

ΑΝΩΤΑΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ ΤΤ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ-ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ
ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΔΙΝΩΝ (LES)**

**(PARAMETRIC STUDY OF TURBULENT PIPE FLOW USING LES
METHODOLOGY)**

ΚΩΤΣΙΑΝΤΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Επιβλέπων Καθηγητής: ΝΙΚΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ - ΣΤΕΦΑΝΟΣ

Πειραιάς, 2017

Copyright © Κωτσιαντής Γεώργιος, 2017.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τους συγγραφείς.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του ΑΕΙ ΤΤ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Κρίνεται σκόπιμο να εκφραστούν οι ειλικρινείς ευχαριστίες μου προς όσους βοήθησαν τοιουτοτρόπως στην εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Αρχικά στον επιβλέποντα Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων-Μηχανικών ΤΕ του Α.Ε.Ι. Τ.Τ. Πειραιά, κ. Κωνσταντίνου - Στέφανου Νίκα, για την πολύτιμη καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας καθώς και για την επιείκεια και υπομονή του.

Στους καθηγητές του τμήματος μου για τις γνώσεις που μου μετέδωσαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος στην οικογένειά μου για τη διαρκή στήριξη της καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και στη συνεχή βοήθεια που μου παρέχουν για την εκπλήρωση των στόχων μου.

Χωρίς τη βοήθεια όλων των παραπάνω, η συγγραφή της παρούσας εργασίας θα ήταν αναμφίβολα δυσκολότερη.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....σελ.6

Α' Θεωρητικό Μέρος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Βασικές Έννοιες της Ρευστομηχανικής

- 1.1 Εισαγωγή στη Ρευστομηχανική
 - 1.1.1 Σκοπός της Ρευστομηχανικής.....σελ.7
 - 1.1.2 Ιστορία της Ρευστομηχανικής.....σελ.7
 - 1.1.3 Ορισμός του Ρευστού.....σελ.8
 - 1.1.4 Συνεχές Μέσο.....σελ.10
 - 1.1.5 Ιδεώδες Ρευστό.....σελ.10
 - 1.1.6 Συνεκτικότητα (ή Ιξώδες).....σελ.11
 - 1.1.7 Συμπίεστα και Ασυμπίεστα Ρευστά.....σελ.11
 - 1.1.8 Είδη Ροής.....σελ.12
 - 1.1.9 Τροχιές Στοιχείων Ρευστού και Γραμμές Ροής.....σελ.13
 - 1.1.10 Ρυθμός Μεταβολής Μάζας και Μέση Ταχύτητα.....σελ.13
- 1.2 Βασικές Εξισώσεις της Ρευστομηχανικής
 - 1.2.1 Σύστημα και Όγκος Ελέγχου.....σελ.14
 - 1.2.2 Κύριες Μέθοδοι Ανάλυσης Ροής Ρευστών.....σελ.14
 - 1.2.3 Διατηρητικές Αρχές της Ρευστομηχανικής.....σελ.15
 - 1.2.4 Το Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds.....σελ.16
 - 1.2.5 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Συνέχειας, Ορμής και Ενέργειας.....σελ.17
 - 1.2.6 Διαφορές μεταξύ Ολοκληρωτικών και Διαφορικών Εξισώσεων.....σελ.19
 - 1.2.7 Οριακές και Αρχικές Συνθήκες.....σελ.20
 - 1.2.8 Διαφορικές Εξισώσεις Συνέχειας, Ορμής και Μηχ. Ενέργειας.....σελ.20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Ροή σε Αγωγούς

- 2.1 Εισαγωγή στους Αγωγούς.....σελ.24
- 2.2 Βασικές Γνώσεις
 - 2.2.1 Τραχύτητα Επιφανειών.....σελ.25
 - 2.2.2 Κρίσιμος Αριθμός Reynolds σε Αγωγούς.....σελ.25
 - 2.2.3 Υδραυλική Ακτίνα και Υδραυλική Διάμετρος.....σελ.25
 - 2.2.4 Απώλειες Ενέργειας.....σελ.26
 - 2.2.5 Συντελεστής Τριβής.....σελ.26
 - 2.2.6 Σπηλαίωση.....σελ.27
- 2.3 Ιξώδης Ροή σε Αγωγούς Κυκλικής Διατομής
 - 2.3.1 Στρωτή και Τυρβώδης Ροή.....σελ.28
 - 2.3.2 Μήκος Εισόδου.....σελ.28
 - 2.3.3 Στρωτή Ροή σε Αγωγούς Κυκλικής Διατομής.....σελ.29
 - 2.3.4 Τυρβώδης Ροή σε Αγωγούς Κυκλικής Διατομής.....σελ.31

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

- 3.1 Εισαγωγή στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
 - 3.1.1 Ορισμός της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής.....σελ.34
 - 3.1.2 Χρησιμότητα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής.....σελ.34
 - 3.1.3 Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Ροής.....σελ.35
 - 3.1.4 Ιστορία της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής.....σελ.36
- 3.2 Υπολογιστικές (Αριθμητικές) Μέθοδοι
 - 3.2.1 Δυνατότητες και Περιορισμοί Υπολογιστικών Μεθόδων....σελ.37
 - 3.2.2 Συνιστώσες μιας Μεθόδου Υπολογιστικής Επίλυσης.....σελ.38
 - 3.2.3 Ιδιότητες Μεθόδων Υπολογιστικής Επίλυσης.....σελ.40
 - 3.2.4 Διακριτοποίηση των Μεθόδων Υπολογιστικής Επίλυσης...σελ.42
- 3.3 Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων
 - 3.3.1 Εισαγωγή στη Μέθοδο Πεπερασμένων Όγκων.....σελ.44
 - 3.3.2 Διακριτοποίηση Χρόνου και Χώρου.....σελ.44
 - 3.3.3 Προσεγγισμός Ολοκληρωμάτωνσελ.46
 - 3.3.4 Μέθοδοι Παρεμβολής.....σελ.47
 - 3.3.5 Υλοποίηση Αλγεβρικών Συνθηκών και Αλγεβρικό Σύστημα Εξισώσεων.....σελ.48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : Προσομοίωση Τυρβώδους Ροής

