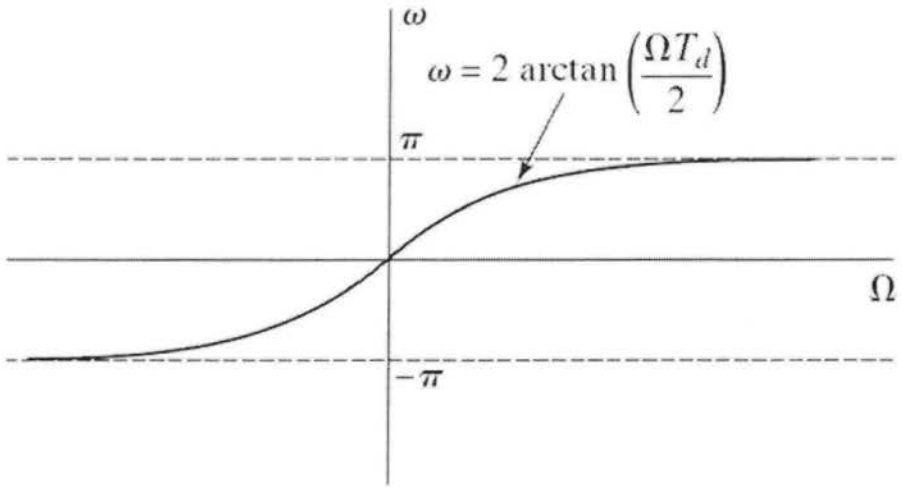
$$s=\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^{z=e^{j\omega}}\rightarrow s=\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}\right)$$

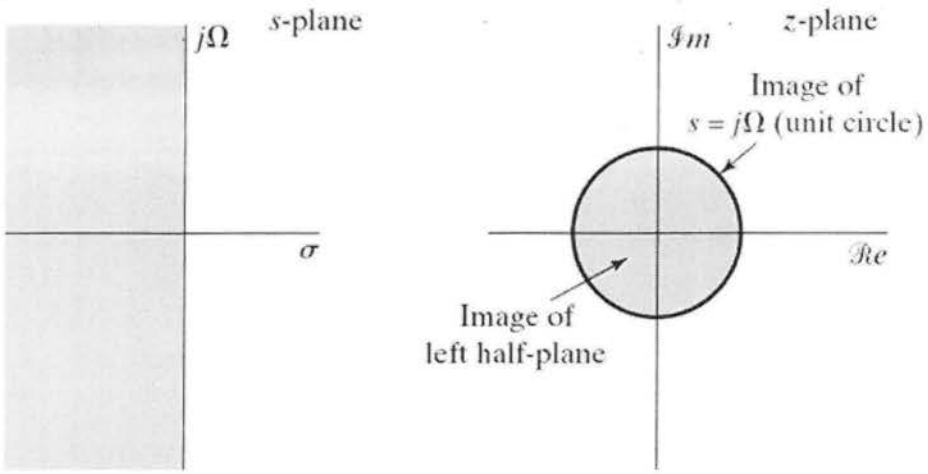
Τελικά:

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d}\left[\frac{2e^{-j\omega/2}(j\sin\omega/2)}{2e^{-j\omega/2}(\cos\omega/2)}\right] = \frac{2j}{T_d}\tan(\omega/2)$$

$$\Omega = \frac{2}{T_d}\tan(\omega/2)$$

$$\omega = 2\arctan\left(\Omega T_d/2\right)$$



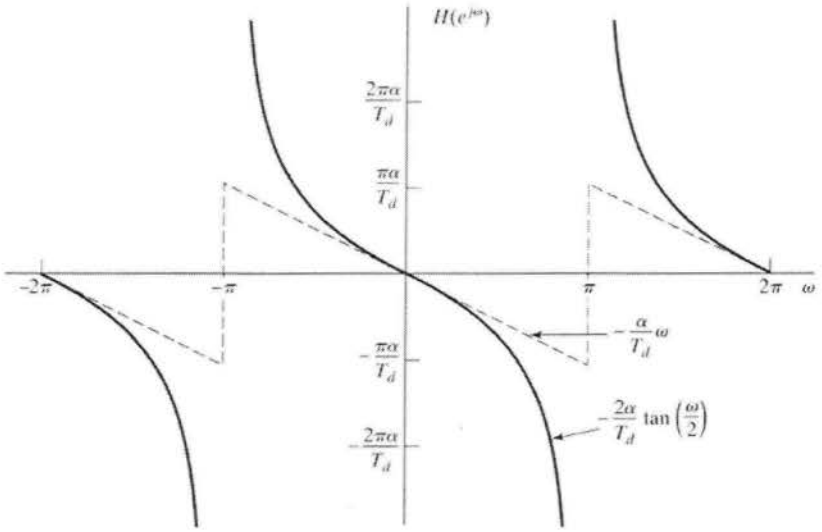


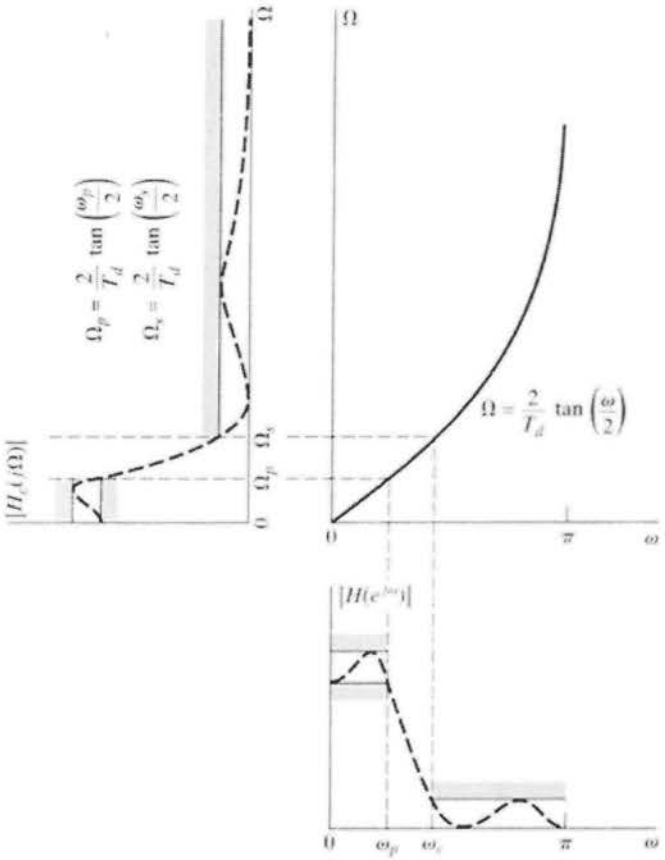
$$0 \le \Omega \le \infty \rightarrow 0 \le \omega \le \pi$$

$$-\infty \le \Omega \le 0 \to \pi \le \omega \le 0$$

Αποφεύγουμε την αναδίπλωση, αλλά έχουμε μη γραμμικό μετασχηματισμό της συχνότητας!

Θα πρέπει η μορφή της απόκρισης συχνοτήτων να είναι τέτοια ώστε να μην έχουμε σημαντικές παραμορφώσεις από αυτόν το μετασχηματισμό – φίλτρα με τμηματικά σταθερή απόκριση (π.χ. βαθυπερατά, υψιπερατά, ζωνοπερατά κλπ)



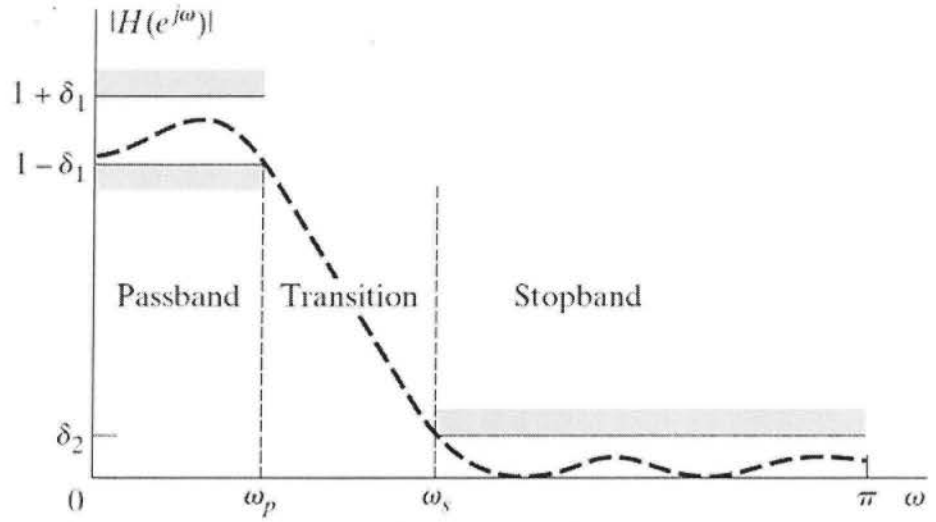


Ο διγραμμικός μετασχηματισμός παραμορφώνει τη φάση .Δεν μπορούμε να πάρουμε φίλτρο ΔΧ με γραμμική φάση από ένα φίλτρο ΣΧ με γραμμική φάση.

Παράδειγμα – Φίλτρο Butterworth

Έστω το φίλτρο με τις προδιαγραφές του προηγούμενου παραδείγματος σε ΔΧ:

$$0.89125 \le \left|H(e^{j\omega})\right| \le 1, \quad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi,$$
$$\left|H(e^{j\omega})\right| \le 0.17783, \quad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi$$



Θα σχεδιάσουμε φίλτρο Butterworth με διγραμμικό μετασχηματισμό

Βήμα 1: Προδιαγραφές σε συνεχή χρόνο

$$0.89125 \le |H_c(j\Omega)| \le 1, \quad 0 \le \Omega \le \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$|H_c(j\Omega)| \le 0.17783, \quad \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \le \Omega \le \infty$$

Βήμα 2 :Διαλέγουμε T_d=1. Έχουμε μονοτονική απόκριση συχνοτήτων άρα πρέπει:

$|H_c(j2\tan(0.1\pi))| \ge 0.89125 \quad |H_c(j2\tan(0.15\pi))| \ge 0.17783$

Απόκριση συχνοτήτων:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}},$$

$$1+\left(\frac{2\tan(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N}=\left(\frac{1}{0.89}\right)^2$$

$$1+\left(\frac{2\tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N}=\left(\frac{1}{0.178}\right)^2$$

Λύνοντας ως προς Ω,N:

$$N=\frac{\log\left[\left(\left(\frac{1}{0.178}\right)^2-1\right)\Big/\left(\left(\frac{1}{0.89}\right)^2-1\right)\right]}{2\log\left[\tan(0.15\pi)/\tan(0.1\pi)\right]}=5.305$$

-

$N=6,\quad \Omega_c=0.766$

Βήμα 3: Εύρεση πόλων –Όπως και πριν είναι 2N και προκύπτουν από τις 2N-οστές ρίζες του -1, και έχουμε ακτίνα 0.766 .Διαλέγουμε τους 6 πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο.

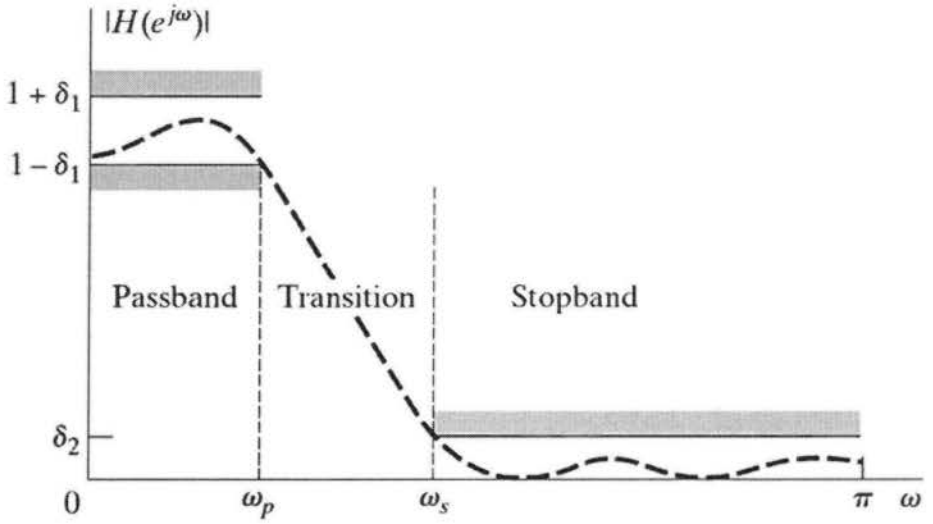
Βήμα 4: Συνάρτηση μεταφοράς ΣΧ

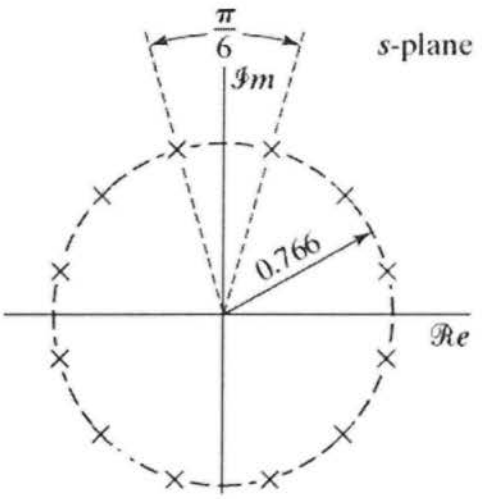
$$H_c(s)=\frac{K_0}{\prod_{k=i}^{N}(s-s_k)}\Rightarrow K_0=(0.766)^6=0.20238$$

Άρα: $H_c(s)=\dfrac{0.20238}{(s^2+0.3996s+0.5871)(s^2+1.0836s+0.5871)(s^2+1.4802s+0.5871)}$

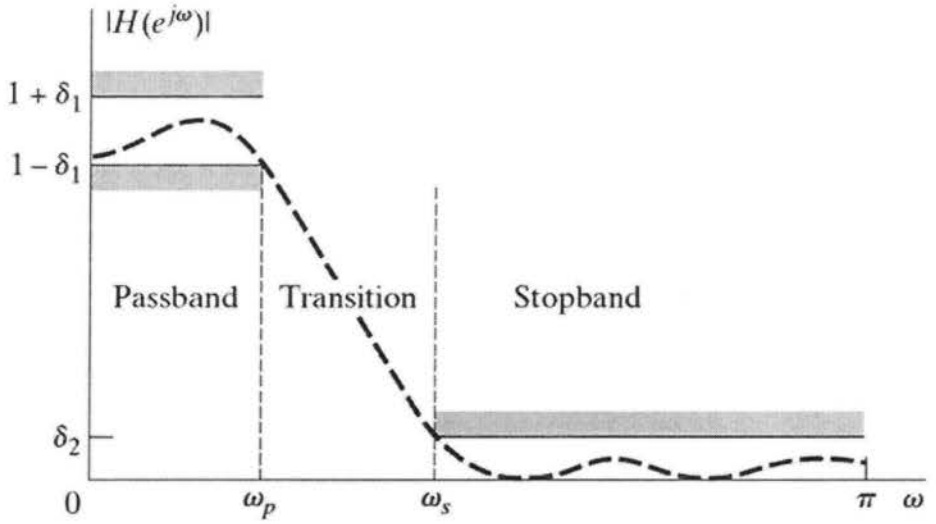
Βήμα 5: Συνάρτηση μεταφοράς ΔΧ– Διγραμμικός μετ/σμος

$$H(z)=H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}=\frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2})(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}$$

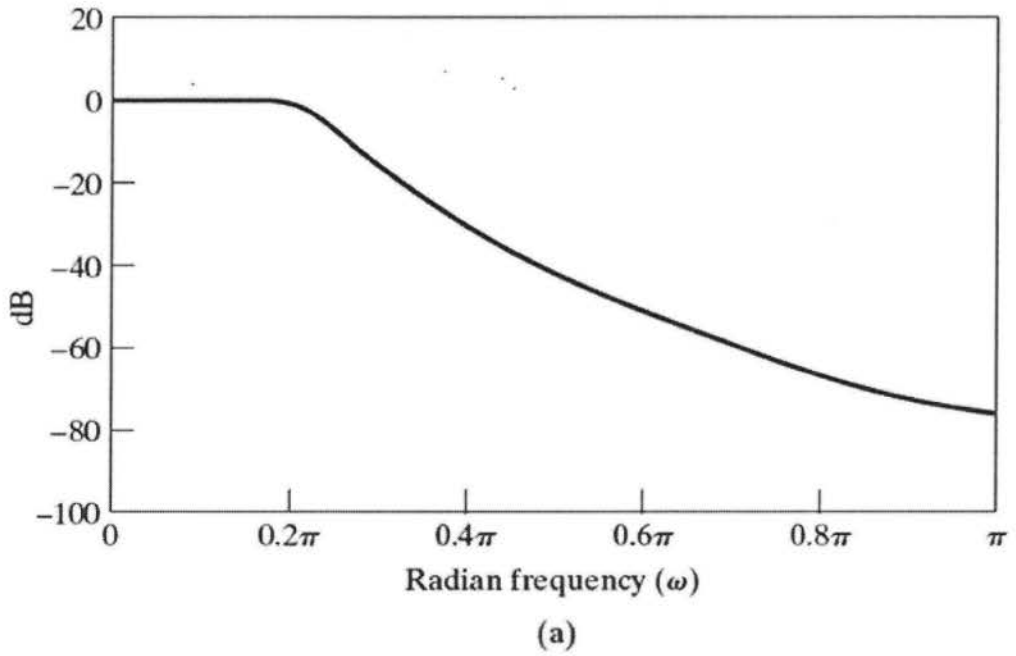




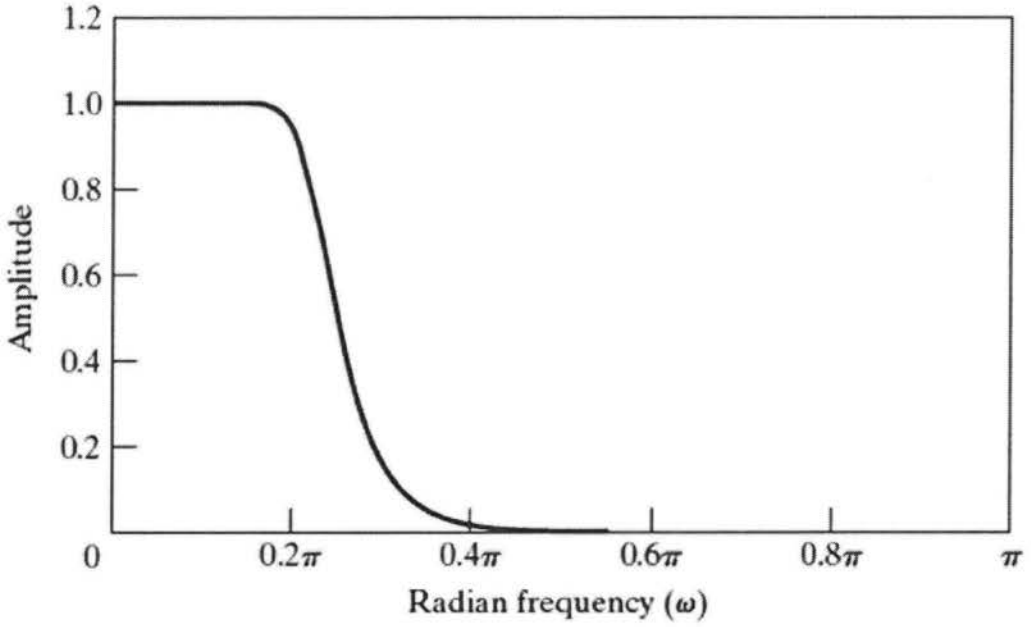
Η απόκριση συχνοτήτων πέφτει πολύ πιο γρήγορα λόγω του μη γραμμικού μετασχηματισμού συχνότητας (έχουμε αντιστοιχίσει το ω=π στο Ω=άπειρο!)



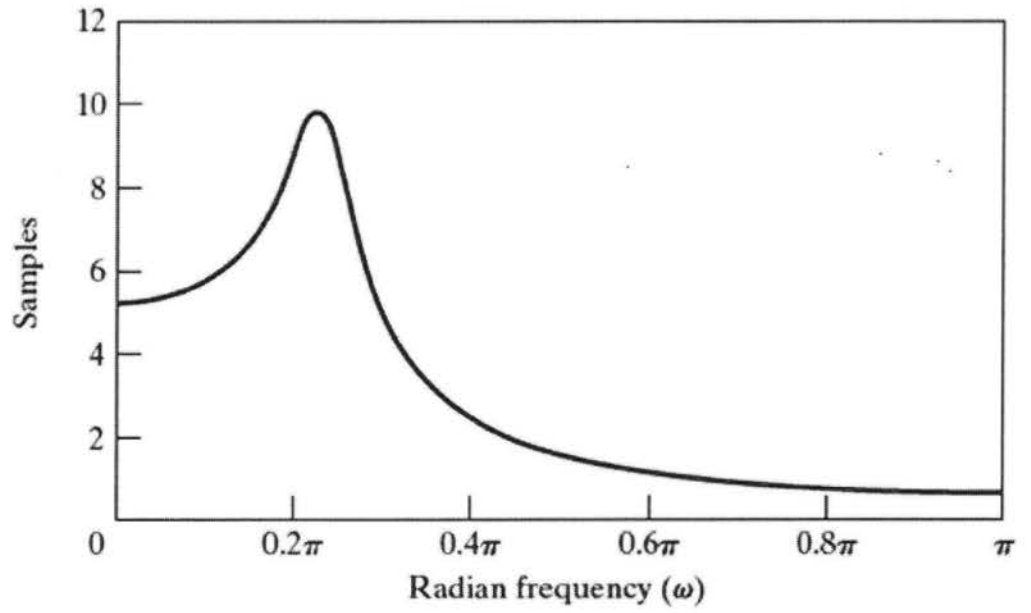
$$0.89125 \le \left|H(e^{j\omega})\right| \le 1, \quad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi,$$
$$\left|H(e^{j\omega})\right| \le 0.17783, \quad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi$$



(a)


1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
Amplitude
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)

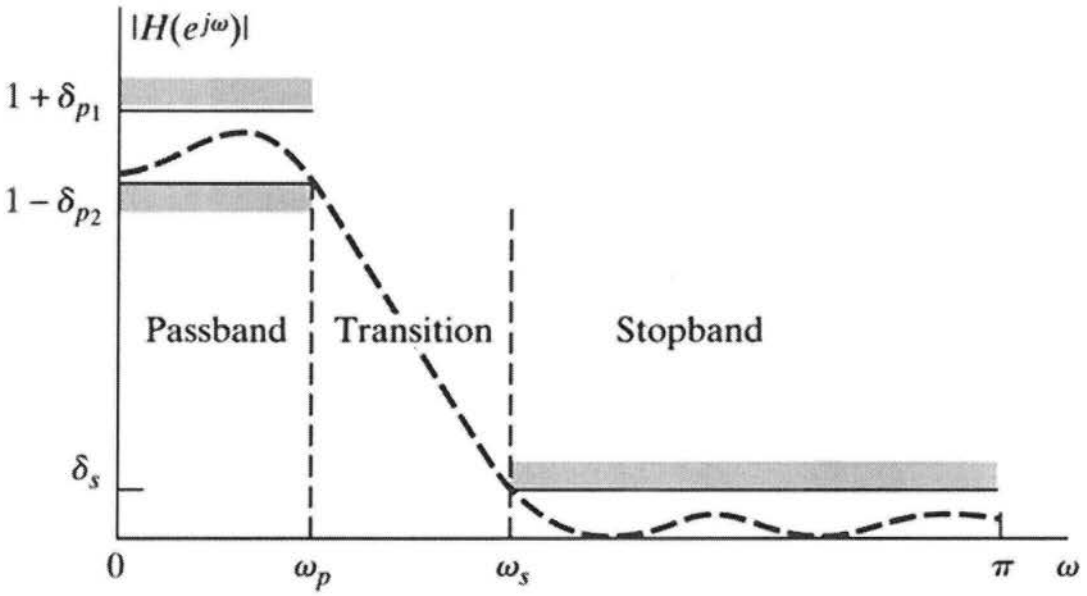
(b)


12
10
8
6
4
2
Samples
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)

(c)

3.6 Σχεδιασμός φίλτρων

Παράδειγμα: Σχεδιασμός βαθυπερατού φίλτρου (Matlab)



Δίνουμε προδιαγραφές σε διακριτό χρόνο στις αντίστοιχες εντολές με δp1=0.

[N, Wn] = BUTTORD(Wp, Ws,Rp, Rs)

Wp: passband limit (κανονικοποιημένη από 0-1, δηλ το 1 αντιστοιχεί στο π)

Ws: stopband limit

Rp:Όριο (σε dB) που επιτρέπεται να χάνει το φίλτρο στη ζώνη διέλευσης (passband)

Rs: Ελάχιστη επιτρεπτή εξασθένηση (σε dB) στη ζώνη αποκοπής (stopband)

N: τάξη φίλτρου

Wn: συχνότητα 3 dB Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για υψιπερατά, ζωνοπερατά,

Ζωνοφρακτικά φίλτρα π.χ.:

Lowpass: Wp= .1, Ws = .2

Highpass: Wp= .2, Ws = .1

Bandpass: Wp= [.2 .7], Ws = [.1 .8]

Bandstop: Wp= [.1 .8], Ws = [.2 .7]

[B,A] = BUTTER(N,Wn)

B,A: συντελεστές της εξίσωσης διαφορών που υλοποιεί το φίλτρο. Μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση συχνοτήτων με την εντολή freqz, το διάγραμμα πόλων μηδενικών με την εντολή pzmap κλπ.

Προδιαγραφές

ωp=0.5π

ωs=0.6π

passband gain: 0 dB=20log(1+δp1)

minimum passband gain (1-δ1): -0.3 dB=20log(1-□δp2)

maximum stopband gain (δ2): -□30 dB=20log(δs)

Άρα: δp1=0, δp2=0.0339, δs=0.0316

[N, Wn] = BUTTORD(Wp, Ws, Rp, Rs)

[N, Wp] = CHEB1ORD(Wp, Ws, Rp, Rs)

[N, Ws] = CHEB2ORD(Wp, Ws, Rp, Rs)

[N, Wp] = ELLIPORD(Wp, Ws,Rp, Rs)

π.χ. για τις δεδομένες προδιαγραφές:

[N,Wn] = buttord(.5, .6, 0.3, 30)

N =

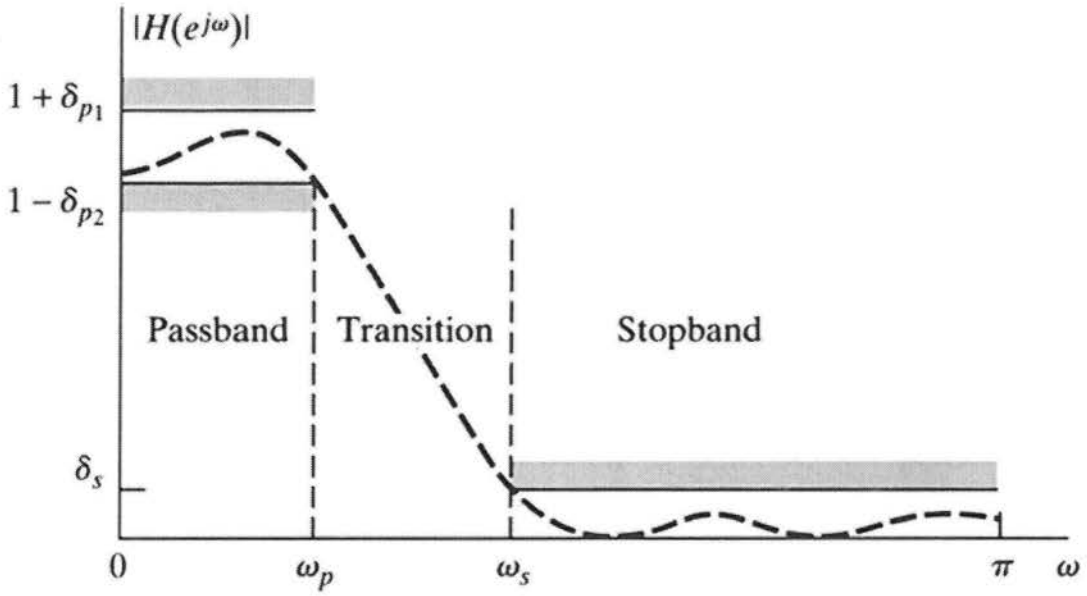
15

Wn=

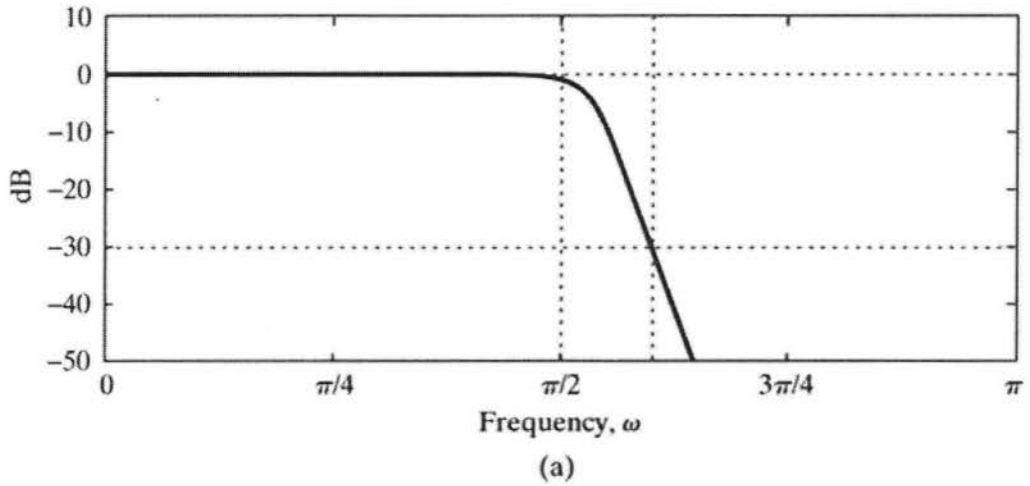
0.5284

[B,A]=butter(15,0.5284);

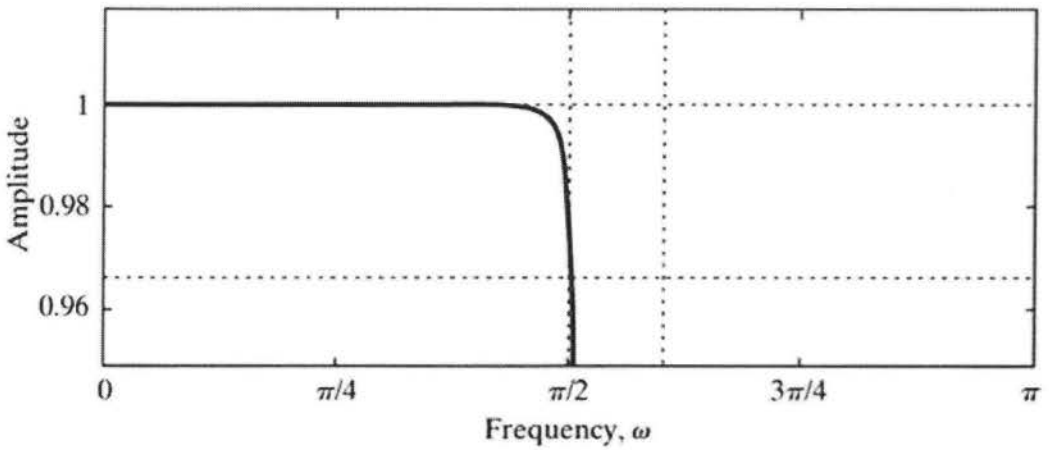
Chebyshev Type I: N=7, Type II: N=7, Elliptic: N=5



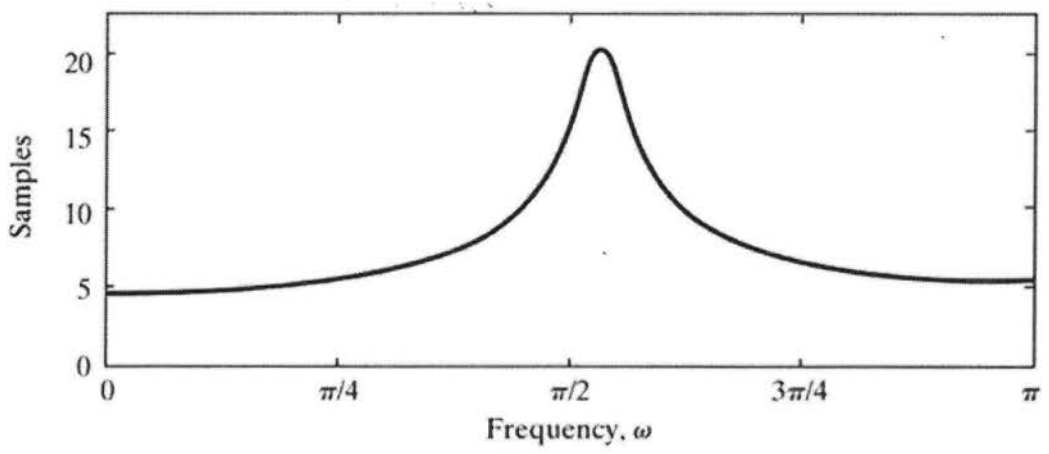
Butterworth



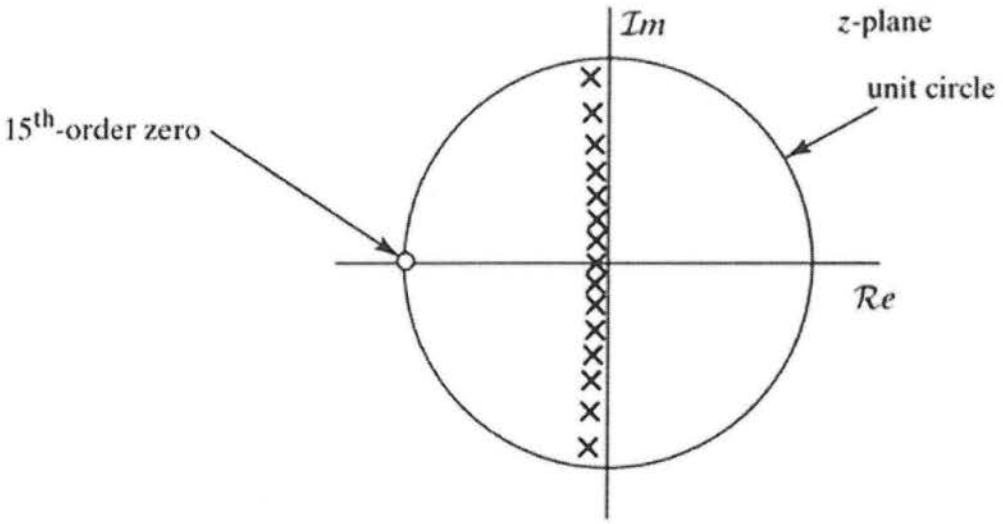
(a)


Amplitude
1
0.98
0.96
0
π/4
π/2
3π/4
π
Frequency, ω

(b)

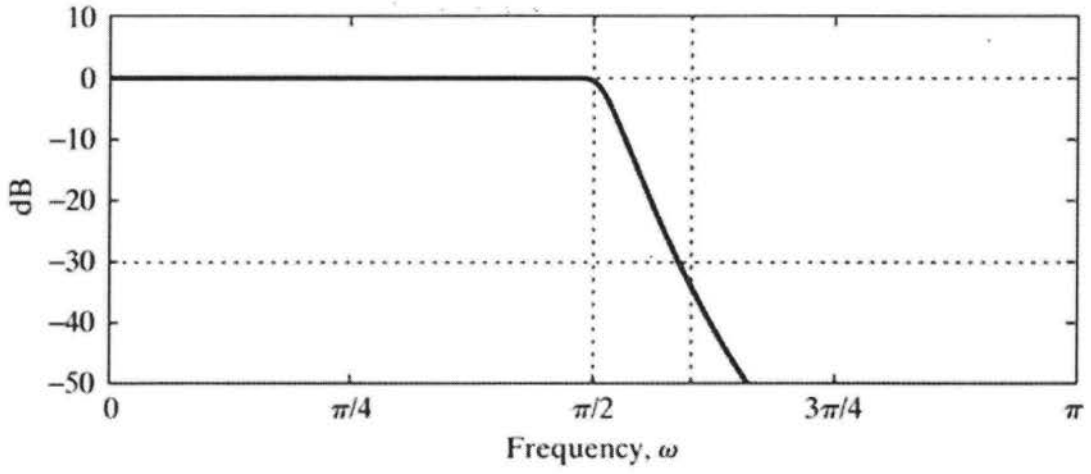

Samples
20
15
10
5
0
0
π/4
π/2
3π/4
π
Frequency, ω

(c)

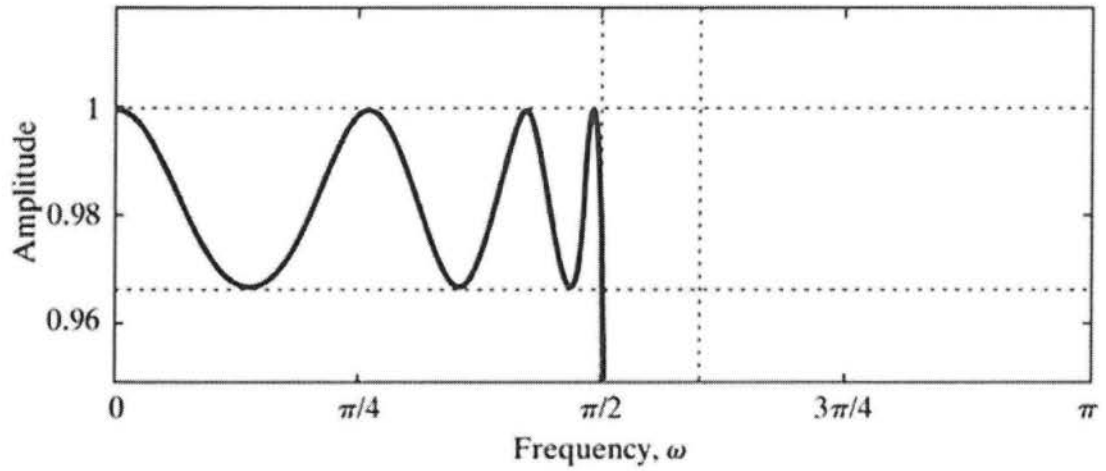


(d)

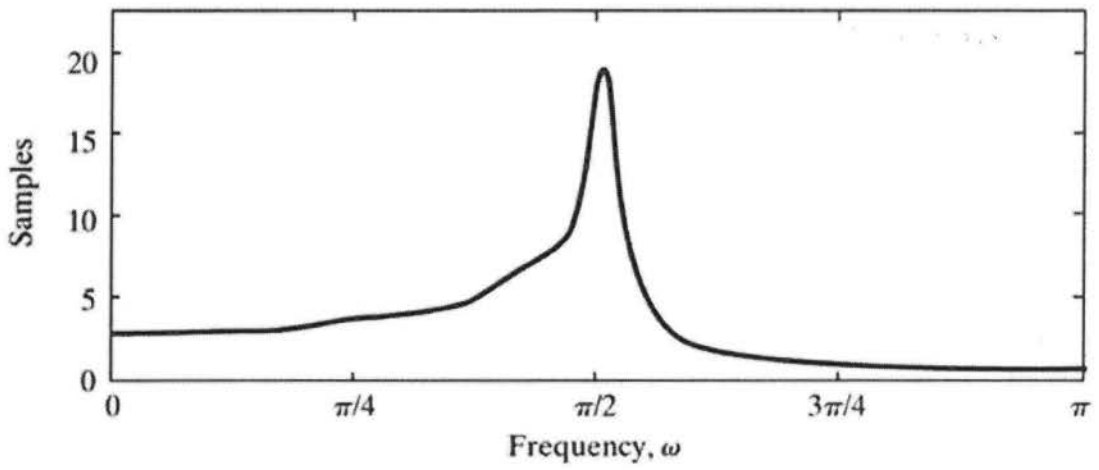
Chebyshev Type I



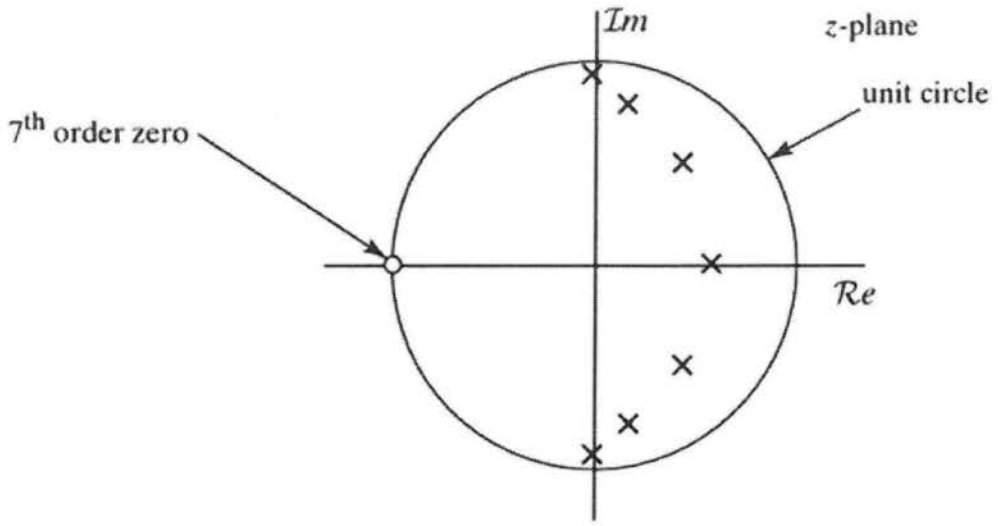
(a)


Amplitude
1
0.98
0.96
0
π/4
π/2
3π/4
π
Frequency, ω

(b)

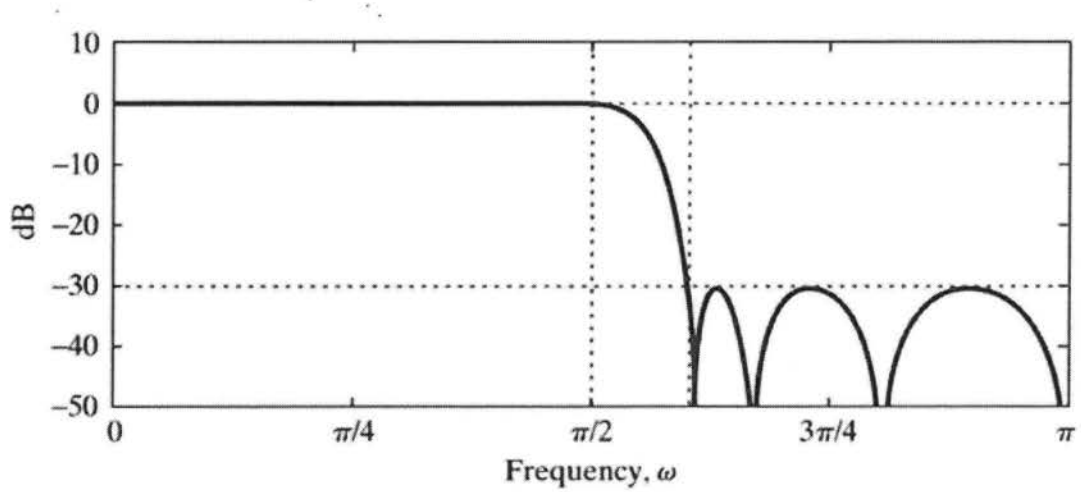

Samples
20
15
10
5
0
0
π/4
π/2
3π/4
π
Frequency, ω

(c)

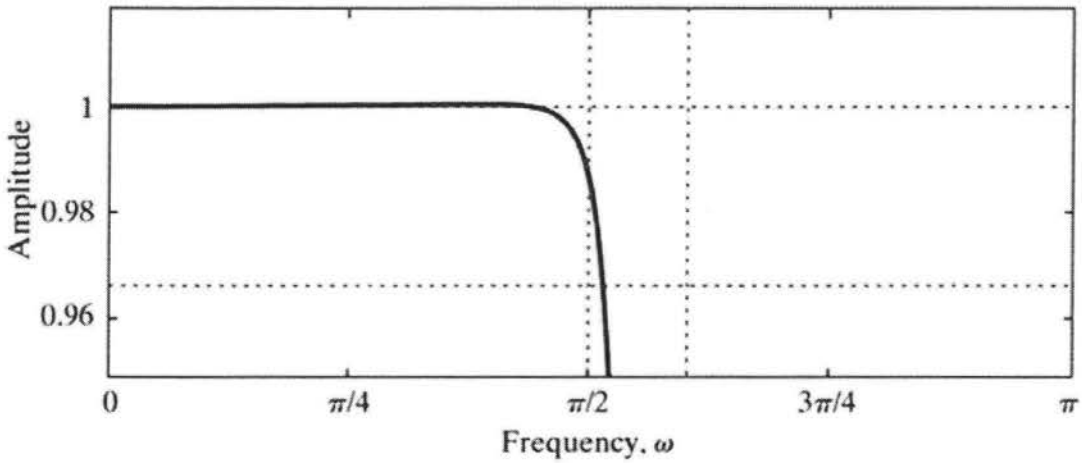


(d)

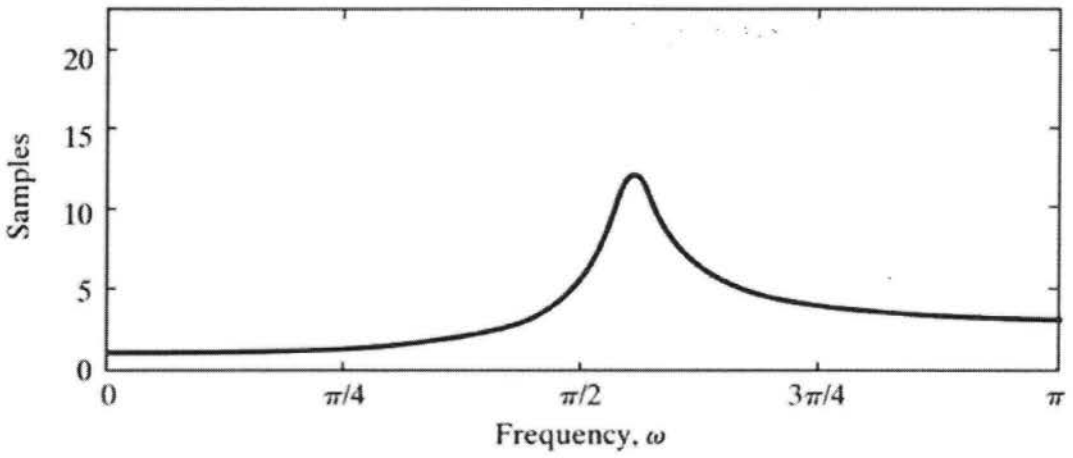
Chebyshev Type II



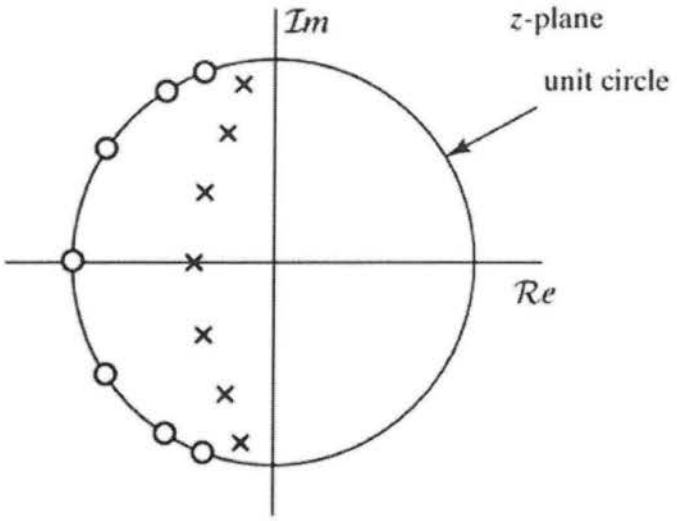
(a)


Amplitude
1
0.98
0.96
0
π/4
π/2
3π/4
π
Frequency, ω

(b)


Samples
20
15
10
5
0
0
π/4
π/2
3π/4
π
Frequency, ω

(c)



(d)

Chebyshev Type I:

[B,A] = cheby1(7,0.3,0.5)

[H,W] = freqz(B,A,128);