- 4.1 Εισαγωγή στη Τυρβώδη Ροή
 - 4.1.1 Ταχύτητα και Πίεση Τυρβώδους Ροής.....σελ.49
 - 4.1.2 Κανόνες Reynolds για Μέσες Χρονικές Στιγμές.....σελ.50
 - 4.1.3 Τάσεις Reynolds.....σελ.51
 - 4.1.4 Ημιεμπειρικές Σχέσεις Τυρβωδών Τάσεων.....σελ.52
 - 4.1.5 Κινητική Ενέργεια Τύρβης.....σελ.54
 - 4.1.6 Χαρακτηριστικά Τυρβώδους Ροής.....σελ.54
- 4.2 Αριθμητικές Προσεγγίσεις Τυρβώδους Ροής
 - 4.2.1 Άμεση Αριθμητική Προσομοίωση.....σελ.56
 - 4.2.2 Προσομοίωση Μεγάλων Δινών.....σελ.61
 - 4.2.3 Μοντέλα των Μέσων κατά Reynolds Εξισώσεων Navier-Stokes.....σελ.66
 - 4.2.4 Μοντέλο Τάσεων Reynolds.....σελ.77
 - 4.2.5 Αλγεβρικό Μοντέλο Τάσεων.....σελ.80
 - 4.2.6 Σύγχρονα Μοντέλα Τύρβης.....σελ.81

Β' Πειραματικό Μέρος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : Επίλυση Τυρβώδους Ροής σε Αγωγό με τη χρήση του Λογισμικού ANSYS Fluent

- 5.1 Εισαγωγή στο λογισμικό ANSYS Fluent.....σελ.89
- 5.2 Διαδικασία επίλυσης τυρβώδους ροής σε αγωγό με χρήση της LES στο λογισμικό ANSYS Fluent.....σελ.91
- 5.3 Διαδικασία επίλυσης τυρβώδους ροής σε αγωγό με χρήση της k-ε στο λογισμικό ANSYS Fluent.....σελ.112
- 5.4 Σύγκριση επίλυσης τυρβώδους ροής σε αγωγό με χρήση των τεχνικών LES και k-ε στο λογισμικό ANSYS Fluent.....σελ.117

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....σελ.119

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....σελ.121

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει ως σκοπό την εκμάθηση του σπουδαστή στον, όλο και περισσότερο χρησιμοποιούμενο, τομέα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics, CFD), καθώς και στην χρήση των υπολογιστικών προγραμμάτων για την επίλυση των ρευστοδυναμικών εφαρμογών. Στόχος της πτυχιακής εργασίας είναι η επίλυση τυρβώδους ροής σε κυκλικό αγωγό, με χρήση της Προσομοίωσης των Μεγάλων Δινών (Large Eddy Simulation), η οποία απαιτεί τρισδιάστατο (3D) περιβάλλον, καθώς και η σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις λύσεις ενός κλασσικού μοντέλου προσομοίωσης της ροής, όπως είναι το μοντέλο $k - \epsilon$.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Εξισώσεις *Navier – Stokes*, Αγωγός, Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων, Υπολογιστική Ρευστοδυναμική, Προσομοίωση Τυρβώδους Ροής, ANSYS Fluent

ABSTRACT

This thesis aims at learning the student the increasingly used field of Computational Fluid Dynamics, as well as the use of computational programs to solve fluid dynamics applications. The aim of the above thesis is the solving of a turbulent flow in a pipe, using Large Eddy Simulation, which requires a 3D environment, as well as the comparison of the results with the solutions of a RANS model, such as $k - \epsilon$.

KEY-WORDS

Navier – Stokes equations, Pipe, Finite Volume method, Computational Fluid Dynamics (CFD), Turbulence Modeling, ANSYS Fluent

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες της Ρευστομηχανικής (Basic Definitions of Fluid Mechanics)

1.1 Εισαγωγή στη Ρευστομηχανική

1.1.1 Σκοπός της Ρευστομηχανικής

Η Ρευστομηχανική (Fluid Mechanics) είναι η επιστήμη της μηχανικής των υγρών και αερίων και βασίζεται στις ίδιες θεμελιώδεις αρχές μ' αυτές της Μηχανικής των Στερεών Σωμάτων (Mechanics of Solids). Η Ρευστομηχανική είναι οπωσδήποτε δυσκολότερη, γιατί στα στερεά σώματα έχει κανείς να κάνει με χωριστά και απτά στοιχεία, ενώ στα ρευστά δεν υπάρχουν χωριστά στοιχεία για να διακρίνονται.

Η Ρευστομηχανική μπορεί να διαιρεθεί σε τρεις κλάδους: Στην υδροστατική η οποία ασχολείται με τη μελέτη της μηχανικής των ρευστών που βρίσκονται σε ηρεμία, στην κινηματική η οποία ασχολείται με ταχύτητες και γραμμές ροής χωρίς να ενδιαφέρεται για δυνάμεις ή ενέργεια, και στη δυναμική των ρευστών η οποία ενδιαφέρεται για τις σχέσεις ταχυτήτων, επιταχύνσεων και δυνάμεων που ασκούνται από τα ρευστά ή πάνω σε ρευστά που κινούνται.

Η κλασική Υδροδυναμική (Hydrodynamics) ασχολείται με φανταστικά ιδανικά ρευστά όπου δεν εμφανίζεται τριβή. Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής έχουν περιορισμένη πρακτική αξία. Γι' αυτό το λόγο στο παρελθόν οι μηχανικοί είχαν στραφεί στα πειράματα και απ' αυτά ανέπτυξαν εμπειρικούς τύπους που έδιναν απαντήσεις σε πρακτικά προβλήματα. Τη μελέτη των υγρών και όλες τις γνώσεις πάνω σε αυτά, τα πραγματεύεται, η Υδραυλική (Hydraulics).

Στη Ρευστομηχανική οι θεμελιώδεις αρχές της υδροδυναμικής συνδυάζονται με τις πειραματικές τεχνικές της υδραυλικής. Τα πειραματικά δεδομένα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επικυρώσουν τη θεωρία ή για να δώσουν πληροφορίες, συμπληρωματικά στη μαθηματική ανάλυση. Με τη πρόοδο των Υ/Η αναπτύχθηκε ο κλάδος της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics, CFD) που θα ασχοληθούμε στο Κεφάλαιο 3.

1.1.2 Ιστορία της Ρευστομηχανικής

Ο κλάδος της Ρευστομηχανικής έχει αναπτυχθεί από αρχαιοτάτων χρόνων, αφού η χρήση και η εκμετάλλευση του νερού έχριζε ιδιαίτερης σημασίας για τους ανθρώπους. Πρώτοι οι Αιγύπτιοι και ακολούθως οι Μεσοποτάμιοι, οι Έλληνες και οι Ρωμαίοι κατάφεραν, με τεχνητά μέσα, να χρησιμοποιούν το νερό για δικό τους όφελος (π.χ. τα αρδευτικά κανάλια και τα ιστιοφόρα). Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν

κάνει αξιοσημείωτες μελέτες, όπως εκείνη του Αρχιμήδη ο οποίος ανακάλυψε και διατύπωσε τις αρχές της άνωσης κατά τον 3^οπ.Χ. αιώνα, ενώ επίσης γνωστές εφευρέσεις είναι ο ατμοστρόβιλος του Ήρωνα και η αντλία του Κτησίβιου. Οι αρχαίοι Ρωμαίοι είναι γνωστοί για τα υδραγωγεία και τα λουτρά τους, πολλά από τα οποία κατασκεύασαν τον 4^οπ.Χ. αιώνα, και μερικά από αυτά λειτουργούν ακόμα και σήμερα.

Κατά το μεσαίωνα στη Ρευστομηχανική, καθώς και στις περισσότερες επιστήμες, δεν υπήρξε πρόοδος. Την περίοδο της Αναγέννησης ο Isaac Newton (1642-1727), διατυπώνοντας τους νόμους της κίνησης, το νόμο του ιξώδους, το νόμο της βαρύτητας και αναπτύσσοντας επιπλέον τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, είχε καθοριστική συμβολή στη Ρευστομηχανική, αλλά και γενικά στις σύγχρονες επιστήμες. Ωστόσο, οι περισσότερες ροές διέπονται από ιξώδες επενέργειες, και οι μηχανικοί του 18^{ου} αιώνα με εκτέλεση πειραμάτων βρήκαν εμπειρικές εξισώσεις, θεμελιώνοντας έτσι την επιστήμη της Υδραυλικής.

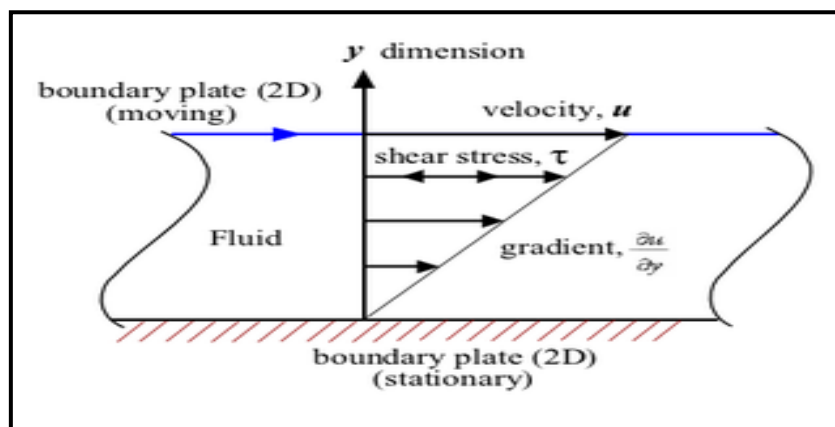
Προς το τέλος του 19^{ου} αιώνα αναγνωρίστηκε η σημασία των αδιάστατων αριθμών και η συσχέτισή τους με την τύρβη, και γεννήθηκε η διαστατική (ή ομοιωματική) ανάλυση. Το 1904 ο Ludwig Prandtl ανακάλυψε ότι τα ροϊκά πεδία ρευστών με μικρά ιξώδη είναι δυνατό να διακριθούν σε δύο ζώνες, μια λεπτή, όπου κοντά στις στερεές επιφάνειες αναπτύσσεται ένα οριακό στρώμα που εξαρτάται από το ιξώδες και μία ουσιαστικά χωρίς ιξώδες εξωτερική ζώνη μακριά από τα σύνορα. Έτσι δόθηκε η δυνατότητα στους μετέπειτα μηχανικούς να αναλύσουν πιο σύνθετες ροές. Πάντως ακόμα και σήμερα δεν διαθέτουμε πλήρη θεωρία για τη φύση της τύρβης και η σύγχρονη Ρευστομηχανική εξακολουθεί να αποτελεί συνδυασμό θεωρίας και των πειραματικών αποτελεσμάτων.

1.1.3 Ορισμός του Ρευστού

Ρευστό (Fluid) είναι μια ουσία που παραμορφώνεται συνεχώς όταν υφίσταται μια Διατμητική Τάση (Shear Stress) όσο μικρή και αν είναι αυτή. Διατμητική Δύναμη (Shear Force) είναι η συνιστώσα δύναμη που δρα κατά την επαφόμενη μιας επιφάνειας και η δύναμη αυτή όταν διαιρεθεί με το εμβαδό της επιφάνειας, μας δίνει τη Μέση Διατμητική Τάση (Average Shear Stress) της επιφάνειας. Διατμητική Τάση σε κάποιο σημείο είναι το όριο του λόγου της Διατμητικής Δύναμης προς το Εμβαδόν, όταν αυτό τείνει στο μηδέν γύρω από το υπόψη σημείο.

Θεωρούμε ότι έχουμε μια ουσία η οποία βρίσκεται μεταξύ δύο πλακών (σχήμα 1.1), με μικρή απόσταση η μία από την άλλη και μεγάλες σε μήκος ώστε να αγνοηθούν οι συνθήκες που επικρατούν στα άκρα τους. Η κάτω πλάκα είναι σταθερή ενώ στην πάνω πλάκα εφαρμόζεται μια δύναμη F , η οποία, ασκεί μια Διατμητική Τάση (Shear Stress) F/A σε κάθε σημείο μεταξύ των πλακών, όπου A είναι το εμβαδόν της επάνω πλάκας. Όταν η δύναμη F προκαλέσει την κίνηση της επάνω πλάκας με σταθερή ταχύτητα, όσο μικρό και αν είναι το μέτρο της F , συμπεραίνουμε ότι η

ουσία που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο πλάκες είναι ρευστό (Fluid). Αυτό το είδος ροής, ονομάζεται ροή Couette.



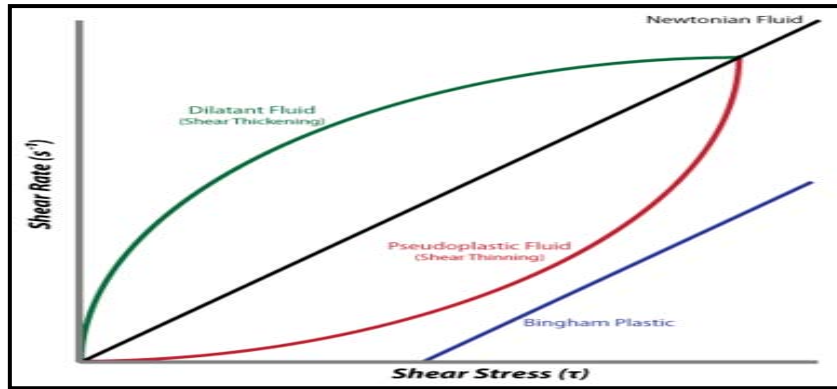
Σχήμα 1.1 Ροή Couette

Τα πειράματα έχουν δείξει ότι η F είναι ευθέως ανάλογη του A και αντιστρόφως ανάλογη του πάχους t όταν άλλα μεγέθη παραμένουν σταθερά. Αυτό εκφράζεται από την εξίσωση: $F = \mu \frac{AU}{t}$ όπου μ ο συντελεστής αναλογίας και περιλαμβάνει την επίδραση του εξεταζόμενου ρευστού.