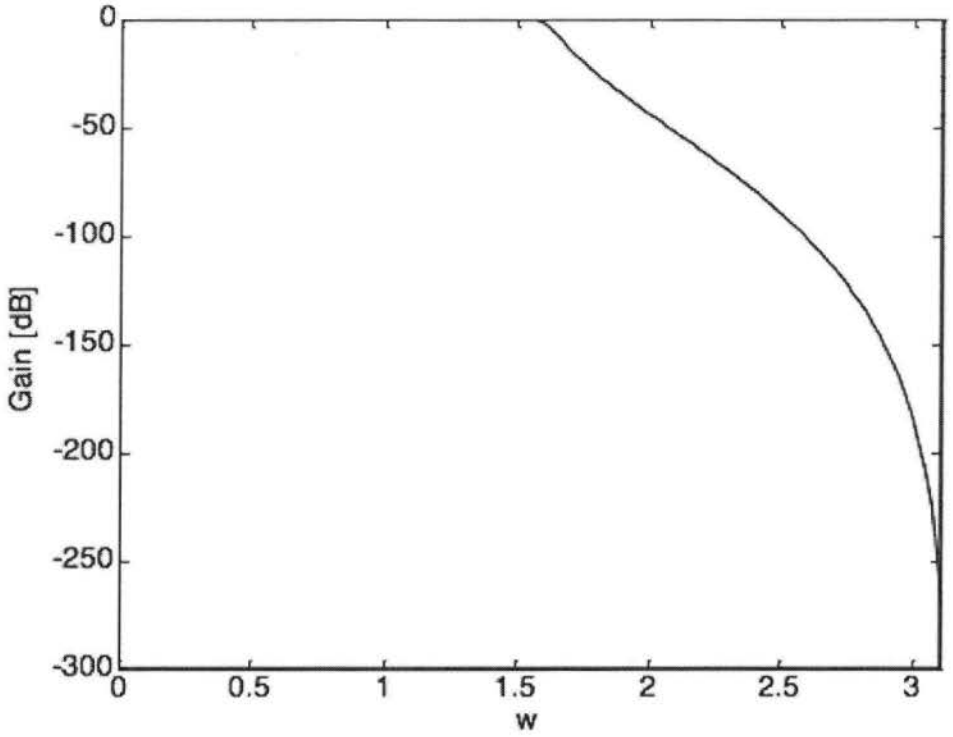
plot (W,20*log10(abs(H)));

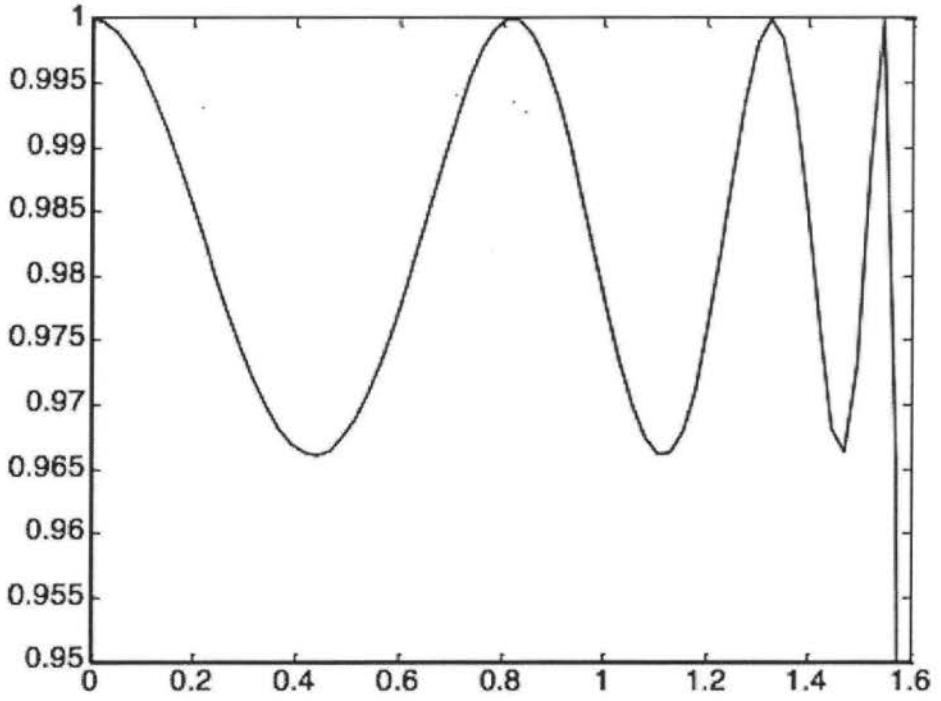
plot (W,(abs(H)));

[Gd,W] = grpdelay(B,A,128);

plot (W,Gd);

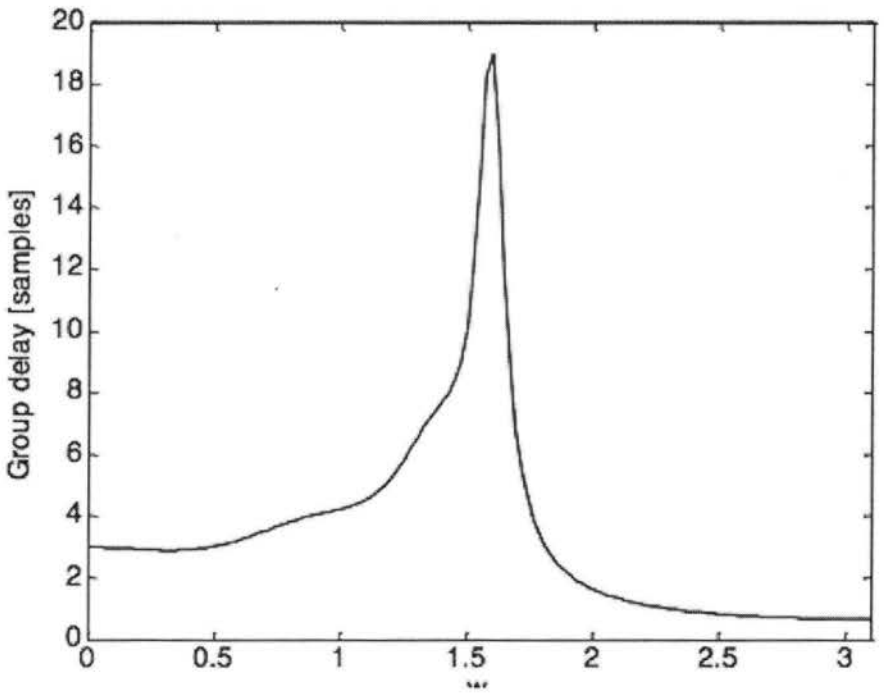
pzmap(B,A);

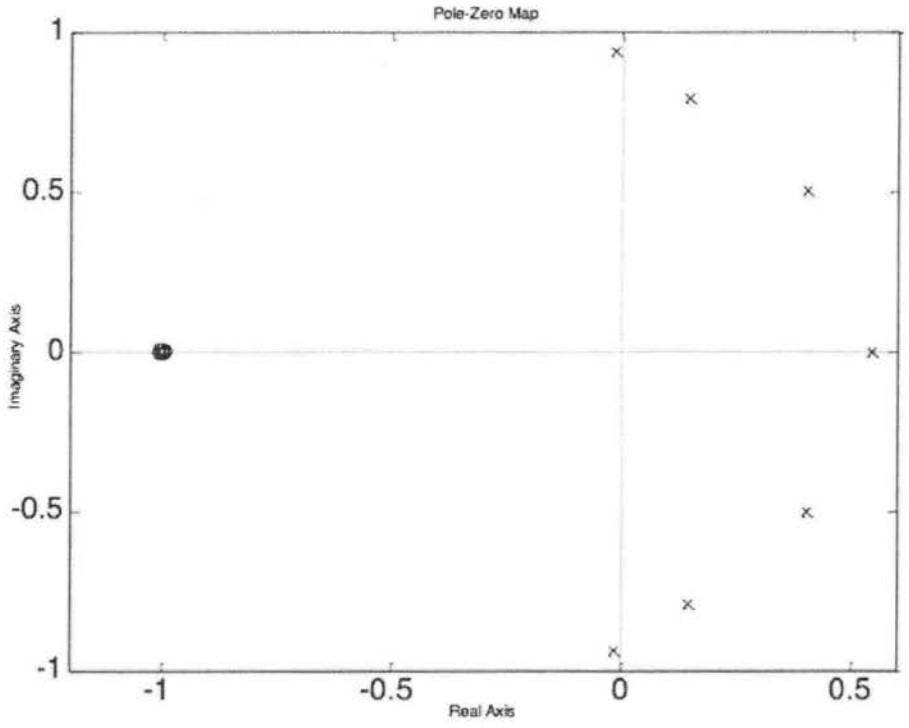

Gain [dB]
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
w


1
0.995
0.99
0.985
0.98
0.975
0.97
0.965
0.96
0.955
0.95
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

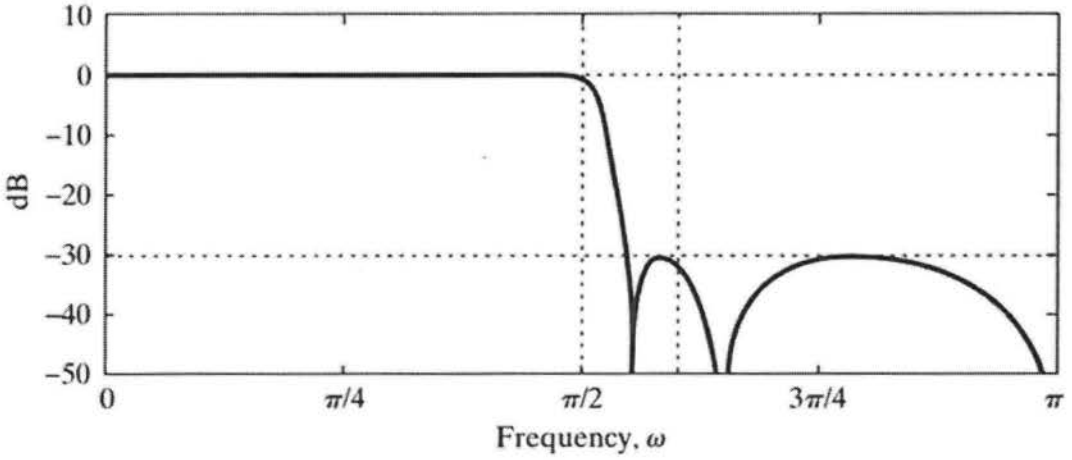
Chebyshev Type I:

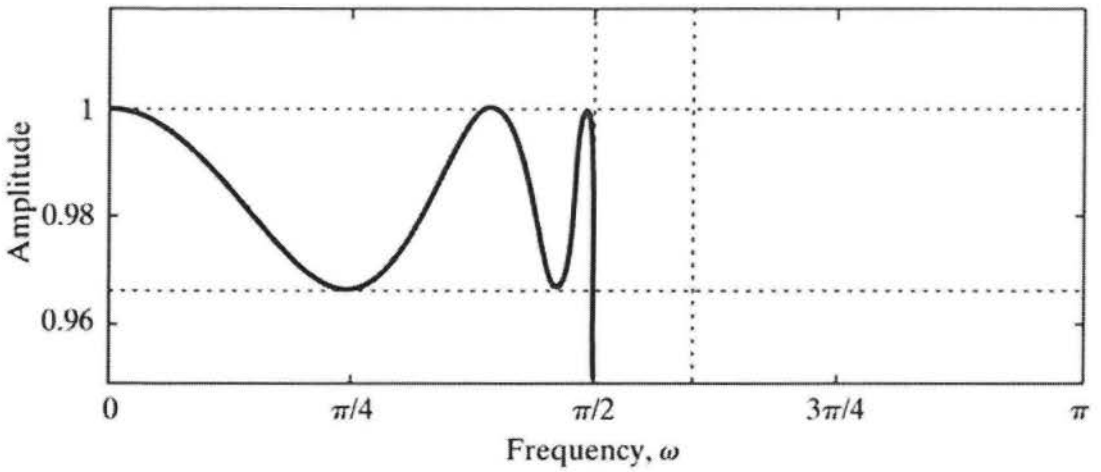
```
[B,A] = cheby1(7,0.3,0.5)
[H,W] = freqz(B,A,128);
plot (W,20*log10(abs(H)));
plot (W,(abs(H)));
[Gd,W] = grpdelay(B,A,128);
plot (W,Gd);
pzmap (B,A);
```

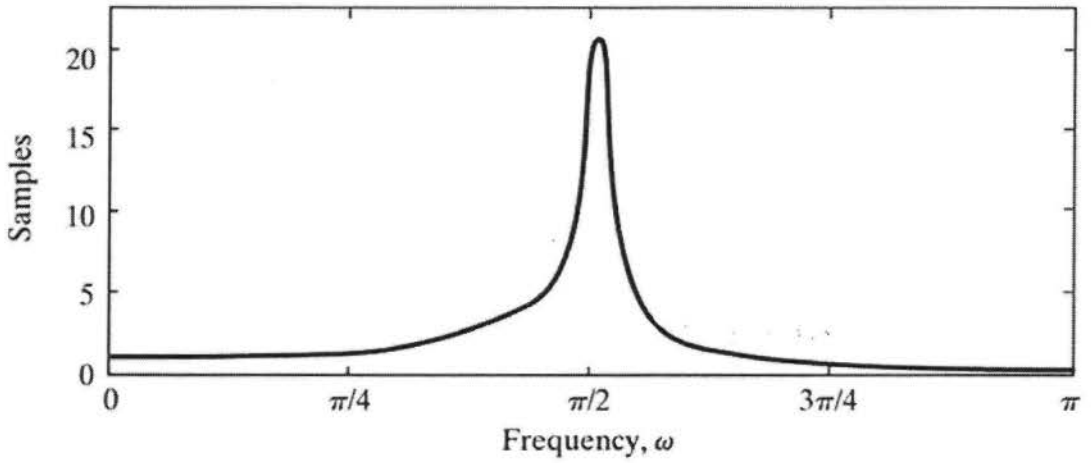


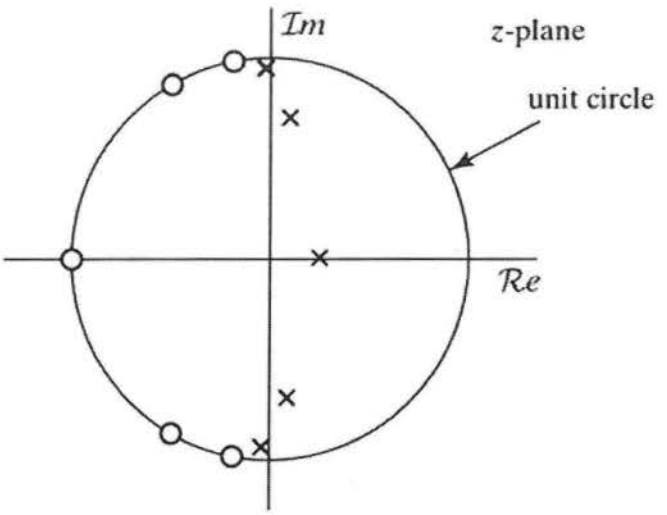

Pole-Zero Map
Imaginary Axis
Real Axis
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5

Elliptic

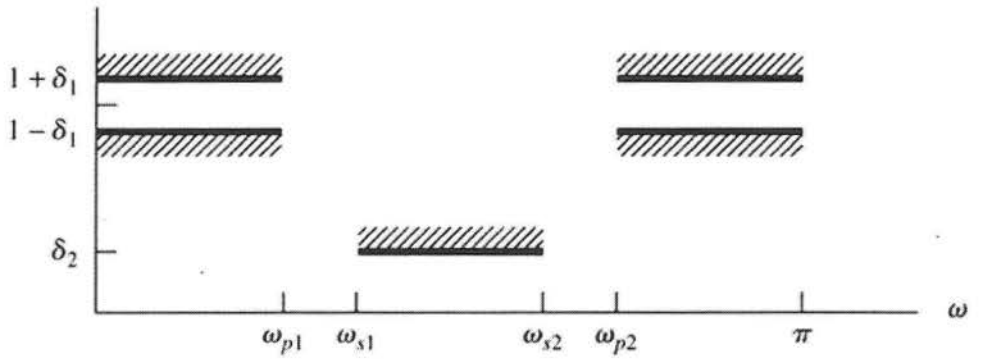

10
0
−10
−20
−30
−40
−50
dB
0
π/4
π/2
3π/4
π
Frequency, ω


Amplitude
1
0.98
0.96
0
π/4
π/2
3π/4
π
Frequency, ω


Samples
20
15
10
5
0
0
π/4
π/2
3π/4
π
Frequency, ω



Μετασχηματισμοί σε άλλους τύπους φίλτρων



Πως μπορούμε να μετασχηματίσουμε σε άλλους τύπους φίλτρων;

π.χ. Mulmband filter: ιδανικά κέρδος 1 στις ζώνες διέλευσης, μηδέν στις ζώνες αποκοπής.

Συνεχής χρόνος: σχεδιασμός πρωτότυπου βαθυπερατού φίλτρου, αλγεβρικός μετασχηματισμός για να πάρουμε άλλους τύπους .

Μετατροπή σε ΔΧ ->διγραμμικός μετασχηματισμός, η μέθοδος του αναλλοίωτου της κρουστικής δεν είναι κατάλληλη. Επίσης μπορούμε να σχεδιάσουμε κατευθείαν ένα βαθυπερατό φίλτρο ΔΧ και να μετατρέψουμε σε άλλους τύπους με κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς .Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι παρόμοιοι με το διγραμμικό μετασχηματισμό.

Γενικά αν Z η μεταβλητή του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου ψάχνουμε ένα μετασχηματισμό:

$$Z^{-1} = G(z^{-1})$$

τέτοιον ώστε:

$$H(z) = H_{lp}(Z)\Big|_{Z^{-1}=G(z^{-1})}$$

και η H(z) να έχει την επιθυμητή μορφή.

Περιορισμός: αν η αρχική συνάρτηση Hlpείναι ρητή ως προς z-□1 και αντιστοιχεί σε αιτιατό και ευσταθές σύστημα, και η H(z) πρέπει να είναι ρητή ως προς z-□1 και να αντιστοιχεί σε αιτιατό και ευσταθές σύστημα.

Ισοδύναμα: Η $G(z^{-1})$ πρέπει να είναι ρητή και το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου Z πρέπει να απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z. Ο μοναδιαίος κύκλος του επιπέδου Z πρέπει να απεικονίζεται στον μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου z.

Έχει αποδειχθεί ότι η πιο γενική μορφή της απεικόνισης που πληροί τις παραπάνω είναι:

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm\prod_{k=1}^{N}\frac{z^{-1}-\alpha_k}{1-\alpha_k z^{-1}}$$

όπου $|\alpha_k|<1$. Διαλέγοντας τα N και α_k κατάλληλα μπορούμε να μετασχηματίσουμε στον επιθυμητό τύπο φίλτρου.

TABLE 7.1 TRANSFORMATIONS FROM A LOWPASS DIGITAL FILTER PROTOTYPE OF CUTOFF FREQUENCY θ_p TO HIGHPASS, BANDPASS, AND BANDSTOP FILTERS

Filter Type	Transformations	Associated Design Formulas
Lowpass	$Z^{-1} = \dfrac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \dfrac{\sin\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}$ ω_p = desired cutoff frequency
Highpass	$Z^{-1} = -\dfrac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\dfrac{\cos\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}$ ω_p = desired cutoff frequency
Bandpass	$Z^{-1} = -\dfrac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1}$	$\alpha = \dfrac{\cos\left(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right)}$ $k = \cot\left(\dfrac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right) \tan\left(\dfrac{\theta_p}{2}\right)$ ω_{p1} = desired lower cutoff frequency ω_{p2} = desired upper cutoff frequency
Bandstop	$Z^{-1} = \dfrac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} z^{-1} + 1}$	$\alpha = \dfrac{\cos\left(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right)}$ $k = \tan\left(\dfrac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right) \tan\left(\dfrac{\theta_p}{2}\right)$ ω_{p1} = desired lower cutoff frequency ω_{p2} = desired upper cutoff frequency

θp: συχνότητα αποκοπής του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου

Παράδειγμα

Έστω βαθυπερατό φίλτρο Chebysheντύπου I με προδιαγραφές:

$$0.89125 \le \left|H(e^{j\omega})\right| \le 1, \quad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi,$$
$$\left|H(e^{j\omega})\right| \le 0.17783, \quad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi$$

Για να μετασχηματίσουμε σε υψιπερατό με $\omega_p = 0.6\pi$ από τον πίνακα παίρνουμε ($\theta_p = 0.2\pi$):

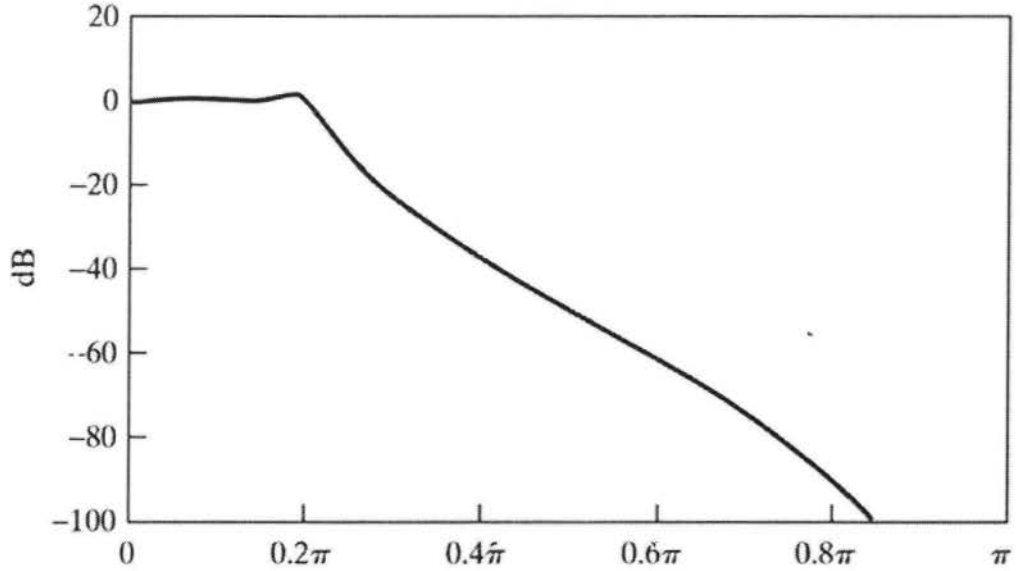
$$\alpha = \frac{\cos((0.2\pi + 0.6\pi)/2)}{\cos((0.2\pi - 0.6\pi)/2)} = -0.38197$$

οπότε καθώς (τάξη αρχικού φίλτρου =4):

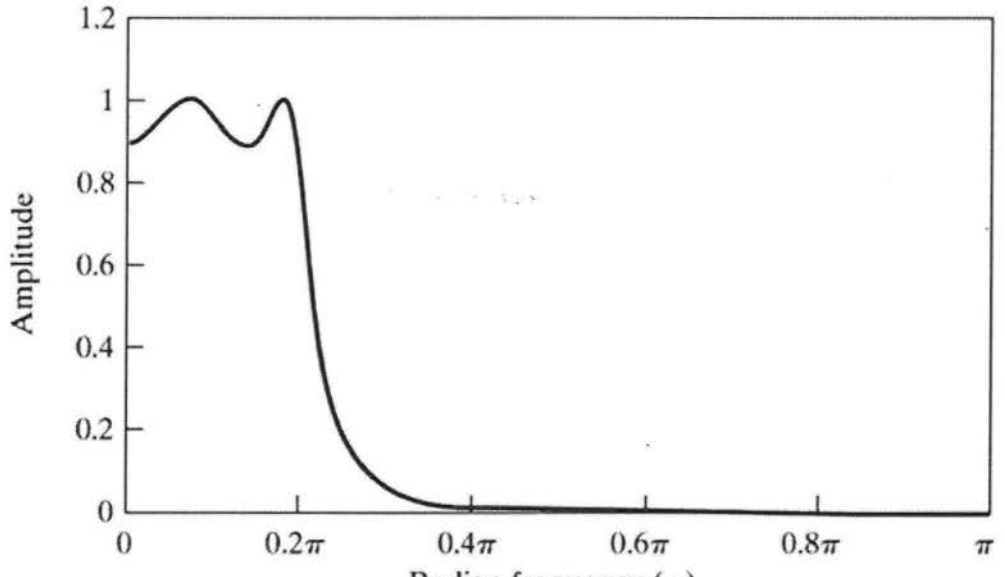
$$H_{lp}(Z) = -\frac{0.001836(1+Z^{-1})^4}{(1-1.5548Z^{-1}+0.6493Z^{-2})(1-1.4996Z^{-1}+0.8482Z^{-2})}$$

Παίρνουμε:

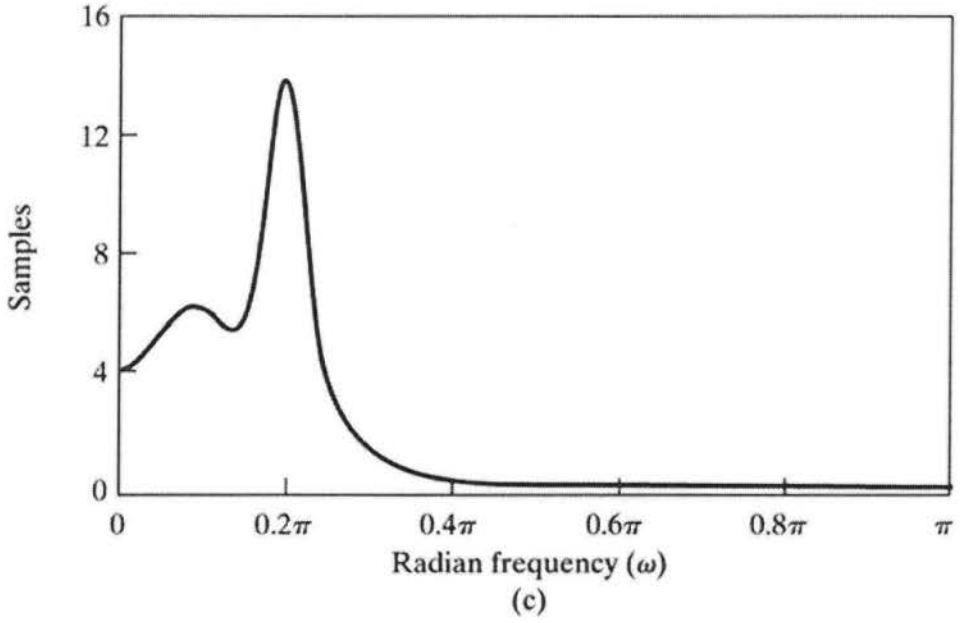
$$H(z) = H_{lp}(Z)\Big|_{Z^{-1}=-\left[(z^{-1}-0.38197)/(1-0.38197z^{-1})\right]} = -\frac{0.02426(1+z^{-1})^4}{(1-1.0416z^{-1}+0.4019z^{-2})(1-0.5661z^{-1}+0.7657z^{-2})}$$


20
0
−20
−40
−60
−80
−100
dB
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)

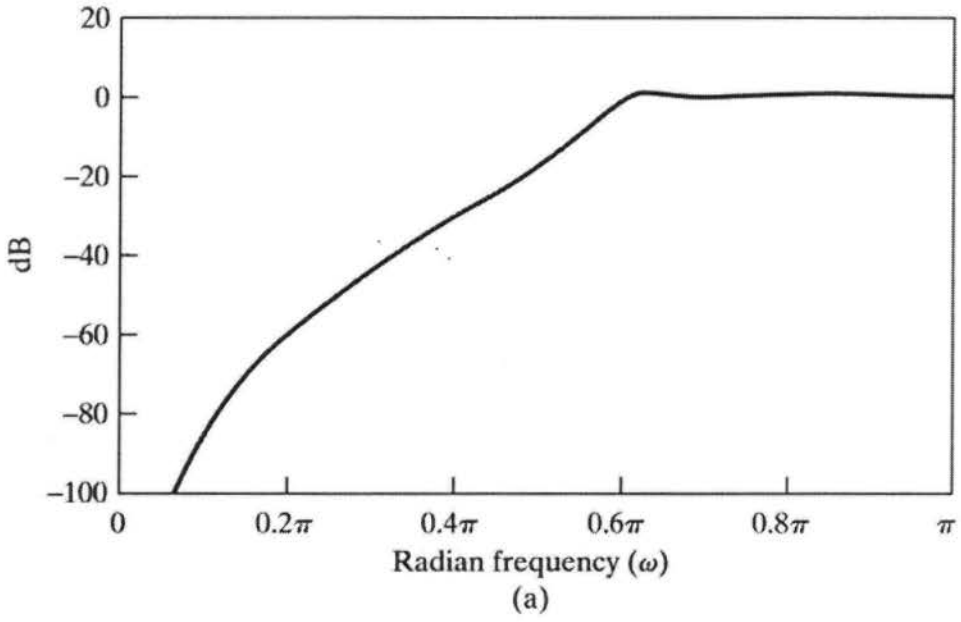
(a)


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)

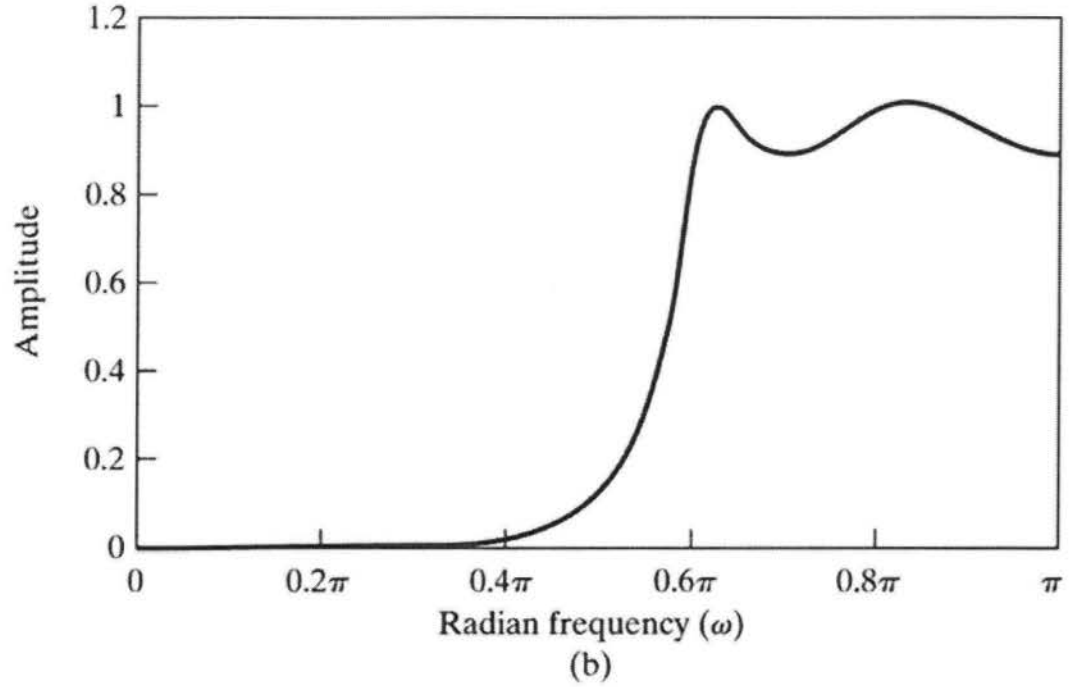
(b)


16
12
8
4
0
Samples
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)

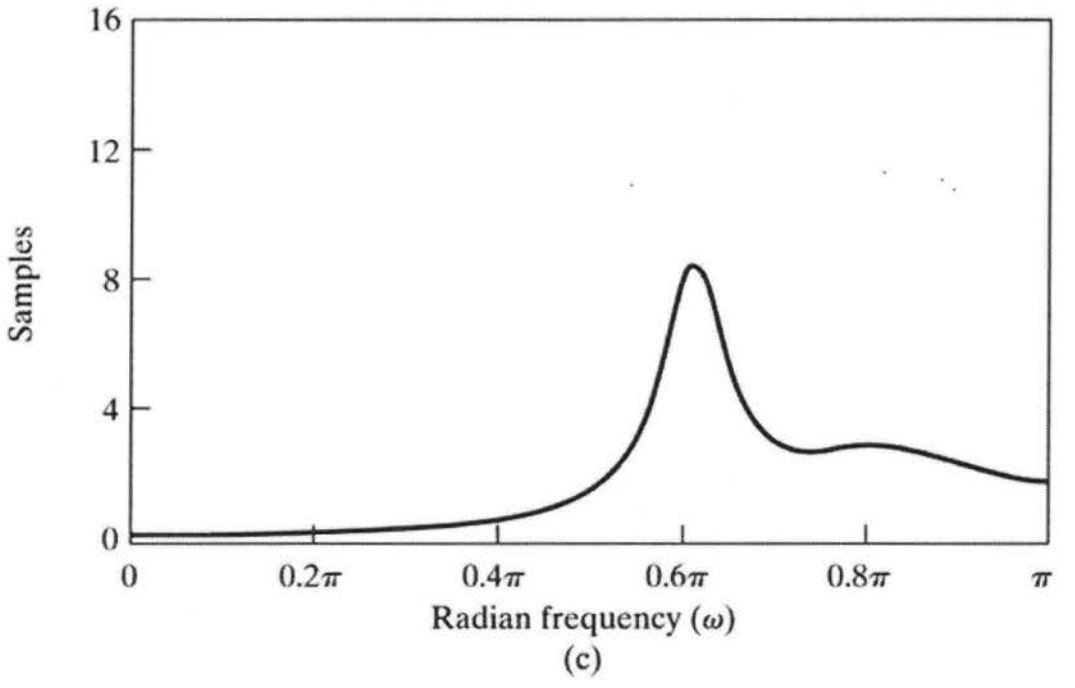
(c)


20
0
−20
−40
−60
−80
−100
dB
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)

(a)


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)

(b)


16
12
8
4
0
Samples
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)

(c)

4. Ψηφιακά φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των ψηφιακών φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response – FIR). Επίσης, θα γνωρίσουμε τις δύο πιο σημαντικές μεθόδους σχεδίασής τους και θα αναλύσουμε εκτενώς τη μέθοδο των παραθύρων. Τα FIR φίλτρα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος λόγω δύο πολύ σημαντικών ιδιοτήτων που παρουσιάζουν, και τις οποίες επίσης θα εξετάσουμε εδώ: τη γραμμική απόκριση φάσης και την ευστάθεια.

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Τα γραμμικά ψηφιακά φίλτρα που θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουν πεπερασμένης χρονικής διάρκειας απόκριση σε είσοδο μοναδιαίας κρούσης. Στη διεθνή βιβλιογραφία τα συναντούμε ως Finite Impulse Response ή FIR φίλτρα. Αποτελούν ουσιαστικά μερική περίπτωση των φίλτρων άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR). Από τα γραμμικά ψηφιακά φίλτρα, προτιμούνται συνήθως τα FIR έναντι των IIR, λόγω της ευστάθειας στη λειτουργία τους και της γραμμικής απόκρισης που παρουσιάζουν στη φάση. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τα είδη και τα χαρακτηριστικά των FIR φίλτρων και θα μελετήσουμε τη μέθοδο σχεδίασης τους με τα παράθυρα. Τέλος, θα περιγράψουμε δομές υλοποίησης των FIR φίλτρων, καθώς και τα προβλήματα που προκύπτουν κατά την υλοποίηση αυτή. Απαραίτητο γνωστικό υπόβαθρο αποτελεί η ύλη του προηγούμενου κεφαλαίου.

4. 1 Χαρακτηριστικά των FIR φίλτρων

Η γενική δομή των FIR φίλτρων έχει όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Αποτελείται από μία γραμμή καθυστέρησης (delay line), όπου ολισθαίνουν τα δείγματα του σήματος εισόδου $x(n)$, και από τους πολλαπλασιαστές $h(m)$. Τα αποτελέσματα των πολλαπλασιασμών προστίθενται για να δώσουν την τελική έξοδο του φίλτρου $y(n)$. Είναι προφανές ότι η έξοδος $y(n)$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των δειγμάτων εισόδου $x(n)$:

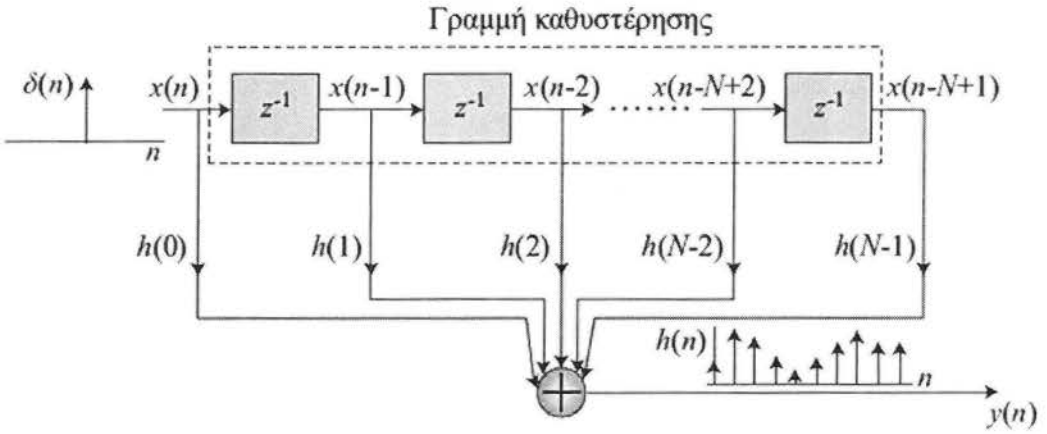
$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)\, x(n-m) \qquad (4.1)$$

Αν το σήμα εισόδου στο FIR φίλτρο είναι η μοναδιαία κρούση $\delta(n)$, τότε η έξοδός του (κρουστική απόκριση του φίλτρου ή Impulse Response) θα είναι διαδοχικά ίση με κάθε έναν από τους συντελεστές $h(m)$. Έτσι, έχουμε πεπερασμένη σε χρονική διάρκεια κρουστική απόκριση $h(m)$ για τα FIR φίλτρα (Finite Impulse Response). Η εξίσωση διαφορών (4.1) αποτελεί τη σχέση εισόδου-εξόδου του FIR φίλτρου. Επίσης ξέρουμε ότι

για τη συνάρτηση μεταφοράς ισχύει,

$$H(z) \leftrightarrow h(n) \Leftrightarrow H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{-m} \qquad (4.2)$$

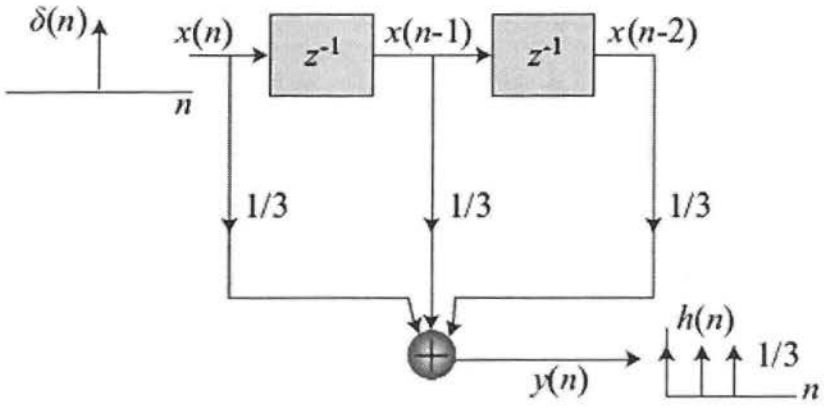
Ο βαθμός Ντου φίλτρου χαρακτηρίζεται από το πλήθος των όρων της κρουστικής απόκρισης (πλήθος συντελεστών $h(m)$).



Σχήμα 4.1 Δομή FIR ψηφιακού φίλτρου.

Παράδειγμα 4. 1

Για το FIR φίλτρο του Σχήματος 4.2 να γραφεί η εξίσωση εισόδου-εξόδου και η συνάρτηση μεταφοράς. Επίσης, να σχεδιαστεί η κρουστική απόκριση του φίλτρου.



Σχήμα 4.2 Ψηφιακό φίλτρο μέσης τιμής με τρεις όρους

Λύση

Το φίλτρο του Σχήματος 4.2 είναι FIR, διότι η κρουστική του απόκριση είναι πεπερασμένης χρονικής διάρκειας (τρεις όροι). Κάθε όρος της κρουστικής απόκρισης είναι ίσος με 1/3, όσο δηλαδή ο αντίστοιχος συντελεστής του φίλτρου. Η εξίσωση εισόδου-εξόδου (εξίσωση διαφορών) είναι η ακόλουθη:

$$y(n)=\frac{1}{3}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)]$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το φίλτρο του Σχήματος 4.2 είναι ένα ψηφιακό σύστημα μέσης τιμής (averager). Με τη βοήθεια της σχέσης (4.2) η συνάρτηση μεταφοράς έχει ως εξής:

$$H(z)=\frac{1}{3}(1+z^{-1}+z^{-2})$$

Δραστηριότητα 4. 1

Να σχεδιαστεί ένας απλός ψηφιακός διαφοριστής (digital differentiator) . Να γραφεί η σχέση εισόδου-εξόδου, η συνάρτηση μεταφοράς και να σχεδιαστεί η δομή του φίλτρου. Επίσης να σχεδιαστεί η κρουστική του απόκριση.

Ο απλούστερος ψηφιακός διαφοριστής θα έχει έξοδο $y(n)$ τη διαφορά δύο διαδοχικών δειγμάτων της εισόδου $x(n)$. Έτσι η σχέση εισόδου-εξόδου του φίλτρου θα είναι

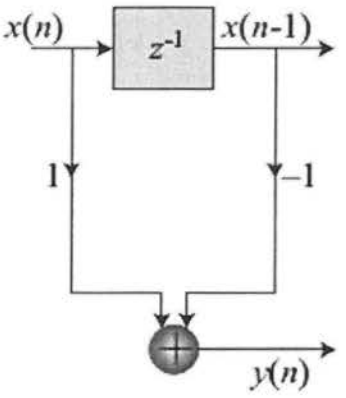
$$y(n)=x(n)-x(n-1)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να υπολογιστεί αν λάβουμε το μετασχηματισμό-z και των δύο μερών της προηγούμενης σχέσης:

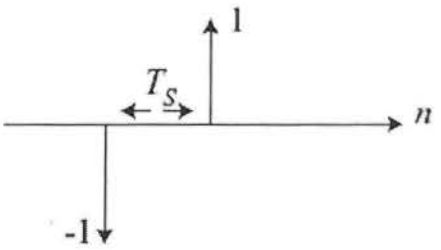
$$Y(z)=X(z)-z^{-1}X(z)\Rightarrow$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=1-z^{-1}$$

Η δομή του φίλτρου είναι πολύ απλή και έχει ως εξής:



Όταν η είσοδος είναι η μοναδιαία κρούση, η έξοδος του φίλτρου (κρουστική απόκριση) θα ισούται με τους συντελεστές της αρχικής σχέσης εισόδου-εξόδου, δηλαδή με 1 και -1. Η μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει ως εξής:

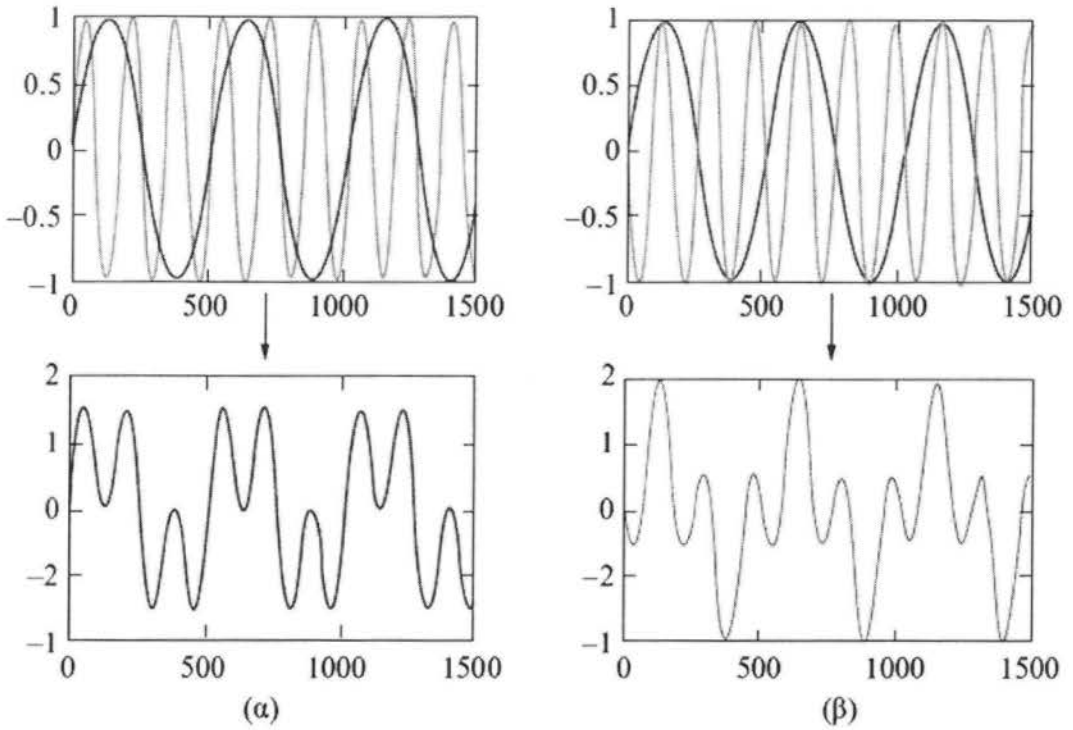


4.1.1 Γραμμική απόκριση φάσης

Ένα φίλτρο έχει γραμμική απόκριση φάσης (linear phase response) όταν η διαφορά φάσης $\theta(\omega)$ μεταξύ εισόδου και εξόδου για σήμα γωνιακής συχνότητας ω, δίνεται ως:

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega \text{ ή } \theta(\omega) = b - \alpha\omega \qquad (4.3)$$

Όπου α και b σταθερές που εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του φίλτρου. Όταν οι αρμονικές συνιστώσες ενός σήματος, διέλθουν από σύστημα που έχει γραμμική απόκριση φάσης σύμφωνα με την (4.3), υπόκεινται όλες στην ίδια χρονική καθυστέρηση ίση με α sec, με αποτέλεσμα να μην καταστρέφεται η μορφή του σήματος. Αυτό γίνεται φανερό αν σκεφτούμε ότι $\cos(\omega t + \theta) = \cos(\omega t - \alpha\omega) = \cos[\omega(t - \alpha)]$. Στο Σχήμα 4.3α φαίνονται οι δύο αρμονικές συνιστώσες από τις οποίες αποτελείται ένα σήμα, που έχουν μηδενική διαφορά φάσης για $t = 0$, καθώς και η μορφή του σήματος. Το σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.3β αποτελείται από τις ίδιες συνιστώσες, που έχουν όμως υποστεί διαφορετική χρονική καθυστέρηση η μία ως προς την άλλη, έτσι ώστε να έχουν διαφορά φάσης για $t = 0$ ίση με π. Το αποτέλεσμα είναι ότι η μορφή του σήματος έχει αλλάξει ριζικά. Παρ' ότι το ανθρώπινο σύστημα ακοής δεν είναι ευαίσθητο στις φασικές μετατοπίσεις των αρμονικών ενός σήματος, μία τέτοια αλλαγή θα μπορούσε να έχει καταστρεπτικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις που ενδιαφέρει η μορφή του σήματος (τηλεπικοινωνίες, καρδιογράφημα, εικόνες κτλ.),



Σχήμα 4.3 Δύο αρμονικές που δίνουν διαφορετική μορφή για το σύνθετο σήμα ανάλογα με τη μεταξύ τους αρχική διαφορά φάσης. α)Αρχική διαφορά φάσης Ο. β) Αρχική διαφορά φάσης π

Για να έχει ένα FIR φίλτρο την ιδιότητα της γραμμικής απόκρισης φάσης, θα πρέπει να παρουσιάζει κάποιας μορφής συμμετρία στην κρουστική απόκριση $h(n)$. Έτσι, έστω ένα FIR φίλτρο με N όρους στην κρουστική απόκριση $h(n)$ $(n=0, \ldots, N-1)$, όπου το N είναι περιττός αριθμός και οι όροι $h(n)$ παρουσιάζουν τη συμμετρία:

$$h(n) = h(N-n-1) \tag{4.4}$$

Τότε, το φίλτρο αυτό έχει γραμμική απόκριση φάσης. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την απόκριση συχνότητας του φίλτρου για N = 5. Θέτουμε στην (4.2) $z = e^{j\omega}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{m=0}^{4} h(m) e^{-j\omega m} = \\ &= h(0) + h(1)e^{-j\omega} + h(2)e^{-j2\omega} + h(3)e^{-j3\omega} + h(4)e^{-j4\omega} \\ &= e^{-j2\omega}[h(0)e^{j2\omega} + h(1)e^{j\omega} + h(2) + h(3)e^{-j\omega} + h(4)e^{-j2\omega}] \\ &= e^{-j2\omega}[h(0)(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + h(1)(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + h(2)] \\ &= e^{-j2\omega}[2h(0)\cos(2\omega) + 2h(1)\cos(\omega) + h(2)] \end{aligned} \tag{4.5}$$

Το μέτρο της $H(e^{j\omega})$ είναι η πραγματική ποσότητα μέσα στην αγκύλη. Η φάση της ισούται με τη φάση που δημιουργεί ο όρος $e^{-j2\omega}$ Ο υπολογισμός της δίνει $\theta(\omega) = -2\omega$. Στη γενική περίπτωση φίλτρων μήκους Ν θα είναι $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$. Επομένως ο συντελεστής αναλογίας της σχέσης (4.3) ισούται με $(N-1)/2$. Συμπερασματικά, ένα FIR φίλτρο με συμμετρική κρουστική απόκριση και περιττό πλήθος όρων έχει γραμμική φάση, και όπως είδαμε αυτό έχει ως συνέπεια τη χρονική καθυστέρηση όλων των αρμονικών του σήματος κατά $\frac{N-1}{2}$ δείγματα.

Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί τύποι FIR φίλτρων γραμμικής φάσης, ανάλογα με το αν το πλήθος Ν των συντελεστών της $h(n)$ είναι άρτιο ή περιττό και αν η $h(n)$ είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική. Σε όλες τις περιπτώσεις ο υπολογισμός του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας $H(e^{j\omega})$ γίνεται όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, και αποδεικνύεται ότι η φάση είναι γραμμική.

Παράδειγμα 4.2

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) για το φίλτρο του παραδείγματος 4.1.

Λύση

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{4} h(m)e^{-j\omega m} = \frac{1}{3}[1 + e^{-j\omega}e^{-j2\omega}] = \frac{1}{3}e^{-j\omega}[e^{j\omega}1 + e^{-j\omega}]$$

$$= \frac{1}{3}e^{-j\omega}[(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 1] = \frac{1}{3}e^{-j\omega}[2\cos(\omega) + 1]$$

Το μέτρο της $H(e^{j\omega})$ είναι $\frac{1}{3}[2\cos(\omega)+1]$. Η φάση της υπολογίζεται από τη φάση που δημιουργεί ο μιγαδικός $e^{-j\omega}$, και η οποία είναι $\theta(\omega) = -\omega$.

4.1.2 Ευστάθεια των φίλτρων – Πόλοι και μηδενικά

Στα FIR φίλτρα η έξοδος εξαρτάται μόνο από τις τιμές της εισόδου $x(n-k)$ με $k = 0, \ldots, N-1$. Καμία καθυστερημένη τιμή της εξόδου $y(n-k)$ δεν συμμετέχει στον υπολογισμό της. Έτσι η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένη και η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου $H(z)$ που δίνεται από την (4.2) δεν έχει παρονομαστή, επομένως δεν έχει πόλους που δημιουργούν αστάθεια. Όλα αυτά έχουν ως αποτέλεσμα την ευστάθεια του φίλτρου, που σημαίνει ότι για οποιοδήποτε πεπερασμένο σε πλάτος σήμα εισόδου, η έξοδος είναι επίσης πεπερασμένη σε μέγεθος. Η θέση όπου η $H(z)$ μηδενίζεται (μηδενικά) μπορεί να καθοριστεί, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται από το φίλτρο πολύ καλή απόρριψη κάποιων από τις αρμονικές συνιστώσες του σήματος.

Σύνοψη ενότητας
Τα FIR φίλτρα παρουσιάζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, τα οποία είναι απαραίτητα στις περισσότερες περιπτώσεις ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Το πρώτο από αυτά, η ευστάθεια, οφείλεται στο γεγονός ότι η έξοδος $y(n)$ στα FIR φίλτρα υπολογίζεται μόνο από τιμές της εισόδου $x(n)$, επομένως τα φίλτρα δεν έχουν κλάδο ανατροφοδότησης. Το άλλο χαρακτηριστικό, η γραμμική απόκριση φάσης, λαμβάνεται όταν η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι συμμετρική.

4.2 Τύποι και προδιαγραφές των FIR φίλτρων

Ο τρόπος με τον οποίο κυρίως καθορίζεται αλλά και χρησιμοποιείται ένα ψηφιακό φίλτρο είναι η συμπεριφορά του στη συχνότητα. Η συμπεριφορά αυτή περιγράφεται από την απόκριση στη συχνότητα του φίλτρου, τόσο σε ό,τι έχει σχέση με την επίδρασή του στο πλάτος των διαφόρων αρμονικών του σήματος (απόκριση πλάτους), όσο και στο τρόπο με τον οποίο επηρεάζει τη φασική σχέση των αρμονικών (απόκριση φάσης). Δεδομένου ότι η απόκριση στη συχνότητα των ψηφιακών συστημάτων είναι περιοδική, αρκεί να καθοριστεί η συμπεριφορά του ψηφιακού φίλτρου στην περιοχή από 0 ως π.

Η απόκριση φάσης στα FIR φίλτρα μπορεί να είναι γραμμική αν η κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική. Στην απόκριση μέτρου του φίλτρου ενδιαφέρον παρουσιάζουν τόσο οι αποκλίσεις από την επιθυμητή απόκριση στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής, όσο και οι συχνότητες που καθορίζουν τα όρια των ζωνών αυτών.
Το εύρος της ζώνης μετάβασης είναι $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$. Συνήθως τα ω_p και ω_s ορίζονται ως κλάσματα του π, ενώ οι αποκλίσεις δ_p και δ_s, ορίζονται σε dB μέσω των ποσοτήτων $20\log(1+\delta_p)$ και $20\log(\delta_s)$, αντίστοιχα. Επιπλέον, ως χαρακτηριστικό σχεδίασης μπορεί να θεωρηθεί το μέγιστο αποδεκτό πλήθος N των συντελεστών $h(n)$ του φίλτρου. Οι προηγούμενες προδιαγραφές αφορούν την πραγματική συμπεριφορά ενός FIR φίλτρου. Όταν τα μεγέθη δ_s, δ_p και $\Delta\omega$ τείνουν στο μηδέν, το απαιτούμενο πλήθος N των συντελεστών τείνει στο άπειρο και η απόκριση του φίλτρου προσεγγίζει την ιδανική απόκριση (Βλέπε Σχήμα 3.8).

Παράδειγμα 4.3
Οι προδιαγραφές FIR φίλτρου είναι 0.01 dB κυμάτωση (απόκλιση) στη ζώνη διέλευσης, -60 dBs στη ζώνη αποκοπής, $\omega_s = 0.4\pi$ και ζώνη μετάβασης ίση με 0.2π. Να εξηγήσετε τι ακριβώς σημαίνει καθεμιά από τις προδιαγραφές αυτές.

Λύση
Σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα πρέπει από το φίλτρο να διέρχονται όλες οι συχνότητες μέχρι το 0.4π, και να αποκόπτονται όλες οι συχνότητες πάνω από τα 0.6π. Η ζώνη

μετάβασης βρίσκεται από το 0.4π μέχρι το 0.6π. Στη ζώνη διέλευσης η απόκλιση από τη μονάδα είναι δ_p και προσδιορίζεται από τη σχέση:

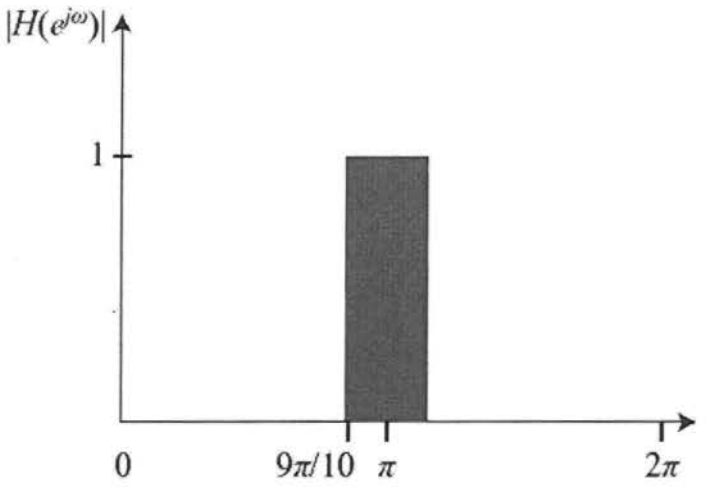
$$20\log(1+\delta_p) = 0.01 \Rightarrow \delta_p = 0.001$$

Στη ζώνη αποκοπής ισχύει $20\log(\delta_s) = -60 \Rightarrow \delta_s = 1/1000$. Αυτό σημαίνει ότι μόνο το ένα χιλιοστό από το πλάτος των συχνοτήτων στην περιοχή αυτή διέρχεται από το φίλτρο.

Δραστηριότητα 4.3

Να σχεδιαστεί η απόκριση μέτρου στη συχνότητα ιδανικού υψηπερατού φίλτρου με ζώνη διέλευσης το 1/N της συχνότητας Nyquist. Η τιμή του N είναι δική σας επιλογή.

Η συχνότητα Nyquist είναι ίση με π (μισό της συχνότητας δειγματοληψίας). Έτσι, η ζώνη διέλευσης του υψηπερατού φίλτρου θα έχει εύρος π/N. Αν επιλέξουμε N=10, τότε η απόκριση μέτρου του φίλτρου στη συχνότητα έχει όπως φαίνεται στο επόμενο Σχήμα.



Σύνοψη ενότητας

Οι τύποι των ψηφιακών φίλτρων που μπορούν να σχεδιαστούν ως FIR φίλτρα ποικίλλουν και μπορούν να έχουν όλες τις μορφές όπως βαθυπερατά, ζωνοδιαβατά και υψηπερατά. Επίσης οι προδιαγραφές τους μπορεί να είναι πολύ αυστηρές τόσο στη ζώνη διέλευσης των συχνοτήτων, όσο και στη ζώνη αποκοπής.

4.3 Μέθοδοι σχεδίασης των FIR φίλτρων

Η διαδικασία για τη σχεδίαση FIR φίλτρων περιλαμβάνει τον καθορισμό των προδιαγραφών του φίλτρου, τον υπολογισμό των συντελεστών του φίλτρου με μία από τις διαθέσιμες μεθόδους, τον καθορισμό της δομής υλοποίησης, την ανάλυση σφαλμάτων λόγω του πεπερασμένου μήκους των συντελεστών καθώς και την επιλογή για υλοποίηση

με λογισμικό ή υλικό.

Σημαντικό βήμα στη διαδικασία σχεδίασης των FIR φίλτρων είναι να υπολογιστούν οι συντελεστές $h(n)$, ώστε το φίλτρο να πληροί τις επιθυμητές προδιαγραφές μέτρου και φάσης στη συχνότητα. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ευρύτατα είναι κυρίως οι επόμενες τρεις. Η μέθοδος των παραθύρων (windows method), η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων φίλτρων (optimal method) και η μέθοδος της δειγματοληψίας στη συχνότητα (frequency sampling method). Εδώ θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο των παραθύρων που είναι απλή. Η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων φίλτρων δίνει την καλύτερη δυνατή απόκριση συχνότητας για συγκεκριμένο πλήθος συντελεστών. Όλες οι μέθοδοι μπορούν να δώσουν FIR φίλτρα γραμμικής φάσης.

4.3.1 Μέθοδοι των παραθύρων

Η μέθοδος των παραθύρων αποτελεί μια σχετικά απλή διαδικασία σχεδίασης FIR φίλτρων. Οι συντελεστές $h_D(n)$ τουιδανικού φίλτρου υπολογίζονται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της απόκρισης συχνότητας $H(e^{j\omega})$:

$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad (4.6)$$

Το γράμμα D χρησιμοποιείται για να δηλώσει την επιθυμητή (Desired) ή ιδανική συμπεριφορά.

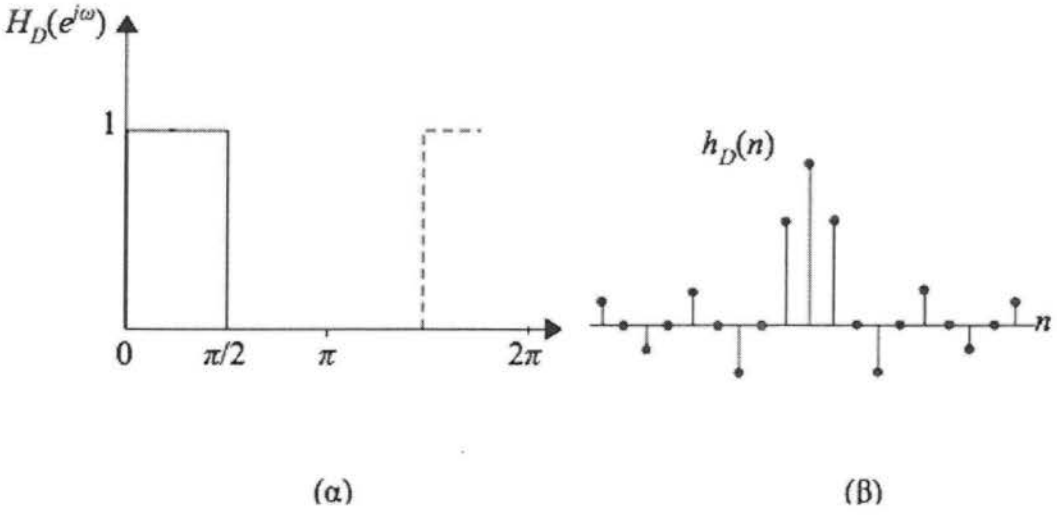
Παράδειγμα 4.4

Να σχεδιαστεί ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/2$ (ημίσειας ζώνης ή half–band), του οποίου η ιδανική απόκριση στη συχνότητα δίνεται στο Σχήμα 4.4α.

Λύση

Θεωρούμε ότι η συχνότητα δειγματοληψίας είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα ($\omega_s = 2\pi$). Από τη σχέση (4.6) οι συντελεστές $h(n)$ υπολογίζονται ως εξής:

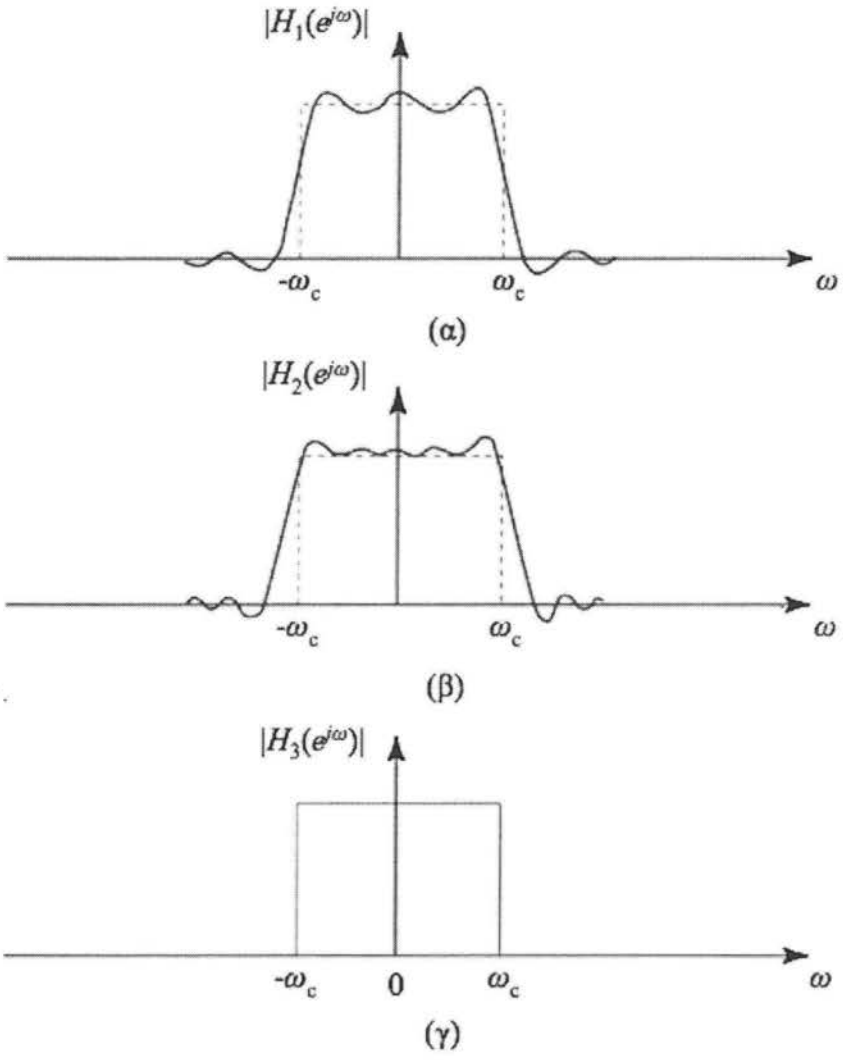
$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \qquad (4.7)$$
$$= \frac{\omega_c \sin(n\omega_c)}{\pi n\omega_c} \xrightarrow{\omega_c=\pi/2} \frac{1}{2}\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/2)}$$



Σχήμα 4.4.(α). Ιδανική απόκριση συχνότητας βαθυπερατού ψηφιακού φίλτρου ημίσειας ζώνης (half–band) και (β) η αντίστοιχη κρουστική απόκριση (κάθε δεύτερος συντελεστής, εκτός των κεντρικών, είναι μηδενικός).

Η αποκοπή της κρουστικής απόκρισης $h_D(n)$ για |n|>M, ώστε αυτή να έχει πεπερασμένο μήκος και να διατηρεί τη συμμετρία της, έχει ως αποτέλεσμα να αλλοιωθεί η ζητούμενη ιδανική απόκριση στη συχνότητα. Η αλλοίωση αυτή είναι εμφανής στο Σχήμα 4.5 όπου δείχνονται οι αποκρίσεις στη συχνότητα για κρουστική απόκριση με 13 (Σχήμα 4.5α), 25 (Σχήμα 4.5β) και άπειρους όρους (Σχήμα 4.5γ). Η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$, εμφανίζει κυμάτωση σε όλη την έκταση της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής, ενώ παρουσιάζει διαπλάτυνση της ζώνης μετάβασης. Η εμφάνιση της κυμάτωσης είναι γνωστή ως φαινόμενο Gibbs, και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της κοντά στις ασυνέχειες της $H(e^{j\omega})$, στην περιοχή της ζώνης μετάβασης. Η μέγιστη αυτή τιμή κυμαίνεται περίπου στο 9% του ύψους της ασυνέχειας και παραμένει σταθερή ανεξάρτητα από το μήκος 2M+1 της κρουστικής απόκρισης. Για τη ζώνη της αποκοπής η τιμή του 9% αντιστοιχεί σε 21 περίπου dBs εξασθένιση, τιμή που δεν είναι αποδεκτή για πρακτικές εφαρμογές. Έτσι, για ικανοποιητική προσέγγιση των ιδανικών μορφών των

διάφορων φίλτρων, δεν συνιστάται ο απευθείας περιορισμός του μήκους της κρουστικής απόκρισης $h(n)$.



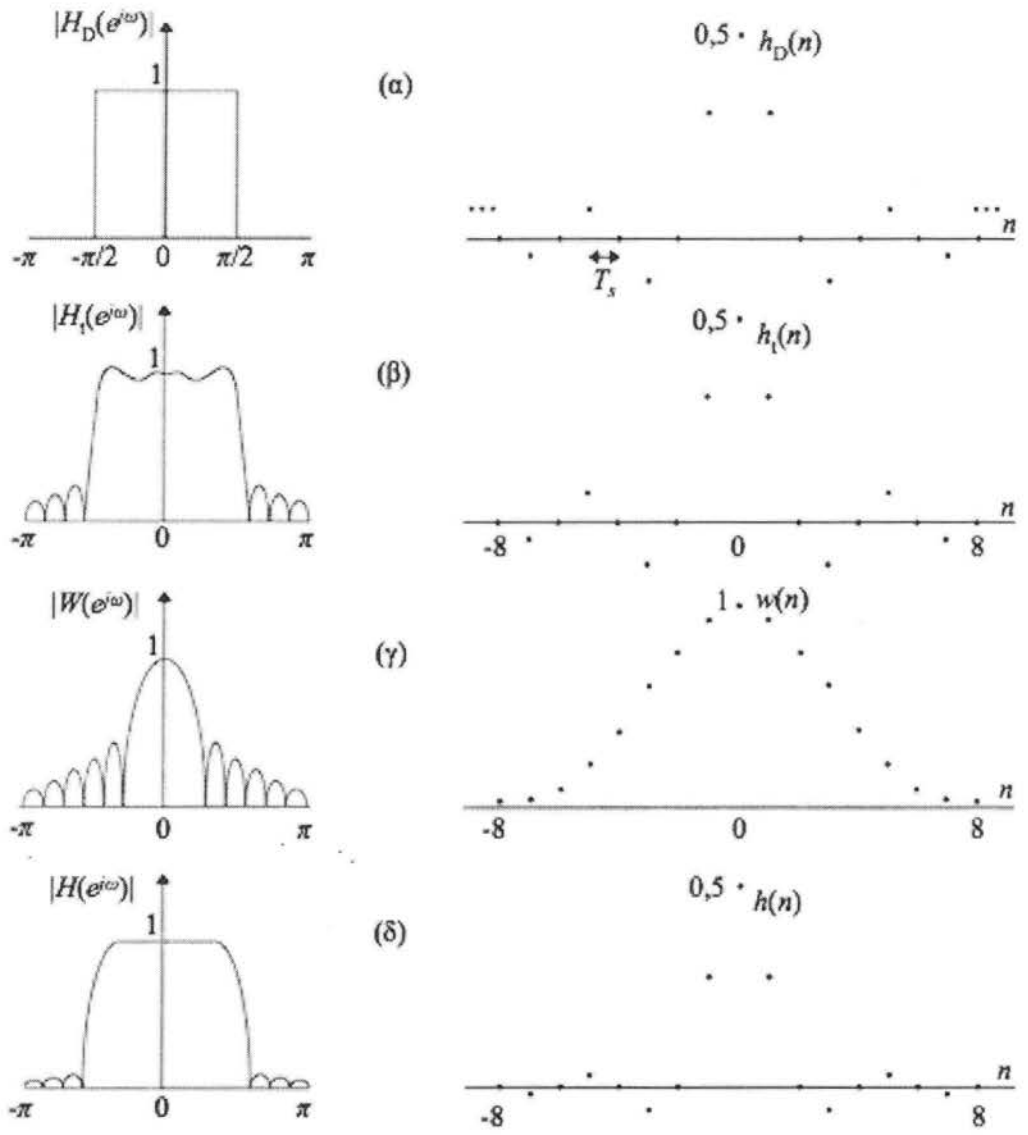
Σχήμα 4.5 Απόκριση συχνότητας βαθυπερατού φίλτρου με (α) 13, (β) 25 και (γ) άπειρους όρους στην κρουστική απόκριση.

Ένας δόκιμος τρόπος, για να πετύχουμε ικανοποιητική προσέγγιση στην απόκριση συχνότητας ενός FIR φίλτρου, είναι να χρησιμοποιηθεί μια πεπερασμένη ακολουθία συντελεστών $w(n)$, που καλείται παράθυρο, για να τροποποιήσει τους συντελεστές

$h_D(n)$ της εξίσωσης (4.7). Η νέα κρουστική απόκριση $h(n)$ προκύπτει ως το γινόμενο $h_D(n)w(n)$. Με τον τρόπο που περιγράφεται στο Σχήμα 4.6 ελέγχονται τα προβλήματα σύγκλισης (φαινόμενο Gibbs) του μετασχηματισμού Fourier στα σημεία ασυνέχειας της $H(e^{j\omega})$. Στο Σχήμα 4.6α απεικονίζεται η επιθυμητή απόκριση $H_D(e^{j\omega})$ του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου ημίσειας ζώνης (half–band). Ακριβώς δίπλα δίνεται η απεριόριστη στο χρόνο κρουστική απόκριση $h_D(n)$. Στο επόμενο Σχήμα 4.6β δίνεται η απόκριση $H_t(e^{j\omega})$, όπως προκύπτει από την αποκοπή της $h_D(n)$ για M=8.

Εδώ εμφανίζεται καθαρά το φαινόμενο Gibbs. Ακολούθως, στο Σχήμα 4.6γ. δίνεται το παράθυρο $w(n)$, το οποίο είναι μη μηδενικό στο διάστημα και μηδέν για |n| >8. Στο αριστερό μέρος δίνεται το φάσμα του παραθύρου $W(e^{j\omega})$. Στο Σχήμα 4.6δ δίνεται η τελική κρουστική απόκριση $h(n)$ η οποία προκύπτει από το γινόμενο $h_t(n)w(n)$, από πολλαπλασιασμό δηλαδή σημείο προς σημείο των δύο χρονικών ακολουθιών. Η αντίστοιχη τελική απόκριση $H(e^{j\omega})$ προκύπτει φυσικά από τη συνέλιξη της $H_t(e^{j\omega})$ με την $W(e^{j\omega})$. Στο Σχήμα αυτό έχει μειωθεί αισθητά το φαινόμενο Gibbs, αλλά έχει αυξηθεί η ζώνη μετάβασης του φίλτρου. Η τελική κρουστική απόκριση $h(n)$ πρέπει να ολισθήσει στο χρόνο για να γίνει αιτιατή (causal), και επομένως φυσικώς πραγματοποιήσιμη (η $h(n)$ ευρίσκεται όλη στα θετικά n). Η χρονική αυτή ολίσθηση πρακτικά αντιστοιχεί στην προσθήκη της γραμμικής απόκρισης φάσης που εισάγουν τα FIR φίλτρα. Αυτό γίνεται ξεκάθαρο από τη σχέση (4.5), όπου ο κοινός παράγοντας που δημιουργεί τη γραμμική απόκριση φάσης έχει προκύψει ακριβώς διότι η κρουστική απόκριση του φίλτρου έχει γίνει αιτιατή.

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι η αύξηση του πλήθους των συντελεστών που προκύπτει όταν το μήκος του παραθύρου είναι μεγαλύτερο, έχει ως αποτέλεσμα να γίνει στενότερη η ζώνη μετάβασης, δηλαδή το φίλτρο πιο απότομο. Από την άλλη, το είδος του χρησιμοποιούμενου παραθύρου θα επηρεάσει την κυμάτωση στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής.



Σχήμα 4.6 Γραφική παράσταση του τρόπου εφαρμογής των παραθύρων στη σχεδίαση FIR φίλτρων.

4.3.2 Ιδιότητες και τύποι των παραθύρων

Η συνάρτηση $W(e^{j\omega})$, που είναι το φάσμα του παραθύρου w(n), αποτελείται από έναν κύριο λοβό που περιέχει την περισσότερη φασματική ενέργεια του παραθύρου, καθώς και από παράπλευρους λοβούς που γενικά ελαττώνονται γρήγορα (Σχήμα 4.6γ). Το εύρος της ζώνης μετάβασης του φίλτρου εξαρτάται από το εύρος του κύριου λοβού της

$W(e^{j\omega})$. Στην τελική H(ejω) επιδρούν επίσης οι παράπλευροι λοβοί της $W(e^{j\omega})$, εισάγοντας σ' αυτή μικρή κυμάτωση σε όλες τις συχνότητες. Το φάσμα μιας συνάρτησης παραθύρου πρέπει να έχει στενό κύριο λοβό, ο οποίος να περιέχει όσο το δυνατόν περισσότερη φασματική ενέργεια, με παράπλευρους λοβούς που να φθίνουν γρήγορα. Από τις πλέον γνωστές συναρτήσεις παραθύρων είναι οι ακόλουθες:

Α. Το τετραγωνικό παράθυρο (rectangular). Αντιστοιχεί στην απλή αποκοπή της ακολουθίας h(n). Η ακολουθία βάρους δίνεται από τη σχέση:

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{N-1}{2} \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 0 & ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases} \qquad (4.8)$$

Β. Το γενικευμένο παράθυρο Hamming:

$$w_R(n) = \begin{cases} a + (1-a)\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & -\frac{N-1}{2} \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 0 & ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases} \qquad (4.9)$$

Το παράθυρο αυτό για a=0,54δίνει το γνωστό παράθυρο Hamming. Για την τιμή αυτή του a, ο κεντρικός λοβός της $W(e^{j\omega})$ περιέχει το 99,96% της συνολικής φασματικής ενέργειας, ενώ επιτυγχάνονται –52 dB εξασθένιση στη ζώνη απόρριψης των φίλτρων που σχεδιάζονται. Η μορφή του παραθύρου $w(n)$ για N=17 είναι αυτή του Σχήματος 4.6γ. Η μέθοδος σχεδίασης των FIR φίλτρων με τα παράθυρα, παρ' ότι απλή, δεν αίρει το βασικό μειονέκτημα των FIR φίλτρων, να απαιτούν πολλούς συντελεστές και, επομένως, αυξημένες απαιτήσεις σε υλικό για την υλοποίησή τους. Με κατάλληλη χρήση του παραθύρου Hamming και άλλων παραθύρων έχει γίνει δυνατή η μείωση του απαιτούμενου υλικού υλοποίησης των φίλτρων.

Παράδειγμα 4.5

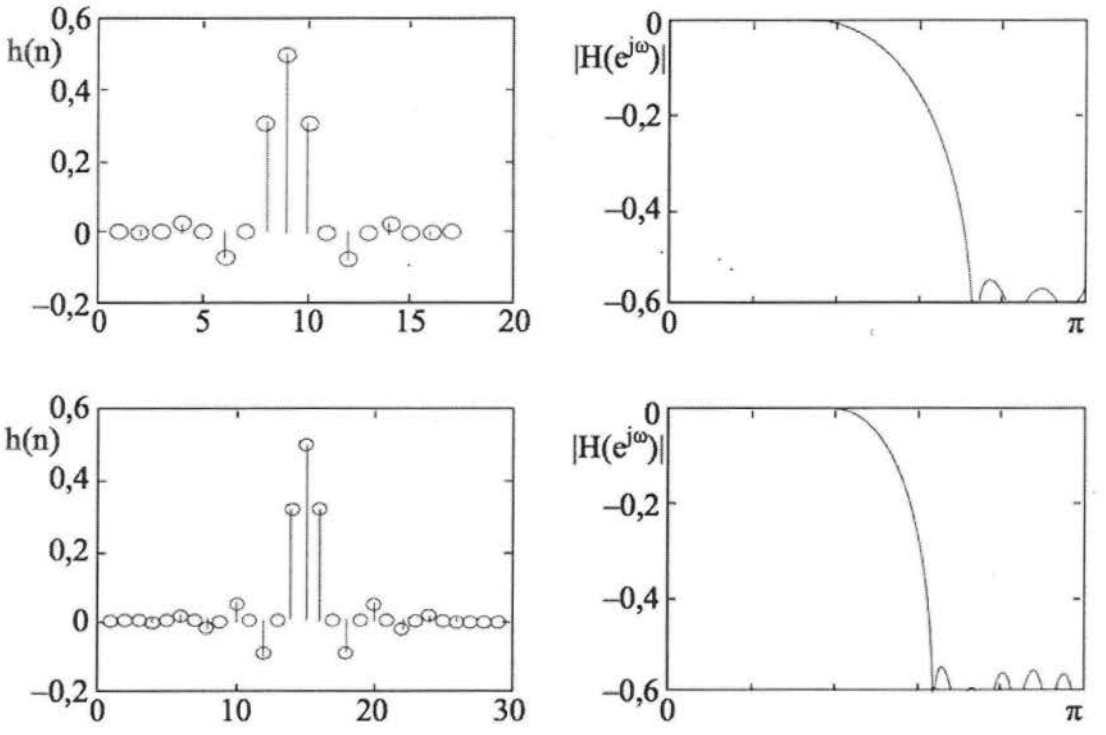
Να δειχθεί γραφικά η επίδραση του πλήθους N των συντελεστών του παραθύρου Hamming (και κατά συνέπεια του πλήθους των συντελεστών του φίλτρου) στα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας ενός FIR φίλτρου ημίσειας ζώνης.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.7) και (4.9), έχουμε για τους συντελεστές $h(n)$ ενός FIR φίλτρου ημίσειας ζώνης με τη χρήση του παραθύρου Hamming

$$h(n) = h_D(n)w_R(n) = \frac{1}{2}\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/2)}\left[0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right] \quad -\frac{N-1}{2} \le n \le \frac{N-1}{2}$$

Η σχέση αυτή θα χρησιμοποιηθεί για να σχεδιαστούν δύο FIR φίλτρα, το πρώτο με N=17 συντελεστές και το δεύτερο με N=29. Ο υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας για τα δύο φίλτρα, γίνεται όπως ακριβώς και στη σχέση (4.5). Οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 4.7 ελήφθησαν με τη βοήθεια του MATLAB και με εφαρμογή της προηγούμενης διαδικασίας. Τα δύο πρώτα Σχήματα, δείχνουν τους συντελεστές του φίλτρου και την απόκριση συχνότητας για N=17. Τα δύο επόμενα, παρουσιάζουν το φίλτρο με N=29 συντελεστές. Από τη σύγκριση των δύο αποκρίσεων στη συχνότητα γίνεται φανερό ότι η αύξηση των συντελεστών του παραθύρου οδηγεί σε πιο μικρή ζώνη μετάβασης (transition band), άρα και πιο απότομο φίλτρο, όχι όμως και σε μεγαλύτερη εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής. Για να πετύχει κάτι τέτοιο ο σχεδιαστής πρέπει να αναζητήσει στη βιβλιογραφία διαφορετικού τύπου παράθυρο.



Σχήμα 4.7 Βαθυπερατό FIR φίλτρο σχεδιασμένο με δέκα εφτά και εικοσιεννέα συντελεστές. Στη δεύτερη περίπτωση το φίλτρο είναι πιο απότομο.

Οι συντελεστές του third band φίλτρου θα βρεθούν αν οι όροι $h_D(n)$ της δραστηριότητας

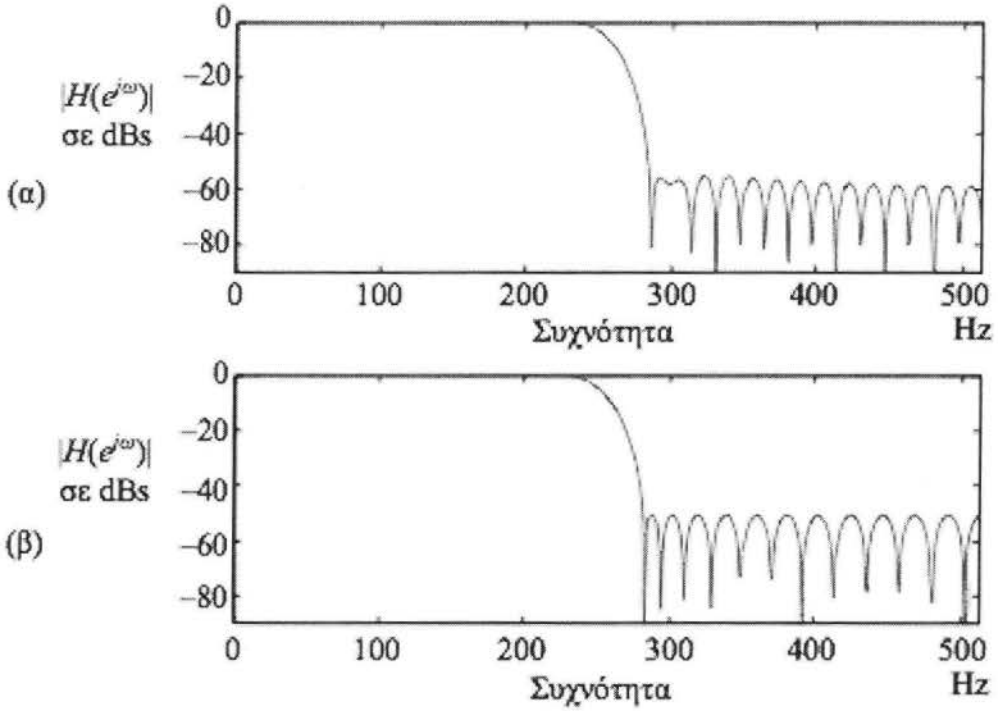
4.4 πολλαπλασιαστούν με τους όρους $w(n)$ της σχέσης (4.9) για α=0,54 και N=17.

4.3.3 Μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων

Ο όρος βέλτιστο FIR φίλτροσημαίνει την επίτευξη των καλύτερων δυνατών προδιαγραφών στην απόκριση συχνότητας με το μικρότερο πλήθος συντελεστών. Η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του '70, και έχει κωδικοποιηθεί σε πρόγραμμα υπολογιστή με αποτέλεσμα να είναι εύκολη η εφαρμογή της. Η μέθοδος παρέχει πλήρη έλεγχο της κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης και αποκοπής, ενώ τα φίλτρα που προκύπτουν από αυτή είναι πάντα πιο οικονομικά σε πλήθος συντελεστών.

Σύνοψη ενότητας

Η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων είναι η καλύτερη επιλογή, όταν είναι διαθέσιμο το αντίστοιχο λογισμικό. Η μέθοδος παρέχει πλήρη έλεγχο της κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης και αποκοπής, ενώ τα φίλτρα που προκύπτουν από αυτή είναι πάντα πιο οικονομικά σε πλήθος συντελεστών. Αντίθετα, η μέθοδος των παραθύρων είναι πολύ απλή και μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν δεν υπάρχει το απαραίτητο λογισμικό για την προηγούμενη μέθοδο. Δίνει πάντα την ίδια κυμάτωση στη ζώνη μετάβασης και τη ζώνη αποκοπής, ενώ δεν παρέχει έλεγχο στα όρια των ζωνών. Στο Σχήμα 4.8 δίνονται φίλτρα που έχουν σχεδιαστεί ώστε να έχουν τις ίδιες προδιαγραφές. Η σχεδίαση με τα παράθυρα δίνει εξήντα ένα συντελεστές, ενώ με τη μέθοδο των βέλτιστων φίλτρων σαράντα έξι συντελεστές.



Σχήμα 4.8 (α) Απόκριση μέτρου FIR ψηφιακού φίλτρου σχεδιασμένου με το παράθυρο Hamming και εξήντα ένα συντελεστές, (β) Απόκριση μέτρου βέλτιστου FIR βαθυπερατού φίλτρου. Το απαιτούμενο πλήθος των συντελεστών είναι σαράντα έξι.

4.4 Θέματα υλοποίησης FIR φίλτρων

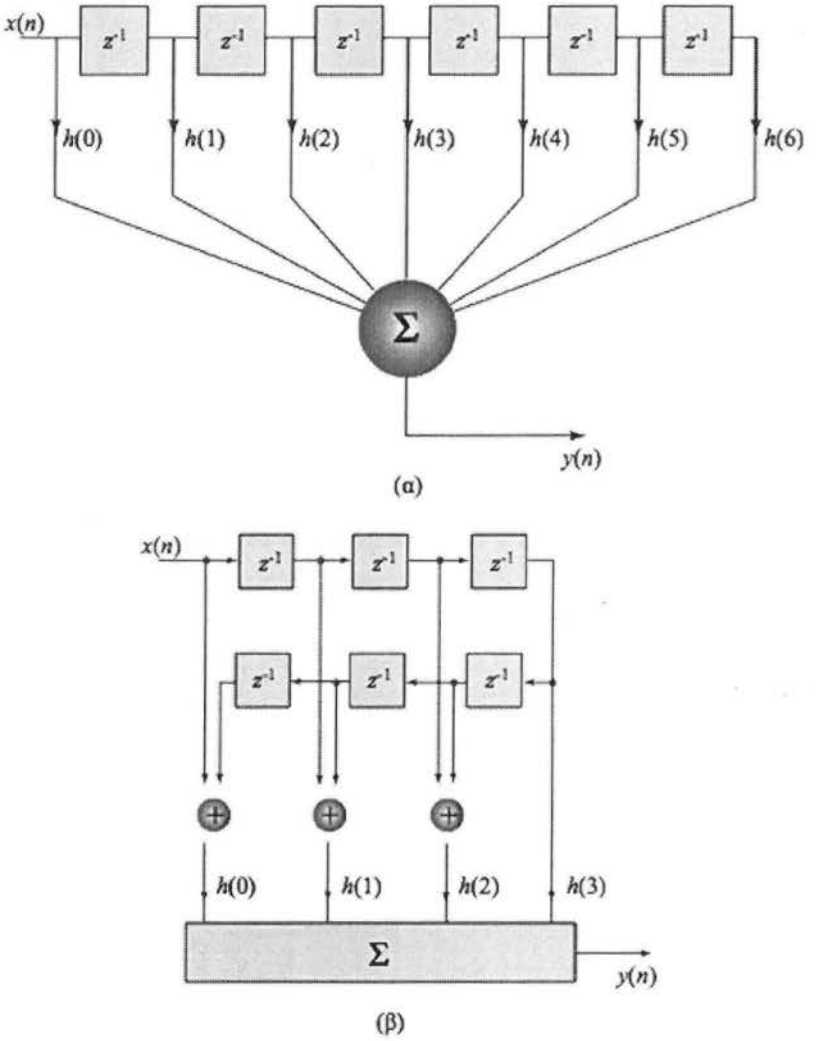
4.4.1 Δομές πραγματοποίησης των FIR φίλτρων

Οι δομές πραγματοποίησης των FIR φίλτρων είναι στην ουσία σχηματικά διαγράμματα για τους διαφορετικούς, αλλά θεωρητικά ισοδύναμους τρόπους που μπορεί να οργανωθεί η συνάρτηση μεταφοράς *H(z)*. Η πιο διαδεδομένη δομή είναι η άμεση ή transversal. Για τη δομή αυτή, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.9α, η σχέση μεταξύ των σημάτων εισόδου-εξόδου του φίλτρου έχει ως εξής:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1} h(m)\,x(n-m) \qquad (4.10)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση αυτή η άμεση δομή απαιτεί για την πραγματοποίησή της:

- *N-1* θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των δειγμάτων $x(n)$.
- *N* θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των συντελεστών $h(m)$.
- *N* πολλαπλασιασμούς.
- *N-1* προσθέσεις.



Σχήμα 4.9 Οι δύο κυριότερες δομές πραγματοποίησης FIR φίλτρων (α). Άμεση (Transversal) και (β) γραμμικής φάσης

Τροποποίηση της transversal δομής αποτελεί η δομή γραμμικής φάσης. Στη δομή αυτή (Σχήμα 4.9β) τα δείγματα που πρόκειται να πολλαπλασιαστούν με ίδιους συντελεστές λόγω της συμμετρικής κρουστικής απόκρισης $(h(n) = \pm h(N-n-1))$, πρώτα προστίθενται και μετά πολλαπλασιάζονται. Αποτέλεσμα αυτού είναι να απαιτείται μόνο

ένας πολλαπλασιασμός για κάθε δύο δείγματα. Η εξίσωση εισόδου-εξόδου στην περίπτωση αυτή γράφεται ως:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(m)[x(n-m)+x(n-N+1+m)]$$

Η δομή της γραμμικής φάσης για να υλοποιηθεί απαιτεί τους μισούς πολλαπλασιασμούς σε σχέση με την άμεση, και βρίσκει εφαρμογή στα FIR φίλτρα γραμμικής φάσης (συμμετρική κρουστική απόκριση).

Παράδειγμα 4.6

Για το FIR φίλτρο ημίσειας ζώνης του παραδείγματος 4.5, να υπολογιστούν οι μονάδες καθυστέρησης και οι πολλαπλασιαστές που απαιτούνται για την πραγματοποίησή του με άμεση δομή και δομή γραμμικής φάσης.

Λύση

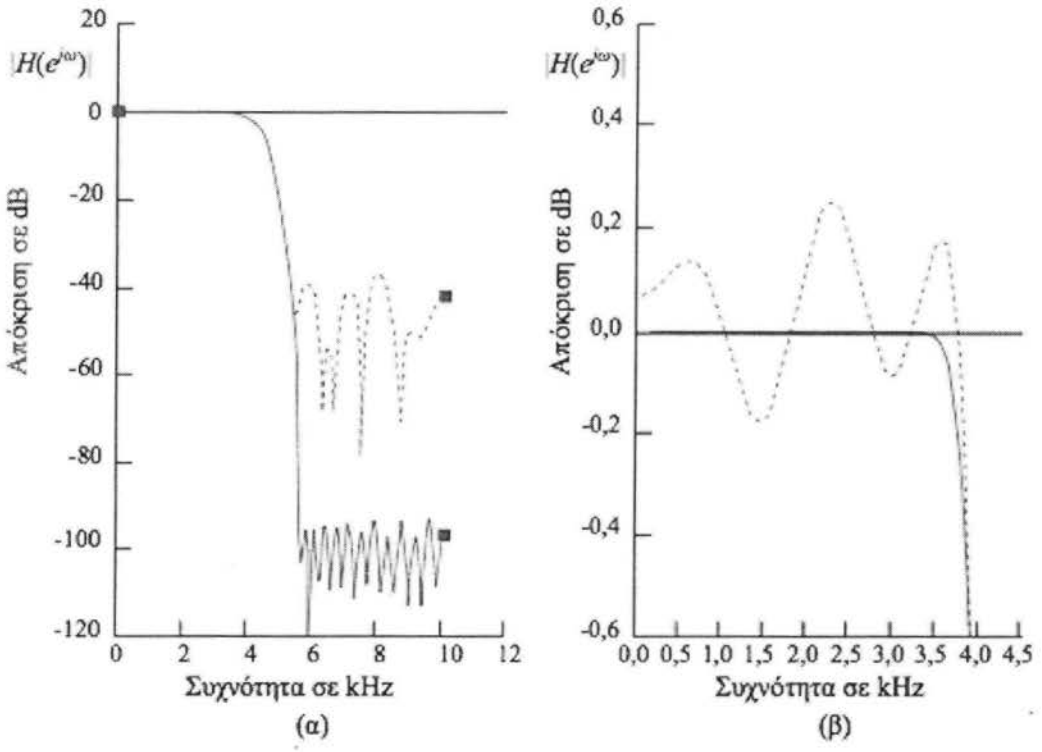
Σύμφωνα με το Σχήμα 4.9α, ένα FIR φίλτρο με N συντελεστές απαιτεί $N-1$ στοιχεία καθυστέρησης, και N πολλαπλασιαστές για την πραγματοποίησή του με την άμεση δομή. Στην περίπτωσή μας (N = 1 7 συντελεστές) χρειάζονται δέκα έξι μονάδες καθυστέρησης και δέκα εφτά πολλαπλασιασμοί. Αντίθετα, για την πραγματοποίηση της δομής γραμμικής φάσης, χρειάζονται (βλέπε Σχήμα 4.9β) δέκα έξι μονάδες καθυστέρησης, δεκαεπτά προσθετές και εννέα πολλαπλασιασμοί. Πρέπει να σημειώσουμε, ότι στο φίλτρο αυτό, με βάση την εξίσωση (4.7), αρκετοί συντελεστές είναι μηδέν επειδή το φίλτρο είναι ημίσειας ζώνης. Έτσι, ο αριθμός των πολλαπλασιασμών είναι ακόμη μικρότερος.

4.4.2 Σφάλμα από την κβάντιση των συντελεστών

Η υλοποίηση των FIR φίλτρων με ψηφιακά κυκλώματα (hardware) συνεπάγεται πεπερασμένη ακρίβεια αναπαράστασης των συντελεστών του φίλτρου. Ο περιορισμός στην ακρίβεια των συντελεστών έχει ως αποτέλεσμα την απόκλιση των χαρακτηριστικών του φίλτρου από τις αρχικές προδιαγραφές. Ας σημειωθεί ότι μετά από τέτοια αλλαγή ένα φίλτρο παύει να είναι βέλτιστο. Το φαινόμενο αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως *φαινόμενο πεπερασμένου μήκους λέξης* (Finite Wordlength Effect). Στο Σχήμα 4.10 με τη συνεχόμενη γραμμή δίνεται η απόκριση του φίλτρου που σχεδιάστηκε αρχικά, ενώ με τη διακεκομμένη γραμμή δίνεται η απόκριση του ίδιου φίλτρου όταν οι συντελεστές του έχουν ακρίβεια 7 bits.

Αποδεικνύεται ότι κάθε αύξηση κατά 1 bit στην ακρίβεια των συντελεστών βελτιώνει την απόδοση του φίλτρου κατά έξι dBs. Αν το φίλτρο έχει σχεδιαστεί με θεωρητική απόρριψη στη ζώνη αποκοπής A dBs, τότε απαιτούνται το λιγότερο $A/6$ bits στην δυαδική

αναπαράσταση των συντελεστών για να μην αλλοιωθεί η θεωρητική απόκριση του φίλτρου.



Σχήμα 4.10 Αποτελέσματα από την κβάντιση των συντελεστών. Με διακεκομμένη γραμμή δίνεται η απόκριση του φίλτρου μετά την κβάντιση των συντελεστών. (α) Απόκριση συχνότητας, (β) Λεπτομέρεια της ζώνης διέλευσης.

Σύνοψη κεφαλαίου

Τα FIR ψηφιακά φίλτρα που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουν δύο ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που είναι επιθυμητά στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος. Τη γραμμική απόκριση στη φάση και την ευστάθεια. Γνωρίσαμε τον τρόπο που καθορίζονται οι προδιαγραφές των φίλτρων αυτών και στη συνέχεια μελετήσαμε τη μέθοδο σχεδίασης των FIR φίλτρων με τα παράθυρα. Τέλος, με τη μέθοδο σχεδίασης των βέλτιστων FIR φίλτρων μπορούμε να λάβουμε πολύ καλή απόκριση συχνότητας με τους λιγότερο δυνατούς συντελεστές.

5. FIR Filter – (Τρόποι σχεδίασης και παραδείγματα)

5.1 Σχεδίαση μη αναδρομικών φίλτρων (FIR)

Τα FIR φίλτρα είναι πολύ δημοφιλή φίλτρα γιατί:
- έχουν γραμμική φάση
- έχουν πεπερασμένο μήκος, το οποίο εξασφαλίζει ευστάθεια κάτω από οποιεσδήποτε συνθήκες επεξεργασίας πεπερασμένης ακρίβειας.