Αν $\tau = F/A$ η διατμητική τάση, τότε από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει: $\tau = \mu \frac{U}{t}$ και ο λόγος U/t εκφράζει τη γωνιακή ταχύτητα (ή ρυθμό μεταβολής) της γωνιακής παραμόρφωσης του ρευστού. Η γωνιακή ταχύτητα μπορεί επίσης να γραφτεί ως du/dy , διότι το U/t αλλά και το du/dy εκφράζουν το λόγο της μεταβολής της ταχύτητας προς το μήκος στο οποίο έχουμε μεταβολή. Το κλάσμα du/dy εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο ένα στρώμα (layer) κινείται σχετικά με ένα προσκείμενο σώμα. Οπότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ όπου το μ ονομάζεται ιξώδες (viscosity) του ρευστού (ή συνεκτικότητα του ρευστού) και εκφράζει τον Νόμο του ιξώδους του Νεύτωνα.

Διαφορετικά υλικά από τα ρευστά δεν μπορεί να ικανοποιούν τον ορισμό του ρευστού. Για παράδειγμα, μια πλαστική ουσία θα παραμορφώνεται κατά ορισμένο ποσοστό ανάλογα με τη δύναμη, όχι όμως συνεχώς, όταν η επιβαλλόμενη τάση βρίσκεται κάτω από τη διατμητική τάση διαρροής. Συνεπώς, τα πλαστικά (Plastics) και τα στερεά (Solids) σώματα αποκλείονται από τα ρευστά (Fluids).

Τα ρευστά διακρίνονται σε Νευτώνεια και μη Νευτώνεια. Στα Νευτώνεια, η σχέση μεταξύ διατμητικής τάσης και ταχύτητας παραμόρφωσης είναι γραμμική, σε αντίθεση με τα μη Νευτώνεια, όπου η σχέση μεταξύ του μέτρου της επιβεβλημένης διατμητικής τάσης και της ταχύτητας παραμόρφωσης δεν είναι γραμμική (σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2 Σύγκριση της συμπεριφοράς των τεσσάρων τύπων υγρών με ρυθμό διάτμησης σε συνάρτηση της εφαρμοζόμενης τάσης διάτμησης

1.1.4 Συνεχές Μέσο

Τα ρευστά αποτελούνται από μόρια τα οποία κινούνται συνεχώς σε ακανόνιστες τροχιές προς όλες τις διευθύνσεις. Λόγω της κίνησης αυτής, οι θέσεις και οι αποστάσεις μεταξύ των μορίων μεταβάλλονται συνεχώς, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται το πλήθος των μορίων που περιέχονται κάθε χρονική στιγμή σε έναν ορισμένο όγκο ρευστού. Το γεγονός αυτό καθιστά προβληματικό τον καθορισμό των ιδιοτήτων του ρευστού σε ένα σημείο του χώρου. Στη Μακροσκοπική ανάλυση των προβλημάτων ροής ρευστών υποθέτουμε ότι το ρευστό είναι ένα συνεχές μέσο. Η υπόθεση του συνεχούς μέσου οδηγεί στη παραδοχή ότι, σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, οι ιδιότητες του ρευστού μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο κατά τρόπο συνεχή.

Έτσι στη Ρευστομηχανική, όταν μιλάμε για μία ιδιότητα του ρευστού σε ένα δεδομένο σημείο του χώρου, εννοούμε τη μέση στατιστική τιμή της ιδιότητας σε μια φυσική περιοχή όγκου δV_0 . Η ποσότητα του ρευστού που περιέχεται στον οριακό όγκο δV_0 θεωρούμε ότι αποτελεί ένα σωματίδιο του ρευστού. Αυτός είναι και ο ουσιαστικός λόγος για τη χρήση του συνεχούς μέσου.

1.1.5 Ιδεώδες Ρευστό

Το Ιδεώδες (ή Ιδεατό) Ρευστό (inviscid fluid) ορίζεται συνήθως ως ένα ρευστό στο οποίο δεν υπάρχει καθόλου τριβή, δηλαδή, το ιξώδες του είναι μηδέν. Έτσι, οι εσωτερικές δυνάμεις σε κάθε εσωτερική τομή του είναι πάντοτε κάθετες στη διατομή, ακόμη και στη διάρκεια της κίνησης. Επομένως, οι δυνάμεις είναι καθαρά πιεστικές δυνάμεις. Παρότι τέτοιο ρευστό δεν υπάρχει στην πραγματικότητα, πολλά ρευστά προσεγγίζουν την ατριβή ροή σε σημαντικές αποστάσεις από τα στερεά σύνορα, και μπορούμε συχνά να αναλύουμε τις συμπεριφορές τους υποθέτοντας ότι είναι ιδεώδη ρευστά. Δεν θα πρέπει να συγχέουμε το ιδεώδη ρευστό με το τέλει αέριο.

1.1.6 Συνεκτικότητα (ή Ιξώδες)

Για τη μελέτη της ροής των ρευστών, στο ιξώδες (viscosity) χρειάζεται να εξεταστεί η φύση και τα χαρακτηριστικά του καθώς και οι συντελεστές μετατροπής του απόλυτου και του κινηματικού ιξώδους. Το ιξώδες είναι η ιδιότητα εκείνη του ρευστού, που του δίνει τη δυνατότητα να ανθίσταται σε διάτμηση. Ο νόμος ιξώδους του Νεύτωνα ($\tau = \mu \frac{du}{dy}$) αναφέρει ότι για μια δοσμένη ταχύτητα γωνιακής παραμόρφωσης του ρευστού η διατμητική τάση είναι ανάλογη προς το ιξώδες. Λόγου χάρη, τα λάδια των μηχανών των αυτοκινήτων έχουν υψηλή συνεκτικότητα και αντίσταση σε διάτμηση (είναι συνεκτικά), ενώ η βενζίνη έχει μικρή συνεκτικότητα. Οι δυνάμεις τριβής κατά τη ροή του ρευστού είναι αποτέλεσμα της συνοχής (cohesion) και της ανταλλαγής ορμής μεταξύ των μορίων του ρευστού.