•Αποκλειστικά για ψηφιακά φίλτρα αφού δεν υπάρχει ανάλογο τους στον αναλογικό κόσμο.
•Θα δούμε δύο βασικές μεθόδους σχεδιασμού FIR φίλτρων:

- **Με χρήση παραθύρων:** εμφανίζει πρακτικά μειονεκτήματα, αλλά διακρίνεται από χαρακτηριστική απλότητα στον υπολογισμό των συντελεστών.

- **Με χρήση δειγματοληψίας στη συχνότητα:** Η ιδέα συνίσταται στον καθορισμό ενός συνόλου συχνοτήτων στις οποίες απαιτείται το επιθυμητό φίλτρο να πλησιάζει τις ιδανικές προδιαγραφές.

- **Με χρήση βελτιστοποίησης (στο τέλος):** Τα φίλτρα που σχεδιάζονται είναι βέλτιστα θεωρητικά ως προς ένα κριτήριο το οποίο χρησιμοποιούμε για τη βελτιστοποίηση. Μειονεκτήματα της μεθόδου είναι η αυξημένη υπολογιστική πολυπλοκότητα και το γεγονός ότι μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε φίλτρα που εμφανίζουν συγκεκριμένες συμμετρίες.

5.1.1 Ιδανική απόκριση συχνότητας

Η γενική περίπτωση ιδανικής απόκρισης συχνότητας δίνεται από την σχέση:

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} D_i(e^{j\omega}) & ,\omega \in [\omega_{l_i}, \omega_{u_i}] \\ 0 & ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$

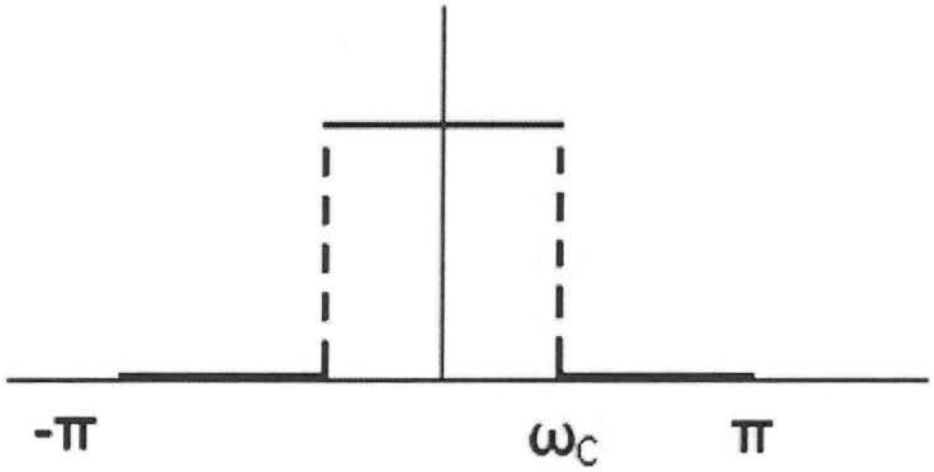
Για την ιδανική απόκριση συχνότητας $D(e^{j\omega})$ ισχύουν τα ακόλουθα:
- Είναι γνωστή σε όλες τις συχνότητες.

- Ζώνες διάβασης είναι δυνατόν να συνδυαστούν έτσι ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη.

- Εμφανίζει ασυνέχειες στα άκρα των ζωνών διάβασης.

Παράδειγμα:

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & ,\omega \in [-\omega_c, \omega_c] \\ 0 & ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$



□

5.1.2 Ιδανική κρουστική απόκριση φίλτρου

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier στην ιδανική απόκριση συχνότητας δίνεται από την σχέση:

$$d[n] = \int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Η συνθήκη για εξασφάλιση πραγματικής ακολουθίας d[n] είναι:

$$D^*(e^{j\omega}) = D(e^{-j\omega})$$

Για την πραγματική συνάρτηση $D(e^{j\omega})$ (όπως στα κλασικά φίλτρα που μελετάμε), η συνθήκη ισοδυναμεί με $D(e^{j\omega})$ να είναι άρτια.

Παρότι ιδανική η κρουστική απόκριση εμφανίζει μερικά μειονεκτήματα που την καθιστούν πρακτικά ανεφάρμοστη:

- Δεν καταλήγει ούτε σε FIR ούτε σε IIR συστήματα και επομένως απαιτεί **άπειρες**

πράξεις ανα δείγμα εξόδου.
- Σε καμιά περίπτωση η κρουστική απόκριση **δεν είναι αιτιατή**.

5.1.3 Προσέγγιση ιδανικών χαρακτηριστικών

Απόκριση πλάτους και συνάρτηση φάσης:
Έστω $H(e^{j\omega})$ η προσέγγιση που κάνουμε στο ιδανικό φίλτρο. $H(e^{j\omega})$ είναι μιγαδική, ενώ η $D(e^{j\omega})$ είναι πραγματική. Όμως η $H(e^{j\omega})$ μπορεί να γραφτεί ως

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)}\left|H(e^{j\omega})\right|$$

όπου (εφόσον πρόκειται για πραγματικό φίλτρο):
- $\left|H(e^{j\omega})\right|$ είναι το πλάτος της απόκρισης και είναι άρτια συνάρτηση,
- φ(ω) είναι η φάση της απόκρισης και είναι περιττή.

Μπορούμε να επιλέξουμε μια πραγματική συνάρτηση $R(e^{j\omega})$ με την οποία θα ήταν λογική η προσέγγιση της ιδανικής απόκρισης συχνότητας:

$$R(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|$$

Αυτή η επιλογή είναι καλή γιατί φιλτράρει ικανοποιητικά το θόρυβο, αφού όταν σε κάποια συχνότητα ισχύει $R(e^{j\omega}) \approx 0$, τότε συνεπάγεται ότι $H(e^{j\omega}) \approx 0$

Επεκτείνοντας την προσέγγιση, διαλέγουμε $H(e^{j\omega})$,

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)}R(e^{j\omega})$$

έτσι ώστε η προσέγγιση των ιδανικών χαρακτηριστικών $D(e^{j\omega})$ να επιτυγχάνεται μέσω της συνάρτησης $R(e^{j\omega})$.

Γραμμική φάση και καθυστέρηση ομάδας
Εφαρμογή φίλτρου $H(e^{j\omega})$ σε σήμα x[n] με συχνοτικό περιεχόμενο $X(e^{j\omega})$ μας δίνει:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)}R(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)}Y^{\epsilon}(e^{j\omega})$$

όπου $Y^{\epsilon}(e^{j\omega})$ είναι η επιθυμητή έξοδος.

Πώς επηρεάζει ο όρος $e^{j\phi(\omega)}$ το επιθυμητό συχνοτικό περιεχόμενο;

Γνωρίζουμε ότι $|Y(e^{j\omega})| = |Y^{\epsilon}(e^{j\omega})|$, άρα η επιθυμητή και η ουσιαστική έξοδος περιέχουν τις ίδιες συχνότητες με την ίδια ακριβώς ενέργεια.
Η διαφορά έγκειται καθαρά στη διαφορά φάσης κάθε συχνότητας, δηλαδή

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \phi\omega + \angle Y^{\epsilon}(e^{j\omega})$$

Αυτή η διαφορά φάσης σε πολλές εφαρμογές δε θεωρείται σημαντική (κυρίως σε επεξεργασία ήχου γιατί το σύστημα ακοής είναι ευαίσθητο στην ενέργεια των συχνοτήτων κι όχι στις διαφορές φάσης φάση τους), άρα επεξεργασία με το φίλτρο $H(e^{j\omega})$ είναι ικανοποιητική.

Εφαρμογές στις οποίες η φάση είναι σημαντική είναι αυτές που δίνουν σημασία στη μορφή του σήματος στο χρόνο - γενικά, η μορφή του σήματος είναι πολύ ευαίσθητη στις μεταβολές της φάσης.

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο MF και τις συμμετρίες στο πεδίο των συχνοτήτων μπορούμε να γράψουμε:

$$y^{\epsilon}[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |Y^{\epsilon}(e^{j\omega})| \cos(\omega n + \angle Y^{\epsilon}(e^{j\omega}))d\omega$$

$$y[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |Y(e^{j\omega})| \cos(\omega n + \angle Y(e^{j\omega}))d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |Y(e^{j\omega})| \cos\left(\omega\left(n + \frac{\phi(\omega)}{\omega}\right) + \angle Y(e^{j\omega})\right)d\omega$$

Για να μείνει αναλλοίωτη η μορφή του σήματος πρέπει φ(ω) = -Kω, όπου K σταθερά.

Τότε, $y[n] = y^{\epsilon}[n-K]$ που σημαίνει ότι η έξοδος $y[n]$ είναι μια ολισθημένη κατά K χρονικές στιγμές μορφή της επιθυμητής εξόδου $y^{\epsilon}[n]$

Συνοπτικά:

Η επιθυμητή έξοδος σε ένα φίλτρο με απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)}R(e^{j\omega})$$

παραμένει αναλλοίωτη αν η φάση φ(ω) στις ζώνες διάβασης είναι γραμμική.
Δηλαδή,

$$\phi(\omega) = -K\omega$$

•Απαιτείται γραμμική φάση μόνο στις ζώνες διάβασης γιατί στις υπόλοιπες ζώνες το πλάτος είναι μηδέν κι επομένως δεν μας απασχολεί η φάση τους.

•Τα φίλτρα FIR είναι δυνατόν να έχουν γραμμική φάση (σε αντίθεση με τα IIR)

5.1.4 Υπολογισμός συντελεστών

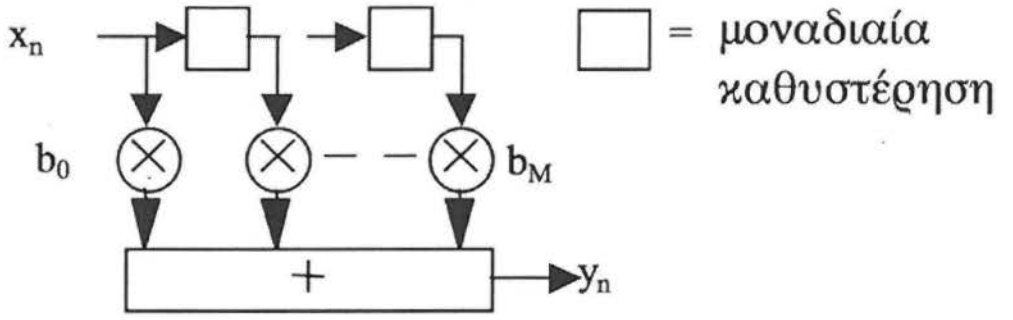
• Το σήμα εξόδου εξαρτάται μόνο από το σήμα εισόδου κι όχι από προηγούμενες τιμές του σήματος εξόδου. Γι' αυτό και αυτού του είδους τα φίλτρα έχουν πεπερασμένη διάρκεια.

• Τέτοια συστήματα/φίλτρα στη γενική τους μορφή είναι: $y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

• Διαφορετικά μπορεί να γραφτεί:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} h[k]z^{-k}$$



όπου $h[k]$ είναι η κρουστική απόκριση του φίλτρου. Ο στόχος είναι η εξεύρεση μεθόδων υπολογισμού των συντελεστών $h[k]$ έτσι ώστε να τηρούνται ο προδιαγραφές.

5.1.5 Σχεδίαση με χρήση παραθύρων - Βήματα

1) Προσδιορισμός ιδανικής ή επιθυμητής απόκρισης συχνότητας $D(e^{j\omega})$.

2) Υπολογισμός κρουστικής απόκρισης $d[n]$ του φίλτρου μέσω αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier.

3) Επιλογή παραθύρου που ικανοποιεί τους προσδιορισμούς για τις ζώνες διάβασης και υπολογισμός του αριθμού συντελεστών του φίλτρου χρησιμοποιώντας τη σωστή σχέση μεταξύ του μεγέθους του φίλτρου και του μεγέθους της ζώνης μετάβασης Δf.

4) Υπολογισμός των τιμών $w[n]$ για το επιλεγμένο παράθυρο.

5) Υπολογισμός των συντελεστών φίλτρου $h[n]$, μέσω: $h[n] = d[n]w[n]$

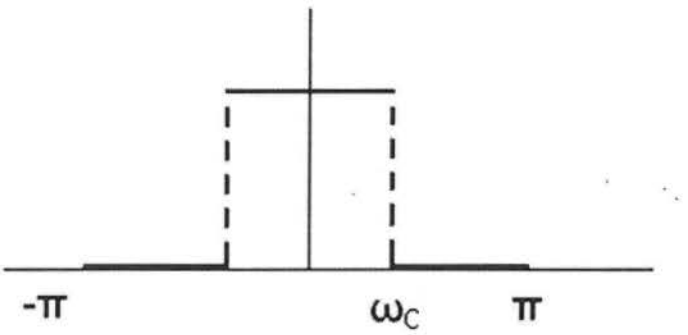
• Προσδιορίζουμε τι θέλουμε να κάνει το ιδανικό φίλτρο στο πεδίο των συχνοτήτων. Αυτό το φίλτρο το ονομάζουμε $D(e^{j\omega})$

• Έπειτα, καθορίζουμε την κρουστική του απόκριση

$$d[n] = \int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Παράδειγμα:

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & ,\omega \in [-\omega_c, \omega_c] \\ 0 & ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$



$$d[n] = \int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \times e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} 2f_c \dfrac{\sin \omega n}{\omega n} & ,n \neq 0 \\ 2f_c & ,n = 0 \end{cases}$$

Τί είναι η παραθύρωση και γιατί γίνεται;

• Θέλουμε να μπορούμε με ένα διαθέσιμο αριθμό δειγμάτων L να έχουμε τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε τη συμπεριφορά του $D(e^{j\omega})$ στο πεδίο των συχνοτήτων.

• Προκειμένου να συνδέσουμε το $D(e^{j\omega})$ με το $H(e^{j\omega})$ ορίζουμε την ακολουθία

$$h[n] = \begin{cases} d[n] & ,n = 0,1,2,\ldots,L-1 \\ 0 & ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$

• Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε ότι $h[n] = d[n]w[n]$, για κάθε n, όπου

$$w[n] = \begin{cases} 1 & ,n = 0,1,2,\ldots,L-1 \\ 0 & ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$

•Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε ότι τα L δείγματα προκύπτουν από την εφαρμογή *χρονικού τετραγωνικού παραθύρου μήκους L.*

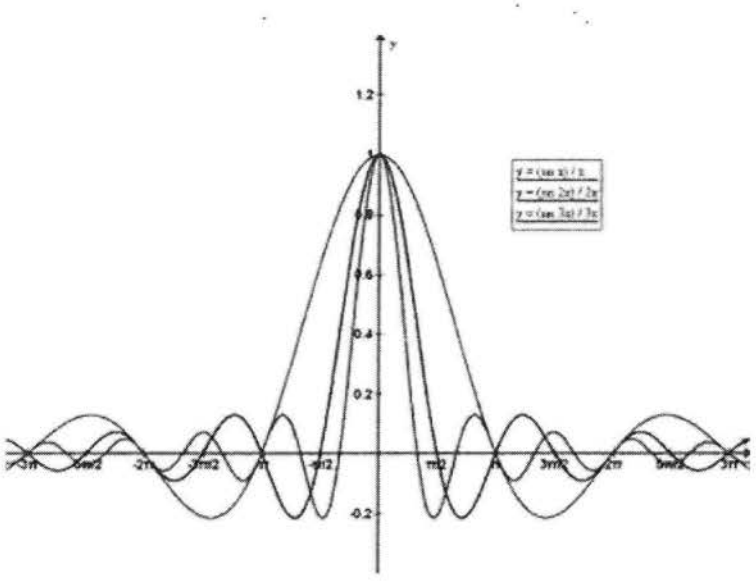
•Εφόσον $h[n] = d[n]w[n]$, στο πεδίο των συχνοτήτων συνδέονται με συνέλιξη:

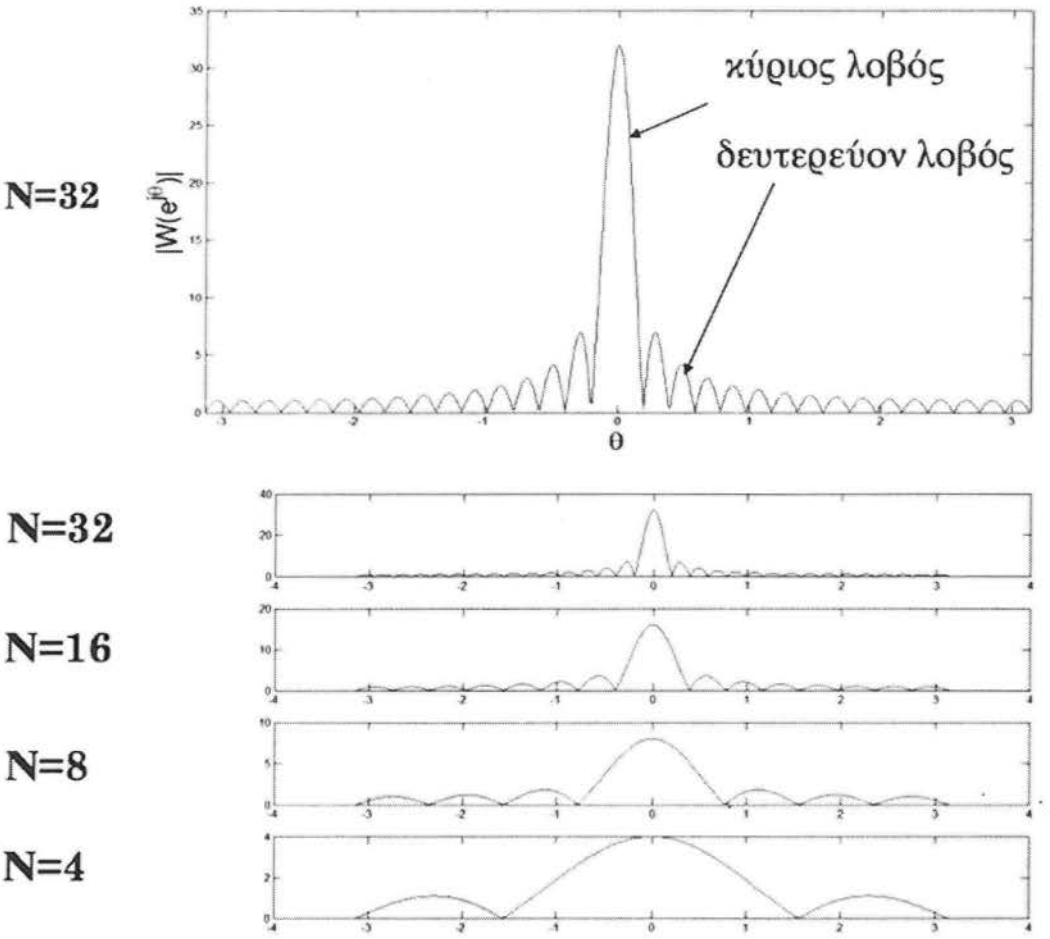
$$H(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) * D(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\upsilon})D(e^{j(\omega-\upsilon)})d\upsilon$$

όπου

$$W(e^{j\omega}) = F\{w[n]\} = Le^{j\omega\frac{L-1}{2}}\frac{\sin\frac{L\omega}{2}}{L\sin\frac{\omega}{2}}$$

•Η τυπική μορφή του λόγου $\frac{\sin\frac{L\omega}{2}}{L\sin\frac{\omega}{2}}$ που αποτελεί τη συνιστώσα της συνάρτησης $W(e^{j\omega})$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι ο κύριος λόγος που αυτή η προσέγγιση εμφανίζει έντονους κυματισμούς που το πλάτος τους παραμένει αναλλοίωτο (**φαινόμενο Gibbs**), όσο μεγάλο μήκος παραθύρου και να διαλέξουμε.





Είδη παραθύρων:

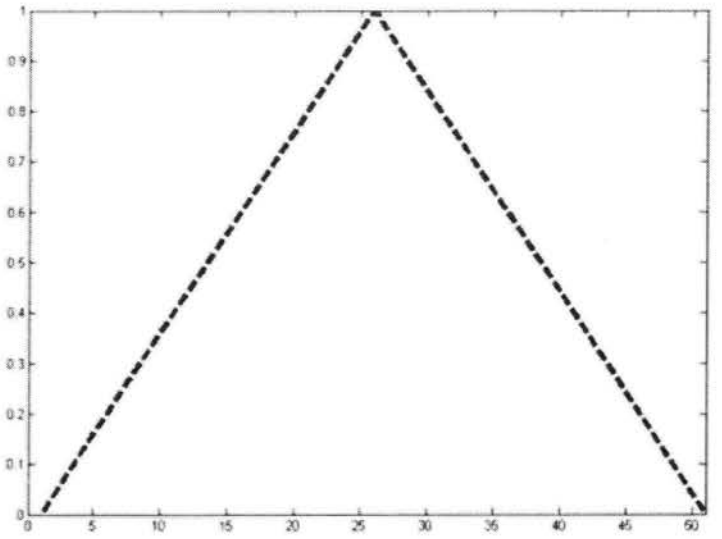
•Τετραγωνικό παράθυρο:

$$w[n]=\begin{cases}1 & ,n=0,1,2,\ldots,L-1\\ 0 & ,\alpha\lambda\lambda o\acute{u}\end{cases}$$

•Παράθυρο Barlett (τριγωνικό):

$$w[n]=1-\frac{|n-N|}{N+1},\quad 0\le n\le L-1,\quad L=2N+1$$

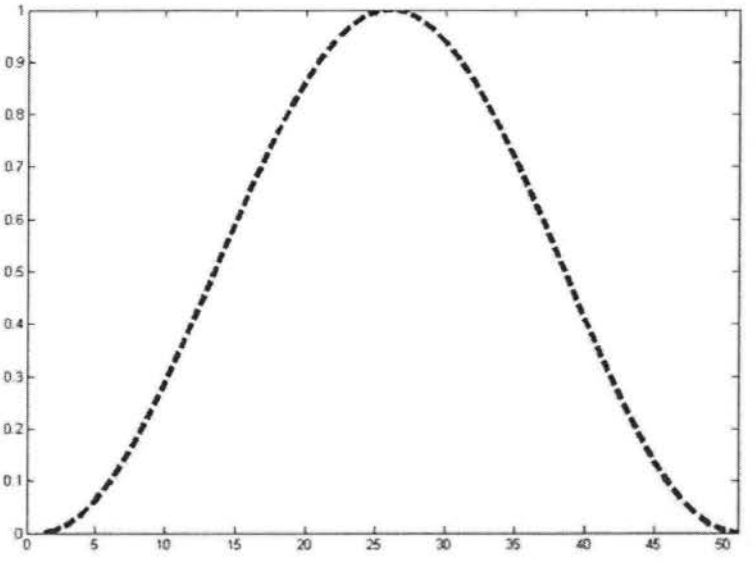
$$w[n]=1-\frac{|n-N-0.5|}{N+1},\quad 0\le n\le L-1,\quad L=2N$$



•Παράθυρο Hanning:

$$w[n] = 0.5\left(1+\cos\frac{2\pi(n-N)}{L}\right), \quad 0 \le n \le L-1, \quad L = 2N+1$$

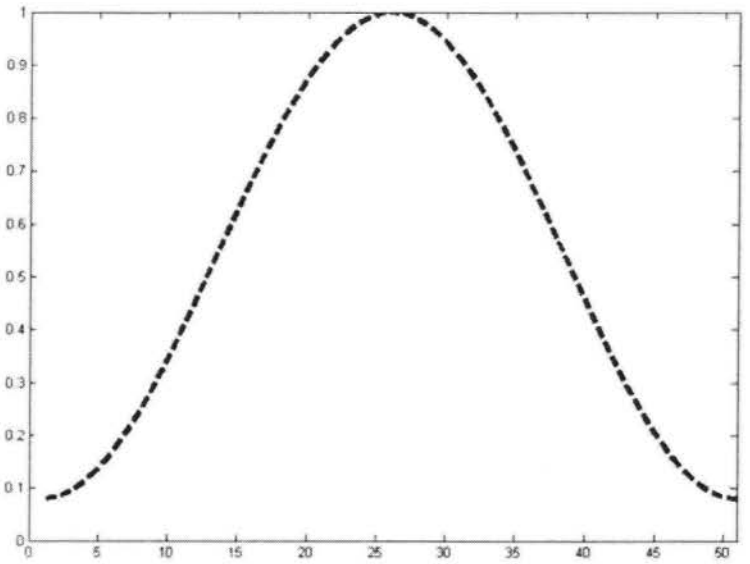
$$w[n] = 0.5\left(1+\cos\frac{2\pi(n-N+0.5)}{L}\right), \quad 0 \le n \le L-1, \quad L = 2N$$



•Παράθυρο Hamming:

$$w[n] = 0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi(n-N)}{L}, \quad 0 \le n \le L-1, \quad L = 2N+1$$

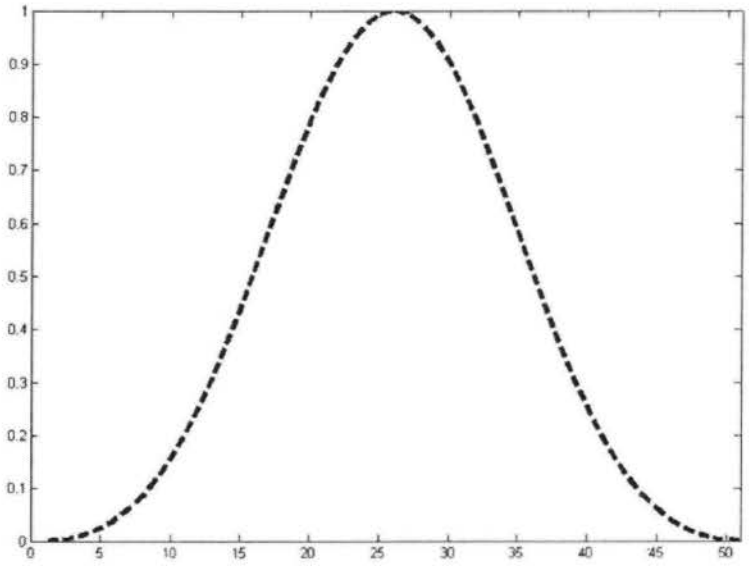
$$w[n] = 0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi(n-N+0.5)}{L}, \quad 0 \le n \le L-1, \quad L = 2N$$



•Παράθυρο Blackman:

$$w[n] = 0.42 + 0.5\cos\frac{2\pi(n-N)}{L} + 0.8\cos\frac{4\pi(n-N)}{L}, \quad 0 \le n \le L-1, \quad L = 2N+1$$

$$w[n] = 0.42 + 0.5\cos\frac{2\pi(n-N+0.5)}{L} + 0.8\cos\frac{4\pi(n-N+0.5)}{L}, \quad 0 \le n \le L-1, \quad L = 2N$$

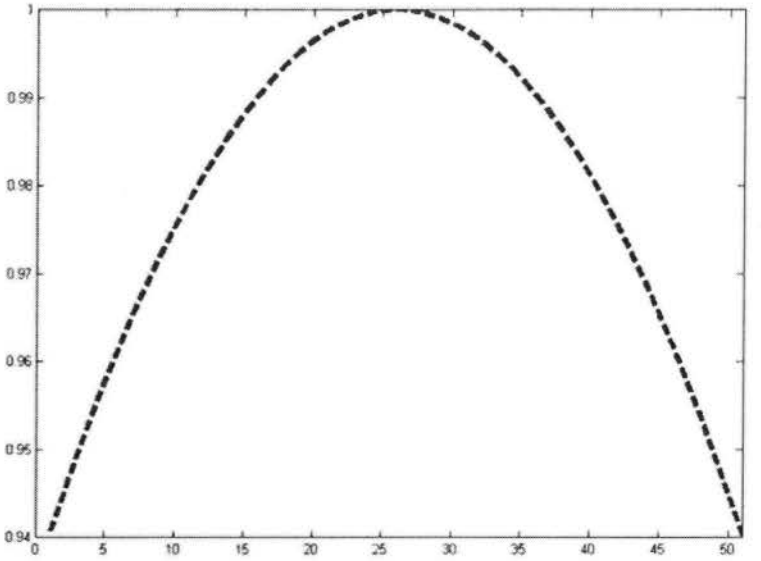


•Παράθυρο Kaizer:

$$w[n] = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{n-N}{N}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, \quad 0 \le n \le L-1, \quad L = 2N+1$$

$$w[n] = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{n-N+0.5}{N}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, \quad 0 \le n \le L-1, \quad L = 2N$$

όπου $I_0(x)$ μια τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης που γράφεται σαν σειρά $I_0(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x^k}{2^k k!}\right]^2$ και β μια παράμετρος που επιτρέπει τον έλεγχο του πλάτους των δευτερευόντων λοβών.

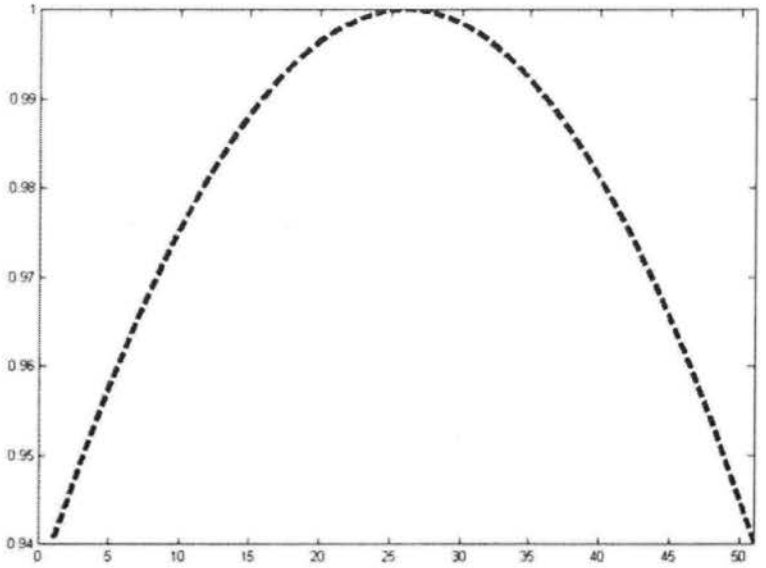


Υπολογισμός β ανάλογα με τις προδιαγραφές εξασθένησης ζώνης αποκοπής:

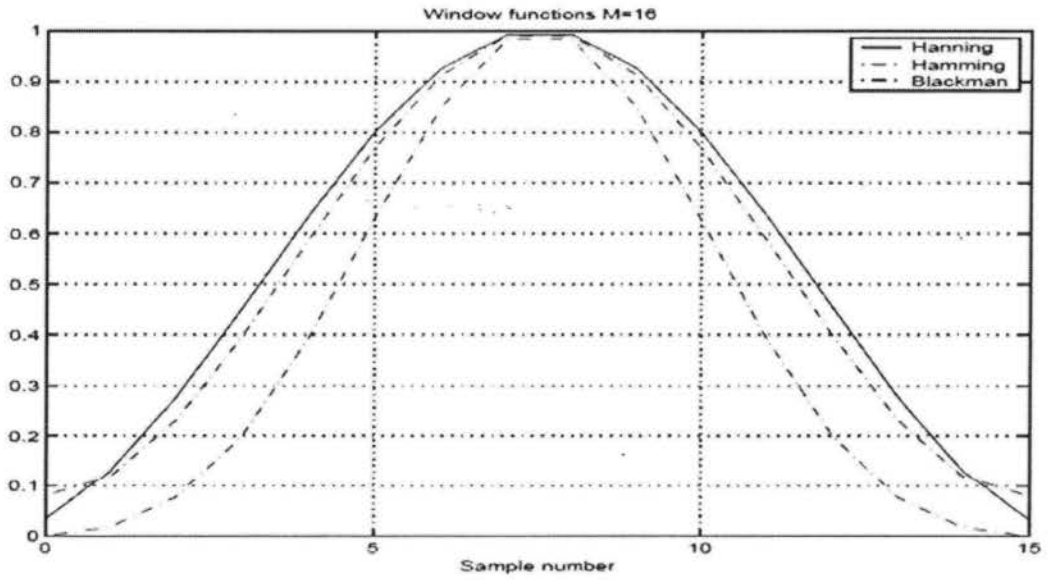
$$\beta = 0 \qquad , A \le 21dB$$
$$\beta = 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21) \qquad , 21dB < A < 50dB$$
$$\beta = 0.1102(A-8.7) \qquad , A \ge 50dB$$

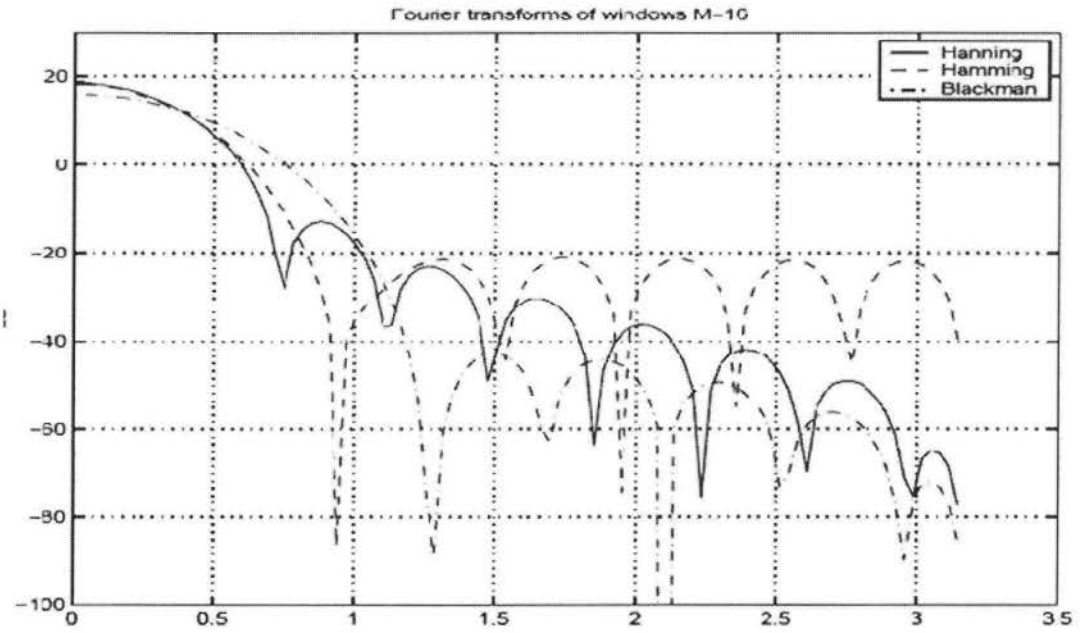
Όπου $A = -20\log\delta, \quad \delta = \min\{\delta_p, \delta_s\}$

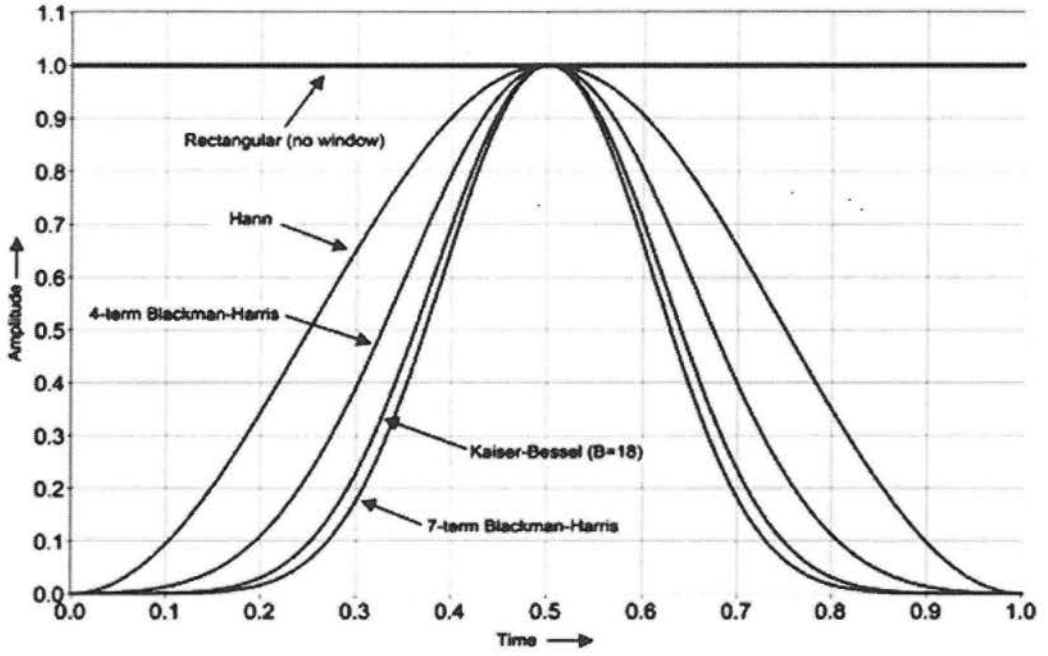
Αριθμός συντελεστών φίλτρου: $N \ge \dfrac{A-7.95}{7.18\Delta f}$

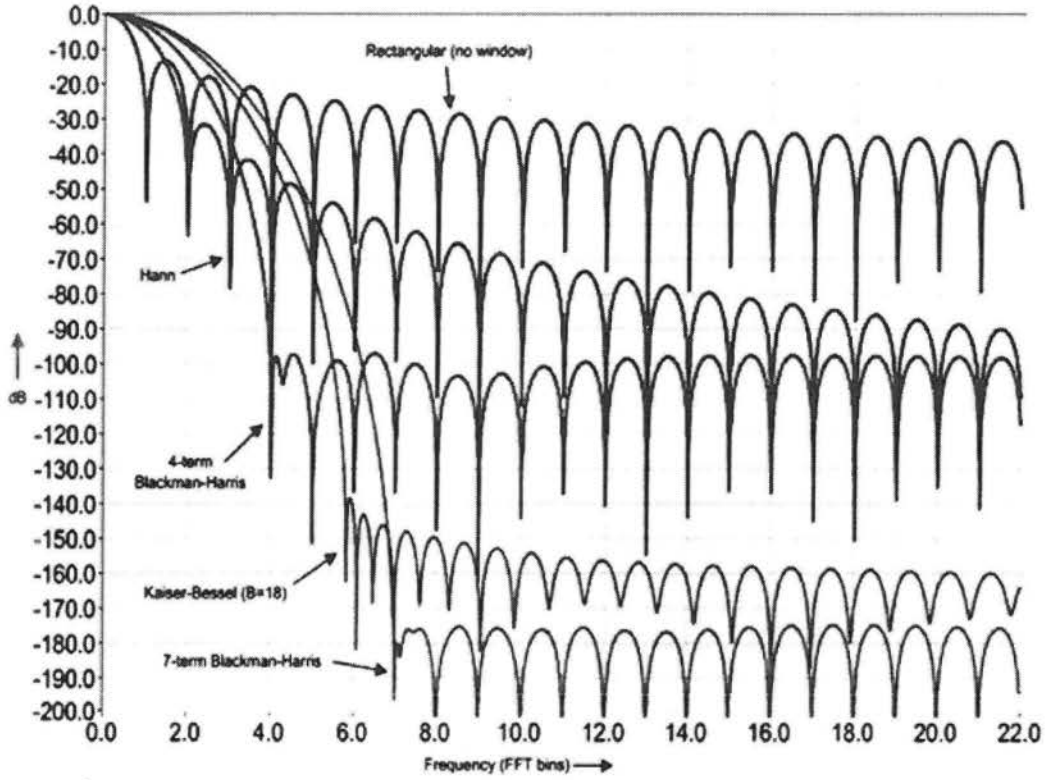


Σύγκριση μερικών παραθύρων:




Fourier transforms of windows M=10
Hanning
Hamming
Blackman
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5


Rectangular (no window)
Hann
4-term Blackman-Harris
Kaiser-Bessel (B=18)
7-term Blackman-Harris
Amplitude
Time
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0



Παράθυρο	Πλάτος ΖΜ (Hz)	δ_p (dB)	ΚΛ / ΠΛ (dB)	Εξασθένιση ΖΑ (max)	Παράθυρο $w(n), \lvert n \rvert \le (N-1)/2$
Rectangular	0.9/N	0.7416	13	21	1
Hanning	3.1/N	0.0546	31	44	$0.5+0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	3.3/N	0.0194	41	53	$0.54+0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	5.5/N	0.0017	57	75	$0.42+0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+$ $0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
	2.93/N (β=4.54)	0.0274		50	$\frac{I_0\left(\beta\left\{1-\left[2n/(N-1)\right]^2\right\}^{1/2}\right)}{I_0(\beta)}$
Kaiser	4.32/N (β=6.76)	0.00275		70	
	5.71/N (β=8.96)	0.000275		90	

Μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα:

•Πλεονεκτήματα:

- Απλή - κατανοητή και εύκολη, ελάχιστη υπολογιστική προσπάθεια ακόμα και για περίπλοκα παράθυρα όπως το Kaiser.

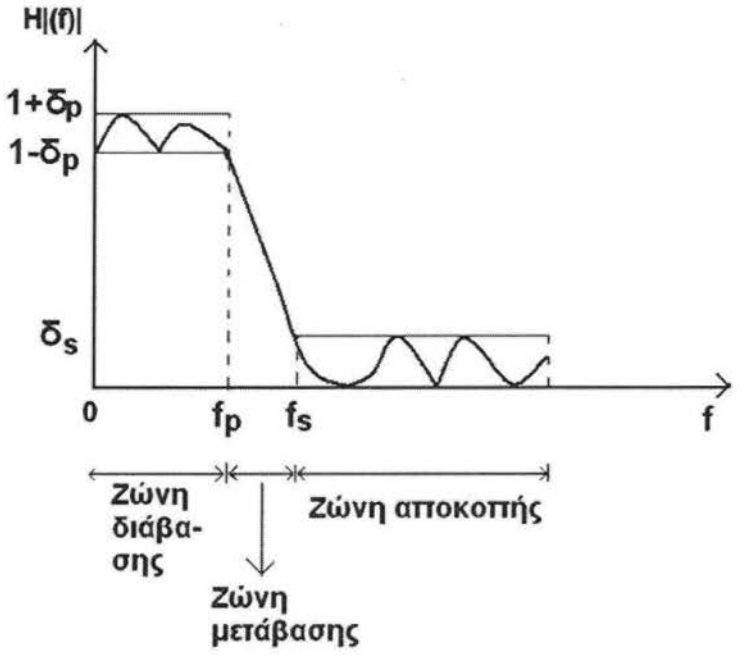
•Μειονεκτήματα:

- Έλλειψη flexibility - απόκλιση ζωνών διάβασης και αποκοπής περίπου ίση.
- Λόγω συνέλιξης του συχνοτικού περιεχομένου του παραθύρου και της επιθυμητής απόκρισης, οι συχνότητες αποκοπής και διάβασης δεν μπορούν να προσδιοριστούν ακριβώς.
- Για συγκεκριμένο παράθυρο (εκτός το Kaiser), το μέγιστο πλάτος των κυματισμών είναι σταθερό, ανεξάρτητα από το N.
- Για μερικές εφαρμογές $D(e^{j\omega})$ είναι πολύ πολύπλοκο για υπολογισμό του $d[n]$, οπότε χρησιμοποιείται δειγματοληψία στο πεδίο συχνοτήτων πριν τη μέθοδο παραθύρου.

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε τους συντελεστές ενός βαθυπερατού FIR φίλτρου που να πληρεί τις πιο κάτω προδιαγραφές:

1. Συχνότητα διάβασης 1.5kHz
2. Πλάτος ζώνης μετάβασης 0.5kHz
3. Εξασθένιση ζώνης αποκοπής > 50dB
4. Συχνότητα δειγματοληψίας: 8kHz

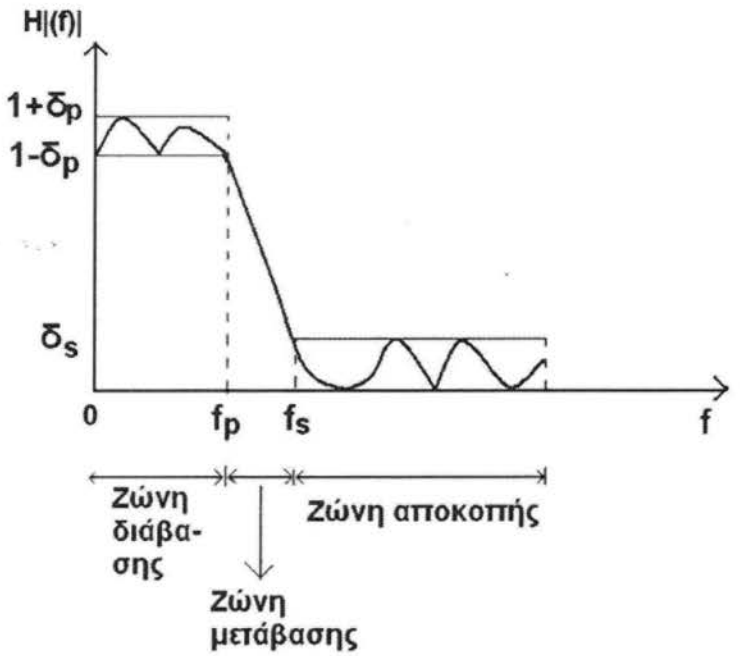


Λύση:
Σύμφωνα με τον πίνακα, τα παράθυρα Hamming, Blackman ή Kaiser πληρούν τις προδιαγραφές εξασθένισης της ζώνης αποκοπής ΖΑ. Αν χρησιμοποιήσουμε το Hamming:

•Κανονικοποίηση πλάτους Ζώνης Μετάβασης: Δf=ZM/f=0.5/8=0.0625
•Μέγεθος φίλτρου: N = 3.3/Δf = 3.3/0.0625 = 52.8 ~53

Παράδειγμα 2

Υπολογίστε τους συντελεστές ενός βαθυπερατού FIR φίλτρου που να πληρεί τις πιο κάτω προδιαγραφές:
1. Συχνότητα διάβασης 1.5kHz
2. Πλάτος ζώνης μετάβασης 0.5kHz
3. Εξασθένιση ζώνης αποκοπής > 50dB
4. Συχνότητα δειγματοληψίας: 8kHz



Λύση:

Σύμφωνα με τον πίνακα, τα παράθυρα Hamming, Blackman ή Kaiser πληρούν τις προδιαγραφές εξασθένισης της ζώνης αποκοπής ΖΑ. Αν χρησιμοποιήσουμε το Hamming:

•Κανονικοποίηση πλάτους ZM : $\Delta\tilde{f} = (f_c - f_p)/f = 0.5/8 = 0.0625$

•Μέγεθος φίλτρου: $N = 3.3/\Delta\tilde{f} = 3.3/0.0625 = 52.8 \rightarrow 53$

Με βάση τον τύπο για το Hamming (με κέντρο αξόνων το 26):

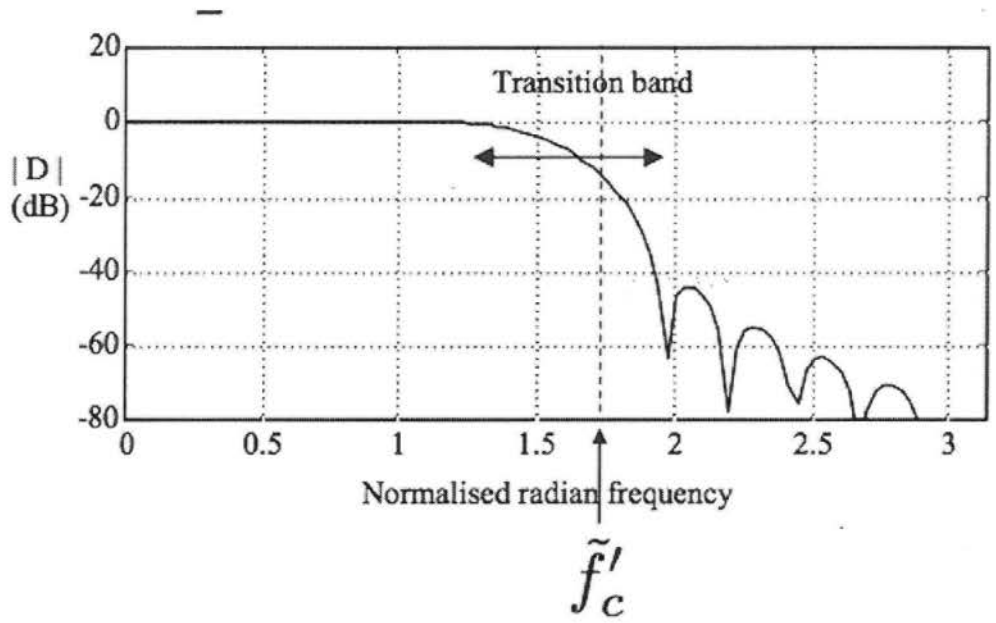
$$w[n] = 0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi(n-26)}{53}, \quad 0 \le n \le 52, \quad L = 53$$

Η ιδανική κρουστική απόκριση βαθυπερατού φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$d[n] = \begin{cases} 2f_c \frac{\sin \omega n}{\omega n} & , n \neq 0 \\ 2f_c & , n = 0 \end{cases}$$

Ωστόσο κάνουμε αναπροσαρμογή της συχνότητας στο κέντρο της ZM:

$$\tilde{f}_c' = \tilde{f}_c + \frac{\Delta\tilde{f}}{2} = (1.5 + 0.25)/8 = 1.75/8 = 0.21875$$



Οι συντελεστές του φίλτρου υπολογίζονται από $h[n] = d[n]w[n]$:

$\underline{n = 0}$:

$$d[0] = 2\tilde{f}_c' = 2 \times 0.21875 = \ldots$$

$$w[0] = 0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi(-26)}{53} = \ldots$$

$$h[0] = d[0]w[0] = \ldots$$

$\underline{n=1}$:

$d[1] = \ldots$

$w[1] = \ldots$ ε

$h[1] = h[-1] = d[1]w[1] = \ldots$

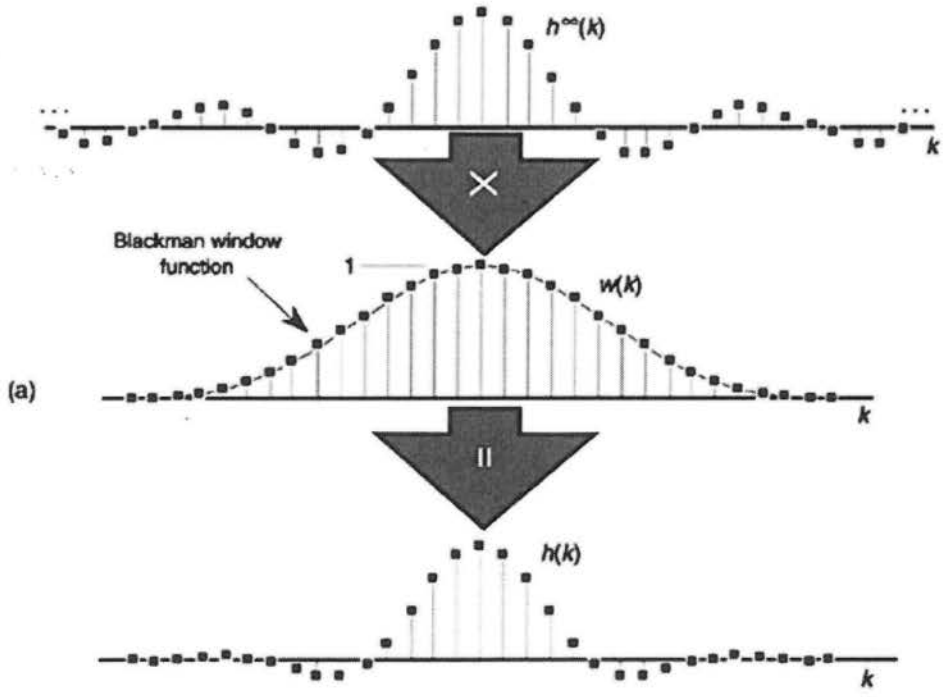
$\underline{n=26}$:

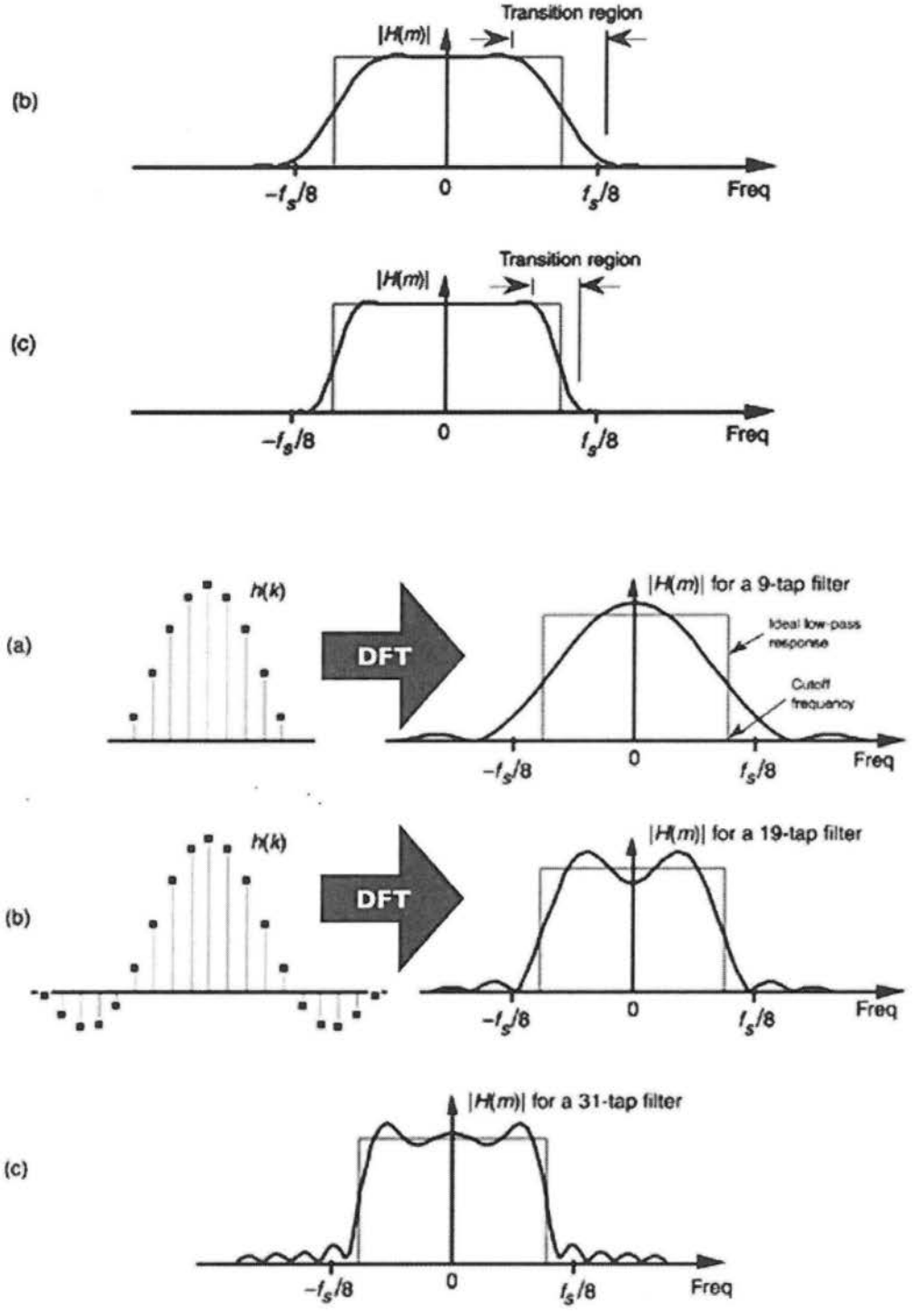
$d[26] = \ldots$

$w[26] = \ldots$

$h[26] = h[-26] = d[26]w[26] = \ldots$

5.1.6 Διαγραμματική επεξήγηση




(b)
Transition region
|H(m)|
$-f_s/8$
0
$f_s/8$
Freq
(c)
Transition region
|H(m)|
$-f_s/8$
0
$f_s/8$
Freq
(a)
h(k)
DFT
|H(m)| for a 9-tap filter
Ideal low-pass response
Cutoff frequency
$-f_s/8$
0
$f_s/8$
Freq
(b)
h(k)
DFT
|H(m)| for a 19-tap filter
$-f_s/8$
0
$f_s/8$
Freq
(c)
|H(m)| for a 31-tap filter
$-f_s/8$
0
$f_s/8$
Freq

5.2 Παραδείγματα Σχεδίασης FIR φίλτρων

Παράδειγμα 1

Ποια είναι η απόκριση συχνότητας σε ένα φίλτρο μέσης τιμής (averager)

(α) 9-σημείων (β) 19 σημείων

(α) 9-σημεία

Ένα φίλτρο μέσης τιμής (averager) 9-σημείων δίνεται από τον τύπο:

$$y(n)=\frac{1}{9}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+\ldots+x(n-8)]$$

Παίρνουμε τον μετασχηματισμό z και έχουμε:

$$Y(z)=\frac{1}{9}[X(z)+z^{-1}X(z)+z^{-2}X(z)+\ldots+z^{-8}X(z)]$$

Η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z)=\frac{1}{9}[1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots+z^{-8}]$$

Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας αντικαθιστούμε $z=e^{j\omega}$

$$H(\omega)=\frac{1}{9}[1+e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}+\ldots+e^{-8j\omega}]\Rightarrow$$

$$H(\omega)=\frac{1}{9}e^{-4j\omega}[e^{4j\omega}+e^{3j\omega}+e^{2j\omega}+e^{j\omega}+e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}+e^{-3j\omega}+e^{-4j\omega}]\Rightarrow$$

$$H(\omega)=\frac{1}{9}e^{-4j\omega}[1+2\cos\omega+2\cos(2\omega)+2\cos(3\omega)+2\cos(4\omega)]$$

Το μέτρο της $H(\omega)=\frac{1}{9}[1+2\cos\omega+2\cos(2\omega)+2\cos(3\omega)+2\cos(4\omega)]$

Ενώ η φάση Θ (ω)=4ω

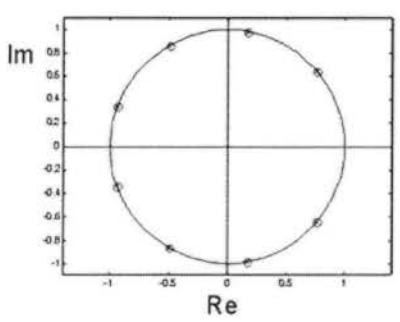
Για τους μηδενισμούς έχουμε:

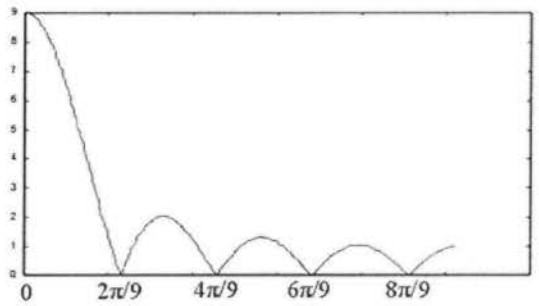
$$H(z)=\frac{1}{9}[1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots+z^{-8}]=\frac{1}{9}\left(\frac{1-z^{-9}}{1-z^{-1}}\right)$$

Άρα

$$z^9=1\Rightarrow z_k=e^{j\frac{2\pi}{9}k}\quad k=0,1,\ldots,8$$

Το διάγραμμα μηδενισμών και η απόκριση μέτρου φαίνονται στο επόμενο σχήμα





(β) 19 – σημείων

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για τον averager 19-σημείων

Η συνάρτηση μεταφοράς του είναι:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{19}[1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots+z^{-18}]\Rightarrow$$

Και η απόκριση συχνότητας

$$H(\omega)=\frac{1}{9}e^{-9j\omega}[1+2\cos\omega+2\cos(2\omega)+\ldots+2\cos(9\omega)]$$

Για τους μηδενισμούς :

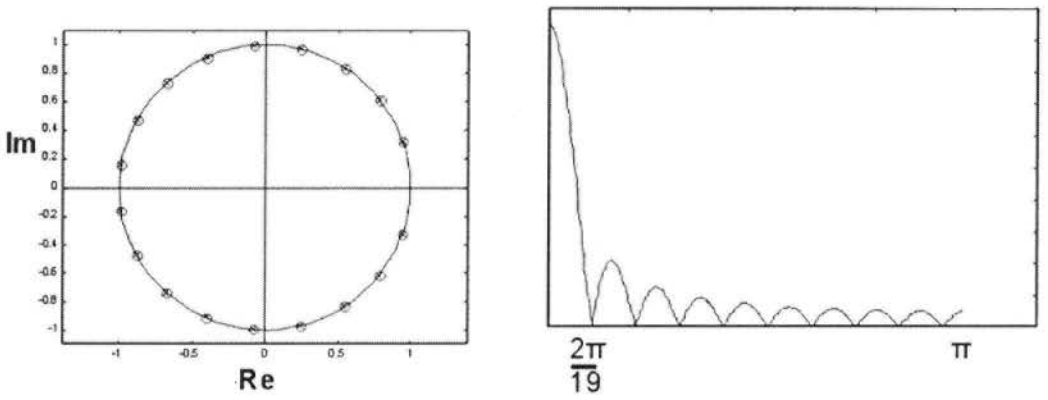
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΤΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ

$$H(z)=\frac{1}{19}[1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots+z^{-18}]=\frac{1}{19}\left(\frac{1-z^{-19}}{1-z^{-1}}\right)$$

Δηλαδή πρέπει :

$$z^{19}=1\Rightarrow z_k=e^{j\frac{2\pi}{19}k}\quad k=0,1,\ldots,18$$

Διάγραμμα μηδενισμών και απόκριση μέτρου δεικνύονται στα επόμενα διαγράμματα



Παράδειγμα 2

Διαμορφώστε (modulate) το φίλτρο της προηγούμενης άσκησης ώστε να γίνει ζωνοδιαβατό κεντρικής συχνότητας

$$\omega=\frac{\pi}{3}$$

Πολλαπλασιάζουμε (διαμορφώνουμε) την αρχική κρουστική απόκριση με το σήμα

cos (nω)=cos (nπ/3)

Έχουμε:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{9}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) & -4 \le n \le 4 \\ 0 & |n| > 4 \end{cases}$$

Έχουμε:

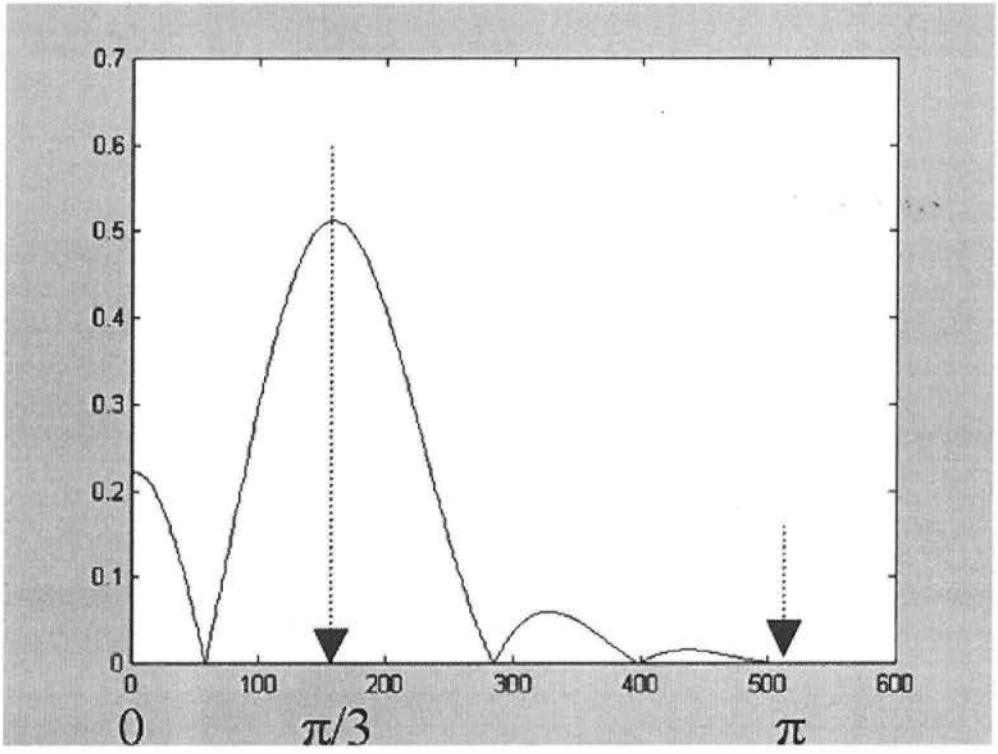
h(0) = 1/9 = 0.1111

h(-1) = h(1) = 1/18 = 0.0556

h(-2) = h(2) = -1/18 = -0.0556

h(-3) = h(3) = -1/9 = 0.1111

h(-4) = h(4) = -1/18 = -0.0556



Παράδειγμα 3

Με την μέθοδο των παραθύρων (αντίστροφου Μετασχ. Fourier) να βρεθεί η κρουστική απόκριση

h(n) των εξής $15^{ης}$ τάξεως FIR φίλτρων:

α) Ιδανικό βαθυπερατό μηδενικής φάσεως με συχνότητα αποκοπής ω1=0.4π, ενίσχυση στη ζώνη διέλευσης=1 και μηδέν στη ζώνη αποκοπής.

β) Ιδανικό υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής ω1=0.8 π και χαρακτηριστικά ενίσχυσης όπως στο α).

(α) Βαθυπερατό φίλτρο ω1=0.4π. (Θεωρούμε ορθογώνιο παράθυρο)

Γνωρίζουμε ότι η κρουστική απόκριση για ένα βαθυπερατό φίλτρο συχνότητας αποκοπής ω1=0.4π δίνεται από τη σχέση: $h(n) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\omega_1) = \frac{\omega_1}{\pi}\cdot\frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές:

$$h(0) = \frac{0.4}{\pi} = 0.4$$

$$h(1) = h(-1) = \frac{\sin(0.4\pi)}{\pi} = 0.3027$$

$$h(2) = h(-2) = 0.0935$$

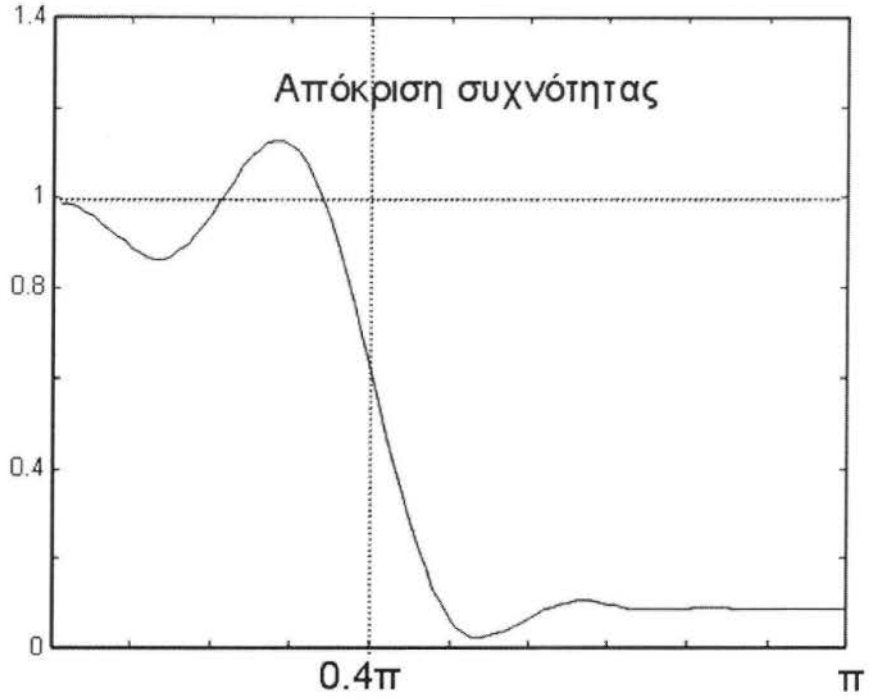
$$h(3) = h(-3) = -0.0623$$

$$h(4) = h(-4) = -0.0757$$

$$h(5) = h(-5) = 0$$

$$h(6) = h(-6) = 0.0504$$

$$h(7) = h(-7) = 0.0267$$



β) Υψιπερατό φίλτρο συχνότητας αποκοπής ω1=0.8π και χαρακτηριστικά όπως το α)

Σχεδιάζουμε το αντίστοιχο βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής

π-0.8π = 0.2π και στη συνέχεια το διαμορφώνουμε σε υψιπερατό πολλαπλασιάζοντας

το με cos(nπ).

Το βαθυπερατό φίλτρο έχει τη μορφή: $h(n) = \frac{1}{n\pi}\sin(n0.2\pi) = \frac{\sin(n0.2\pi)}{n\pi}$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές του βαθυπερατού φίλτρου

h(0) = 0.2

h(1) = h(-1) =0.1871

h(2) = h(-2) = 0.1513

h(3) = h(-3) = 0.1009

h(4) = h(-4) = 0.0467

h(5) = h(-5) = 0

h(6)= h(-6) = -0.0312

h(7) = h(-7) = -0.0432

Για το σχεδιασμό του αντίστοιχου υψιπερατού φίλτρου από τη σχέση $h_1(n) = h(n) * \cos(n\pi)$ βρίσκουμε τους συντελεστές του υψιπερατού φίλτρου:

$h_1(0) = 0,2$

$h_1(1) = h_1(-1) = -0,1871$

$h_1(2) = h_1(-2) = 0,1513$

$h_1(3) = h_1(-3) = -0,1009$

$h_1(4) = h_1(-4) = 0,0467$

$h_1(5) = h_1(-5) = 0$

$h_1(6) = h_1(-6) = -0,0312$

$h_1(7) = h_1(-7) = 0,0432$

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν και να σχεδιαστούν οι τιμές παραθύρων:α) Von Hann με 11 όρους β)Hamming με 13 όρους.

α) Γενικά :

$$w(n) = 0.5 + 0.5\cos\left(\frac{n\pi}{M+1}\right), \quad -M \le n \le M$$

Εδώ είναι: $2M+1 = 11 \Rightarrow M = 5$

Άρα:

$$w(n) = 0.5 + 0.5\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right), \quad -5 \le n \le 5$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές παραθύρου:

w(0) = 0.5+0.5 = 1

w(-1) = w(1) = 0.5+0.5 0.866 = 0.933

w(-2) = w(2) = 0.75

w(-3) = w(3) = 0.50

w(-4) = w(4) = 0.25

w(-5) = w(5) = 0.067

β)

$$w(n) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{n\pi}{M}\right), \quad -M \le n \le M$$

Είναι $2M+1 = 13 \Rightarrow M = 6$

Άρα

$$w(n) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right), \quad -6 \le n \le 6$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές παραθύρου:

w(0) = 1

w(-1) = w(1) = 0.9384

w(-2) = w(2) = 0.7700

w(-3) = w(3) = 0.5400

w(-4) = w(4) = 0.3100

w(-5) = w(5) = 0.1416

w(-6) = w(6) = 0.0800

Παράδειγμα 5

Να σχεδιαστεί ένα βαθυπερατό φίλτρο με παράθυρο (μέθοδο) Kaiser , επίπεδο κυμάτωσης δ=0.002, και μεταβατική ζώνη Δω=0.1π. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α και το μήκος του παραθύρου 2M+1.

Θα αρχίσουμε εκφράζοντας το επίπεδο κυμάτωσης σε dB:

$$A = -20\log\delta \Rightarrow A = 54db$$

Επειδή A>50dB , η παράμετρος α υπολογίζεται από τον (εμπειρικό) τύπο:

$$a = 0.1102(A - 8.7) \Rightarrow a = 4.992$$

Για το παράθυρο Kaiser, ο αριθμός των συντελεστών του φίλτρου ισούται με:

$$M \geq \frac{A - 7.95}{14.36 \cdot \Delta f} \Rightarrow M \geq 32.068 \Rightarrow M = 33$$

Άρα 2M+1= 67

(Παρατήρηση: Η τιμή Δf είναι σε δείγματα /κύκλο και όχι σε rad/κύκλο. Άρα $\Delta\omega = 0.1\pi \rightarrow \Delta f = 0.05$)

Παράδειγμα 6

Να επαναληφθεί η διαδικασία της άσκησης 5 για υψιπερατό φίλτρο με δ=0.005 και Δω=0.15π.

Αρχικά θα εκφράσουμε το επίπεδο κυμάτωσης σε dB. $A = -20\log\delta \Rightarrow A = 46db$

Επειδή 21<A<50 η παράμετρος α θα υπολογιστεί από τον τύπο :

$$a = 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21) \Rightarrow a = 4.0886$$

Για το παράθυρο Kaiser, ο αριθμός των συντελεστών του φίλτρου ισούται με:

$$M \geq \frac{A - 7.95}{14.36 \cdot \Delta f} \Rightarrow M \geq 17.66$$

Επιλέγουμε M=18

Άρα 2M+1=37

Παράδειγμα 7

Ένας απλός διαφοριστής μπορεί να περιγραφεί ως εξής :

α) y(n)= x(n)-x(n-1)

β) y(n)= 0.5[x(n)-x(n-2)]

Να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας για 0<ω<π

Πόσο διαφέρει από τον ιδανικό διαφοριστή στη συχνότητα ω=0.2π;

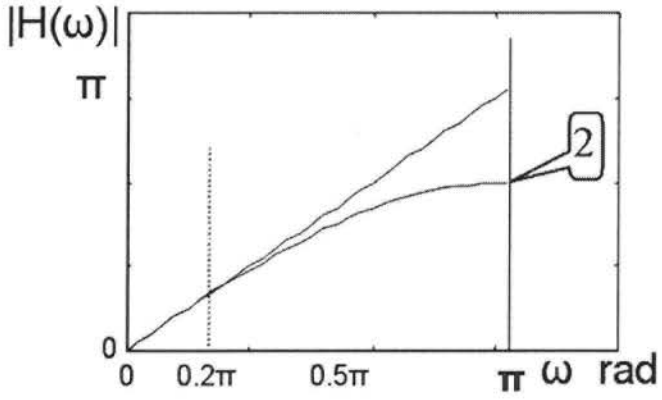
α) Αρχικά βρίσκουμε την απόκριση συχνότητας του διαφοριστή.

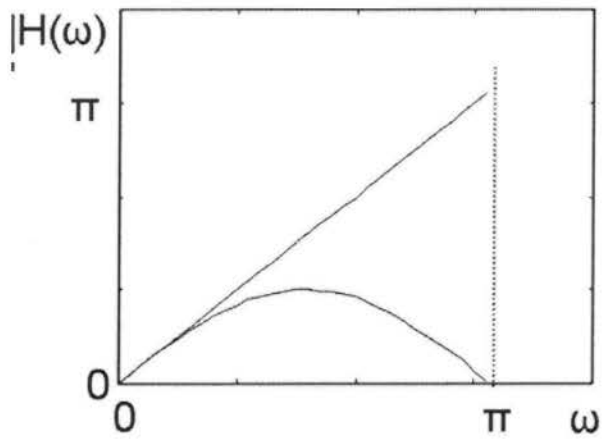
$$y(n) = x(n) - x(n-1) \Rightarrow$$
$$H(z) = 1 - z^{-1}$$

Με το matlab σχεδιάζουμε τη ζητούμενη απόκριση συχνότητας.

Για συχνότητα ω=0.2π η απόκλιση της απόκρισης συχνότητας από τον ιδανικό διαφοριστή που έχει γραμμική μορφή θα δοθεί από τον τύπο

$$\Delta = 0.2 - (1 - e^{-j(0.2\pi)}) = \ldots$$





β) y(n)= 0.5{x(n) –x(n-2)}

Βρίσκουμε την απόκριση συχνότητας του διαφοριστή.

Είναι $H(z) = 0.5 - 0.5z^{-2}$

Σχεδιάζουμε την απόκριση συχνότητας. Η απόκλιση για τη συχνότητα 0.2π θα δοθεί από τον τύπο.

$\Delta = 0.2\pi - (0.5 - 0.5e^{-2i(0.2\pi)}) = \ldots$

Παράδειγμα 8

Ένα φίλτρο FIR $7^{ης}$ τάξεως σχεδιάζεται με την μέθοδο Fourier ώστε να προσεγγίζει την απόκριση ενός υψιπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής ω=π/2 και ενίσχυση 1 στη ζώνη διέλευσης.

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου με τετραγωνικό παράθυρο και με παράθυρο Hamming.

α) Βρίσκουμε τους συντελεστές για το βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής ω=π/2 :

$$h(n) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\omega_1) = \frac{\omega_1}{\pi}\cdot\frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$$

Για την συχνότητα του (βαθυπερατού) ω1=π/2, αφού $\pi - \pi/2 = \pi/2$

Οι συντελεστές του βαθυπερατού είναι:

h(0) = 0.5

h(1) = h(-1) = 0.3183

h(2) = h(-2) = 0

h(3) = h(-3) = 0.106

Πολλαπλασιάζοντας με cos (nπ) βρίσκουμε τους συντελεστές του υψιπερατού

h(0) = 0.5

h(1) = h(-1) = -0.318

h(2) = h(-2) = 0

Άρα το υψιπερατό φίλτρο θα έχει την εξής συνάρτηση μεταφοράς

$H(z) = 0.106 - 0.318\, z^{-2} + 0.5z^{-3} - 0.318z^{-4} + 0.106z^{-4}$

β) Για να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς με παράθυρο Hamming πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές που βρήκαμε με τους συντελεστές Hamming που είναι : 0.0800 0.3100 0.7700 1.0000 0.7700 0.3100 0.0800

Άρα η ζητούμενη συχνότητα αναφοράς είναι η

$H(z) = 0.008 - 0.245\, z^{-2} + 0.5z^{-3} - 0.245z^{-4} + 0.008z^{-4}$

Παράδειγμα 9

Να σχεδιασθεί ένα FIR βαθυπερατό φίλτρο με την μέθοδο των παραθύρων και με τις εξής προδιαγραφές :

Ζώνη διέλευσης 0-10kHz

Ζώνη αποκοπής ≥22kHz

Εξασθένηση στην ζώνη αποκοπής ≥74dB

Συχνότητα δειγματοληψίας 50kHz

α. Βρίσκουμε τη ζώνη μετάβασης Δf=22-10=12kHz

β. Τη συχνότητα αποκοπής : f1=10kHz+12/2kHz=16kHz

γ. Μετατρέπουμε σε ψηφιακές κανονικοποιημένες συχνότητες (rad):

ω1=2π f1/fs=0.64π

Δω=2π 12/50=0.48π

δ. Υπολογίζουμε τους συντελεστές:

$$h(n)=\frac{\sin n\omega_1}{n\pi}=\frac{\sin(n0.64\pi)}{n\pi} \quad -\infty<n<\infty$$

ε. Για την εξασθένηση των 74dB επιλέγουμε παράθυρο Blackman. Άρα ο αριθμός των συντελεστών N είναι :

$$N=11\pi/\Delta\omega=\frac{11\pi}{0.48\pi}=22.9\approx 23$$

Και οι συντελεστές του παραθύρου (Blackman) είναι

w(n)=0.42+0.5cos(2πn/22)+0.08cos(4πn/22) →

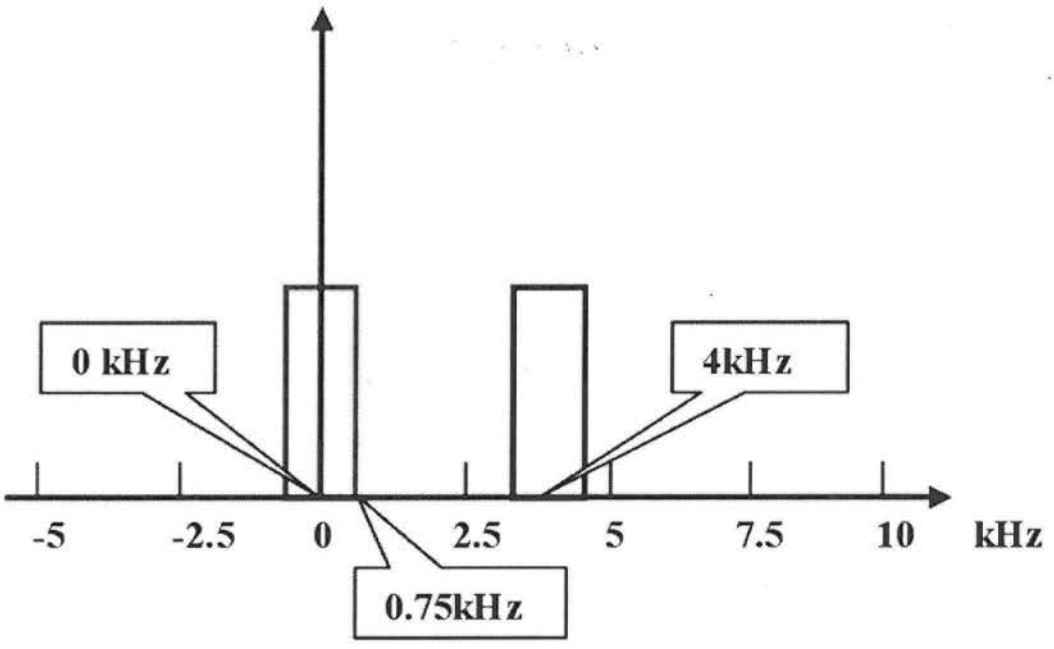
w(n)= {1.0000 0.9670 0.8739 0.7360 .....

h(0)=0.64	w(0)=1	h(0)=0.64
h(1)=h(-1)=0.288	w(1)=w(-1)= 0.9670	h(1)=h(-1)= 0.2785
h(2)=h(-2)=-0.123	w(2)=w(-2)= 0.8739	h(2)=h(-2)= -0.1075
h(3)=h(-3)=-0.026	w(3)=w(-3)= 0.7360	h(3)=h(-3)= -0.0191
h(12) = h(-12)		

Παράδειγμα 10

Να σχεδιασθεί ένα FIR ζωνοδιαβατό φίλτρο για σύστημα με συχνότητα δειγματοληψίας 22kHz και ζώνη διέλευσης 3.5 έως 4.5 kHz.

Οι ζώνες μετάβασης είναι 500Hz και η εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής είναι 50dB.



Μετατρέπουμε τις προδιαγραφές για το αντίστοιχο βαθυπερατό φίλτρο: fl=500+500/2=750 Hz

Ψηφιακή κανονικοποιημένη: ω1= 2πfl/fs=0.06818π καιΔω=2π500/22000

$$h_{LP}(n) = \frac{\sin(0.06818\pi n)}{n\pi}$$

Επιλέγουμε παράθυρο Hamming N=6.6π/Δω =145.2≈147 (και η 145 είναι αποδεκτή τιμή)

Η συνάρτηση παραθύρου είναι: w(n)=0.54+0.46cos(2πn/146)

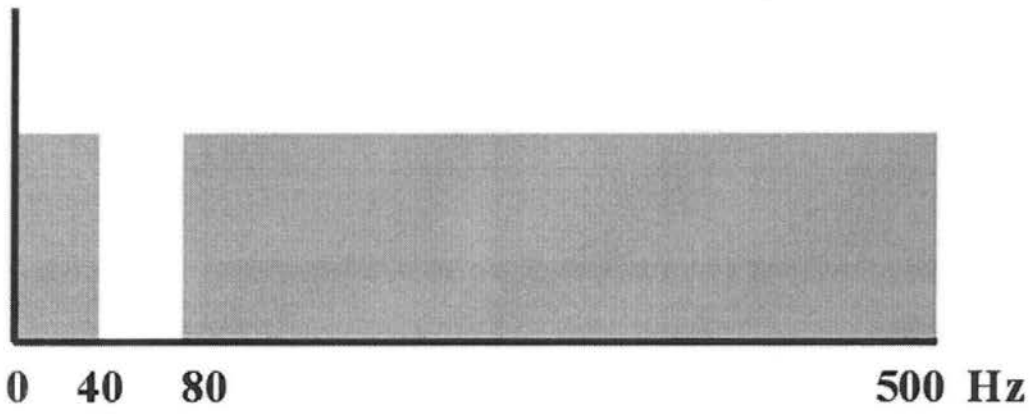
Έχοντας βρει τους συντελεστές της βαθυπερατής συνάρτησης την μετατοπίζουμε στη συχνότητα ωο=2π4000/22000=0.3636π

Άρα οι συντελεστές γίνονται: hBP(n)= hLP(n)w(n)cos(nωο) -73<n<73

Παράδειγμα 11

Να σχεδιασθεί ένα FIR φίλτρο απόρριψης ζώνης (bandstop) που να αποκόπτει συχνότητες μεταξύ 40 και 80 Hz και με συχνότητα δειγματοληψίας 1kHz.

Δίδεται το μήκος του φίλτρου N=151 και το παράθυρο Hamming.



Το φίλτρο αυτό θα προέλθει σαν άθροισμα ενός βαθυπερατού με συχνότητα αποκοπής 40Hz και ενός υψιπερατού με συχνότητα 80 Hz ή αντίστοιχα

ωLP=2π40/1000=π0.08 και ωHP=2π80/1000=π0.16

Επειδή το παράθυρο έχει προεπιλεγεί έχουμε

w(n)=0.54+0.46cos(2πn/150) -75≤n≤75

Για το βαθυπερατό έχουμε :

$$h_{LP}(n)=\frac{\sin(0.08\pi n)}{\pi n} \quad -75\le n\le 75$$

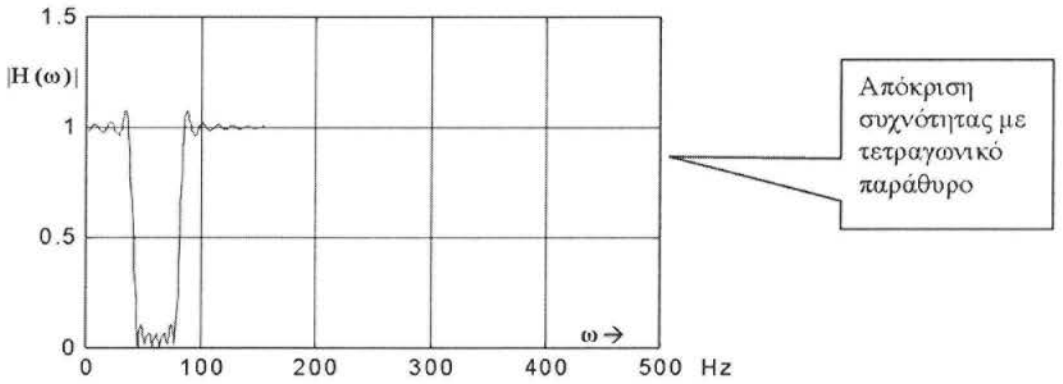
Για το ηψιπερατό σχεδιάζουμε πρώτα το αντίστοιχο βαθυπερατό με

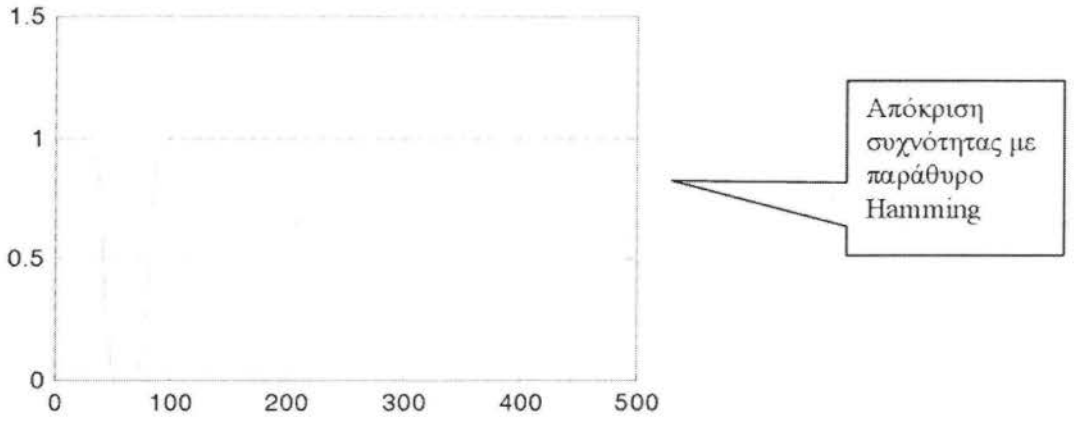
$$\omega_p=\pi-0.16\pi=0.84\pi \rightarrow h_p(n)=\frac{\sin(0.84\pi n)}{\pi n}\rightarrow$$

$$h_{HP}(n)=\frac{\sin(0.84\pi n)}{\pi n} \quad -75\le n\le 75$$

Το ζητούμενο φίλτρο αποκοπής θα έχει συντελεστές το άθροισμα των παραπάνω δύο διαμορφωμένο με τις τιμές του παραθύρου w(n):

$$h_{BR}(n)=\left\{\frac{\sin(0.08\pi n)}{n\pi}+(-1)^n\frac{\sin(0.84\pi n)}{n\pi}\right\}w(n) \quad -75\le n\le 75$$





5.3 Σχεδιασμός FIR φίλτρων με χρήση matlab

Σχεδιασμός ενός απλού συνόλου των συντελεστών του φίλτρου, το οποίο έχει εφαρμοστεί σε ένα σήμα δοκιμής και να απεικόνιση των αποτελεσμάτων.

Δοκιμαστικό Σήμα

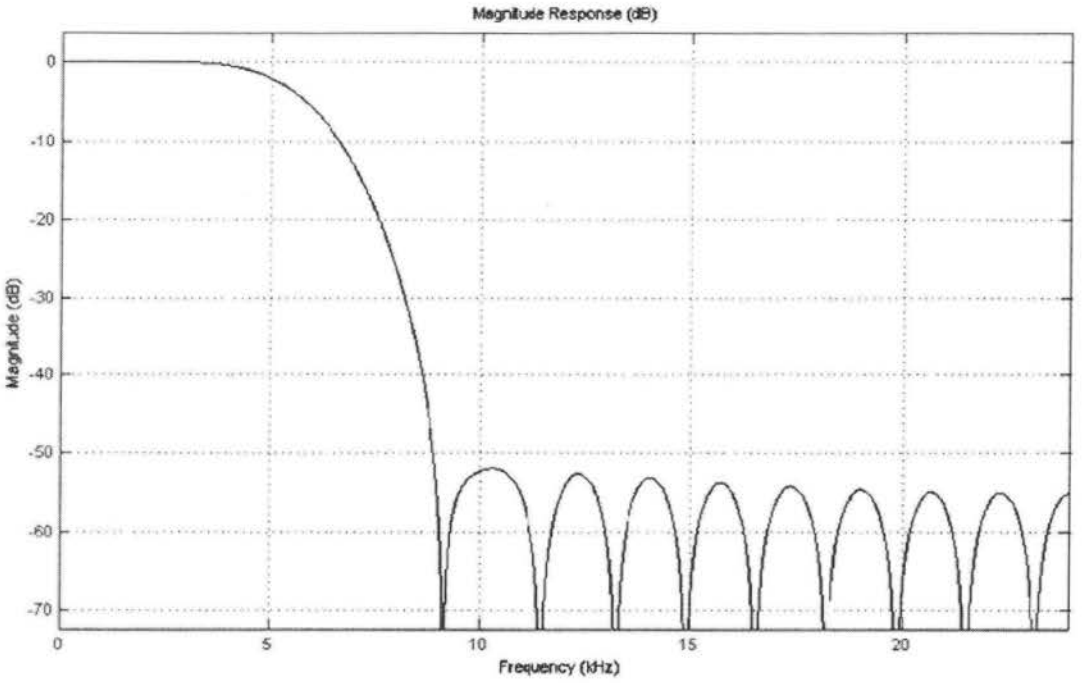
320 δείγματα, στα 48kHz για το άθροισμα των δύο ημιτονοειδών (1000Hz + 15000 Hz)

Κώδικας Matlab

```
sample_rate = 48000;
nsamples = 256;

F = [1 15] * 1000;
A = [1 0.5];

% Time vector - use colon operator to generate integer vector of sample
% numbers
t = (0:nsamples-1) / sample_rate;

% Test signal - use matrix notation to compose it with single expression
signal = A * sin(2*pi*F'*t);
```

FIR filter- Κώδικας Matlab

```
% Choose filter cutoff frequency (6 kHz)
cutoff_hz = 6000;

% Normalize cutoff frequency (wrt Nyquist frequency)
nyq_freq = sample_rate / 2;
cutoff_norm = cutoff_hz / nyq_freq;

% FIR filter order (i.e. number of coefficients - 1)
order = 28;

% Create lowpass FIR filter through a direct approach: provide
% (normalized) cutoff frequency and filter order (assumed as known).
% fir1 takes care of designing the filter by imposing the constraints in
% the frequency domain and transforming back to time using a given window
% (the dafault used here is the Hamming window).
% For more advanced requirements see e.g. firpmord and firpm
% NOTE: fir1, firpmord and firpm all require Signal Processing Toolbox
fir_coeff = fir1(order, cutoff_norm);

% Analyse the filter using the Filter Visualization Tool
fvtool(fir_coeff, 'Fs', sample_rate)

% Filter the signal with the FIR filter
filtered_signal = filter(fir_coeff, 1, signal);
```



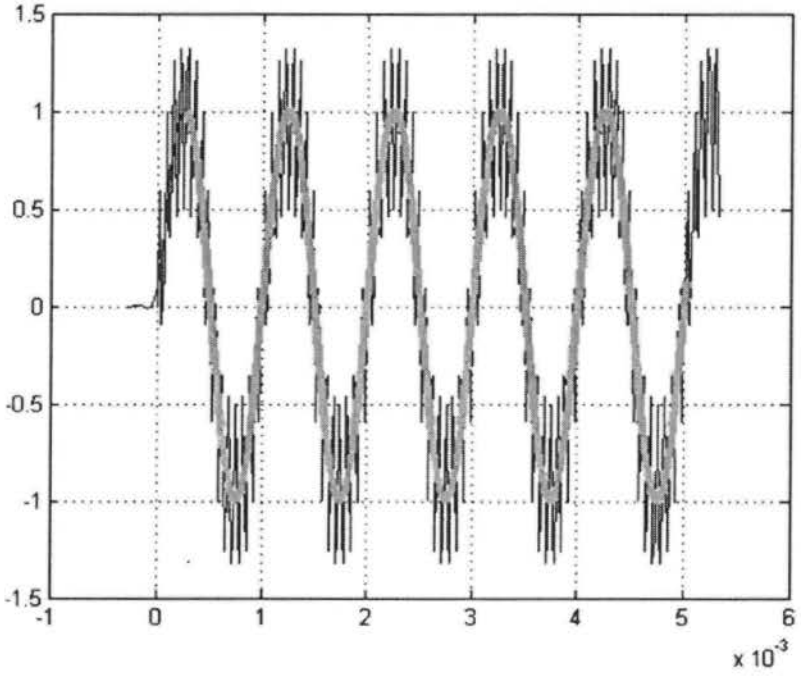
Σχεδιάστε τα σήματα

Επίσης ευθυγραμμίζουμε το φιλτραρισμένο σήμα με την αρχική και απορρίπτουμε τα παροδικά δείγματα (σε αυτή την περίπτωση τα δείγματα πρώτης τάξης)

Κώδικας Matlab

```
% Group delay as a scalar, in number of samples
group_delay = median(grpdelay(fir_coeff));

% Group delay in seconds
group_delay_s = group_delay / sample_rate;


% Plot the original signal...
figure(1)
plot(t, signal)
% ...and allow adding more plots
hold on

% Align and plot the filtered signal
% (On top of existing one)
```

```
plot(t-group_delay_s, filtered_signal, 'r-')

% Align and plot only the d6esired part of the filtered signal (discarding
% the transient)
plot(t(order:end)-group_delay_s, filtered_signal(order:end), ...
  'g', 'LineWidth', 4);

grid on
hold off
```



6.Ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR)

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τα ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης. Στα φίλτρα αυτά, για τον υπολογισμό της εξόδου, χρησιμοποιούμε τιμές της εισόδου, καθώς και τιμές της εξόδου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Επομένως, αναφερόμαστε σε επαναληπτικά φίλτρα. Τα φίλτρα αυτά παρουσιάζουν μικρότερη υπολογιστική πολυπλοκότητα έναντι των αντίστοιχων FIR φίλτρων, αλλά έχουν μη γραμμική απόκριση φάσης. Στόχος μας στο κεφάλαιο αυτό είναι η μελέτη των μεθόδων σχεδίασης των ψηφιακών IIR φίλτρων και των τρόπων υλοποίησής τους.

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Στα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR, Infinite Impulse Response) παίρνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από τη σχέση:

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}} \qquad (6.1)$$

όπου a_i, b_i οι συντελεστές του φίλτρου και τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές bi είναι διάφορος του μηδενός. Ο αριθμός N προσδιορίζει την τάξη του φίλτρου, το οποίο για να είναι αιτιατό προϋποθέτει ότι $N \geq M$. Για να είναι ένα τέτοιο φίλτρο ευσταθές θα πρέπει όλοι οι πόλοι του να βρίσκονται στο εσωτερικού του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο-z. Η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών του φίλτρου είναι:

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M} a_i x(n-i)\sum_{m=0}^{N} b_i y(n-i) \qquad (6.2)$$

όπου $x(n)$ και $y(n)$ οι ακολουθίες εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα.

Είδαμε ότι για την υλοποίηση ενός φίλτρου χρειαζόμαστε πολλαπλασιαστές, αθροιστές και στοιχεία καθυστέρησης, και αναφερθήκαμε στις διαφορετικές δομές πραγματοποίησής του, καθώς και στις δομές πραγματοποίησης φίλτρων υψηλής τάξης ως συνδυασμού δομών πρώτης και δεύτερης τάξης σε σειρά ή παράλληλα.