Όταν η θερμοκρασία αυξάνει, τα ιξώδη όλων των υγρών μειώνονται, ενώ τα ιξώδη όλων των αερίων αυξάνονται. Η αντίσταση ενός ρευστού σε διάτμηση εξαρτάται από τη συνοχή του και από την ταχύτητα μεταφοράς της μοριακής ορμής (molecular momentum). Στα υγρά οι αποστάσεις μεταξύ των μορίων είναι πολύ μικρότερες από ότι στα αέρια και επομένως οι δυνάμεις συνοχής είναι πολύ μεγαλύτερες από ότι στα αέρια. Στα υγρά το ιξώδες οφείλεται κυρίως στις δυνάμεις συνοχής και αφού οι δυνάμεις μειώνονται με την αύξηση της θερμοκρασίας, μειώνεται και το ιξώδες. Αντίθετα στα αέρια, οι δυνάμεις συνοχής είναι πολύ μικρές, και η αντίσταση σε διάτμηση οφείλεται κατά το μεγαλύτερο μέρος στην ανταλλαγή μορίων μεταξύ στρωμάτων διαφορετικών ταχυτήτων. Σε μεγαλύτερες θερμοκρασίες η μοριακή δραστηριότητα αυξάνει και προκαλεί την αύξηση του ιξώδους των αερίων με τη θερμοκρασία.

Η τιμή του ιξώδους προσδιορίζεται από την εξίσωση ιξώδους του Νεύτωνα λύνοντας ως προς μ : $\mu = \frac{\tau}{du/dy}$. Το ιξώδες μ αποκαλείται και απόλυτο ιξώδες (absolute viscosity) ή δυναμικό ιξώδες (dynamic viscosity) για να μην μπερδεύεται με το κινηματικό ιξώδες ν (kinematic viscosity), το οποίο είναι ο λόγος του ιξώδους προς την πυκνότητα της μάζας, δηλαδή: $\nu = \mu/\rho$.

1.1.7 Συμπιεστά και Ασυμπίεστα Ρευστά

Η Ρευστομηχανική ασχολείται και με συμπιεστά και με ασυμπίεστα ρευστά, δηλαδή υγρά και αέρια σταθερής ή μεταβλητής πυκνότητας. Αν και στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν ασυμπίεστα ρευστά, η παραδοχή αυτή τίθεται όταν η αλλαγή στην πυκνότητα με την πίεση είναι τόσο μικρή ώστε να είναι αμελητέα. Αυτό συνήθως συμβαίνει στα υγρά. Τα αέρια, επίσης μπορούν να θεωρηθούν ασυμπίεστα, όταν η μεταβολή της πίεσης είναι μικρή συγκρινόμενη με την απόλυτη πίεση.

Συνήθως θεωρούμε τα υγρά ως ασυμπίεστα ρευστά, παρ' ότι τα ηχητικά κύματα, που στην πραγματικότητα είναι κύματα πίεσης, διαδίδονται μέσα από αυτά. Αυτό αποδεικνύει την ελαστικότητα των υγρών.

Τα πραγματικά αέρια (real gases) ικανοποιούν κατά προσέγγιση, το νόμο των τέλειων αερίων (perfect gases), όταν βρίσκονται κάτω από την κρίσιμη πίεση και πάνω από την κρίσιμη θερμοκρασία. Έτσι συμπεριφέρονται σύμφωνα με το νόμο των τέλειων αερίων.

Η συμπιεστικότητα (μεταβολή του όγκου εξαιτίας μεταβολής της πίεσης) ενός υγρού είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το Ογκικό Μέτρο Ελαστικότητάς του (volume modulus of elasticity), γνωστό επίσης και ως Μέτρο Διόγκωσης (bulk modulus). Αυτό ορίζεται από τη σχέση: $E_v = -v(dp/dv) = -(v/dv)dp$.

Όπου v ο ειδικός όγκος και p η πίεση. Επειδή ο λόγος v/dv είναι αδιάστατος, οι μονάδες των E_v και p είναι ίδιες. Το μέτρο διόγκωσης είναι κάτι ανάλογο με το μέτρο Ελαστικότητας των στερεών. Ωστόσο, για τα υγρά ορίζεται με βάση τον όγκο και όχι όπως στη γνωστή μονοδιάστατη σχέση τάσεων – τροπών για τα στερεά σώματα.

1.1.8 Είδη ροής

Η ροή των ρευστών μπορεί να ταξινομηθεί σε:

- Μονοδιάστατη (1D), Δισδιάστατη (2D) και Τρισδιάστατη (3D)
- Ροή πραγματικού ρευστού ή ροή ιδεώδους ρευστού
- Ροή ασυμπίεστου ρευστού ή ροή συμπιεστού ρευστού
- Μόνιμη ή μεταβαλλόμενη ροή (η συμπεριφορά των ιδιοτήτων) ως προς το χρόνο
- Ροή υπό πίεση ή βαρυτική ροή
- Χωραία σταθερή ή χωραία μεταβαλλόμενη ροή (συμπεριφορά της πυκνότητας του ρευστού και της τοπικής μέσης ταχύτητας σε όλα τα σημεία του ροϊκού πεδίου)
- Στρωτή ή Τυρβώδης ροή
- Σταθεροποιημένη ή μη σταθεροποιημένη ροή
- Ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη ροή (για ανοιχτούς αγωγούς)
- Υποκρίσιμη ή Υπερκρίσιμη ροή (για ανοιχτούς αγωγούς)
- Υποηχητική ή Υπερηχητική (για συμπιεστή ροή)
- Στρόβιλη ή Άστρόβιλη ροή (στη μαθηματική υδροδυναμική)
- Συγκλίνουσα ή Αποκλίνουσα ροή
- Διαταραγμένη ροή
- Ισόθερμη ροή (υπό σταθερή θερμοκρασία)
- Αδιαβατική (χωρίς μεταφορά θερμότητας)
- Ισεντροπική (άτριβη αδιαβατική)

Σε ορισμένες περιπτώσεις διάφοροι τύποι της ροής μπορούν να συνυπάρξουν.

1.1.9 Τροχιές Στοιχείων Ρευστού και Γραμμές Ροής

Τροχιά στοιχείου ρευστού (path line), είναι η τροχιά που ακολουθεί ένα και μόνο σωματίδιο σε μία χρονική περίοδο. Αν υπήρχε φακός που να τραβήξει εικόνα της ροής, θα έδειχνε τη διαδρομή που ακολουθήθηκε από το σωματίδιο. Η τροχιά δείχνει την κατεύθυνση της ταχύτητας του σωματιδίου σε διαδοχικές χρονικές στιγμές.

Οι γραμμές ροής ή ροϊκές γραμμές (streamlines) δείχνουν τη μέση κατεύθυνση ενός αριθμού σωματιδίων κατά την ίδια χρονική στιγμή. Μια σειρά καμπύλων σχεδιασμένων να εφάπτονται στα μέσα των διανυσμάτων των ταχυτήτων θα αποτελούσαν τις γραμμές ροής. Τροχιές και γραμμές ροής είναι ακριβώς οι ίδιες στη μόνιμη ροή ενός ρευστού στο οποίο δεν υπάρχουν διακυμαινόμενες συνιστώσες ταχύτητας, με άλλα λόγια για πραγματικά μόνιμη ροή ή στη στρωτή (laminar) ροή, όπου τα στρώματα του ρευστού ολισθαίνουν απαλά το ένα πάνω στο άλλο. Στην τυρβώδη ροή οι τροχιές και οι ροϊκές γραμμές δεν συμπίπτουν, οι τροχιές είναι πολύ ακανόνιστες, ενώ οι ροϊκές γραμμές εφάπτονται παντού στην τοπική μέση χρονική ταχύτητα.