Από τη σχέση (6.2) γίνεται φανερό ότι τα IIR φίλτρα είναι επαναληπτικά ή αναδρομικά (recursive), με την έννοια ότι δείγματα της εξόδου χρησιμοποιούνται από το σύστημα για τον υπολογισμό των νέων τιμών της εξόδου σε επόμενες χρονικές στιγμές. Το γεγονός αυτό παρουσιάζει μεγάλο πλεονέκτημα από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας, σε σχέση με τα FIR φίλτρα. Με άλλα λόγια, για να επιτύχουμε μια επιθυμητή απόκριση

χρειαζόμαστε σημαντικά λιγότερους συντελεστές για ένα IIR φίλτρο σε σχέση με το αντίστοιχο FIR φίλτρο. Από την άλλη πλευρά όμως, υπάρχουν δύο σοβαρά μειονεκτήματα: (α) τα IIR φίλτρα είναι ασταθή, αν οι συντελεστές bi δεν έχουν επιλεγεί σωστά, δηλαδή αν οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, και (β) τα IIR φίλτρα δεν έχουν γραμμική απόκριση φάσης στη ζώνη διέλευσης, όπως έχουν τα μη επαναληπτικά FIR φίλτρα με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση.

Το κύριο αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η σχεδίαση IIR φίλτρων, ή με άλλα λόγια, ο υπολογισμός των συντελεστών a_i, b_i, όταν μας δίνονται οι προδιαγραφές του φίλτρου. Λέγοντας «προδιαγραφές του φίλτρου», εννοούμε κυρίως την επιθυμητή απόκριση στη συχνότητα. Στο παρόν κεφάλαιο θα γνωρίσουμε δύο μεθόδους: τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης και τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού. Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στη μετατροπή ενός αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό φίλτρο. Μια τέτοια προσέγγιση χρησιμοποιείται ευρέως για πολλούς λόγους καθώς: (α) οι τεχνικές σχεδίασης αναλογικών φίλτρων είναι πολύ ανεπτυγμένες, (β) καταλήγουν συνήθως σε λύσεις κλειστής μορφής, (γ) διατίθενται έτοιμοι πίνακες για τη σχεδίαση αναλογικών φίλτρων, και (δ) σε πολλές εφαρμογές απαιτούνται ψηφιακά φίλτρα τα οποία να προσομοιώνουν γνωστά αναλογικά φίλτρα. Έτσι, αρχίζουμε το σχεδιασμό ενός ψηφιακού φίλτρου από το «αντίστοιχο» αναλογικό και στη συνέχεια κάνουμε την κατάλληλη μετατροπή του σε ψηφιακό. Για την καλύτερη κατανόηση των σχετικών εννοιών, θα κάνουμε μια μικρή αναφορά στα αναλογικά φίλτρα, στην αμέσως επόμενη ενότητα. Στη συνέχεια, θα γνωρίσουμε τις διάφορες μεθόδους σχεδίασης των IIR φίλτρων (Ενότητα 6.2) και θα συζητήσουμε για θέματα σχετικά με την υλοποίησή τους (Ενότητα 6.3).

6. 1 Αναλογικά φίλτρα

Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, τα IIR ψηφιακά φίλτρα μπορούν εύκολα να σχεδιαστούν αρχίζοντας από ένα αναλογικό φίλτρο και κατόπιν χρησιμοποιώντας κατάλληλη απεικόνιση του επιπέδου-s στο επίπεδο-z. Έτσι, η σχεδίαση ενός ψηφιακού φίλτρου ανάγεται ουσιαστικά στη σχεδίαση του κατάλληλου αναλογικού φίλτρου και στην μετέπειτα μετάβαση από το $H(s)$ στο $H(z)$, έτσι ώστε τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του αναλογικού φίλτρου να διατηρούνται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

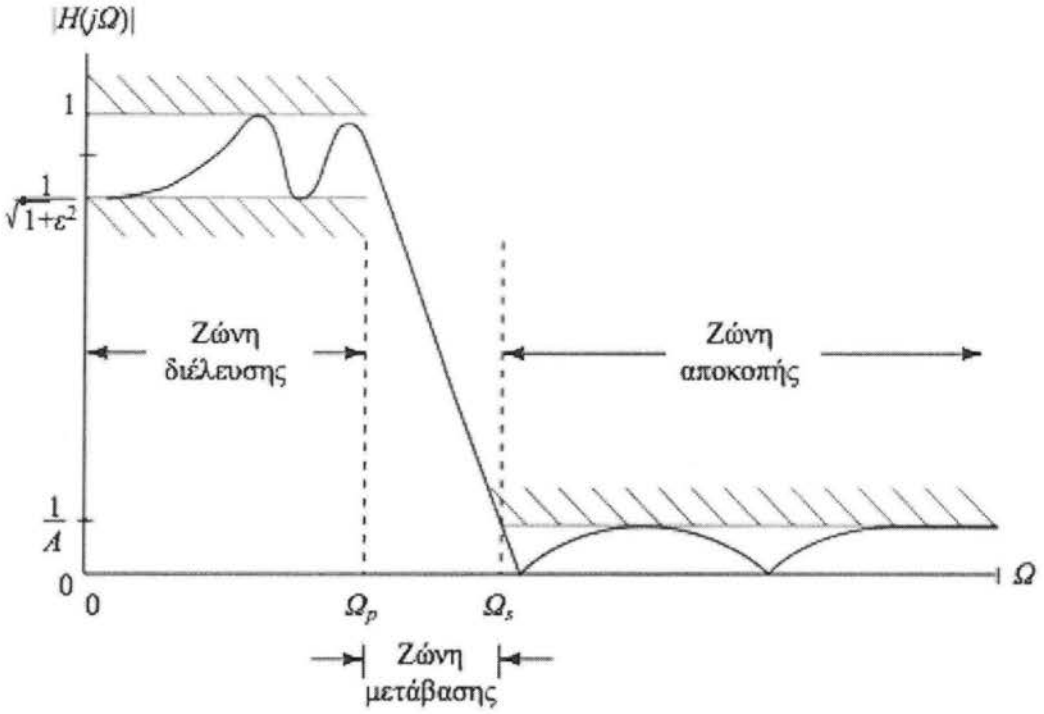
Η σχεδίαση αναλογικών φίλτρων είναι ένας τομέας για τον οποίο υπάρχει πλούσια βιβλιογραφία. Στην παρούσα ενότητα θα περιγράψουμε σε συντομία τα χαρακτηριστικά των πλέον γνωστών βαθυπερατών (lowpass) αναλογικών φίλτρων. Ακολούθως, θα αναφέρουμε τους μετασχηματισμούς συχνότητας με τους οποίους ένα αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο μετατρέπεται σε υψηπερατό (highpass), ζωνοδιαβατό (bandpass) ή φίλτρο απόρριψης ζώνης (bandstop).

Πριν όμως προχωρήσουμε, ας δούμε τη γενική μορφή της απόκρισης συχνότητας ενός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου, ώστε να εξοικειωθούμε με τις έννοιες και τους συμβολισμούς. Η απόκριση συχνότητας ενός αναλογικού φίλτρου (αναλογικού συστήματος) προκύπτει από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ αυτού για τιμές του s πάνω στον άξονα των φανταστικών $j\Omega$, δηλαδή:

$$H(j\Omega) = H(s)\Big|_{s=j\Omega} \qquad (6.3)$$

Το μέτρο της κανονικοποιημένης απόκρισης συχνότητας (normalised magnitude response) ενός μη ιδανικού αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου φαίνεται στο Σχήμα 6.1.

Η απόκριση αυτή ονομάζεται «κανονικοποιημένη», επειδή η μέγιστη τιμή του μέτρου στη ζώνη διέλευσης είναι ίση με τη μονάδα (ή ίση με 0 dB). Η κυμάτωση (ripple) στη ζώνη διέλευσης συμβολίζεται με $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ και αντιπροσωπεύει την ελάχιστη τιμή του μέτρου στη ζώνη διέλευσης. Η μέγιστη τιμή της κυμάτωσης στη ζώνη αποκοπής συμβολίζεται με $1/A$. Η τιμή αυτή σε dB ισούται με $-20\log(1/A)$. Οι συχνότητες Ω_p και Ω_s αποτελούν τις συχνότητες στο όριο της ζώνης διέλευσης (passband edge frequency) και στο όριο της ζώνης αποκοπής (stopband edge frequency), αντίστοιχα. Ο λόγος των δύο αυτών συχνοτήτων ονομάζεται λόγος μετάβασης (transition ratio) ή παράμετρος επιλεκτικότητας (selectivity parameter) και συμβολίζεται συνήθως ως k, δηλαδή $k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$. Για ένα βαθυπερατό φίλτρο ισχύει $k < 1$. Τέλος, ο λόγος $\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}$ ονομάζεται παράμετρος διακριτότητας (discrimination parameter) και συμβολίζεται ως k_1, δηλαδή $k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}$. Συνήθως ισχύει $k_1 << 1$.



Σχήμα 6.1 Κανονικοποιημένη απόκριση συχνότητας βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου

6.1.1. Γνωστά βαθυπερατά αναλογικά φίλτρα

Σε όλες τις περιπτώσεις των φίλτρων που θα αναφέρουμε αμέσως τώρα, ο στόχος μας θα είναι ο εξής: να προσεγγίσουμε κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο την απόκριση ενός ιδανικού φίλτρου το οποίο έχει κέρδος ίσο με 1 σε όλη τη ζώνη διέλευσης, κέρδος ίσο με Ο σε όλη τη ζώνη αποκοπής, και η ζώνη μετάβασης είναι μηδενικού εύρους, δηλαδή δεν υπάρχει ζώνη μετάβασης. Τα πιο γνωστά βαθυπερατά αναλογικά φίλτρα είναι τα ακόλουθα:

Φίλτρα Butterworth. Τα βαθυπερατά φίλτρα Butterworth έχουν μόνο πόλους και το μέτρο της απόκρισης συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1+\left(\Omega/\Omega_c\right)^{2N}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1+\varepsilon^2\left(\Omega/\Omega_p\right)^{2N}\right)^{1/2}} \qquad (6.4)$$

όπου Ν η τάξη του φίλτρου, Ω_c η συχνότητα αποκοπής (cut-off frequency), Ω_p η συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης και $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στο όριο της ζώνης διέλευσης. Παρατηρούμε ότι:

α. Για $\Omega = \Omega_c$ το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ισούται με $\frac{1}{\sqrt{2}}$, δηλαδή $|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ανεξάρτητα από την τιμή του N. Αυτό σημαίνει ότι η ισχύς του σήματος υποδιπλασιάζεται για τη συγκεκριμένη συχνότητα. Η τιμή αυτή εκφρασμένη σε decibels (dB) ισούται με -3, δηλαδή:

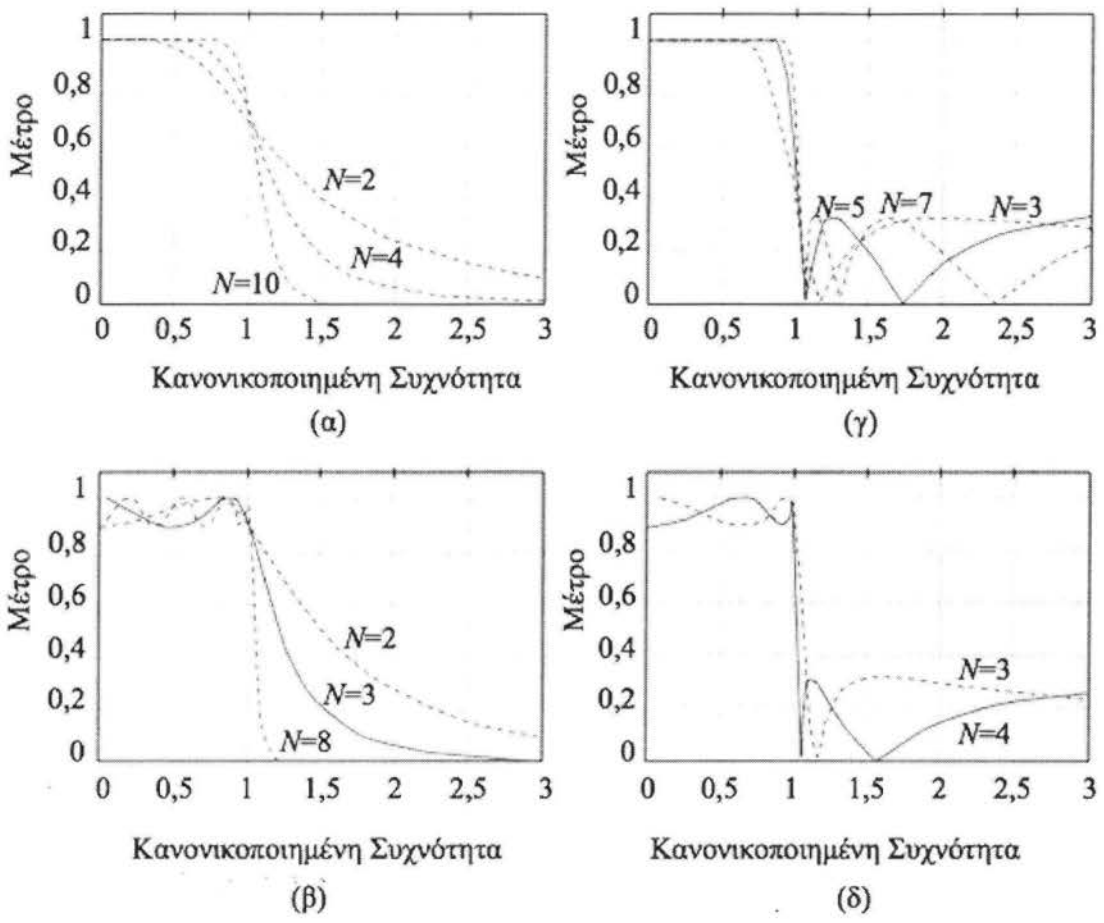
$$|H(j\Omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(j\Omega)| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3.0103 \cong -3dB$$

β. Για Ω =0 το μέτρο της απόκρισης ισούται με 1, δηλαδή με 0 dB, ανεξάρτητα από την τιμή του N.

γ. Επειδή η παράγωγος του μέτρου της απόκρισης είναι πάντοτε αρνητική για θετικές τιμές του Ω, συνεπάγεται ότι η απόκριση συχνότητας μειώνεται μονοτονικά καθώς το Ω αυξάνεται. Με άλλα λόγια $|H(j\Omega_2)| < |H(j\Omega_1)|$ για $0 \le \Omega_1 < \Omega_2$.

Για συχνότητα αποκοπής Ω_c ίση με 1 rad/sec (Ω_c = 1) παίρνουμε από τη σχέση (6.4) το ονομαζόμενο «πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο» (prototype lowpass filter). Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του κανονικοποιημένου Butterworth βαθυπερατού φίλτρου με Ω_c = 1 (πρωτότυπου) για διαφορετικές τιμές του N, φαίνεται στο Σχήμα 6.2α. Παρατηρούμε ότι αύξηση της τάξης Ντου φίλτρου οδηγεί σε βελτίωση των ζωνών διέλευσης και αποκοπής με ταυτόχρονη μείωση της ζώνης μετάβασης.

Οι δύο παράμετροι οι οποίες χαρακτηρίζουν πλήρως ένα φίλτρο Butterworth είναι η συχνότητα αποκοπής Ω_c στα-3 dB και η τάξη του φίλτρου N (βλ. σχέση 6.4). Αυτές οι παράμετροι μπορούν να προσδιοριστούν από τις προδιαγραφές του φίλτρου, όπως αυτές φαίνονται στο Σχήμα 6.1, δηλαδή το όριο της ζώνης διέλευσης Ω_p, την ελάχιστη τιμή του μέτρου στη ζώνη διέλευσης $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$, το όριο της ζώνης αποκοπής Ω_s και τη μέγιστη τιμή του μέτρου στη ζώνη αποκοπής 1/A. Έτσι, από την εξίσωση (6.4) έχουμε:



Σχήμα 6.2 Απόκριση συχνότητας βαθυπερατών ανσλογικών φίλτρων τύπου (α) Butterworth, (β) Chebyshev τύπου I, (γ) Chebyshev τύπου II και (δ) ελλειπτικού.

$$\left|H(j\Omega_p)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\Omega_p/\Omega_c\right)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \qquad (6.5\alpha)$$

$$\left|H(j\Omega_s)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\Omega_s/\Omega_c\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2} \qquad (6.5\beta)$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό των εξισώσεων ως προς την τάξη Ν του φίλτρου καταλήγουμε στη σχέση:

$$N = \frac{1}{2}\frac{\log_{10}\left[(A^2-1)/\varepsilon^2\right]}{\log_{10}(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} \qquad (6.6)$$

Εξυπακούεται ότι η τιμή του Ν πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός. Στην περίπτωση όπου η τιμή που υπολογίζεται από την παραπάνω σχέση δεν είναι ακέραιος, τότε αυτή

στρογγυλεύεται στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο.

Τέλος, όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου, τα φίλτρα Butterworth έχουν μόνο πόλους. Αυτό φαίνεται από τη σχέση (6.4). Οι θέσεις των πόλων πάνω στο μιγαδικό επίπεδο μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

Αφού $H(s)H(-s) = |H(j\Omega)|^2$ για $s = j\Omega$, η εξίσωση (6.4) γράφεται ως:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+(-s^2/\Omega_c^2)^N} \qquad (6.7)$$

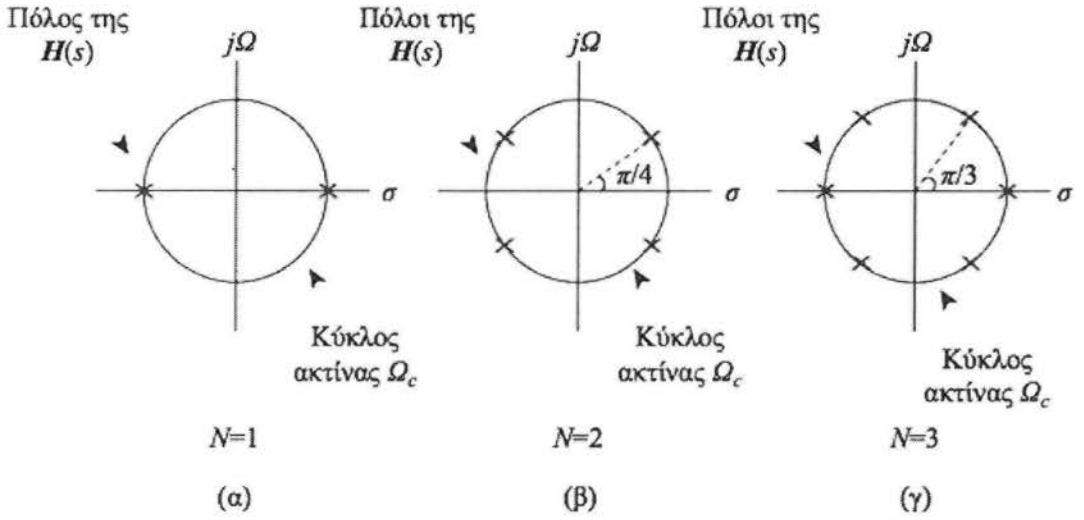
Οι πόλοι της $H(s)H(-s)$ βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας Ω_c και σε σημεία που ισαπέχουν το ένα από το άλλο. Αυτό προκύπτει από την εξίσωση (6.7) με μηδενισμό του παρανομαστή της, δηλαδή:

$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2q+1)\pi/N}, \quad q = 0,1,\ldots N-1 \qquad (6.8)$$

και συνεπώς

$$s_q = \Omega_c e^{j\pi/2} e^{j(2q+1)\pi/2N}, \quad q = 0,1,\ldots N-1 \qquad (6.9)$$

Στο Σχήμα 6.3 δείχνονται οι θέσεις των πόλων διαφόρων φίλτρων Butteiworth τάξης N = 1, N = 2 και N = 3. Οι πόλοι που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο είναι αυτοί που αντιστοιχούν στην $H(s)$, ενώ εκείνοι του δεξιού ημιεπιπέδου αντιστοιχούν στην $H(-s)$. Υπενθυμίζεται ότι για να είναι ένα αναλογικό σύστημα ευσταθές, πρέπει οι πόλοι του να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο.



Σχήμα 6.3 Θέσεις των πόλων βαθυπερατών φίλτρων Butterworth τάξης (α) N=1 (β)N=2 και (γ) N=3.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς των πρωτότυπων (Ω_c=1) βαθυπερατών φίλτρων Butteiworth πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης είναι αντίστοιχα:

$$H(s)=\frac{1}{s+1},\ H(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1} \text{ και } H(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}.$$

Παράδειγμα 6. 1

Υπολογίστε την τάξη ενός βαθυπερατού Butteiworth φίλτρου το οποίο παρουσιάζει εξασθένιση 1 dB στο 1 kHz και 40 dB στα 5 kHz.

Λύση

Από τις προδιαγραφές που μας δίνονται και με βάση τη γενική μορφή της απόκρισης συχνότητας ενός βαθυπερατού φίλτρου (Σχήμα 6.1) έχουμε ότι:

$10\log_{10}\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right)$ οπότε προκύπτει ε^2=0.2589

$F_p = 1kHz$ οπότε $\Omega_p = 2\pi F_p = 2\pi 1000 rad/s$

$10\log_{10}\left(\frac{1}{A^2}\right) = -40dB$ οπότε $A^2 = 10^4$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωση (6.6) βρίσκουμε ότι:

$$N=\frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)}=\frac{\log_{10}\left[(A^2-1)/\varepsilon^2\right]}{2\log_{10}(\Omega_s/\Omega_p)}=\frac{\log_{10}(38621)}{2\log(5)}=3.281$$

Αφού η τάξη του φίλτρου πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, στρογγυλεύουμε το αποτέλεσμα αυτό στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο, N = 4.

Φίλτρα Chebyshev. Υπάρχουν δύο τύποι φίλτρων Chebyshev. Τα φίλτρα τύπου 1 είναι φίλτρα μόνο με πόλους τα οποία παρουσιάζουν ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης και μονοτονική συμπεριφορά στη ζώνη αποκοπής (Σχήμα 6.2β). Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας των βαθυπερατών φίλτρων Chebyshev τύπου 1 δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)|=\frac{1}{\left(1+\varepsilon^2 T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)\right)^{1/2}} \qquad (6.10)$$

όπου ε η παράμετρος του φίλτρου που σχετίζεται με την κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης, Ω_p η συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης και $T_N(x)$ πολυώνυμο Chebyshev τάξης N, το οποίο ορίζεται ως:

$$T_N(x)=\begin{cases}\cos(N\cos^{-1}x), & |x|<1\\ \cosh(N\cosh^{-1}x), & |x|>1\end{cases} \qquad (6.11)$$

Τα φίλτρα Chebyshev τύπου 11 είναι φίλτρα με πόλους και μηδενικά, παρουσιάζουν μονοτονική συμπεριφορά στη ζώνη διέλευσης και ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής (Σχήμα 6.2γ). Τα μηδενικά στην περίπτωση αυτών των φίλτρων βρίσκονται πάνω στο φανταστικό άξονα του επιπέδου-s. Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)|=\frac{1}{\left(1+\varepsilon^2\left[T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)/T_N^2(\Omega_s/\Omega)\right]\right)^{1/2}} \qquad (6.12)$$

όπου $T_N(x)$ είναι και πάλι το πολυώνυμο Chebyshev τάξης N, και Ω_s η συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής.

Ελλειπτικά φίλτρα. Τα ελλειπτικά φίλτρα ή φίλτρα Cauer παρουσιάζουν ομοιόμορφη κυμάτωση τόσο στη ζώνη διέλευσης, όσο και στη ζώνη αποκοπής (Σχήμα 6.2δ). Τα φίλτρα αυτά έχουν πόλους και μηδενικά και το μέτρο της απόκρισης στη συχνότητα δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)|=\frac{1}{\left(1+\varepsilon^2U_N(\Omega/\Omega_p)\right)^{1/2}} \qquad (6.13)$$

όπου UN(x) η Ιακωβιανή (Jacobian) ελλειπτική συνάρτηση τάξης N. Τα μηδενικά βρίσκονται πάνω στον άξονα των φανταστικών του επιπέδου-s.

Τα ελλειπτικά φίλτρα είναι καλύτερα των φίλτρων Butterworth και Chebyshev, ως προς το γεγονός ότι απαιτούνται φίλτρα μικρότερης τάξης, δηλαδή λιγότεροι συντελεστές, για να ικανοποιήσουν τις ίδιες προδιαγραφές. Με άλλα λόγια, για δεδομένη τάξη του φίλτρου και δεδομένες προδιαγραφές, ένα ελλειπτικό φίλτρο θα παρουσιάζει την στενότερη ζώνη μετάβασης. Από την άλλη πλευρά όμως, η απόκριση φάσης των ελλειπτικών φίλτρων παρουσιάζει περισσότερες μη γραμμικότητες στη ζώνη διέλευσης σε σχέση με τα αντίστοιχα φίλτρα Butterworth ή Chebyshev.

6.1.2. Μετασχηματισμοί συχνότητας αναλογικών φίλτρων

Τα φίλτρα που γνωρίσαμε στην προηγούμενη υποενότητα ήταν όλα βαθυπερατά. Αυτά αποτελούν τη βάση για τη σχεδίαση των υπολοίπων κατηγοριών φίλτρων. Για να σχεδιάσουμε ένα υψηπερατό, ζωνοδιαβατό ή απόρριψης ζώνης αναλογικό φίλτρο, βασιζόμαστε στο αντίστοιχο αναλογικό βαθυπερατό (τύπου Butteiworth, Chebyshev ή Ελλειπτικό) και εκτελούμε ένα μετασχηματισμό συχνότητας. Αυτούς ακριβώς τους μετασχηματισμούς συχνότητας θα γνωρίσουμε στην παρούσα υποενότητα.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ

Εάν έχουμε ένα βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, και θέλουμε να το μετατρέψουμε σ' ένα άλλο βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα Ω_p' στο όριο της ζώνης διέλευσης, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \to \frac{\Omega_p}{\Omega_p'} s \text{ (βαθυπερατό σε βαθυπερατό)} \qquad (6.14)$$

Με άλλα λόγια, εάν $H_P(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, τότε η συνάρτηση μεταφοράς $H_{LP}(s)$ του νέου βαθυπερατού φίλτρου θα είναι:

$$H_{LP}(s) = H_P(s)\Big|_{s=\frac{\Omega_p}{\Omega_p'}s} \qquad (6.15)$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΥΨΗΠΕΡΑΤΟ

Για τη μετατροπή ενός βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε υψηπερατό φίλτρο με συχνότητα Ω_p' στο όριο της ζώνης διέλευσης, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \to \frac{\Omega_p \Omega_p'}{s} \text{ (βαθυπερατό σε υψηπερατό)} \qquad (6.16)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς $H_{HP}(s)$ του υψηπερατού φίλτρου προκύπτει από την αντίστοιχη του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου σύμφωνα με τη σχέση:

$$H_{HP}(s) = H_P(s)\Big|_{s=\frac{\Omega_p \Omega_p'}{s}} \qquad (6.17)$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΖΩΝΟΔΙΑΒΑΤΟ

Για τη μετατροπή ενός βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε ζωνοδιαβατό φίλτρο με συχνότητες Ω_l και Ω_u στο κατώτερο και

ανώτερο όριο της ζώνης διέλευσης αντίστοιχα, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \to \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)} \text{ (βαθυπερατό σε ζωνοδιαβατό)} \qquad (6.18)$$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση μεταφοράς $H_{BP}(s)$ του ζωνοδιαβατού φίλτρου προκύπτει από την αντίστοιχη του βαθυπερατού φίλτρου σύμφωνα με τη σχέση:

$$H_{BP}(s) = H_P(s)\Big|_{s=\Omega_p \frac{s^2+\Omega_u\Omega_l}{s(\Omega_u-\Omega_l)}} \qquad (6.19)$$

Από τη σχέση αυτή γίνεται φανερό ότι η τάξη του ζωνοδιαβατού φίλτρου που προκύπτει είναι διπλάσια της τάξης του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΖΩΝΗΣ

Για τη μετατροπή ενός βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε φίλτρο απόρριψης ζώνης με συχνότητες Ω_l και Ω_u στα όρια των ζωνών διέλευσης, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \to \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l} \text{ (βαθυπερατό σε απόρριψης ζώνης)} \qquad (6.20)$$

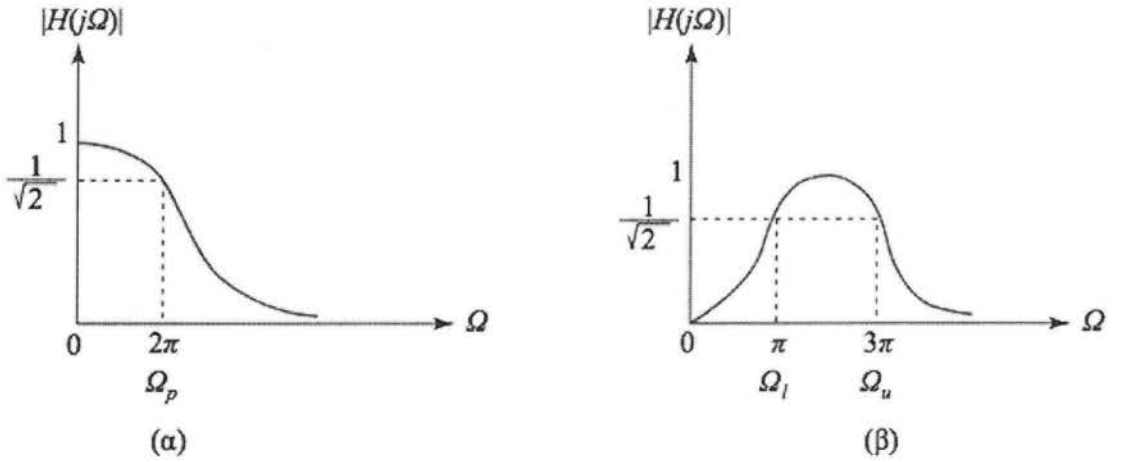
Η συνάρτηση μεταφοράς $H_{BS}(s)$ του φίλτρου απόρριψης ζώνης προκύπτει από την αντίστοιχη του βαθυπερατού φίλτρου με βάση τη σχέση:

$$H_{BS}(s) = H_P(s)\Big|_{s=\Omega_p \frac{s(\Omega_u-\Omega_l)}{s^2+\Omega_u\Omega_l}} \qquad (6.21)$$

Παράδειγμα 6.2

Να μετασχηματιστεί το πρώτης τάξης βαθυπερατό φίλτρο Butterworth με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \Omega_p/(s+\Omega_p)$, όπου $\Omega_p = 2\pi\, rad/s$, σ' ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο με συχνότητες στα όρια της ζώνης διέλευσης $\Omega_l = \pi$ rad/s και $\Omega_u = 3\pi$ rad/s.

Λύση



Σχήμα 6.4 Μέτρο της απόκρισης συχνότητας (α) του αρχικού βαθυπερατού και (β) του ζητούμενου ζωνοδιαβατού ανσλογικού φίλτρου.

Τα μέτρα των αποκρίσεων συχνότητας του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου Butteiworth και του ζητούμενου ζωνοδιαβατού φίλτρου, φαίνονται στο Σχήμα 6.4.

Εφόσον μας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς του βαθυπερατού φίλτρου, ο υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς του ζητούμενου ζωνοδιαβατού φίλτρου γίνεται εύκολα με βάση το μετασχηματισμό συχνότητας της σχέσης (6.18).

$$s = \Omega_p \cdot \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)} = 2\pi \frac{s^2 + 3\pi \cdot \pi}{s(3\pi - \pi)} = \frac{s^2 + 3\pi^2}{s}$$

Άρα αντικαθιστώντας στη σχέση (6.19) βρίσκουμε τη ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοδιαβατού φίλτρου:

$$H_{BP}(s) = H(s)\Big|_{s = \frac{s^2 + 3\pi^2}{s}} = \frac{2\pi}{\left(\frac{s^2 + 3\pi^2}{s}\right) + 2\pi} = \frac{2\pi}{s^2 + 2\pi s + 3\pi^2}$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του φίλτρου που προέκυψε είναι διπλάσια αυτής του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου. Επίσης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι για s =0 έχουμε H(s) =0.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τα αναλογικά φίλτρα, τα οποία είναι κυρίως τεσσάρων τύπων: Butteiworth, Chebyshev 1 & 11 και Ελλειπτικά. Πρόκειται στην ουσία, για τις μαθηματικές εκείνες συναρτήσεις οι οποίες, με διαφορετικό τρόπο η καθεμία, προσεγγίζουν την καμπύλη ενός ιδανικού φίλτρου. Γνωρίσαμε επίσης, τους μετασχηματισμούς στη συχνότητα τους οποίους χρησιμοποιούμε για να μπορέσουμε να πάρουμε ένα επιθυμητό βαθυπερατό, υψηπερατό, ζωνοδιαβατό ή απόρριψης ζώνης αναλογικό φίλτρο, έχοντας ως αναφορά ένα πρωτότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο.

6.2 Σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων

Όπως και στην περίπτωση των FIR φίλτρων, έτσι και εδώ, υπάρχουν πολλές μέθοδοι σχεδίασης IIR φίλτρων. Η πρώτη και πιο απλή από αυτές, μας είναι ήδη γνωστή από το Κεφάλαιο 3, και είναι αυτή της απευθείας τοποθέτησης των πόλων και μηδενικών του φίλτρου πάνω στο μιγαδικό επίπεδο–z, προσδιορίζοντας άμεσα τη συνάρτηση μεταφοράς και κατά συνέπεια, τους συντελεστές του φίλτρου. Η μέθοδος αυτή έχει περισσότερο θεωρητική και εκπαιδευτική σημασία παρά πρακτική αξία. Υπάρχουν και άλλες τεχνικές, κατά τις οποίες η σχεδίαση του φίλτρου γίνεται απευθείας στο πεδίο–z, όπως η μέθοδος των προσεγγίσεων Pade ή η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, τις οποίες όμως δε θα πραγματευτούμε.
Περισσότερο συνηθισμένο είναι να χρησιμοποιούμε τεχνικές οι οποίες μετατρέπουν ένα αναλογικό φίλτρο σε ψηφιακό. Και εδώ υπάρχουν διαφορετικές μέθοδοι μετατροπής ενός αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό. Εμείς θα αναφερθούμε στις δύο πιο γνωστές από αυτές, τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής και τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού.
Τέλος, θα πρέπει να επαναλάβουμε ότι υλοποιήσιμα και ευσταθή IIR φίλτρα δε μπορεί να έχουν γραμμική απόκριση φάσης. Έτσι, οι προδιαγραφές των φίλτρων θα αναφέρονται μόνο στο μέτρο της απόκρισης στη συχνότητα. Αυτό δεν σημαίνει ότι η φάση δεν είναι ουσιώδους σημασίας. Σημαίνει απλώς πως, αφού μέτρο και φάση είναι αλληλένδετα, δεχόμαστε τη φάση όπως αυτή προκύπτει από τη διαδικασία σχεδίασης. Αν κάποια εφαρμογή απαιτεί γραμμική φάση, τότε θα πρέπει να σχεδιάσουμε ένα FIR φίλτρο με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση.

6.2.1 Γραφική μέθοδος

Η μέθοδος αυτή αναφέρεται και ως γεωμετρική ως μέθοδος σχεδίασης βασισμένη στους πόλους και στα μηδενικά. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η σχεδίαση ενός IIR ψηφιακού φίλτρου γίνεται με κατάλληλη τοποθέτηση των πόλων και των μηδενικών πάνω στο μοναδιαίο κύκλο στο επίπεδο–z. Η τοποθέτηση ενός πόλου κοντά στο μοναδιαίο κύκλο οδηγεί σε μεγάλες τιμές για τη συνάρτηση μεταφοράς σε συχνότητες που βρίσκονται κοντά στον πόλο. Αντίστοιχα, η ύπαρξη ενός μηδενικού κοντά ή και πάνω στον

μοναδιαίο κύκλο οδηγεί σε πολύ μικρές τιμές ή και μηδενισμό της συνάρτησης μεταφοράς και κατ' επέκταση της εξόδου του φίλτρου (συστήματος). Θυμηθείτε ότι, για να είναι ευσταθές το φίλτρο που θα σχεδιαστεί, θα πρέπει οι πόλοι του να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Τα μηδενικά μπορεί να βρίσκονται οπουδήποτε στο επίπεδο–z. Τέλος, οι πόλοι και τα μηδενικά μπορεί να είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί. Στην περίπτωση όμως που κάποιοι από τους πόλους ή τα μηδενικά είναι μιγαδικοί, τότε αυτοί θα πρέπει να εμφανίζονται ως ζεύγη συζυγών.

6.2.2 Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής

Σκοπός μας σύμφωνα με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής(impulse invariance method) είναι να σχεδιάσουμε ένα IIR φίλτρο του οποίου η μοναδιαία κρουστική απόκριση $h(n)$ να ισοδυναμεί με τη δειγματοληπτημένη κρουστική απόκριση ενός κατάλληλα επιλεγμένου αναλογικού φίλτρου, δηλαδή:

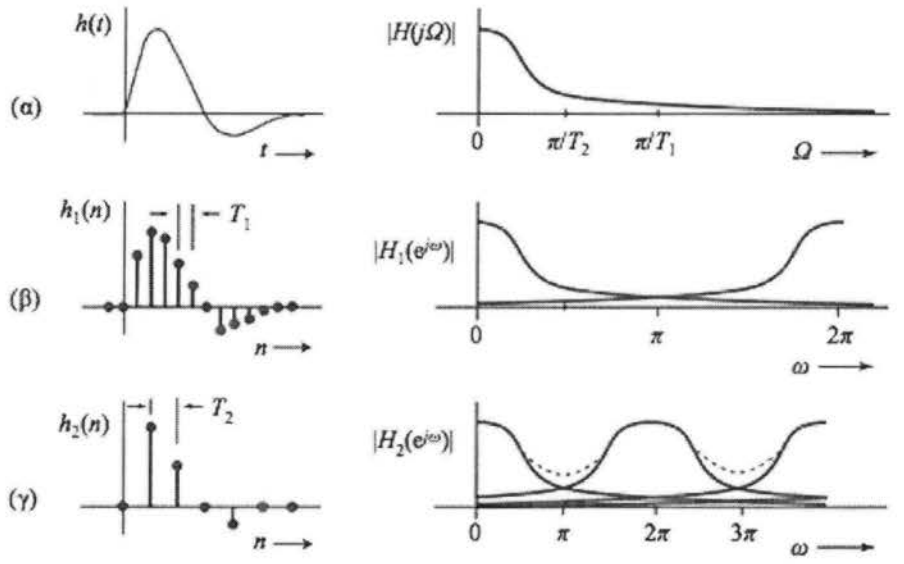
$$h(n) = h(nT) = h(t)\Big|_{t=nT} \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{6.22}$$

όπου Τ η περίοδος δειγματοληψίας (βλ. Σχήμα 6.5α, β).

Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ισούται με τον μετασχηματισμό–z της δειγματοληπτημένης μοναδιαίας κρουστικής απόκρισης $h(nT)$, δηλαδή:

$$H(z) = Z\{h(nT)\} \tag{6.23}$$

Η αναλογική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ισούται με τον μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$.



Σχήμα 6.5 (α) Κρουστική απόκριση και μέτρο φάσματος αναλογικού φίλτρου, (β) και (γ) δειγματοληψία της κρουστικής του αναλογικού με περίοδο T1<T2

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να εξετάσουμε το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας της αναλογικής κρουστικής απόκρισης, δηλαδή το αποτέλεσμα της σχέσης (6.22). Ας θυμηθούμε ότι, όταν λαμβάνουμε από ένα αναλογικό σήμα δείγματα με ρυθμό $F_s = 1/T$ δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο, το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος που προκύπτει είναι μια περιοδική επανάληψη του αναλογικού φάσματος, με περίοδο F_s. Συνεπώς, αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι μικρότερος από το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας που υπάρχει στο αναλογικό φάσμα, τότε θα παρουσιαστεί το φαινόμενο του ανεπαρκούς ρυθμού δειγματοληψίας (aliasing), όπως αυτό δείχνεται στο Σχήμα 6.5γ. Γίνεται φανερό ότι η περίοδος δειγματοληψίας Τ θα πρέπει να είναι αρκετά μικρή, για να αποφύγουμε ή τουλάχιστον να ελαχιστοποιήσουμε το φαινόμενο αυτό. Επίσης, καταλαβαίνουμε ότι η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής δεν είναι κατάλληλη για τη σχεδίαση υψηπερατών φίλτρων, εξαιτίας του φαινομένου aliasing που παρουσιάζεται στο φάσμα λόγω της δειγματοληψίας. Για τους λόγους αυτούς, η μέθοδος χρησιμοποιείται κυρίως για την σχεδίαση βαθυπερατών και ζωνοδιαβατών ψηφιακών φίλτρων.

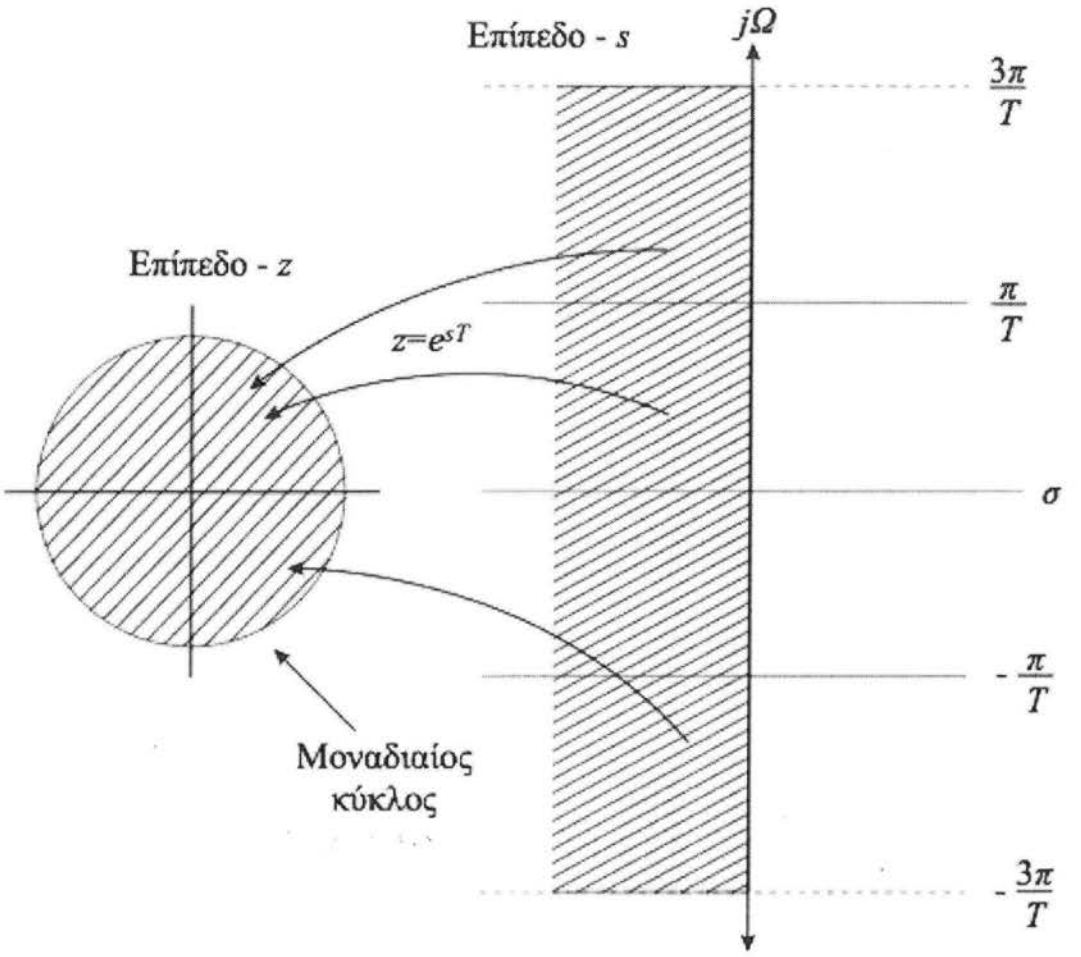
Η απεικόνιση των σημείων από το επίπεδο–s στο επίπεδο–z με την αμετάβλητη κρουστική απόκριση γίνεται μέσω της σχέσης:

$$z = e^{sT} \tag{6.24}$$

Για $s = \sigma + j\Omega$ και $z = re^{j\omega}$ βρίσκουμε ότι: $r = e^{\sigma T}$

$$\omega = \Omega T \tag{6.25}$$

Επομένως, για $\sigma < 0$ έχουμε $0 < r < 1$, ενώ για $\sigma > 1$ έχουμε $r > 1$. Όταν $\sigma = 0$, τότε $r = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο z, ενώ το δεξί ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο z. Επίσης, ο άξονας $j\Omega$ απεικονίζεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου–z. Η απεικόνιση αυτή όμως δεν είναι απεικόνιση ένα προς ένα. Αφού το ω είναι μοναδικό στην περιοχή $(-\pi, \pi)$, η απεικόνιση $\omega = \Omega T$ συνεπάγεται ότι η περιοχή των συχνοτήτων $-\pi/T \le \Omega \le \pi/T$ απεικονίζεται στις αντίστοιχες τιμές $-\pi \le \omega \le \pi$. Επιπλέον, όμως, και η περιοχή συχνοτήτων $\pi/T \le \Omega \le 3\pi/T$ απεικονίζεται επίσης στην ίδια περιοχή $-\pi \le \omega \le \pi$, και γενικά το ίδιο συμβαίνει για τις συχνότητες $(2k-1)\pi/T \le \Omega \le (2k+1)\pi/T$, όπου k ακέραιος. Άρα, η απεικόνιση της αναλογικής συχνότητας Ω στη συχνότητα ω του ψηφιακού χώρου είναι μία πολλά - σε- ένα απεικόνιση, γεγονός που αντικατοπτρίζει το φαινόμενο του ανεπαρκούς ρυθμού δειγματοληψίας. Η όλη απεικόνιση του επιπέδου– s στο επίπεδο– z φαίνεται στο Σχήμα 6.6.



Σχήμα 6.6 Η απεικόνιση του επιπέδου– s στο επίπεδο– z σύμφωνα με τη σχέση $z = e^{sT}$. Λωρίδες εύρους $2\pi / T$ (για σ<0) του επιπέδου– s απεικονίζονται σε σημεία του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου– z.

Παράδειγμα 6.3

Αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$.

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού IIR φίλτρου το οποίο προκύπτει με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης.

Λύση

α. Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του αναλογικού φίλτρου από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $H(s)$, δηλαδή:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

β. Λαμβάνουμε δείγματα από την $h(t)$ αντικαθιστώντας το t με το nT. Τα δείγματα που προκύπτουν αντιστοιχούν στα στοιχεία της ακολουθίας $h(n)$, σύμφωνα με τη σχέση (6.22):

$$h(n) = h(t)\Big|_{t=nT} = e^{-nT} - e^{-2nT}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

γ. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από τον μετασχηματισμό–z της $h(nT)$, όπως υπαγορεύεται από τη σχέση (6.23):

$$H(z) = Z\{h(nT)\} = \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}} = \frac{(e^{-T}-e^{-2T})z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})(1-e^{-2T}z^{-1})}, \quad |z| > e^{-T}$$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να γενικεύσουμε τη διαδικασία σχεδίασης και ταυτόχρονα να αποδείξουμε ότι η $H(z)$ μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από την $H(s)$, χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε την $h(t)$ και την $h(nT)$. Ας θεωρήσουμε ένα αναλογικό φίλτρο το οποίο έχει Ν διαφορετικούς πόλους. Η συνάρτηση μεταφοράς του μπορεί να γραφεί ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων με τη μορφή:

$$H(s) = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{C_\xi}{s - p_\xi} \qquad (6.26)$$

όπου p_ξ οι πόλοι του αναλογικού φίλτρου και C_ξ οι συντελεστές του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα.

Η αντίστοιχη κρουστική απόκριση θα είναι:

$$h(t) = \sum_{\xi=1}^{N} C_\xi e^{p_\xi t} \qquad (6.27)$$

Αν από αυτή την κρουστική απόκριση λάβουμε δείγματα ανά Τ δευτερόλεπτα (t= nT), τότε θα πάρουμε την δειγματοληπτημένη απόκριση:

$$h(nT) = \sum_{\xi=1}^{N} C_\xi e^{p_\xi nT} \qquad (6.28)$$

Τέλος, ο μετασχηματισμός– z της σχέσης (6.28) θα μας δώσει την επιθυμητή συνάρτηση μεταφοράς διακριτού χρόνου:

$$H(z) = Z\{h(nT)\} = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{C_\xi}{1 - e^{p_\xi T} z^{-1}} \qquad (6.29)$$

Παρατηρώντας τη διαδικασία που περιγράφεται από τις σχέσεις (6.26) έως (6.29), διαπιστώνουμε ότι τα δύο ενδιάμεσα στάδια υπολογισμού της $h(t)$ και της $h(nT)$ θα μπορούσαν να παραλειφθούν και να υπολογίσουμε απευθείας την H(z) (σχέση 6.29) από την $H(s)$ (σχέση 6.26) αντικαθιστώντας το $s - p_\xi$ με το , $1 - e^{p_\xi T} z^{-1}$ δηλαδή:

$$H(s) = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{C_\xi}{s - p_\xi} \longrightarrow H(z) = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{C_\xi}{1 - e^{p_\xi T} z^{-1}} \qquad (6.30)$$

Η σχέση (6.30) αναφέρεται στην περίπτωση ενός φίλτρου του οποίου οι πόλοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή έχει πόλους πολλαπλότητας 1.

Παράδειγμα 6.4

Από το αναλογικό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=(s+0.1)/[(s+0.1)^2+9]$ να προσδιοριστεί αντίστοιχο IIR ψηφιακό φίλτρο με χρήση της μεθόδου της αμετάβλητης κρουστικής.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το αναλογικό φίλτρο έχει ένα μηδενικό στο σημείο $s=-0.1$ και ένα ζεύγος συζυγών πόλων $p_\xi=-0.1\pm j3$. Εκφράζουμε την $H(s)$ ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων:

$$H(s)=\frac{0.5}{s+0.1-j3}+\frac{0.5}{s+0.1+j3}$$

και υπολογίζουμε την $H(z)$ με βάση τη σχέση (6.30):

$$H(z)=\frac{0.5}{1-e^{(-0.1+j3)T}z^{-1}}+\frac{0.5}{1-e^{(-0.1-j3)T}z^{-1}}=\frac{1-(e^{-0.1T}\cos 3T)z^{-1}}{1-(2e^{-0.1T}\cos 3T)z^{-1}+e^{-0.2T}z^{-1}}$$

6.2.3 Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού

Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης για τη σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων είναι κατάλληλη για βαθυπερατά και ορισμένα ζωνοδιαβατά φίλτρα. Θα ασχοληθούμε τώρα με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού (bilinear transformation method), η οποία τουλάχιστον δεν θέτει τέτοιους περιορισμούς. Πρόκειται για έναν μαθηματικό μετασχηματισμό του πεδίου– s στο πεδίο– z. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό αυτό, όταν μας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του αναλογικού φίλτρου, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του αντίστοιχου ψηφιακού φίλτρου, αντικαθιστώντας το s με το $(z-1)/(z+1)$, δηλαδή:

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} \qquad (6.31)$$

Με άλλα λόγια, η απεικόνιση από το επίπεδο s στο επίπεδο z γίνεται με βάση τη σχέση[3]

$$s=\frac{z-1}{z+1} \qquad (6.32)$$

Για να διερευνήσουμε τα χαρακτηριστικά του διγραμμικού μετασχηματισμού, ας θεωρήσουμε ότι $z=re^{j\omega}$ και $s=\sigma+j\Omega$. Τότε, η σχέση (6.32) μπορεί να εκφραστεί ως:

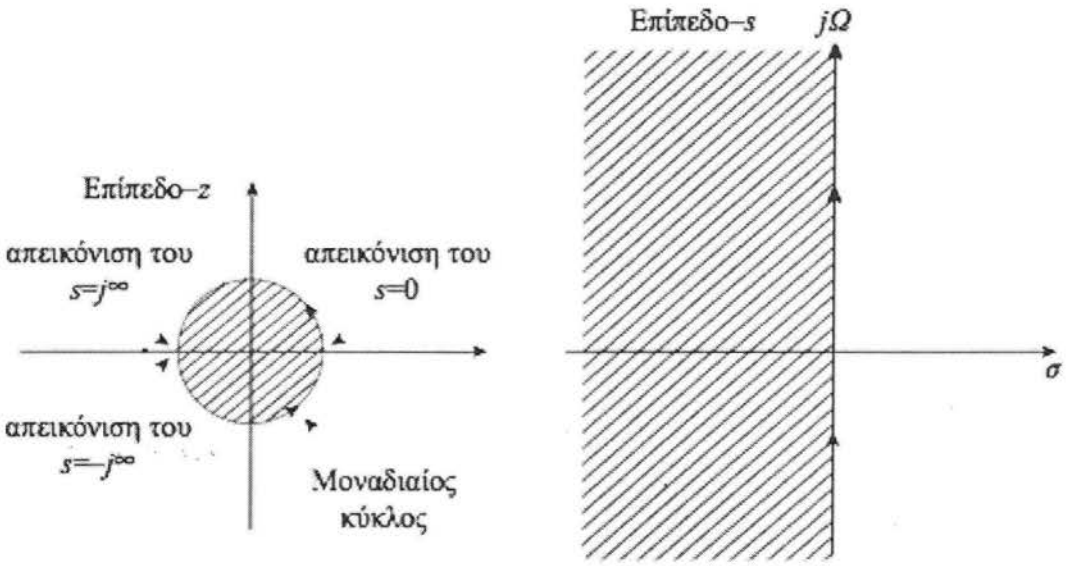
---

[3] *Η σχέση s=(z -1)/(z+1) μπορεί να γραφεί και ως sz+s -z+1=0. Παρατηρούμε ότι η τελευταία σχέση είναι γραμμική ως προς s και γραμμική ως προς z ή διγραμμική ως προς s και z.*

$$s = \frac{re^{j\omega} - 1}{re^{j\omega} + 1} = \frac{r^2 - 1}{\underbrace{1 + r^2 + 2r\cos\omega}_{\Omega}} + j\frac{2r\sin\omega}{\underbrace{1 + r^2 + 2r\cos\omega}_{\Omega}} \qquad (6.33)$$

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι, εάν r<1, τότε σ<0 και εάν r>1, τότε σ>0. Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο– z, ενώ το δεξί ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου (βλ. Σχήμα 6.7). Άρα, από ένα ευσταθές αναλογικό φίλτρο παίρνουμε ένα ευσταθές ψηφιακό φίλτρο. Όταν r=1, τότε σ=0 και:

$$\Omega = \tan\frac{\omega}{2} \qquad (6.34)$$



Σχήμα 6.7 Απεικόνιση του επιπέδου– s στο επίπεδο– z μέσω του διγραμμικού μετασχηματισμού

6.3 Υλοποίηση IIR ψηφιακών φίλτρων

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε τις τεχνικές σχεδίασης των IIR ψηφιακών φίλτρων και μάθαμε να προσδιορίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς και την εξίσωση διαφορών LTI συστημάτων διακριτού χρόνου. Το τελευταίο στάδιο είναι η υλοποίηση των φίλτρων αυτών, ώστε να επιτελέσουν το σκοπό για τον οποίο αυτά σχεδιάστηκαν. Η υλοποίηση των IIR φίλτρων, όπως και αυτή των FIR φίλτρων, μπορεί να γίνει είτε σε κυκλωματική μορφή (hardware), είτε με προγραμματισμό (software) ενός υπολογιστικού συστήματος γενικού ή ειδικού σκοπού.

Γενικά, η εξίσωση διαφορών ενός φίλτρου είναι μια υπολογιστική διαδικασία (ένας

αλγόριθμος) για τον υπολογισμό της ακολουθίας εξόδου y(n) του συστήματος, από την ακολουθία εισόδου x(n). Όμως,οι υπολογισμοί αυτοί μπορούν να γίνουν με ένα διαφορετικό, αλλά ισοδύναμο, σύνολο εξισώσεων διαφορών. Κάθε ένα τέτοιο σύνολο εξισώσεων ορίζει μια υπολογιστική διαδικασία ή έναν αλγόριθμο για την υλοποίηση του συστήματος. Για κάθε ένα σύνολο εξισώσεων μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα βαθμίδων το οποίο να αποτελείται από στοιχεία καθυστέρησης, πολλαπλασιαστές και αθροιστές. Αυτό το διάγραμμα βαθμίδων το χαρακτηρίσαμε ως δομή πραγματοποίησης (realisation structure) του συστήματος. Στην περίπτωση κατά την οποία το σύστημα (φίλτρο) υλοποιηθεί προγραμματιστικά (software), το διάγραμμα βαθμίδων ή ισοδύναμα το σύνολο των εξισώσεων διαφορών, μετατρέπεται σε ένα σύνολο εντολών (πρόγραμμα) το οποίο «τρέχει» στο συγκεκριμένο υπολογιστικό σύστημα.
Το ερώτημα, βέβαια, που μπορεί να γεννηθεί στον αναγνώστη είναι το γιατί θα πρέπει να έχουμε διαφορετικές δομές πραγματοποίησης ενός φίλτρου, για παράδειγμα, άμεση μορφή τύπου 1 ή 2 , σε σειρά ή παράλληλη , από τη στιγμή που έχουμε σχεδιάσει το φίλτρο, γνωρίζουμε τους συντελεστές του και κατά συνέπεια μπορούμε να υλοποιήσουμε την εξίσωση διαφορών που έχει προκύψει ως έχει.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι ότι οι διάφορες δομές πραγματοποίησης παρουσιάζουν διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την απαιτούμενη υπολογιστική πολυπλοκότητα (computational complexity), τη μνήμη (memory) και τα προβλήματα λόγω του πεπερασμένου μήκους λέξης (finite wordlength effects).
Όταν λέμε υπολογιστική πολυπλοκότητα εννοούμε το πλήθος των αριθμητικών πράξεων (πολλαπλασιασμών, διαιρέσεων και προσθέσεων) οι οποίες απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου y(n). Πριν από λίγα χρόνια, αυτές οι τρεις πράξεις ήταν οι μοναδικές που χρησιμοποιούσαμε για να μετρήσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Στις μέρες μας όμως, με την εντυπωσιακή πρόοδο που έχει συντελεστεί στο σχεδιασμό και την κατασκευή πολύπλοκων και αποτελεσματικών προγραμματιζόμενων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (digital signal processors, DSPs), άλλοι παράγοντες παίζουν επίσης ρόλο στον προσδιορισμό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, όπως για παράδειγμα, το πλήθος των προσπελάσεων της μνήμης ή το πλήθος των συγκρίσεων δύο αριθμών.
Όταν λέμε μνήμη εννοούμε το πλήθος των θέσεων μνήμης που απαιτούνται για την αποθήκευση των δειγμάτων εισόδου και εξόδου, των παραμέτρων του συστήματος, καθώς και των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων που τυχόν προκύπτουν.

Τέλος, τα προβλήματα λόγω του πεπερασμένου μήκους λέξης, ή αλλιώς λόγω της πεπερασμένης ακριβείας, αναφέρονται στα φαινόμενα κβάντισης τα οποία ενυπάρχουν σε οποιαδήποτε ψηφιακή υλοποίηση ενός συστήματος είτε κυκλωματική, είτε προγραμματιστική. Οι παράμετροι του συστήματος πρέπει απαραίτητα να

αναπαρασταθούν με πεπερασμένη ακρίβεια. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν στη διαδικασία υπολογισμού κάθε δείγματος εξόδου του συστήματος, πρέπει να στρογγυλευθούν (rounded) ή να αποκοπούν (truncated) στο κατάλληλο μήκος λέξης (κατάλληλη ακρίβεια) που επιβάλλει ο υπολογιστής ή το κύκλωμα που χρησιμοποιούμε για την υλοποίηση. Όλα αυτά είναι προβλήματα τα οποία επηρεάζουν σημαντικά την τελική μας απόφαση σχετικά με το ποια δομή πραγματοποίησης θα πρέπει να επιλέξουμε. Αποδεικνύεται ότι οι διαφορετικές δομές πραγματοποίησης ενός συστήματος, ενώ είναι ισοδύναμες στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε άπειρη ακρίβεια, παρουσιάζουν πολύ διαφορετική συμπεριφορά μεταξύ τους για πεπερασμένη ακρίβεια.

6.3.1 Πεπερασμένη ακρίβεια και υλοποίηση IIR ψηφιακών φίλτρων

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η πεπερασμένη ακρίβεια κατά την υλοποίηση ενός φίλτρου εισάγει σφάλματα τα οποία υποβαθμίζουν την απόδοση του φίλτρου ή και οδηγούν σε αστάθεια του όλου συστήματος. Για να γίνει κατανοητό αυτό, ας δούμε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.8

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού IIR φίλτρου δεύτερης τάξης είναι:

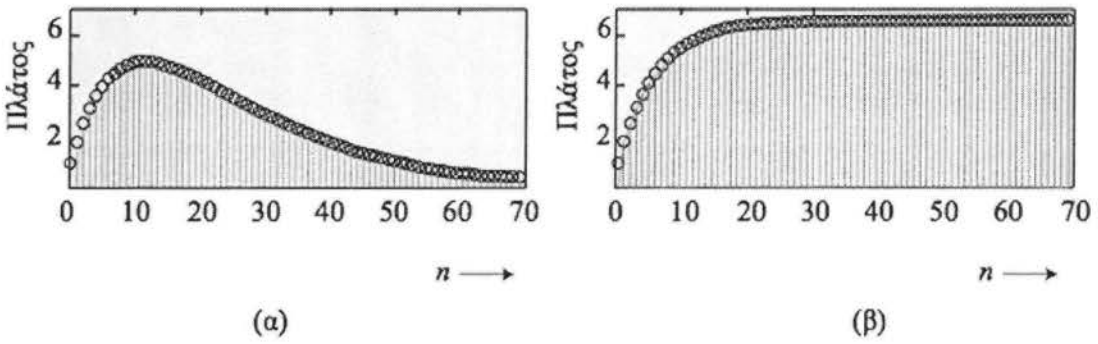
$$H(z) = 1/(1 - 1.845z^{-1} + 0.85086z^{-2})$$

Να εξεταστεί η ευστάθεια του φίλτρου. Να επαναληφθεί η διαδικασία στην περίπτωση που οι συντελεστές αναπαριστάνονται με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

Λύση

Η παραγοντοποίηση του παρανομαστή οδηγεί στην ισοδύναμη μορφή για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = 1/(1 - 0.902z^{-1})(1 - 0.943z^{-1})$. Το σύστημα έχει δύο πραγματικούς πόλους στα σημεία z = 0,902 και z = 0,943. Αφού το μέτρο κάθε πόλου είναι μικρότερο της μονάδας, δηλαδή οι πόλοι βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο-z, το σύστημα είναι ευσταθές. Παρατηρήστε ότι η κρουστική απόκριση h(n) του συστήματος είναι φθίνουσα (Σχήμα 5.11α), όπως ακριβώς απαιτείται για ένα ευσταθές σύστημα. Ας στρογγυλεύσουμε τώρα τους συντελεστές της H(z) στα δύο δεκαδικά ψηφία. Αυτή γίνεται $H(z) = 1/(1 - 1.85z^{-1} + 0.85z^{-2})$ ή μετά την παραγοντοποίηση $H(z) = 1/(1 - z^{-1})(1 - 0,85z^{-1})$. Παρατηρούμε ότι η νέα συνάρτηση έχει πόλους στα σημεία z = 1 και z = 0,85. Ο ένας πόλος βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο με συνέπεια το σύστημα να μην είναι πλέον ευσταθές! Πράγματι, σχεδιάζοντας και πάλι την κρουστική απόκριση h(n) του νέου συστήματος (Σχήμα 6.11β), παρατηρούμε ότι αυτή πολύ σύντομα αυξάνεται μέχρι να φτάσει σε μια σταθερή τιμή, στην οποία και παραμένει. Κατά συνέπεια, η κρουστική απόκριση δεν είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή και το σύστημα δεν είναι

ευσταθές.



Σχήμα 6.11 Κρουστική απόκριση του συστήματος του Παραδείγματος 5.8 για την ακρίβεια των συντελεστών (α) άπειρη και (β) δύο δεκαδικών ψηφίων.

Από το παράδειγμα αυτό έγινε φανερό ότι τα σφάλματα λόγω της κβάντισης των συντελεστών του φίλτρου, μπορούν να επηρεάσουν δραστικά τη συμπεριφορά του. Αποδεικνύεται ότι η ευαισθησία της απόκρισης συχνότητας ενός φίλτρου, στην κβάντιση των συντελεστών του φίλτρου, μπορεί να ελαχιστοποιηθεί αν πραγματοποιήσουμε το υψηλής τάξης φίλτρο, (δηλαδή το φίλτρο με πολλούς πόλους και μηδενικά), ως συνδυασμό δομών δεύτερης τάξης σε σειρά ή παράλληλα .

Γενικά, τα σφάλματα στα IIR είναι τριών ειδών:

1. Σφάλματα λόγω κβάντισης των συντελεστών του φίλτρου.

2. Σφάλματα λόγω υπερχείλισης (overflow), τα οποία προέρχονται από τις προσθέσεις των μερικών αποτελεσμάτων σε καταχωρητές περιορισμένου μήκους.

3. Σφάλματα λόγω στρογγύλευσης των γινομένων, τα οποία προέρχονται από την στρογγύλευση ή αποκοπή των ενδιάμεσων αριθμητικών πράξεων στο διαθέσιμο μήκος λέξης.

Ειδικά για τα επαναληπτικά φίλτρα που μελετάμε, οι μη γραμμικότητες οι οποίες οφείλονται στις πράξεις με πεπερασμένη ακρίβεια, προκαλούν συνήθως κάποιες περιοδικές ταλαντώσεις στην έξοδο, ακόμη και όταν η είσοδος είναι μηδέν ή έχει μια σταθερή τιμή. Αυτές οι ταλαντώσεις ονομάζονται οριακοί κύκλοι (limit cycles) και οφείλονται στα σφάλματα στρογγύλευσης των γινομένων και στα σφάλματα υπερχείλισης κατά την πρόσθεση.

Το κατά πόσο καθένα από τα σφάλματα αυτά επηρεάζει την τελική συμπεριφορά ενός φίλτρου, εξαρτάται από: (α) το μήκος λέξης και τον τύπο της αριθμητικής που χρησιμοποιείται για την υλοποίηση, (β) τη μέθοδο κβάντισης των συντελεστών (λ.χ. στρογγύλευση ή αποκοπή) και (γ) τη δομή πραγματοποίησης του φίλτρου.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή είδαμε ότι τα σφάλματα που παρουσιάζονται λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας αποτελούν ένα καθοριστικό παράγοντα στην επιλογή του τρόπου υλοποίησης ενός IIR φίλτρου. Τα σφάλματα αυτά αφορούν την κβάντιση των συντελεστών του φίλτρου, την υπερχείλιση κατά την εκτέλεση των προσθέσεων και τη στρογγύλευση κατά τον υπολογισμό των γινομένων. Ως γενικό κανόνα, είδαμε ότι τα υψηλής τάξης IIR ψηφιακά φίλτρα, θα πρέπει να υλοποιούνται ως συνδυασμός δομών δεύτερης τάξης, για την ελαχιστοποίηση των παραπάνω σφαλμάτων.

Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τα ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR). Η μελέτη αυτή αφορούσε κυρίως τη σχεδίαση και την υλοποίηση τέτοιων φίλτρων. Είδαμε ότι από όλες τις μεθόδους σχεδίασης IIR ψηφιακών φίλτρων, η πλέον συστηματική και γενική, δηλαδή η πλέον κατάλληλη για οποιοδήποτε τύπο φίλτρου, είναι η μέθοδος του διγραμμικού μετασχηματισμού. Με τη μέθοδο αυτή επιτυγχάνεται μια ένα-προς-ένα, αλλά μη γραμμική, απεικόνιση του φανταστικού άξονα του επιπέδου-s στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου-z. Επίσης, με τη μέθοδο αυτή από ευσταθή αναλογικά φίλτρα καταλήγουμε σε ευσταθή ψηφιακά φίλτρα.
Η ανάγκη σχεδίασης φίλτρων με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού μάς οδήγησε στο να κάνουμε μια μικρή αναφορά στα αναλογικά φίλτρα. Έτσι, γνωρίσαμε τα φίλτρα Butteiworth, τα φίλτρα Chebyshev και τα Ελλειπτικά φίλτρα, καθώς και τους αναλογικούς μετασχηματισμούς συχνότητας, ώστε από ένα πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο να μπορούμε να παίρνουμε το επιθυμητό υψηπερατό, ζωνοδιαβατό ή απόρριψης ζώνης φίλτρο.
Τέλος, γνωρίσαμε τα σχετικά με την υλοποίηση των IIR ψηφιακών φίλτρων που σχεδιάσαμε. Είδαμε ότι, κυρίως λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας, το ψηφιακό σύστημα μπορεί να μη συμπεριφέρεται όπως αρχικά είχε σχεδιαστεί. Ένα από τα βασικά μέτρα που πρέπει να λάβουμε, για να ελαχιστοποιήσουμε τα σφάλματα λόγω πεπερασμένης ακριβείας, είναι να υλοποιήσουμε τα υψηλής τάξης φίλτρα ως συνδυασμό (σε σειρά ή παράλληλα) δομών δεύτερης τάξης.

7. FAQs [Frequently asked questions] για τα φίλτρα.

-Εξηγείστε το γιατί ένα χαμηλοπερατό φίλτρο θολώνει τις ακμές της εικόνας:

Το Gaussian χαμηλοπερατό φίλτρο ορίζεται στις δύο διαστάσεις ως

$$h(u,v) = \left(1/\left(2*\pi*\sigma^2\right)\right) *e\wedge(- (u^2+v^2) / \sigma^2),$$

όπου σ το standard deviation. Δηλαδή το μεγαλύτερο βάρος έγκειται στο κέντρο και υπάρχει ομαλή εξασθένηση όσο απομακρυνόμαστε από το κέντρο. Συνήθως οι υψηλές συχνότητες στο φάσμα μιας εικόνας συνεισφέρουν στο διαχωρισμό των αντικειμένων δηλαδή στις λεπτομέρειες ενώ οι χαμηλές αντιπροσωπεύουν μεγάλες περιοχές αντικειμένων. Εφαρμόζοντας το χαμηλοπερατό φίλτρο οι υψηλές συχνότητες χάνονται και ο διαχωρισμός των αντικειμένων, οι ακμές, γίνονται περισσότερο δυσδιάκριτες. Με την εφαρμογή του lowpass φίλτρου οι περιοχές της εικόνας που διαχωρίζουν τα αντικείμενα, δηλαδή οι ακμές της θα έρθουν σε πιο κοντινές τιμές μετά την εφαρμογή του φίλτρου, το οποίο τείνει αν εξαλείψει τις σημαντικές διαφορές μεταξύ γειτονικών pixels. Έτσι οι ακμές των αντικειμένων γίνονται δυσδιάκριτες και θολές.

-Εξηγείστε το γιατί ένα median φίλτρο έχει καλύτερα αποτελέσματα από κάποιο χαμηλοπερατό στην απαλοιφή παλμικού (impulse) θορύβου:

Το median filter είναι ένα μη γραμμικό φίλτρο το οποίο ορίζεται ως εξής. Αν έχουμε ένα πλήθος στοιχείων $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ και τα στοιχεία έχουν τοποθετηθεί κατ' αύξουσα σειρά τότε $median(A) = a_{(n+1)/2}$, αν n περιττός ή $½*(\alpha_{n/2} + \alpha_{(n/2)+1})$. Το median filter εξαλείφει περιοχές με πάρα πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές φωτεινότητας σχεδιάζοντας ένα παράθυρο γύρω από το κάθε pixel και αντικαθιστώντας το pixel αυτό με την τιμή της μεσαίας τιμής του παραθύρου. Το median filter δεν είναι παραμετρικό, δηλαδή ο χρήστης δεν έχει κάποιες επιλογές πάνω στο φίλτρο πέρα από το να καθορίσει το μέγεθος του παραθύρου που επενεργεί το φίλτρο. Επειδή τα pixel που ανήκουν στον παλμικό θόρυβο έχουν πολύ μεγάλες αποκλίσεις σε σχέση με τα γειτονικά pixel και έτσι το median filter είναι ιδανικό για την αφαίρεση αυτού του τύπου θορύβου. Το κόστος είναι πως το median filter αφαιρεί λεπτομέρεια από την εικόνα όπως το mean filter αλλά αντί για blurring κάνει τις διάφορες περιοχές χρώματος πιο ομοιόμορφες.

-Ο Laplacian σαν υψιπερατό φίλτρο πάσχει από εσφαλμένη αναγνώριση μικρών μεταβολών θορύβου σαν ακμές. Εξηγείστε αναλυτικά το φαινόμενο και προτείνετε μεθοδολογία για την επίλυση του:

Το Laplacian φίλτρο είναι ένα ισοτροπικό μέγεθος της $2^{ης}$ παραγώγου μιας εικόνας. Ο Laplacian τονίζει τα σημεία γρήγορης μεταβολής της φωτεινότητας και γι' αυτό χρησιμοποιείται στον εντοπισμό των ακμών. Εξαιτίας αυτού του χαρακτηριστικού η αξιοπιστία του φίλτρου περιορίζεται όταν εφαρμόζεται σε εικόνες που έχουν αλλοιωθεί από θόρυβο. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος, για την αντιμετώπιση του προβλήματος το Laplacian εφαρμόζεται συχνά σε εικόνες που έχουν πρώτα γίνει smoothed με ανάλογο φίλτρο (πχ Gaussian) για να ενισχύσουν την αντοχή του στο θόρυβο. Το Laplacian μιας εικόνας με τιμές φωτεινότητας I(x,y) δίνεται από τον τύπο, $L(x,y) = (\delta^2 I / \delta x^2) + (\delta^2 I / \delta y^2)$. Εφόσον η εικόνα εισόδου απεικονίζεται σαν σύνολο διακριτών pixels, πρέπει να βρούμε ένα διακριτό πίνακα συνέλιξης (discrete convolution kernel) που να προσεγγίζει την $2^η$ παράγωγο στον ορισμό του Laplacian. Δύο συχνά χρησιμοποιούμενοι πίνακες είναι οι εξής.[0 -1 0;-1 4 -1;0 -1 0] και [-1 -1 -1;-1 8 -1;-1 -1 -1]. Χρησιμοποιώντας τον έναν ή τον άλλο το Laplacian μπορεί να υπολογιστεί με convolution. Εφόσον η πράξη της συνέλιξης είναι προσεταιριστική μπορούμε να συνελίξουμε το Gaussian smoothing filter με το Laplacian filter πρώτα και μετά να συνελίξουμε το υβριδικό φίλτρο με την εικόνα για να επιτύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Το να κάνουμε τα πράγματα με αυτόν τον τρόπο έχουμε δύο πλεονεκτήματα. $1^{ον}$ Εφόσον οι Gaussian και οι Laplacian πίνακες είναι συνήθως μικρότεροι από την εικόνα χρειαζόμαστε πολύ λιγότερες αριθμητικές πράξεις. $2^{ον}$ ο πίνακας Laplacian of Gaussian μπορεί να προϋπολογιστεί ώστε να χρειάζεται να γίνει μόνο μία συνέλιξη κατά το χρόνο εκτέλεσης του φίλτρου. Αυτό έχει πλεονέκτημα όταν εφαρμόζουμε το φίλτρο σε μεγάλο πλήθος εικόνων. Το φίλτρο LoG δίνεται από τον τύπο: $h(x,y) = (1/2\pi) * ((2\sigma^2 - r^2) / \sigma^4) * e\wedge(-r^2 / 2\sigma^2)$.

-Δίνεται η παρακάτω αλληλουχία τελεστών: x(n1,n2) --------[ln] -------- [Μείωση Θορύβου] ---------- [exp] ---------- y(n1,n2):

Ο λογάριθμός έχει την ιδιότητα να μετατρέπει ένα γινόμενο πρόσθεση και αυτό εκμεταλλευόμαστε εδώ. Δηλαδή το σύστημα έχει εφαρμογή στην καταστολή του πολλαπλασιαστικού θορύβου. Στην περίπτωση αυτή η εικόνα μαζί με τον θόρυβο μοντελοποιείται ως εξής: $g(n1,n2) = f(n1,n2) * n(n1,n2)$ όπου n είναι ο θόρυβος, f η αρχική εικόνα και g η εικόνα μετά την επίδραση του πολλαπλασιαστικού θορύβου. Με δεδομένο πως οι συναρτήσεις είναι θετικές μπορούμε να λογαριθμήσουμε. $ln(g(n1,n2)) = ln(f(n1,n2)) + ln(n(n1,n2))$. Έτσι μετά την μείωση του θορύβου αν υποθέσουμε πως εξαλείφθηκε σχεδόν τελείως τότε $ln(g(n1,n2)) \approx ln(f(n1,n2))$ και μετά το exp έχουμε τελικά $g(n1,n2) = f(n1,n2)$. Εξαλείψαμε τον πολλαπλασιαστικό θόρυβο! Εκμεταλλευτήκαμε την ιδιότητα του λογαρίθμου για να μετασχηματίσουμε τον πολλαπλασιαστικό θόρυβο σε προσθετικό! Στην συνέχεια εφαρμόσαμε έναν αλγόριθμο ελάττωσης του προσθετικού θορύβου και στη συνέχεια αντισταθμίζουμε το λογάριθμο με exp.

-Εξηγείστε την έννοια του ψευδοχρωματισμού εικόνας και δώστε ένα παράδειγμα αυτής της διαδικασίας:

Ψευδοχρωματισμός ονομάζεται η επεξεργασία μιας εικόνας κατά την οποία αναθέτονται χρώματα σε τιμές του γκρι σύμφωνα με κάποιο προκαθορισμένο κριτήριο. Για παράδειγμα με τεμαχισμό της έντασης. Έστω [0, L-1] τα επίπεδα του γκρι. Ορίζουμε κατώφλια Pi, 1<= i <= p και αναθέτουμε χρώματα σύμφωνα με την $f(x,y) = c_k$ όταν $f(x,y) \in [P_{i-1}, P_i]$. Η μια διαφορετική μεθοδολογία είναι να εκτελέσουμε τρεις ανεξάρτητους μετασχηματισμούς στην ασπρόμαυρη εικόνα και να αναθέσουμε τα αποτελέσματα στις τρεις συνιστώσες RGB μιας εικόνας.

-Γράψτε τις σημαντικότερες ιδιότητες του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier:

(**a**)Διαχωριζόμενη Ακολουθία:

$$x(n_1,n_2) = x_1(n_1) * x_2(n_2) \leftrightarrow X(k_1,k_2) = X_1(k_1) * X_2(k_2),$$

(**b**)Γραμμικότητα:

$$x(n1,n2) = a * v(n_1,n_2) + b * w(n_1,n_2) \leftrightarrow X(k_1,k_2) = a * V(k_1,k_2) + b * W(k_1,k_2),$$

(**c**)Κυκλική μετατόπιση:

$$y(n1,n2) = x((n_1-m_1)\%N_1, (n_2-m_2)\%N_2) \leftrightarrow Y(k_1,k_2) = e\hat{}(-j*(2\pi/N_1)*m_1*k_1) * e\hat{}(-j*(2\pi/N_2)*m_2*k_2) * X(k_1,k_2)$$

όπου % είναι πράξη modulo και j είναι ο φανταστικός αριθμός,

(**d**)Διαμόρφωση:

$$x(n1,n2) = e\hat{}(-j*(2\pi/N_1)*n_1*m_1) * e\hat{}(-j*(2\pi/N_2)*n_2*m_2) * w(n_1,n_2) \leftrightarrow X(k_1,k_2) = W((k_1-m_1)\%N_1, (k_2-m2)\%N_2)$$

(**e**) Μιγαδική συζυγία

$x^*((N_1-n_1)\%N_1,(N_2-n_2)\%N_2) \leftrightarrow X^*(k_1,k_2)$, εάν η ακολουθία $x(n_1,n_2)$ είναι πραγματική τότε ισχύει πως $X^*(k_1,k_2) = X((N_1-k_1)\%N_1,(N_2-k_2)\%N_2)$,

(**f**) Αναστροφή:

$$x(n2,n1) \leftrightarrow X(k2,k1),$$

(g) Θεώρημα Parseval:

$$\sum_{n1=0}^{N1-1}\sum_{n2=0}^{N2-1} x(n1,n2)(*y(n1,n2)) = \frac{1}{N1*N2}\sum_{k1=0}^{N1-1}\sum_{k2=0}^{N2-1} X(k1,k2)(*Y(k1,k2)) \quad \textit{προσοχή το * πριν το}$$

y και το Y υποδηλώνουν το μιγαδικό συζυγές, (h) Κυκλική Συνέλιξη Σημάτων:

$$y(n1,n2) = x(n1,n2)\otimes h(n1,n2) \leftrightarrow Y(k1,k2) = X(k1,k2)*H(k1,k2),$$

το $\otimes$ συμβολίζει κυκλική συνέλιξη.

-Υπολογίστε σε ψευδοκώδικα τον Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier δύο διαστάσεων:

Ο Discrete Fourier Transform μιας διάστασης δίνεται από τον τύπο

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) * e^{-j2\pi kn/N} \quad ,k = 0,1,\ldots,N-1 \quad .$$

Και ο Discrete Fourier Transform δύο διαστάσεων δίνεται από τον τύπο

$$X(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(m,n) * e^{-j2\pi\left(\frac{km}{M}+\frac{ln}{N}\right)} \quad ,k = 0,1,\ldots,M-1 \quad \kappa\alpha\iota \quad l = 0,1,\ldots,N-1$$

Ψευδοκώδικας 1D DFT: function1D(x, N) { %Δέχεται ως όρισμα μια στήλη ή μια γραμμή της εικόνας και το μέγεθος N αυτής της γραμμής ή στήλης; For k= 0 ως N-1 { X(k) = 0; %αρχικοποιούμε For n=0 ως N-1 { X(k) = X(k) + x(n)*exp(-j*2*pi*k*n/N);} } %Επιστρέφει όλο το X }. Ψευδοκώδικας 2D DFT: function2D(x, M, N) { %Δέχεται ως όρισμα την δυσδιάστατη εικόνα x (έναν 2D πίνακα δηλαδή) και τις διαστάσεις αυτού του πίνακα όπου εδώ το M είναι η στήλη και το N είναι η γραμμή; For k=0 ως M-1 { For l=0 ως N-1 { X(k, l) = 0 %αρχικοποίηση, %Εκμεταλλευόμαστε την συνάρτηση function1D που κατασκευάσαμε παραπάνω ώστε να πάρουμε το DFT κάθε στήλης; FourierColumn = function1D(x(l,:), N); For m = 0 ως M-1 { X(k, l) = exp(-j*2*pi*k*m/M) * X(l) } } } %Επιστρέφει ως έξοδο όλο το X(k, l) που είναι το 2D DFT της εικόνας x.

-Έστω ο πίνακας (εδώ θα τον γράψουμε σε matlab μορφή για να χωρέσει σε μια γραμμή) [4 1 3 0 5 1;4 0 1 2 3 1;1 1 0 3 5 2;2 5 3 0 0 2;3 2 0 1 3 1]. α) Είναι η ελάχιστη διαδρομή D4 μεταξύ δύο σημείων p και q μοναδική? β) Βρείτε την D4 και την D8 απόσταση μεταξύ των σημείων p και της εικόνας:

α) Η συνδετικότητα 4-neighbors ορίζεται ως τα πάνω, κάτω, αριστερά και δεξιά pixel ενός pixel, δηλαδή όλα τα γειτονικά του με τα οποία έχει μια κοινή πλευρά. Αν (i,j) είναι οι συντεταγμένες του pixel τότε τα γειτονικά του είναι τα (i+1,j) , (i-1,j) , (i,j+1) , (I,j-1). Ενώ η συνδετικότητα 8-neighbors ορίζεται ως τα διαγώνια pixel δηλαδή αυτά που έχουν κοινές γωνίες με το εν λόγω pixel συν τα τέσσερα pixel της 4-neighbors συνδετικότητας. Άρα περιλαμβάνει επιπλέον τα pixels (i-1,j-1) , (i+1,j-1) , (i-1,j+1) , (i+1,j+1). Ναι είναι σωστό πως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο σημείων p και q είναι μοναδική. Για παράδειγμα για να ακολουθήσουμε τον πιο γρήγορο δρόμο από το σημείο q στο σημείο p πρέπει να κάνουμε 3 μετατοπίσεις σε στήλες κατά αριστερά και τέσσερις μετατοπίσεις προς τα κάτω. Ανεξαρτήτως με ποια σειρά γίνουν αυτές οι μετατοπίσεις, έχουμε συνολικά εφτά μετακινήσεις σε γειτονικά pixel με την 4-neighbor συνδετικότητα. β) Την D4 συνδετικότητα την υπολογίσαμε ίση με 7 στο πρώτο ερώτημα. Ενώ στην D8 συνδετικότητα μετακινούμαστε διαγώνια κάτω αριστερά κατά τρεις φορές και άλλη μια φορά προς τα κάτω για να φτάσουμε από το q σημείο στο p. Έτσι τελικά η D8 απόσταση είναι ίση με τέσσερα.

-Δώστε παραδείγματα μασκών ενός χαμηλοπερατού και ενός υψιπερατού φίλτρου και εξηγείστε την εφαρμογή τους στο πεδίο της συχνότητας με την χρήση του μετασχηματισμού Fourier:

Η μάσκα ενός υψιπερατού φίλτρου έχει ως εξής: [-1 -1 -1;-1 9 -1;-1 -1 -1] και ενός χαμηλοπερατού φίλτρου [1/16 1/8 1/16;1/8 1/4 1/8;1/16 1/8 1/16]. Το φιλτράρισμα στη συχνότητα αναπαριστάται ως F(u, v)----------[H(u, v)] ----- G(u, v). Οπότε ισχύει G(u, v) = H(u, v)*F(u, v). Χαμηλοπερατά Φίλτρα: Οι υψηλές συχνότητες σχετίζονται με τις απότομες αλλαγές των χαρακτηριστικών όπως και τον θόρυβο. Για εξομάλυνση ή αφαίρεση θορύβου απομακρύνουμε συγκεκριμένο εύρος υψηλών συχνοτήτων με χαμηλοπερατά φίλτρα. Παρόλο που το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο είναι εφικτά υλοποιήσιμο στους υπολογιστές δεν είναι επιθυμητό καθώς εμφανίζει κυκλικά αντικείμενα γύρω από τις ακμές των αντικειμένων. Τα εκθετικά και Butterworth φίλτρα προσφέρουν ομαλότερη μετάβαση και μας δίνουν ομαλές εικόνες χωρίς κύκλους. i) Ιδανικό: $H(u,v) = 1$ αν $D(u,v)<=D_0$, 0 διαφορετικά, όπου $D(u,v) = \text{sqrt}(u^2 + v^2)$. ii) Εκθετικό: $H(u,v) = \exp(- (D(u,v)/D_0)^n)$ όπου n η τάξη του φίλτρου. Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη του φίλτρου τόσο γρηγορότερη είναι η μετάβαση. iii) Butterworth: $H(u,v) = 1/(1 + (D(u,v)/D_0)^{2n})$. Υψιπερατά φίλτρα: Βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στην εύρεση ακμών μιας εικόνας (edge extraction). i) Ideal: $H(u, v) = 1$ αν $D(u, v)>=D_0$, 0 αλλού. ii) Exponential $H(u, v) = \exp(-(D_0/D(u,v))^n)$. iii) Butterworth: $H(u,v) = 1/(1 + (D_0/D(u,v))^{2n})$.

-Το θέμα αυτό εξετάζει τον υπολογισμό του DFT και της συνέλιξης. Δίνεται το σήμα x(n,m)=1+δ(n+1,m)+δ(n,m+1)+δ(n,m-1) και το σύστημα με κρουστική απόκριση h(n,m)=0.25 για n=0 και m=±1, 0.5 για n=0 και m=0, μηδέν αλλού. 1. Βρείτε το DFT του σήματος και του συστήματος με τη μορφή εκθετικών. 2. Μπορεί αυτοί οι DFT να είναι πραγματικοί? 3. Χρησιμοποιώντας αυτούς τους DFT (με τη μορφή εκθετικών) βρείτε την απόκριση του συστήματος και δώστε την με τη μορφή του x(n,m) ή του h(n,m) παραπάνω:

Το 2D DFT του σήματος είναι μετά από πράξεις: $X(k,l)=\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi kn/N} * \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j2\pi lm/M} + e^{j2\pi k/N} + e^{-j2\pi k/N} + e^{j2\pi l/M} + e^{-j2\pi l/M}$. Η κρουστική απόκριση του συστήματος μπορεί να γραφεί και ως εξής: $h(n,m)=0.25*\delta(n,m-1)+0.25*\delta(n,m+1)+0.5*\delta(n,m)$. Και ο 2D DFT του συστήματος h είναι $H(k,l)=0.25*e^{-j2\pi l/M}+0.25*e^{j2\pi l/M}+0.5$. Όχι και οι δύο παραπάνω DFTs που υπολογίσαμε έχουν φανταστικές συνιστώσες άρα ανήκουν στους μιγαδικούς και δεν είναι πραγματικοί. Για να βρούμε την κρουστική απόκριση του συστήματος πολλαπλασιάζουμε στο πεδίο συχνοτήτων το H(k,l)*X(k,l) και το αποτέλεσμα το περνάμε από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Ο 2D Inverse Fourier Transform ορίζεται ως

$$x(m,n)=\frac{1}{N*M}*\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} e^{j2\pi\left(k*\frac{m}{M}+l*\frac{n}{N}\right)}.$$

-Το θέμα αυτό εξετάζει μετασχηματισμούς ιστογράμματος. Έστω η 8x8 εικόνα των 3 bit: [0,1,2,3,3,4,4,5;6,1,2,3,3,4,4,5;6,1,2,3,3,4,4,5;6,3,2,3,3,4,4,5;2,4,2,3,3,4,4,5;2,5,2,3,3,4,4,5;2,5,2,3,3,4,4,5;7,5,2,3,3,4,4,5]. 1. Υπολογίστε το απλό και το εξισορροπημένο ιστόγραμμα (histogram equalization). 2. Αν επαναλάβουμε την διαδικασία εξισορρόπησης θα βελτιωθεί το αποτέλεσμα? :

Η ισοστάθμιση του ιστογράμματος έχει σαν σκοπό να παράγει ένα ομοιόμορφο ιστόγραμμα. Η τεχνική αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε ολόκληρη την εικόνα ή σε ένα μέρος της. Εδώ θα εφαρμόσουμε το global histogram equalization. Πρώτα υπολογίζουμε το ιστόγραμμα της αρχικής εικόνας. Οπότε απλώς απαριθμώντας το πλήθος κάθε φωτεινότητας έχουμε ότι h(0)=1,h(1)=3,h(2)=11,h(3)=17,h(4)=17,h(5)=11,h(6)=3,h(7)=1 ή h = [1;3;11;17;17;11;3;1]. Μετά πρέπει να υπολογίσουμε την συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας που δίνεται από την σχέση $P(g)=\frac{1}{N*M}\sum_{i=0}^{g} h(i)$,όπου $g=0,1,\ldots,L-1$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε N=8, M=8 και L=8. Οπότε P(0)=1/64, P(1)=4/64, P(2)=15/64, P(3)=32/64, P(4)=49/64, P(5)=60/64, P(6)=63/64 και P(7)=1. Και τώρα

πρέπει να υπολογίσουμε την συνάρτηση μετασχηματισμού των φωτεινοτήτων που δίνεται από τον τύπο $T(g) = int[L * P(g)]$. Άρα έχουμε ότι T(0)=int[1/8]=0, T(1)=int[1/2]=0, T(2)=int[15/8]=1, T(3)=int[32/8]=4, T(4)=int[49/8]=6, T(5)=int[60/8]=7, T(6)=int[63/8]=7 και T(7)=int[8]=8 το οποίο γίνει μηδέν. Οπότε ο νέος πινάκας με τις νέες φωτεινότητες έχει ως εξής [0,0,1,4,4,6,6,7;7,0,1,4,4,6,6,7;7,0,1,4,4,6,6,7;7,4,1,4,4,6,6,7;1,6,1,4,4,6,6,7;1,7,1,4,4,6,6, 7; 1,7,1,4,4,6,6,7;0,7,1,4,4,6,6,7]. Και το εξισορροπημένο ιστόγραμμα είναι h_eq = [5,11,0,0,17,0, 17,14]. Όχι αν επαναλάβουμε την διαδικασία θα παρατηρήσουμε πως η νέα συνάρτηση μετασχηματισμού των φωτεινοτήτων θα είναι μια ευθεία γραμμή που περνάει από την αρχή των αξόνων όπως η ευθεία y=x, δηλαδή δεν θα έχει καμία επίπτωση στις παλιές φωτεινότητες. Επιπρόσθετα παρουσιάζεται ο κώδικας Matlab που υλοποιεί αυτόματα την παραπάνω διαδικασία για οποιαδήποτε grayscale εικόνα.

```
function [ eqImage ] = globalHistEq( filename, show )
%Synarthsh pou ektelei histogram equalization (globally) %se mia grayscale eikona
%works for sure on bmps
L=256; curIm = imread(filename); h = zeros(L,1);
 %vector gia na swsoume to arxiko istogramma ths eikonas
lines = size(curIm,1);  %arithmos grammwn
cols = size(curIm,2);   %kai arithmos sthlwn ths eikonas
for i=1:lines for j=1:cols h(curIm(i,j)+1) = h(curIm(i,j)+1) + 1; end end P = zeros(L,1);
%edo tha ypologisoume thn synarthsh athroistikhs pithanotitas
for g=1:L P(g) = (1/(lines*cols))*sum(h(1:g)); end T = L*P;
%ypologizoume thn synarthsh metasxhmatismou
T = fix(T); temp = T(curIm+1); eqImage = uint8(temp); clear temp; if(show ~= 0)
figure(1); plot(h); title('The original histogram');
h_eq = zeros(L,1); %vector gia na swsoume to arxiko istogramma ths eikonas
for i=1:lines for j=1:cols h_eq(eqImage(i,j)+1) = h_eq(eqImage(i,j)+1) + 1; end end
figure(2); plot(h_eq); title('The equalized histogram'); end.
```

-Μια θολωμένη εικόνα έχει ληφθεί από φακό με κακή εστίαση που περιγράφεται από την κεντραρισμένη συνάρτηση διάχυσης σημείου (point spread function): [1/4,1/16,0;1/16,1/2,1/16;0,1/16,0]. Η ισχύς του θορύβου (σn)2 θεωρείται δεδομένη. Για τη διόρθωση της εικόνας θα χρησιμοποιήσετε τεχνικές image restoration. Σχεδιάστε σε κώδικα MATLAB ή C για την εφαρμογή του Constrained Least Squares φίλτρου στην εικόνα αυτή:

```
clear all; close all; clc; g = imread('myimage.bmp');
%fortwse thn arxikh eikona
 [x,y]=size(g); h = [1/4 1/16 0;1/16 1/2 1/16;0 1/16 0];
%H maska tou laplacian filtrou einai h ekshs
 p = [0 -1 0; -1 4 -1; 0 -1 0]; M=x+2; N=y+2;
```

%Fourier Transforms G = fft2(g,M,N);
H = fft2(h,M,N); P = fft2(p,M,N); alpha=56000;
%prwto bima
gama = 0.0001; adjgama = 0.000001;
%sigma and mi einai h diaspora kai h mesh timh tou thoribou pou ta %theoroume gnwsta
n_sqrnorm2 = (M-1).*(N-1).*(sigma.^2+mi.^2); while(1)
%bhma 2o
FEST = (conj(H)./(abs(H).^2 + gama.*abs(P).^2)).*G; fest = ifft2(FEST);
o 2D inverse FT %bhma 3o
r=g-H*fest; r_sqrnorm2 = norm(r,2);
%bhma 4o if(r_sqrnorm2 < n_sqrnorm2 - alpha) gama = gama + adjgama; elseif(r_sqrnorm2 > n_sqrnorm2 - alpha) gama = gama - adjgama; else break; end; end;

-Εξηγείστε τους λόγους για τους οποίους χρησιμοποιείται ο DCT στη συμπίεση και κωδικοποίηση εικόνας :

Ο DCT βρίσκει συχνή εφαρμογή στην επεξεργασία σήματος και εικόνας κυρίως για μέθοδο συμπίεσης Lossy. Επειδή έχει την πολύ καλή ιδιότητα να «συμπιέζει» ενέργεια, καθώς η περισσότερη πληροφορία της εικόνας συγκεντρώνεται σε λίγους συντελεστές χαμηλής συχνότητας, δηλαδή σε δεδομένα με υψηλή συσχέτιση. Ο DCT χρησιμοποιείται στην συμπίεση εικόνας JPEG και στις συμπιέσεις βίντεο MJPEG και MPEG. Εκεί ο 2D DCT-II των 8x8 blocks υπολογίζεται και τα αποτελέσματα κβαντίζονται και κωδικοποιούνται. Το n είναι συνήθως 8 και ο DCT-II εφαρμόζεται σε κάθε γραμμή και στήλη του block. Το αποτέλεσμα είναι ένας 8x8 μετασχηματισμός όπου το στοιχείο (0,0) είναι ο συντελεστής μηδενικής συχνότητας και στοιχεία με αυξανόμενο δείκτη γραμμής και στήλης αντιπροσωπεύουν υψηλότερες κάθετες και οριζόντιες συχνότητες αντίστοιχα. Μια παραλλαγή του DCT, ο MDCT χρησιμοποιείται σε συμπιέσεις ήχου MP3, Vorbis και AAC.Η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μορφή του DCT είναι η DCT II: $f_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k * \cos\left(\frac{\pi}{n} * j * \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$ Μερικοί πολλαπλασιάζουν τον όρο f_0 με $\frac{1}{\sqrt{2}}$ για να κάνουν τον DCT-II πίνακα ορθογώνιο. Επίσης είναι πραγματικός μετασχηματισμός και μπορεί να υπολογιστεί με fft ώστε να έχουμε μια γρηγορότερη υλοποίηση.