1.1.10 Ρυθμός Μεταβολής Μάζας και Μέση Ταχύτητα

Την ποσότητα του ρευστού που περνά στη μονάδα του χρόνου από μία εγκάρσια τομή την ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής ή ροή της μάζας (flow rate). Μπορούμε να την εκφράσουμε πρώτον συναρτήσει της μεταβολής του όγκου της ροής (m^3/s), δεύτερον συναρτήσει της μεταβολής της μάζας της ροής (kg/s), και τρίτον συναρτήσει της μεταβολής του βάρους της ροής (kN/s). Για ασυμπίεστα ρευστά συνήθως χρησιμοποιούμε το ρυθμό μεταβολής του όγκου της ροής, ενώ για συμπιεστά το ρυθμό μεταβολής του βάρους ή της μάζας της ροής.

Σε μόνιμη ροή μέσα σε σύστημα συντεταγμένων xyz αξόνων για απειροστό εμβαδό dA και μέση ταχύτητα u , η ογκική ταχύτητα της ροής που περνά από το απειροστό στοιχείο dA είναι:

$$dQ = u \cdot dA = (u \cos \theta) dA = u(\cos \theta dA) = u dA'$$

Όπου dA' είναι η προβολή του dA στο επίπεδο που είναι κάθετο στην κατεύθυνση της ταχύτητας u . Αυτό δείχνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της ροής ισούται με το μέτρο της μέσης ταχύτητας πολλαπλασιασμένο με το εμβαδό της ροής κάθετα στην κατεύθυνση της ταχύτητας. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της μάζας ή του βάρους της ροής αν πολλαπλασιάσουμε το ρυθμό μεταβολής του όγκου της ροής με τη πυκνότητα ή το ειδικό βάρος του ρευστού, αντίστοιχα.

1.2 Βασικές Εξισώσεις Ρευστομηχανικής

1.2.1 Σύστημα και Όγκος Ελέγχου

Ως ρευστό Σύστημα (S) αναφέρεται μια συγκεκριμένη μάζα ρευστού που περιορίζεται από τα σύνορα μια κλειστής επιφάνειας. Η μορφή του συστήματος, και επομένως και των συνόρων, μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο. Καθώς το ρευστό κινείται και παραμορφώνεται, έτσι και το σύστημα που το περιέχει μετακινείται και παραμορφώνεται. Το μέγεθος και η μορφή του συστήματος είναι τελείως προαιρετικά (απειροελάχιστο ή αρκετά μεγάλο).

Αντίθετα, ο Όγκος Ελέγχου (Control Volume, CV) αναφέρεται σε μία συγκεκριμένη περιοχή του χώρου, η οποία ούτε κινείται ούτε αλλάζει μορφή. Συνήθως τον επιλέγουμε ως μία περιοχή στην οποία εισέρχεται και εξέρχεται ρευστό. Τα κλειστά του σύνορα τα λέμε Επιφάνεια Ελέγχου (Control Surface). Και εδώ το μέγεθος και η μορφή του Όγκου Ελέγχου είναι τελείως προαιρετικά. Στην πραγματικότητα η επιφάνεια ελέγχου μπορεί να κινείται στο χώρο ως προς κάποιο απόλυτο σύστημα αναφοράς. Αυτό είναι αποδεκτό εφόσον η κίνηση περιορίζεται σε μετάθεση με σταθερή ταχύτητα. Το κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμα του όγκου ελέγχου είναι ότι ανταλλάσσει πάντοτε μάζα με το περιβάλλον του ενώ, ταυτόχρονα, μπορεί να ανταλλάσσει και ενέργεια, σε μορφή θερμότητας ή έργου. Όμως η ίδια μάζα είναι «φορέας» ορμής και ενέργειας (κινητικής, δυναμικής, εσωτερικής). Έτσι μεταξύ του όγκου ελέγχου και του περιβάλλοντος υπάρχει συνεχής επικοινωνία που εκδηλώνεται με τη μεταφορά μάζας, ορμής και ενέργειας μέσω της επιφάνειας ελέγχου. Η μάζα του όγκου ελέγχου μπορεί να διατηρείται σταθερή ή να μεταβάλλεται με το χρόνο.

1.2.2 Κύριες Μέθοδοι Ανάλυσης Ροής Ρευστών

Μακροσκοπική Ανάλυση: Είναι η μέθοδος ανάλυσης όγκων ελέγχου πεπερασμένων διαστάσεων. Αν σε έναν τέτοιο όγκο ελέγχου εφαρμόσουμε τις βασικές αρχές διατήρησης μάζας, ορμής, ενέργειας, θα προκύψουν οι ολοκληρωτικές (ή μακροσκοπικές) εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας αντίστοιχα. Από τη λύση των εξισώσεων αυτών λαμβάνονται μέσες τιμές ή προσεγγιστικές σχέσεις ιδιοτήτων οι οποίες, όμως, δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Μερικά από τα μεγέθη που υπολογίζονται με τη χρησιμοποίηση των ολοκληρωτικών εξισώσεων ροής είναι η μέση ταχύτητα, η πτώση πίεσης, κ.ά. Η μέθοδος της μακροσκοπικής ανάλυσης χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που ενδιαφερόμαστε για την επίδραση της ροής πάνω σε ένα μηχανήμα ή για μια πολύ γενική περιγραφή της συμπεριφοράς του ρευστού. Παρ' ότι και οι τρεις μέθοδοι ανάλυσης είναι εξίσου σημαντικές, αυτή η μέθοδος είναι η πιο σημαντική για ένα μηχανικό, γιατί αποτελεί την πρακτική προσέγγιση για την ανάλυση ενός δεδομένου προβλήματος ροής.

Διαφορική Ανάλυση: Είναι η μέθοδος ανάλυσης όγκων ελέγχου απειροστών διαστάσεων. Αν σε έναν απειροστό όγκο ελέγχου εφαρμόσουμε τις τρεις βασικές

αρχές διατήρησης, θα προκύψουν οι διαφορικές εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας. Για τη μαθηματική τους ολοκλήρωση, οι διαφορικές εξισώσεις πρέπει να συμπληρωθούν με κατάλληλες οριακές συνθήκες (πιθανώς και αρχικές). Αντίθετα προς τις ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι διαφορικές εξισώσεις ροής δίνουν ακριβείς τιμές ή κατανομές ιδιοτήτων, όπως π.χ., της ταχύτητας και των διατμητικών τάσεων. Από τις κατανομές αυτές μπορεί να υπολογισθούν εύκολα διάφορα μεγέθη, όπως η μέγιστη ταχύτητα, η ογκομετρική παροχή, κ.ά. Η μέθοδος της διαφορικής ανάλυσης χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις όπου ενδιαφερόμαστε για λεπτομέρειες του πεδίου ροής. Οι διαφορικές εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας προκύπτουν από τις αντίστοιχες ολοκληρωτικές εξισώσεις (και αντίστροφα) με άμεση εφαρμογή του θεωρήματος Gauss.

Διαστατική Ανάλυση: Είναι μία μέθοδος με την οποία επιτυγχάνεται η συγκρότηση των φυσικών και γεωμετρικών μεγεθών που επηρεάζουν ένα φυσικό φαινόμενο σε αδιάστατες ομάδες (όπως είναι π.χ. ο αριθμός Reynolds), έτσι ώστε να διευκολύνεται η ερμηνεία των συμπερασμάτων και να εκτείνεται η περιοχή εφαρμογής των πειραματικών αποτελεσμάτων. Επειδή ο αριθμός των αδιάστατων ομάδων είναι μικρότερος από τον αριθμό των διαστατικών μεγεθών, περιορίζεται ο αριθμός των παραμέτρων που ελέγχουν το φαινόμενο και η θεώρηση του προβλήματος απλουστεύεται σημαντικά. Η διαστατική ανάλυση δεν αποτελεί μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, αλλά μέθοδο αριστοποίησης της πειραματικής μελέτης τους. Η πειραματική μελέτη των προβλημάτων γίνεται σχεδόν πάντα με τη χρησιμοποίηση μοντέλων (ομοιωμάτων γεωμετρικά όμοιων με το πρότυπο). Ανάμεσα σε μοντέλο και πρότυπο πρέπει να υπάρχει δυναμική ομοιότητα, δηλαδή, οι αδιάστατες ομάδες που χαρακτηρίζουν το υπό εξέταση φαινόμενο ροής να έχουν τις ίδιες τιμές σε μοντέλο και πρότυπο.

1.2.3 Αρχές Διατήρησης της Ρευστομηχανικής

Η αναλυτική μελέτη των προβλημάτων ροής βασίζεται, κυρίως, σε τρεις φυσικούς νόμους.

- I. Το νόμο διατήρησης της μάζας:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_S = 0$$

- II. Το νόμο διατήρησης της ορμής (δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα):

$$F = \left(\frac{dP}{dt}\right)_S$$

- III. Το νόμο διατήρησης της ενέργειας (πρώτο θερμοδυναμικό νόμο):

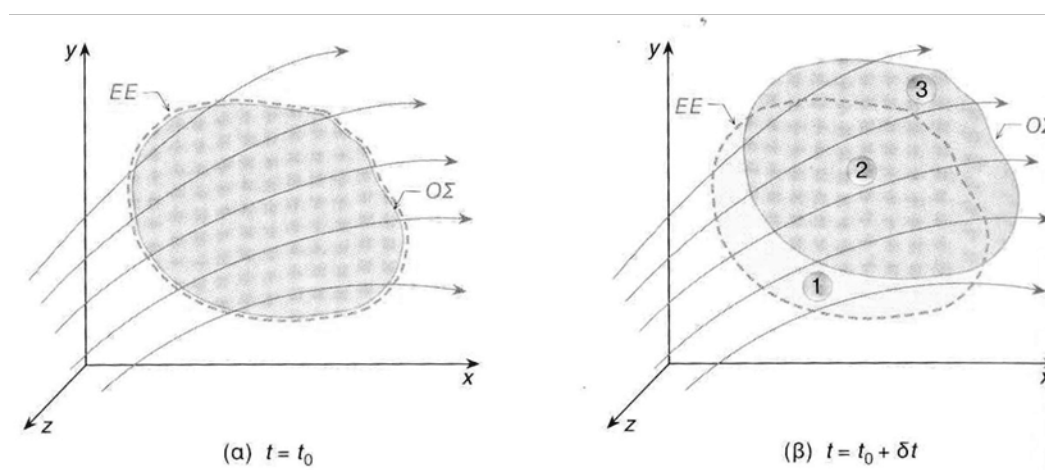
$$\dot{Q} - \dot{W} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_S$$

Όπου ο δείκτης S δηλώνει ότι οι εξισώσεις αυτές εφαρμόζονται σε σύστημα ρευστού και περιγράφουν τί συμβαίνει σε αυτό όταν υφίσταται κάποια επίδραση από το περιβάλλον του. Οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι γενικά κατάλληλες για τη μελέτη των προβλημάτων της Ρευστομηχανικής, σε αντίθεση με τη μελέτη

προβλημάτων της Μηχανικής των Στερεών. Έτσι απαιτείται η τροποποίηση των παραπάνω εξισώσεων ώστε να εφαρμόζονται σε όγκο ελέγχου. Οι νέες αυτές μορφές, ανάλογα με το μαθηματικό τρόπο που περιγράφονται, ονομάζονται είτε ολοκληρωτικές είτε διαφορικές εξισώσεις διατήρησης (μάζας, ορμής, ενέργειας) και περιγράφουν την επίδραση της ροής πάνω στον ορισμένο όγκο ελέγχου.

1.2.4 Το Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds

Στις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι σε αυτές υπάρχει η χρονική παράγωγος μιας εκτατικής ιδιότητας (m, P, E). Έτσι αν παραστήσουμε με B μία τυχαία εκτατική ιδιότητα του συστήματος, τότε σε καθεμιά από τις παραπάνω εξισώσεις θα εμφανίζεται η παράγωγος dB/dt , και ως b ορίζεται η ένταση της ιδιότητας αυτής ανά μονάδα μάζας ρευστού, $b = dB/dm$. Τώρα για να μετατρέψουμε τη διατύπωση των φυσικών νόμων από σύστημα σε όγκο ελέγχου, πρέπει να μετατρέψουμε το ρυθμό μεταβολής της B του συστήματος σε χρονικές μεταβολές για τον όγκο ελέγχου. Έστω μια οριακή διεργασία ροής ρευστού στην οποία εμπλέκονται ένα σύστημα και ένας όγκος ελέγχου.