-Τον μετασχηματισμό DCT ακολουθεί συνήθως η διαδικασία της κβαντοποίησης των συντελεστών. Εξηγήστε αν προτιμάται γενικά το απλό (scalar) ή vector quantization και γιατί :

Κβάντιση είναι η διακριτοποίηση ενός σήματος με συνεχείς τιμές. Αν X η αρχική τιμή, X' η τιμή μετά την κβάντιση, τότε ορίζουμε σαν αλλοίωση το μέτρο $D = E\left[D(X,X')\right] = E\left[\left(X - Q(X)\right)^2\right]$ που δείχνει πόση ποσότητα χάθηκε λόγω του

κβαντιστή. Δηλαδή έχουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Σε αντίθεση με τη δειγματοληψία στην κβάντιση δεν μπορούμε να μην έχουμε απώλειες Υπάρχουν δύο είδη κβαντιστών οι βαθμωτοί και οι διανυσματικοί κβαντιστές. Στον Scalar Quantizer δηλαδή στον βαθμωτό κβαντιστή κάθε έξοδος πηγής κβαντίζεται χωριστά με έναν αριθμό από στάθμες και αυτές κωδικοποιούνται σε δυαδική ακολουθία.Vector Quantizer: Η ιδέα της διανυσματικής κβάντισης είναι να λαμβάνουμε μπλοκ από n εξόδους πηγής και να σχεδιάζουμε τον κβαντιστή στον Ευκλείδειο χώρο n διαστάσεων αντί να κβαντίζουμε βασιζόμενοι σε ένα δείγμα κάθε φορά στον μονοδιάστατο χώρο. Ο Vector Quantizer είναι ανώτερος του scalar επειδή: (α) Εκμεταλλεύεται γραμμικές και μη-γραμμικές εξαρτήσεις μεταξύ στοιχείων του διανύσματος. Είναι ανώτερος ακόμα και αν τα στοιχεία είναι στατιστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους. Μπορεί να χρειαστεί αρκετούς υπολογισμούς στον encoder λόγω αναζητήσεων αλλά ο decoder είναι απλά ένα lookup table. Αποφέρει πολύ γρήγορη και με ελάχιστους υπολογισμούς συμπίεση. Προσφέρει καλύτερο SQNR.

-Αναφέρετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των κωδικών μεταβλητού μήκους σε σχέση με αυτούς σταθερού μήκους. Πότε είναι βέλτιστοι οι τελευταίοι? :

Το πλεονέκτημα ενός κώδικα είναι ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε την ίδια πληροφορία με λιγότερα bits. Για να το πετύχουμε αυτό, θα πρέπει να ξέρουμε ορισμένα στατιστικά στοιχεία για το μήνυμα που πρόκειται να στείλουμε. Αν το κάθε σύμβολο ήταν το ίδιο πιθανό με όλα τα υπόλοιπα τότε η μόνη και βέλτιστη λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε κωδικούς σταθερού μήκους. Όμως αν κάποια σύμβολα είναι λιγότερο πιθανά από κάποια άλλα τότε μπορούμε να εκμεταλλευτούμε αυτό το γεγονός και να τα αναπαραστήσουμε με λιγότερα bits. Μειονεκτήματα των κωδικών μεταβλητού μεγέθους είναι ότι θα πρέπει να βρεθούν τρόποι ώστε πρώτον η αποκωδικοποίηση κάθε συμβόλου από το δέκτη να γίνεται επιτυχώς, να μην υπάρχει σφάλμα στη διαδικασία, και δεύτερον η αποκωδικοποίηση αυτή να γίνεται άμεσα.

-Αναφέρετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των στατικών κωδικών σε σχέση με τους προσαρμοστικούς :

Static Codes. Οι στατικοί κώδικες Huffman θεωρούνται self-correcting. Δηλαδή ένα σφάλμα στην μετάδοση δεν προκαλεί αλλεπάλληλα λάθη για μεγάλο χρονικό διάστημα επειδή μετά από λίγο ο πομπός και ο δέκτης θα ξανασυγχρονιστούν. Στους στατικούς κώδικες συγχρονισμός σημαίνει πομπός και δέκτης να γνωρίζουν πότε αρχίζουν τα codewords. Αν γίνει κάποιο λάθος, δεν υπάρχει κάποιο ανώτατο όριο μέσα στο οποίο ο πομπός και ο δέκτης θα έχουν συγχρονιστεί. Επιπλέον δυσκολία υπάρχει επειδή αυτός ο αυτοσυγχρονισμός δεν κινεί υποψίες πως έγιναν κάποια λάθη. Ο κώδικας αποθηκεύεται χωριστά από τα κωδικοποιημένα δεδομένα οπότε μπορεί να προστατευθεί από φθορές. Ωστόσο όταν ο κώδικας μεταδίδεται, είναι επιρρεπής σε λάθη και επειδή ένα λάθος στον κώδικα θα ήταν καταστροφικό για τα δεδομένα, θα πρέπει να λαμβάνονται δραστικά

μέτρα για την προστασία του κατά την μετάδοση.Adaptive Codes. Οι προσαρμοστικοί κώδικες επηρεάζονται πιο άσχημα από λάθη σε σχέση με τους στατικούς. Για παράδειγμα στην περίπτωση ενός προσαρμοστικού Huffman κώδικα ακόμα και αν ο δέκτης με τον πομπό ξανασυγχρονιστούν μετά από κάποιο σφάλμα η πληροφορία που χάθηκε δεν είναι μόνο μερικά bits δεδομένων αλλά μπορεί να είναι και όλα τα δεδομένα ως το επανασυγχρονισμό. Το γεγονός πως ο πομπός και ο δέκτης επαναπροσδιορίζουν συνεχώς τον κώδικα, σημαίνει ότι μέχρι να γίνει ο συγχρονισμός μετά από κάποιο λάθος, πομπός και δέκτης μπορεί να έχουν εντελώς διαφορετικές αναπαραστάσεις του κώδικα. Αυτό που χρειάζεται σε αυτή την περίπτωση είναι συγχρονισμός του κώδικα. Στους προσαρμοστικούς κώδικες ένα λάθος στον συγχρονισμό μπορεί να αποβεί καταστροφικό.

-Ποιες είναι οι διαφορές των DTFT, DFT και FFT? :

Ο DFT είναι μια δειγματοληψία του DTFT πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι η δειγματοληψία στη συχνότητα εισάγει περιοδική επέκταση του σήματος στο χρόνο. Αντίστοιχα η δειγματοληψία στο χρόνο εισάγει περιοδική επανάληψη στη συχνότητα. Ο υπολογισμός του DFT είναι πολύ σημαντικός σε πληθώρα εφαρμογών. Επομένως άλλο τόσο σημαντικός είναι ο γρήγορος υπολογισμός του. Ο υπολογισμός βάσει τον τύπο είναι πολύ αργός διότι απαιτεί $N1^2 * N2^2$ πολλαπλασιασμούς μιγαδικών αριθμών και $N1 * N2 * (N1 * N2 - 1)$ προσθέσεις φυσικά πάλι μιγαδικών αριθμών. Επομένως η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι τεράστια. Ευτυχώς ο DFT μπορεί να εκφρασθεί ως σειρά μονοδιάστατων DFTs κατά μήκος γραμμής και μετά κατά μήκος στήλης. Επομένως ο 2D DFT διασπάται σε N1 μονοδιάστατους DFTs κατά μήκος σειρών και σε N2 μονοδιάστατους DFTs κατά μήκος στηλών. Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον FFT και να μειώσουμε σημαντικά την πολυπλοκότητα. Ο αριθμός των μιγαδικών πολλαπλασιασμών είναι της τάξης του $O(kN^2 log_2 N)$.

-Αναφέρετε τα μειονεκτήματα και τα πλεονεκτήματα του uniform quantization στην συμπίεση της εικόνας. Επιλέγουμε $G = 2^m$ επίπεδα κβάντισης. :

Ομοιόμορφη κβάντιση: Τα επίπεδα κβάντισης είναι ίδια και στις περιοχές που έχουμε ομαλές μεταβάσεις μεταξύ επιπέδων του γκρι και εκεί που δεν έχουμε. Πλεονεκτήματα είναι η εύκολη και γρήγορη υλοποίηση. Σε εικόνες που έχουν ομαλές μεταβάσεις του γκρι παίρνουμε καλά αποτελέσματα. Η ομοιόμορφη κβάντιση είναι αποτελεσματική όταν η probability density function του σήματος είναι ομοιόμορφη και στη συγκεκριμένη περίπτωση η uniform κβάντιση θεωρείται και η βέλτιστη. Τα μειονεκτήματα της είναι πως δεν εκμεταλλεύεται καθόλου πληροφορίες για την εικόνα που θα μπορούσαν να βοηθήσουν. Αν για παράδειγμα χρησιμοποιούσαμε ομοιόμορφη κβάντιση ακόμα και σε περιοχές όπου το σήμα έχει ελάχιστες ως και μηδενικές τιμές τότε θα καταναλώναμε

άσκοπα χώρο. Στην ανομοιόμορφη κβάντιση έχουμε πολλά επίπεδα του γκρι εκεί όπου οι μεταβάσεις είναι γρήγορες και λιγότερα εκεί που είναι πιο ομαλές. Χρειαζόμαστε πληροφορία για να το υλοποιήσουμε αυτό. Γενικά ο ανομοιόμορφος κβαντιστής είναι πιο αργός και δυσκολότερος στην υλοποίηση.

-Αναφέρετε τις σημαντικότερες διαφορές μεταξύ inverse, Wiener και constrained least squares filtering. Ποια τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα κάθε τεχνικής? :

Inverse filter: Δίνεται από τον τύπο $F(u,v)=\frac{G(u,v)}{H(u,v)}$ όταν ο θόρυβος είναι $g=H*f+n$ τότε $F(u,v)=F(u,v)+N(u,v)/H(u,v)$. Συνήθως η $H(u,v)$ αποσβήνει γρηγορότερα στις συχνότητες από ότι η $N(u,v)$ και έτσι έχουμε ενίσχυση του θορύβου στις υψηλές συχνότητες. Wiener filter: Δίνεται από τον τύπο: $R_w(u,v)=H^*(u,v)/[H(u,v)^2+(S_n(u,v)/S_f(u,v))]$ όπου $H(u,v)$ είναι η συνάρτηση θολώματος (blurring function), $H^*(u,v)$ το συζυγές μιγαδικό της $H(u,v), S_n(u,v)=N(u,v)^2$ το φάσμα ισχύος του θορύβου και $S_f(u,v)$ το φάσμα ισχύος της αρχικής εικόνας πριν το θόλωμα και την προσθήκη του θορύβου. Το φίλτρο Wiener ονομάζεται επίσης και minimum mean square estimator. Αυτό που κάνει είναι να ελαχιστοποιεί το μέσο σφάλμα με χρήση στατιστικών μεθόδων και έτσι ξεπερνά κάποιες δυσκολίες που σχετίζονται με το inverse filtering. Όπως παρατηρούμε και από το παραπάνω τύπο, αν ο όρος θορύβου $S_n(u,v)$ γίνει μηδέν τότε η εξίσωση ανάγεται στο αντίστροφο φίλτρο. Όσο ο θόρυβος αυξάνει ο παρονομαστής του φίλτρου Wiener αυξάνεται και επομένως μειώνεται το $R_w(u,v)$. Από εδώ συμπεραίνουμε πως το φίλτρο έχει περιορισμένο κέρδος εκεί όπου ο θόρυβος είναι μεγάλος. Αυτό κάνει το φίλτρο Wiener περισσότερο κατάλληλο σε εικόνες με μέσα επίπεδα θορύβου. Το φίλτρο Wiener εφαρμόζεται πολλαπλασιάζοντας τον μετασχηματισμό Fourier του Wiener φίλτρου με το μετασχηματισμό Fourier της αλλοιωμένης εικόνας. Η εκτίμηση της αρχικής εικόνας βρίσκεται παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του αποτελέσματος. CLS filter: Το φίλτρο CLS (Constrained Least Squares) μας παρέχει ένα εναλλακτικό φίλτρο πιο πρακτικό από το φίλτρο Wiener, επειδή αντικαθιστά το λόγο φασματικής ισχύος $S_n(u,v)/S_f(u,v)$ με μια συνάρτηση που μεταβάλλεται με τη συχνότητα. Αυτό είναι πιο πρακτικό καθώς δεν είναι πάντοτε γνωστή η φασματική πυκνότητα ισχύος της αρχικής εικόνας. Η συνάρτηση που δίνει το CLS φίλτρο είναι η ακόλουθη: $R_{CLS}(u,v)=H^*(u,v)/[H(u,v)^2+\gamma*(P(u,v)^2)$, όπου γ μια παράμετρος ρύθμισης και $P(u,v)$ ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης που περιέχει το smoothness criterion.Η παράμετρος ρύθμισης συνήθως επιλέγεται πειραματικά και εξαρτάται συνήθως από την εφαρμογή. Πιο συχνά ως συνάρτηση ομαλοποίησης χρησιμοποιείται το

Laplacian filter mask. Οι παραπάνω ιδιότητες κάνουν τον CLS πιο κατάλληλο για μεγάλα επίπεδα θορύβου.

-Το φίλτρο constrained least squares προέρχεται από την ελαχιστοποίηση του κριτηρίου $Q(f) = \|g - H * f\|^2 + a * \|C * f\|^2$ **όπου g και f είναι η παραμορφωμένη και η αρχική εικόνα Η, C οι μάσκες των φίλτρων παραμόρφωσης και ανακατασκευής. Δώστε την μαθηματική μορφή του φίλτρου που προκύπτει από την επίλυση του κριτηρίου** $R(f) = \|g - H * f\|^2 + a * \|C * (f - f_0)\|^2$ **όπου f0 είναι μια γνωστή εικόνα. Δίνεται ότι,** $\frac{\partial}{\partial f} f'H'Hf = H'Hf$ **και ότι** $\frac{\partial}{\partial f} g'Hf = \frac{\partial}{\partial f} f'H'g = H'g$ **:**

Η μαθηματική του μορφή είναι η εξής. $\|g - Hf\|^2 + a\|Cf\|^2 = (g - Hf)^T (g - Hf) + a(Cf)^T (Cf) = g^T g - g^T Hf - f^T H^T g + f^T H^T Hf + af^T C^T Cf$. Οπότε $\frac{\partial a(f)}{\partial f} = -H^T g - H^T g + 2H^T Hf + 2aC^T Cf$. Το θέλουμε ίσο με μηδέν για να βρούμε το ελάχιστο. Οπότε $-H^T g + H^T Hf + aC^T Cf = 0 \Rightarrow (H^T H + aC^T C) f = H^T g \Rightarrow f = H^T g (H^T H + aC^T C)^{-1}$. Και παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier έχουμε ότι $F(u,v) = [H^*(u,v)/((\mathrm{H}(u,v)^2 + a * C(u,v)^2] * G(u,v)$.

-Έστω μια 8 bit εικόνα με εντάσεις rk από 0-255 που παρατηρούνται με πιθανότητες p(rk). 1) Σχεδιάστε τα βήματα μετασχηματισμού έντασης που συγκεντρώνει το 5% των σκοτεινότερων pixels μιας εικόνας στο μηδέν. Το 5% των φωτεινότερων pixels στο 255 και μετασχηματίζει γραμμικά τα υπόλοιπα pixels από 0 σε 255. 2) Σχεδιάστε τα βήματα μετασχηματισμού ιστογράμματος που καταλήγει σε δυαδική (ασπρόμαυρη) εικόνα με ιστόγραμμα ½ στην τιμή 0 και ½ στην τιμή 255. 3) Εφαρμόστε τον πρώτο μετασχηματισμό σε εικόνα με α) ομοιόμορφο ιστόγραμμα και β) με τριγωνικό ιστόγραμμα από εντάσεις 0 έως 255. 4) Εφαρμόστε τον δεύτερο μετασχηματισμό σε εικόνα με α) ομοιόμορφο ιστόγραμμα και β) με τριγωνικό ιστόγραμμα από εντάσεις 0 έως 255. :

```
function [ h_out ] = getHist( L, image_in )
```

```
%Ypologizei kai epistrefei to istogramma ths grayscale eikonas eisodou
[lines,cols] = size(image_in);
%Sozoume to plithos grammwn %kai to plithos sthlwn mias eikonas
h = zeros(L,1);
 %vector gia na swsoume to arxiko istogramma ths eikonas
for i=1:lines for j=1:cols h(image_in(i,j)+1) = h(image_in(i,j)+1) + 1; end end h_out = h;
function [ P_out ] = getCDF( L,h,image_in )
%Cumulative Distribution Function (athroistikh synarthsh
%pithanotitas) enos istogrammatos
[lines,cols] = size(image_in);
%Sozoume to plithos grammwn %kai to plithos sthlwn mias eikonas
P = zeros(L,1);
%edo tha ypologisoume thn synarthsh athroistikhs pithanotitas
for g=1:L P(g) = (1/(lines*cols))*sum(h(1:g)); end P_out = P; function [ image_out ] =
DarkenDark_WhitenWhite( L,P,image_in )
 %Kanei to 5% twn pixel pou einai pio skoteina teleiws black %to 5% twn pixel pou einai
pio fwteina teleiws white %kai katenemei tis endiameses times grammika apo 0 ews 255
%Exoume to 5% twn eikonostoixeiwn pou einai ta pio skoteina %Opote orizoume ena
orio gia na thimomaste auta ta pio skoteina pixel %mporei na prokyptoun oles apo 0 ews
kai 63 gia paradeigma
bottomThreshold = max(find(P<=0.05));
%Paromoiws ola ta bits pou briskontai panw apo to 95% ths %athroistikhs synarthshs
pithanotitas apoteloun ola ta pixels %pou antistoixoun stis ypsiloteres fwteinotites
topThreshold = min(find(P>=0.95));
%Arxizoume na ypologizoume thn synarthsh metasxhmatismou twn fwteinotitwn
T=fix(L*P);
 %Ta 5% twn skoteinoterwn pixel ginontai teleiws black T(1:bottomThreshold)=0;
%Ta 5% twn fwteinoterwn pixel ginontai teleiws white T(topThreshold:L)=L-1;
%Ta endiamesa pixels metasxhmatizontai grammika apo 0 ews 255
len = topThreshold-bottomThreshold-1;
%mikos endiameswn timwn fwteinotitas
T(bottomThreshold+1:topThreshold-1)=fix(0:L/len:255);
image_out=uint8(T(image_in+1)); function [ image_out ] = BnW( L,P, image_in )
%Kanei thn eikona dyadikh black n white %briskoume to threshold gia na xwrisoume to
50% twn pixel pou einai pio %skoteina kai 50% twn pixel pou einai pio fwteina
middleThreshold= max(find(P<=0.5)); T=zeros(256,1); T(1:middleThreshold-1)=0;
%ola ta pio skoteina black
T(middleThreshold:L)=255;
 %ola ta pio fwteina white image_out=uint8(T(image_in+1));
```

{Και τέλος το κυρίως matlab για την άσκηση}

```
 %Douleuoume panw se grayscale bmp eikones
clear all; close all; clc; L=256;
%tha kataskeuasoume mia eikona pou exei omoiomorfo istogrammaws ekshs: %Tha
paroume gia paradeigma mia eikona me analysh 256 grammes kai 100 %sthles. Se kathe
```

pixel mias olokliris seiras tha to thetoume iso me to %index ths grammhs meion ena. Diladi sthn prwth seira tha einai ola ta %pixels miden, sthn deuterh ola ta pixels 1, sthn trith ola ta pixels 2, %... sthn 256h ola ta pixels 255. Opote kathe foteinotita tha exei 100 %pixels pou antistoixoun se auth. Etsi tha prokypsei ena omoiomorfo %histogram.
unImage = zeros(256,100); for i=1:256 unImage(i,:) = i-1; end unImage = uint8(unImage);
%efarmozoume ton prwto kai deutero metasxhmatismo sthn eikona me to %omoiomorfo istogramma
h=getHist(L,unImage); P=getCDF(L,h,unImage); a_unImage = DarkenDark_WhitenWhite(L,P,unImage); b_unImage = BnW(L,P,unImage);
clear h; clear P;
%Tora theloume na kataskeuasoume mia eikona me trigwniko istogramma. %Prwta kataskeuazoume manually to istogramma
for i=1:L/2 h(i)=(i-1)*10+5; h(L-i) = h(i); end
%ara etsi opws to ftiaksame tha exoume 5 pixels gia intensity 0, 15 gia %intensity 1, 25 gia intensity 35...1275 pixels gia intensity 127, episis
%1275 pixels gia intensity 128, 1265 gia intensity 129,... 5 pixels gia 255 %synolika diladi exoume sum(h)=162565 pixels. Mia eikona me analysh %205*793 tha mas dwsei auto akribws ton arithmo pixels.
theImage = zeros(205,793); m=1; k=1; for i=1:L for j=1:h(i) theImage(m,k)=i-1; k=k+1; if(k==794) k=1; m=m+1; end end end P=getCDF(L,h,theImage); a_theImage = DarkenDark_WhitenWhite(L,P,theImage); b_theImage = BnW(L,P,theImage);

-Να γραφτεί κώδικας MATLAB για το φίλτρο Wiener :

close all; clear all; clc; [A,map]=imread('testimage.bmp'); figure(1); colormap(map); imshow(A); title('original image');
%Gaussian filtering
Gaussian_filter = fspecial('gaussian',[3,3]); im_gaussian=imfilter(A,Gaussian_filter); figure(2); colormap(map); imshow(im_gaussian); title('Image right after applying Gaussian filter 3x3');
%Add Gaussian noise
s=0.01; m=0;im_Gnoise = imnoise(im_gaussian,'gaussian',m,s); figure(3); colormap(map); imshow(im_Gnoise); title('After Gaussian filter and AWGN');
%expand using zero padding
h=zeros(256,256); h(1,1)=Gaussian_filter(2,2); h(1,2) =Gaussian_filter(2,3); h(2,1)=Gaussian_filter(3,2); h(2,2)=Gaussian_filter(3,3); h(256,1)=Gaussian_filter(1,2); h(256,2)=Gaussian_filter(3,1); h(1,256)=Gaussian_filter(1,3); h(2,256)=Gaussian_filter(2,1); h(256,256) =Gaussian_filter(1,1);
%Fourier Transforms
H=fft2(h); G=fft2(im_Gnoise); F=fft2(A);
%Spectrums
S_f=(abs(F))^2; S_h=(abs(H))^2;

```
%Arithmiths
 var=conj(H);
%Paronomastis
temp=v*(inv(S_f)); total=S_h+temp; k=var*(inv(total)); RES=k*G;
%res ison result
res=ifft2(RES);
%Ypologizoume th diafora arxikhs kai telikhs eikonas
B=double(A); differ=B-res; Final=uint8(abs(differ)); figure(4); colormap(map);
imshow(F_end);
```

-Να γραφεί κώδικας MATLAB για το CLSR φίλτρο :

```
close all; clear all; clc; m=0;
% mean value of noise
sigma=0.01;
% noise variance
gama=0.01;
%initial value of gama
a=1;
%precision
mi=0.001;
%increasement
[A,map]=imread('fighter','bmp'); figure(1); colormap(map); image(A); title('original
image'); rows=length(A(1:end,1)); columns=length(A);
%Low pass filter
Aver3=fspecial('average',[3,3]);
% Averaging filter Aver_ext=zeros(rows,columns); Aver_ext(1:2,1:2)=Aver3(1);
Aver_ext(1:2,columns)=Aver3(1); Aver_ext(rows,1:2)=Aver3(1);
Aver_ext(rows,columns)=Aver3(1); fft_Aver=fft2(Aver_ext);
% convolution of filter
fft_A=fft2(A);
% and image
A_aver=ifft2(fft_Aver.*fft_A); A_aver=abs(A_aver); A_aver=uint8(round(A_aver));
figure(2); colormap(map); image(A_aver); title('image after averaging filter');
% Add Gaussian noise
A_noise=imnoise(A_aver,'gaussian',m,sigma); figure(3); colormap(map);
image(A_noise); title('image with white Gaussian noise of m=0');
A_noise2=zeros(rows,columns); A_noise2(1:end)=A_noise(1:end); A_noise=A_noise2;
Mitra=[0 -1 0;-1 4 -1;0 -1 0]; Mitra_ext=zeros(rows,columns);
Mitra_ext(1:2,1:2)=Mitra(2:3,2:3); Mitra_ext(1:2,columns)=Mitra(2:3,1);
Mitra_ext(rows,1:2)=Mitra(1,2:3); Mitra_ext(rows,columns)=Mitra(1);
P=fft2(Mitra_ext);
% fft of Mitra
```

```
F=fft2(A);  G=fft2(A_noise);  H=fft2(Aver_ext);  n=(rows-1)*(columns-
1)*(sigma^2+(m^2)); while(1) F_=(conj(H)./( (abs(H).^2) +gama.*(abs(P).^2) )).*G;
% estimation of new's image fourier
f_=abs(ifft2(F_));
% ifft of estimated fourier
r=A_noise-(round(abs(ifft2(H.*F_))));
 % estimation of pixel errors r=r.^2; r=mean(r(1:end)); sfalmata=sqrt(r); if(sfalmata<(n-
a)) gama=gama+mi; elseif(sfalmata>(n+a)) gama=gama-mi; elseif(sfalmata>(n-a) &&
sfalmata<(n+a)) break; end; end; figure(4);
% estimated image
colormap(map); image(f_); title('estimated image');
```

-Να υπολογιστεί η δισδιάστατη συνέλιξη… :

$$y(n1,n2) = x * h = \sum_{k1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k2=-\infty}^{+\infty} x(k1,k2)\, h(n1-k1, n2-k2)$$

Στην συνέλιξη η τιμή ενός pixel υπολογίζεται ως το άθροισμα των βαρών των γειτονικών pixel. Ο πίνακας καλείται convolution kernel. Δηλαδή για να υπολογίσουμε εύκολα χωρίς να μπλέκουμε με τον τύπο της συνέλιξης αν μας δίνεται το kernel ως για παράδειγμα h=[8 1 6;3 5 7;4 9 2] τότε περιστρέφουμε κατά 180 μοίρες το convolution kernel γύρω από το κέντρο του οπότε θα παίρναμε h=[2 9 4;7 5 3;6 1 8] και τότε πηγαίνουμε σε κάθε pixel που μας ενδιαφέρει και στο κέντρο αυτού του πίνακα αντιστοιχούμε το pixel ενδιαφέροντος. Οπότε όπως έχουμε έτσι από πάνω τον πίνακα πολλαπλασιάζουμε με ότι βλέπουμε από κάτω και στο τέλος τα προσθέτουμε όλα μαζί και το αποτέλεσμα είναι η νέα τιμή του pixel ενδιαφέροντος μετά την συνέλιξη. Αν μας ζητάνε να υπολογίσουμε την επίδραση ενός **correlation kernel** τότε κάνουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία μόνο που η συμπίεση δεν είναι απαραίτητη.

-Υπολογισμός της θέσης ενός αντικειμένου :

$$\bar{x} = \frac{M(1,0)}{A} \text{ και } y = \frac{M(0,1)}{A} \text{ όπου } A = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} b(i,j) \text{ και } M(k,l) = \sum\sum_{\text{για όλη την επιφάνεια του αντικειμένου}} x^k y^l b(i,j)$$

-Κωδικοποίηση κατά μήκος μιας διαδρομής (Run Length Encoding) :

Στην RLE κωδικοποίηση χρησιμοποιούνται κυρίως δύο προσεγγίσεις. Σημειώστε πως αναφερόμαστε σε binary εικόνες. Στην πρώτη προσέγγιση χρησιμοποιούνται τα μήκη των διαδοχικών συστοιχιών των εικονοστοιχείων με τιμή '1' για κάθε θέση. Στην

δεύτερη χρησιμοποιούνται μόνο τα μήκη των διαδρομών αρχίζοντας με την πρώτη διαδρομή από εικονοστοιχεία με τιμή '1'.

-Συνδετικότητα (Connectivity): 4-*adjacency*. Two pixels p and q with values from *V* are 4-adjacent if q is in the set *N*4(p). **(b)** 8-*adjacency*. Two pixels p and q with values from *V* are 8-adjacent if q is in the set *N*8(p).
(c) *m-adjacency* (mixed adjacency).Two pixels p and q with values from *V* are m-adjacent if **(i)** q is in *N*4(p), *or* **(ii)** q is in *N*D(p) *and* the set has no pixels whose values are from *V*. Το V είναι υποσύνολο των τιμών που μπορεί να λάβει ένα pixel. Για παράδειγμα αν έχουμε 3 bits σε ένα pixel τότε το V μπορεί για παράδειγμα να είναι το {0,1,7}.

-Φίλτρο μέσης τιμής (mean filter) : Πρακτικά ένα 3x3 φίλτρο μέσης τιμής μπορεί να υλοποιηθεί με μια μάσκα της μορφής: 1/9[1 1 1;1 1 1;1 1 1].

-Μάσκα Sobel : Για την εύρεση ακμών με χρήση πρώτων παραγώγων.

G_r=[-1 0 1;-2 0 2;-1 0 1] και G_c=[1 2 -1;0 0 0;-1 -2 -1].

-Μάσκες δευτέρας παραγώγου : Laplacian είναι η

[0 1 0; 1 -4 1;0 1 0] άλλες δύο είναι οι [1 1 1;1 -8 1;1 1 1], [-1 2 -1;2 -4 2;-1 2 -1].

-Τοπική μεταβλητότητα : Δηλαδή η διασπορά σε δύο διαστάσεις είναι

$$\sigma^2(n,m)=\frac{1}{(2M+1)^2}\sum_{i=n-M}^{n+M}\sum_{j=m+M}^{m+M}(f(i,j)-m(n,m))^2$$

-Το θέμα αυτό εξετάζει την εφαρμογή φίλτρων σε εικόνα. Δίνεται μια εικόνα f(k,l) k=-apeiro,...,+apeiro και l=-apeiro,...,+apeiro, με ομοιόμορφα κατανεμημένη ένταση που παρουσιάζει μια έντονη κατακόρυφη ακμή. Πιο συγκεκριμένα η εικόνα έχει ένταση 50 εκτός από τη στήλη l=0 όπου έχει ένταση που παρουσιάζει μια έντονη κατακόρυφη ακμή. Δίδεται ακόμη το κεντραρισμένο 5x5 Laplacian φίλτρο δεύτερης παραγώγου: [0 0 -1 0 0;0 -1 -2 -1 0;-1 -2 +16 -2 -2;0 -1 -2 -1 0;0 0 -1 0 0]. 1. Εφαρμόστε το φίλτρο στην εικόνα, αγνοώντας τις επιδράσεις στα άκρα της εικόνας. 2. Πως μπορούμε να εντοπίσουμε τις ακμές τις εικόνας? 3. Είναι γνωστό ότι το φίλτρο αυτό αποτυγχάνει στον εντοπισμό των ακμών όταν υπάρχει θόρυβος. Γιατί??? Προτείνετε ένα σχηματικό διάγραμμα εφαρμογής αυτού του φίλτρου που ξεπερνά τα προβλήματα του θορύβου. :

1. Θα κάνουμε συνέλιξη του δοθέντος πίνακα με το στοιχείο που βρίσκεται στην στήλη l=0 με ένταση 200 και σε μια ενδιάμεση γραμμή καθώς και στα οχτώ γειτονικά του pixel για να δούμε και τι τιμές παίρνουν αυτά μετά την συνέλιξη. Άρα για να γίνει σωστά η συνέλιξη πρέπει να περιστρέψουμε το kernel κατά 180 μοίρες όπου προκύπτει και ο ίδιος πίνακας. Οπότε εφαρμόζοντας την συνέλιξη για το κεντρικό στοιχείο έχουμε ότι μια υποπεριοχή 5x5 γύρω από το pixel ενδιαφέροντος είναι [50 50 200 50 50; 50 50 200 50 50; 50 50 200 50 50; 50 50 200 50 50; 50 50 200 50 50] και κάνοντας συνέλιξη με το kernel έχουμε 50*0+50*0+200*(-1)+50*0+50*0 + 50*0+50*(-1)+200*(-2)+50*(-1)+50*0 + 50*(-1)+50*(-2)+200*16+50*(-2)+50*(-1) + 50*0+50*(-1)+200*(-2)+50*(-1)+50*0 + 50*0+50*0+200*(-1)+50*0+50*0 = 1500. Εφαρμόζοντας το ίδιο για το πάνω και το κάτω pixel έχουμε πάλι 1500. Ενώ για τα pixels που βρίσκονται αριστερά, δεξιά και τα άλλα τέσσερα διαγώνια έχουμε -600. Οπότε στην νέα εικόνα στην υποπεριοχή που περιγράψαμε προηγουμένως θα έχουμε τον πίνακα [-600 -600 1500 -600 -600; -600 -600 1500 -600 -600; -600 -600 1500 -600 -600; -600 -600 1500 -600 -600; -600 -600 1500 -600 -600]. 2. Άρα εξετάζοντας τις διαφορές μεταξύ των γειτονικών pixel μπορούμε να εκτιμήσουμε τις ακμές της εικόνας. 3. Η λύση για την μείωση του θορύβου δίνεται με χρήση του ενός φίλτρου Gaussian πριν περάσουμε την εικόνα από Laplacian. Αυτό γίνεται πιο αποδοτικά περνώντας την εικόνα από το φίλτρο LoG, βλέπε παραπάνω στη θεωρία για περισσότερα όσον αφορά αυτό το ερώτημα.

-Έστω r το κανονικοποιημένο επίπεδο γκρίζου ($0 \le r \le 1$) που θεωρείται συνεχής μεταβλητή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του r δίνεται ως pr(r) = (-2r + 2) όταν $0 \le r \le 1$ και μηδέν αλλού. α) Να βρείτε τον μετασχηματισμό T(r) της τυχαίας μεταβλητής r σε ομοιόμορφη. β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της νέας μεταβλητής είναι πράγματι ομοιόμορφη :

Ο μετασχηματισμός T(r) που μετατρέπει την κατανομή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής r σε ομοιόμορφη (ισοστάθμιση ιστογράμματος) είναι

$$T(r) = \int_0^r p_r(w)dw \quad 0 \le r \le 1$$

Για τη συγκεκριμένη μεταβλητή r ο μετασχηματισμός αυτός θα είναι:

$$s = T(r) = \int_0^r (-2w+2)dw = \left[-w^2 + 2w\right]_0^r = -r^2 + 2r\,.$$

β) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της προκύπτουσας τυχαίας μεταβλητής s δίνεται από την σχέση:

$$p_s = \left[\frac{p_r(r)dr}{ds} \right]_{r=T^{-1}(s)}$$

Από το μετασχηματισμό $s = T(r)$ που υπολογίστηκε στο (α) μέρος της άσκησης, υπολογίζεται η παράγωγος $\frac{ds}{dr}$ και από αυτήν η παράγωγος $\frac{dr}{ds}$.

Άρα έχουμε,

$$\frac{ds}{dr} = -2r + 2 \Rightarrow \frac{dr}{ds} = \frac{1}{-2r+2}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $r = T^{-1}(s)$ ισούται με $r = T^{-1}(s) = 1 \pm \sqrt{1-s}$

Η λύση απορρίπτεται επειδή θα πρέπει να ισχύει $0 \le r \le 1$. Τελικά η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της νέας μεταβλητής s προκύπτει

$$p_s(s) = \left[\frac{(-2r+2)dr}{ds} \right]_{r=1-\sqrt{1-s}} = \left[(-2r+2) * \frac{1}{(-2r+2)} \right]_{r=1-\sqrt{1-s}} = 1.$$

Διαπιστώνεται επομένως ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της προκύπτουσας τυχαίας μεταβλητής s είναι ομοιόμορφη.

Βιβλιογραφία

[1] B. Gilbert, "Translinear Circuits: A Proposed Classification,"

Electronics Letters , vol. 11, no.1, pp. 14–16, 1975, See also errata, vol. 11, no. 6, p. 136, 1975.

[2] W. L. Paterson,"Multiplication and Logarithmic Conversion by Operational Amplifier Transistor Circuits," Review of Scientific Instruments, vol. 34, no. 12, pp. 1311–1316, 1963.

[3] B. Gilbert, "A DC–500MHz Amplifier/Multiplier Principle," in Digest of Technical Papersof the 1968 International Solid-State Circuits Conference, Philadelphia, PA, pp. 114–115,1968.

[4] B. Gilbert, "A Precise Four-Quadrant Multiplier with Subnanosecond Response," IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. SC-3, no. 4, pp. 365–373, 1968.

[5] H. Brüggemann, "Feedback Stabilized Four-Quadrant Analog Multiplier," IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. SC-5, no. 4, pp. 150–159, 1970.

[6] K. G. Schlotzhauer and T. R. Viswanathan, "New Bipolar Analogue Multiplier,"

Electronics Letters, vol. 8, no. 16, pp.425–427, 1972.

[7] B. Gilbert, "A High-Performance Monolithic Multiplier Using Active Feedback,"

IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. SC-9, no. 6, pp. 364–373, 1974.

[8] B. Gilbert, "A NewWide-Band Amplifier Technique," IEEE Journal of Solid-

State Circuits,vol. SC-3, no. 4, pp. 353–365, 1968.

[9] R. W. J. Barker and B. L. Hart,"Root-Law Circuit Using Monolithic Bipolar-

Transistor Arrays," Electronics Letters, vol. 10, no. 21, pp. 439–440, 1974.

[10] B. Gilbert, "Current-Mode Circuits froma Translinear Viewpoint: A Tutorial," in

Analogue IC Design: The Current-Mode Approach, C. Toumazou, F. J. Lidgey, and D. G. Haigh, Eds., chapter 2, pp. 11–91. Peter Peregrinus, London, 1990.

[11] B. Gilbert, "Translinear Circuits—25 Years On, Part I: The Foundations," Electronic

Engineering, vol. 65, no. 800, pp. 21–24, 1993.

[12] B. Gilbert, "Translinear Circuits: An Historical Review," Analog Integrated Circuits and Signal Processing, vol. 9, no. 2, pp. 95–118, 1996.

[13] B.Gilbert and P. Holloway, "A Wideband Two-Quadrant Analog Multiplier," in

Digest of Technical Papers of the 1980 International Solid-State Circuits Conference, San Francisco,CA,pp. 200–201,1980.

[14] J. H. Huijsing, P. Lucas, and B. de Bruin, "Monolithic Analog Multiplier-

Divider," IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. SC-17, no. 1, pp. 9–15, 1982.

[15] B. Gilbert, "A Four-Quadrant Analog Divider/MultiplierWith 0.01% Distortion," in

Digest of Technical Papers of the 1983 International Solid -State Circuits Conference,

Philadelphia,PA, pp. 248–249,1983.

[16] A.Fabre, "An Integrable Multiple Output Translinear Current Convertor,"

International Journal of Electronics, vol. 57, no. 5, pp. 713–717, 1984.

[17] A .Fabre, "Translinear Current Conveyor Implementation,"

International Journal of Electronics , vol. 59, no. 5, pp. 619 –623, 1985.

[18] G. Normand, "Translinear Current Conveyors," International Journal of Electronics

, vol. 59,no. 6, pp. 771–777, 1985.

[19] S Ashok, "Integrable Sinusoidal Frequency Doubler," IEEE Journal of Solid-

State Circuits,vol. SC-11, no. 2, pp. 341–343, 1976.

[20] R. Genin and R. Konn, "Sinusoidal Frequency Doubler," Electronics Letters, vol. 15, no. 2, pp. 47–48, 1979.

[21] R. Konn and R. Genin, "High-Performance Aperiodic Frequency Multiplying,"

Electronics Letters, vol. 15, no. 6, pp. 187–189, 1979.

[22] W. Surakampontorn, S. Jutaviriya, and T. Apajinda, "Dual Translinear Sinusoidal

Frequency Doubler and Full-Wave Rectifier," International Journal of Electronics, vol. 65, no. 6, pp. 1203–1208, 1988.

[23] A. Fabre, "The Translinear Operational Current Amplifier: A New Building Block,"

International Journal of Electronics, vol. 60, no. 2, pp. 275–279, 1986.

[24] A.Fabre and P.Rochegude, "Current Processing Circuits With Translinear Operational Current Amplifiers," International Journal of Electronics, vol. 63, no. 1, pp. 9–28, 1987.

[25] A. Fabre, "Translinear Current-Controlled Current-Amplifier," Electronics Letters, vol. 24,no. 9, pp. 548–549, 1988.

[26] C. Toumazou, F. J. Lidgey, and M. Yang, "Translinear Class-AB Current-Amplifier," Electronics Letters, vol. 25, no. 13, pp. 873–874, 1989.

[27] B. Gilbertand L.W.Counts,"A Monolithic RMS-DC Convertor With Crest -Factor

Compensation,"in Digest of Technical Papers of the 1976 International Solid-State Circuits Conference,Philadelphia, PA,pp. 110–111,1976.

[28] E. Seevinck, R. F.Wassenaar, and C. K.Wong, "A Wide -Band Technique for Vector Summation and RMS–DC Conversion," IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. SC-19, no.3, pp.311–318, 1984.

[29] R.F. Wassenaar, E. Seevinck, M. G.van Leeuwen, C. J. Speelman, and E. Holle, "New Techniques for High-Frequency RMS-to-DC Conversion Based on a Multifunctional V-to-I Convertor," IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. 23, no. 3, pp. 802–815, 1988.

[30] D. R. Frey, "Explicit Log-Domain Root-Mean-Square Detector," U.S. Patent No.

5,585,757,1996.

[31] J. Mulder, W. A. Serdijn, A. C. van der Woerd, and A. H. M. van Roermund,

"Dynamic Translinear RMS-DC Converter," Electronics Letters , vol. 32, no. 22, pp.

2067–2068, 1996.

[32] J. Mulder, A. C. van der Woerd,W. A. Serdijn, and A. H. M. van Roermund, "An RMS-DC Converter Based on theDynamic Translinear Principle," IEEE Journal of Solid-StateCircuits, vol. 32, no. 4, pp. 1146–1150, 1997.

[33] S. Ashok, "Translinear Root-Difference-of-Squares Circuit," Electronics Letters, vol. 12, no.8, pp. 194–195, 1976

[34] B. Gilbert, "High-Accuracy Vector-Difference and Vector-SumCircuits," Electronics Letters,vol. 12, no. 11, pp. 293–294, 1976.

[35] F. Doorenbosch and Y. Goinga, "Integrable,Wideband, Automatic Volume Control

(A.V.C.)Using Pythagoras's Law for Amplitude Detection," Electronics Letters, vol. 12,

no. 16, pp.418–420, 1976.

[36] C. K.Wong, R. F.Wassenaar, and E. Seevinck, "AWideband Accurate Vector-Sum Circuit,"in Proceedings of the 1983 European Solid-State Circuits Conference, pp.135–138,1983.

[37] E. Seevinck, Analysis and Synthesis of Translinear Integrated Circuits, D.Sc., University ofPretoria, Pretoria, South Africa, 1981.

[38] E. Seevinck, Analysis and Synthesis of Translinear Integrated Circuits, Elsevier, Amsterdam,1988.

[39] R.W.Adams, "Filtering in the Log Domain," Presented at the 63rdAudio Engineering SocietyConvention, Los Angeles, CA, Preprint 1470, 1979.

[40] E.Seevinck, "Companding Current-Mode Integrator: A New Circuit Principle for

Continuous-Time Monlithic Filters," Electronics Letters, vol. 26, no. 24, pp. 2046–2047, 1990.

[41] D. R. Frey, "Log-Domain Filtering: An Approach to Current-Mode Filtering,"

IEE Proceedings G, vol. 140, no. 6, pp. 406–416, 1993.

[42] W. A.Serdijn,J. Mulder, and A. H. M. van Roermund,"Shortening the Analog Design Trajectory by Means of the Dynamic Translinear Principle," in Proceedings of the 1997 Pro RISC Workshop on Circuits, Systems and Signal Processing, Mierlo,The Netherlands, November,pp. 483–489, 1997.

[43] J.Mulder,W.A. Serdijn,A.C,V.D. Woerd, A. H.M. van Roermund, "Dynamic

Tanslinear Circuits—An Overview," in Proceedings of the Second IEEE-CAS Region

8Workshop on Analog and Mixed IC Design , Baveno, Italy, pp. 65–72,1997.

[44] W. A. Serdijn, J. Mulder, P. Poort, Michiel Kouwenhoven, Arie van Staveren, and A. H. M.van Roermund, "Dynamic Translinear Circuits," in Analog Circuit Design: Volt

Electronics;Mixed-Mode Systems; Low-Noise and RF Power Amplifiers for Telecommunication, J. Huijsing,R. van de Plassche, andW. Sansen, Eds., pp. 3–32. Kluwer, Boston, 1999.

[45]J. Mulder, W. A. Serdijn, A. C. van der Woerd, and A. H. M. van Roermund,

Dynamic Translinear and Log -Domain Circuits: Analysis and Synthesis, Kluwer, Boston, 1999.

[46] D. R. Frey, "Exponential State Space Filters: A Generic Current -Mode Design

Strategy,"IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 43,no. 1, pp. 34–42, 1996.

[47] D.Perry and G. W. Roberts, "The Design of Log -Domain Filters Based on the Operational Simulation of lc Ladders," IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing , vol. 43, no. 11, pp. 763–774, 1996.

[48] S. I. Liu andY. H. Liao, "Table-Based Log-Domain Linear Transformation Filter," Electronics Letters , vol. 32, no. 19, pp. 1771–1772, 1996.

[49] E. M. Drakakis,A. J. Payne, C. Toumazou, "Bernoulli Operator: A Low -Level Approach to Log- Domain processing," Electronics Letters , vol. 33, no. 12, pp. 1008–1009, 1997.

[50] J.Mulder,W.A. Serdijn,A. C. van derWoerd, and A. H.M. van Roermund, "A Current-Mode Synthesis Method for Translinear Companding Filters," in Proceedings of the Fourth IEEE InternationalConference on Electronics, Circuits, and Systems , Cairo, vol. 3,pp. 1419–1422,1997.

[51] E.M. Drakakis,A. J. Payne, and C. Toumazou,"Multiple Feedback Log -Domain Filters," inProceedings of the 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Monteray,CA, vol. 1, pp. 317–320,1998.

[52] E.M. Drakakis, A. J. Payne, C. Toumazou,"Log -Domain State-Space:" A Systematic Transistor-Level Approach for Log-Domain Filtering," IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing , vol. 46, no. 3, pp. 290–305, 1999.

[53] C. Enz andM. Punzenberger,"1-VLog-Domain Filters," in Analog Circuit Design: Volt Electronics;Mixed-Mode Systems; Low-Noise and RF Power Amplifiers for Telecommunication,J. Huijsing, R. van de Plassche,W. Sansen, Eds., pp. 33–67 Kluwer, Boston, 1999.

[54] S. Pookaiyaudom,J. Mahattanakul,"A 3.3Volt High-Frequency Capacitorless Electronically -Tunable Log-Domain Oscillator," in Proceedings of the 1995 IEEE International Symposium on Circuits and Systems , Seattle,WA, vol. 2, pp. 829–832,1995.

[55] A. Thanachayanont, S. Pookaiyaudom, and C. Toumazou,"State -Space Synthesis of Log-Domain Oscillators," Electronics Letters, vol. 31, no. 21, pp. 1797–1799, 1995.

[56] W. A. Serdijn, J.Mulder, A. C. van derWoerd, andA. H.M. van Roermund, "Design of Wide-Tunable Second-Order Translinear Oscillators," in Proceedings of the 1997

IEEE International Symposium on Circuits and Systems , Hong Kong, vol. 2, pp. 829–832,1997.

[57] W. A. Serdijn, J.Mulder, A. C. van derWoerd, andA. H.M. van Roermund, "A Wide-

Tunable Translinear Second - Order Oscillator," IEEE Journal of Solid-State Circuits , vol. 33, no. 2,pp. 195–201, 1998.

[58] A. Payne and A. Thanachayanont,"Translinear Circuit for Phase Detection," Electronics Letters , vol. 33, no. 18, pp. 1507 – 1509, 1997.

[59] A.Thanachayanont and A. Payne, "A Current -Mode Phase- Locked Loop Using a Log- Domain Oscillator," in Proceedings of the 1997 IEEE International Symposium on Circuits and Systems,Hong Kong, vol. 1, pp. 277–280,1997.

[60] A. Payne,A. Thanachayanont, and C. Papavassilliou, "A 150-MHz Translinear Phase- Locked Loop," IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing ,vol . 45, no. 9, pp. 1220–1231, 1998.

[61] Γ. Μουστακίδης, Βασικές Τεχνικές Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων, Εκδ. Τζιόλας, 2003

[62] S.K. Mitra, Digital Signal Processing, a Computer-Based Approach, 2-nd edition, McGraw-Hill, 2001

[63] Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων & Συστημάτων, 1998.

[64] Α. Σκόδρας & Β. Αναστασόπουλος, Εισαγωγή στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος και Εικόνας, Παν/μιο Πατρών, 2000

[65] Ν. Ασημάκης , Σήματα, Συστήματα και Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων, GUTENBERG, 2008.

[66] Γ. Π. Σύρκος, Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος, 3η Έκδοση, Αθήνα, 2002.