Σχήμα 1.3 Κίνηση συστήματος ως προς ακίνητο όγκο ελέγχου

Το σύστημα κινείται μέσα στο πεδίο ροής, ενώ ο όγκος ελέγχου παραμένει ακίνητος ως προς το ακίνητο σύστημα συντεταγμένων xyz (βλέπε σχήμα 1.3). Για χρονική στιγμή $t = t_0$, τα όρια του συστήματος και του όγκου ελέγχου συμπίπτουν. Μετά από χρόνο δt , το σύστημα έχει μετατοπιστεί στο χώρο και καταλαμβάνει διαφορετικές περιοχές του πεδίου ροής, σε σχέση με τη χρονική στιγμή t_0 . Αυτό σημαίνει ότι στο χρόνο δt , μία ποσότητα ρευστού εισέρχεται στον όγκο ελέγχου, ενώ ταυτόχρονα μία άλλη ποσότητα εξέρχεται από αυτόν. Αυτή η ροή της μάζας επηρεάζει την ποσότητα της ιδιότητας B που περιέχεται, κάθε στιγμή, στον όγκο ελέγχου.

Μετά από μαθηματικές πράξεις καταλήγουμε στο θεώρημα μεταφοράς του Reynolds, όπου μας λέει πως, ο ρυθμός μεταβολής της εκτατικής ιδιότητας B του

συστήματος, ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ιδιότητας B του ρευστού που περιέχεται στον όγκο ελέγχου, συν το ρυθμό καθαρής εκροής της ποσότητας B από τον όγκο ελέγχου, λόγω ροής ρευστού. Και με τη μαθηματική της έκφραση:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_s = \frac{d}{dt} \iiint_{CV} b\rho dV + \iint_{CS} b\rho(v \cdot n)dA$$

όπου ρdV είναι η μάζα του ρευστού που περιέχεται στον στοιχειώδη όγκο dV του όγκου ελέγχου και $b\rho(v \cdot n)dA$ είναι ο ρυθμός ροής μάζας του ρευστού διαμέσου του στοιχειώδους τμήματος dA της επιφάνειας ελέγχου.

1.2.5 Ολοκληρωματικές Εξισώσεις Συνέχειας, Ορμής και Ενέργειας

Η ολοκληρωματική εξίσωση της συνέχειας αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του νόμου διατήρησης της μάζας για όγκο ελέγχου. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds και στη θέση της εκτατικής ιδιότητας B θα θέσουμε τη μάζα m , το θεώρημα μεταφοράς τροποποιείται ως εξής:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho dV + \iint_{CS} \rho(v \cdot n)dA = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί τη γενική μορφή της ολοκληρωτικής εξίσωσης της συνέχειας και εκφράζει το νόμο διατήρησης της μάζας για ακίνητο όγκο ελέγχου.

Για μόνιμη ροή: $\iint_{CS} \rho(v \cdot n)dA = 0$

Για ασυμπίεστη ροή: $\frac{d}{dt} (\rho \iiint_{CV} dV) + \rho \iint_{CS} (v \cdot n)dA = 0$

Η ολοκληρωματική εξίσωση της ορμής αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για όγκο ελέγχου. Θα εφαρμόσουμε και εδώ το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds, θα αντικαταστήσουμε την εκτατική ιδιότητα B , με την ορμή $P (= m \cdot v)$, οπότε η ιδιότητα b (ως ορμή ανά μονάδα μάζας) είναι ίση με την ταχύτητα v . Έτσι το θεώρημα μεταφοράς τροποποιείται ως εξής:

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_s = \frac{d}{dt} \iiint_{CV} v\rho dV + \iint_{CS} v\rho(v \cdot n)dA$$

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα για σύστημα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής P (το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης) ισούται με τη συνισταμένη F των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν πάνω στο σύστημα:

$$F = \left(\frac{dP}{dt}\right)_s$$

και με την υπόθεση ότι τη χρονική στιγμή t_0 , το σύστημα και ο όγκος ελέγχου συμπίπτουν, η δύναμη F μπορεί να θεωρηθεί ότι παριστάνει τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν πάνω στον όγκο ελέγχου τη στιγμή t_0 , έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$F = \frac{d}{dt} \iiint_{CV} v \rho dV + \iint_{CS} v \rho (v \cdot n) dA$$

η οποία αποτελεί τη γενική ολοκληρωματική μορφή της εξίσωσης της ορμής για ακίνητο όγκο ελέγχου.

Για όγκο ελέγχου κινούμενο με σταθερή ταχύτητα, η ολοκληρωματική εξίσωση της ορμής γίνεται:

$$F = \frac{d}{dt} \iiint_{CV} v \rho dV + \iint_{CS} v \rho (v_r \cdot n) dA$$

όπου v_r είναι η σχετική ταχύτητα του ρευστού ως προς την επιφάνεια ελέγχου.

Για μόνιμη ροή: $F = \iint_{CS} v \rho (v \cdot n) dA$

Η ολοκληρωματική εξίσωση της ενέργειας αποτελεί την μαθηματική διατύπωση του νόμου διατήρησης της ενέργειας για όγκο ελέγχου. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds, παρόμοια με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις (συνέχειας και ορμής), στη θέση της αυθαίρετης εκτατικής ιδιότητας B θα θέσουμε την ολική ενέργεια E . Επειδή $E = m \cdot e$ (όπου m =μάζα και e =ειδική ενέργεια), η ιδιότητα b (ως ενέργεια ανά μονάδα μάζας) είναι ίση με την ειδική ενέργεια του ρευστού. Έτσι $B = E$ και $b = e$, έχουμε:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_s = \frac{d}{dt} \iiint_{CV} e \rho dV + \iint_{CS} e \rho (v \cdot n) dA$$

Σύμφωνα με το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας (το αριστερό μέλος της εξίσωσης) είναι:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_s = \dot{Q} - \dot{W}$$

όπου \dot{Q} είναι ο ρυθμός πρόσδοσης θερμότητας στο σύστημα από το περιβάλλον και \dot{W} ο ρυθμός απόδοσης έργου από το σύστημα στο περιβάλλον. Με την υπόθεση ότι τη χρονική στιγμή t_0 , το σύστημα και ο όγκος ελέγχου συμπίπτουν, τα μεγέθη \dot{Q} και \dot{W} μπορεί να θεωρηθούν ότι παριστάνουν τους ρυθμούς ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ του όγκου ελέγχου και του περιβάλλοντος, δηλαδή:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{S,t_0} = \dot{Q}_{CV,t_0}$$

$$\dot{W} = \dot{W}_{S,t_0} = \dot{W}_{CV,t_0}$$

Άρα η γενική μορφή της ολοκληρωτικής εξίσωσης της ενέργειας είναι:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \iiint_{CV} e \rho dV + \iint_{CS} e \rho (v \cdot n) dA$$

Η παραπάνω μορφή της εξίσωσης ενέργειας είναι ασαφής όσον αφορά τους όρους e, Q, W που εμφανίζονται σε αυτήν.

Στη Ρευστομηχανική έχουμε συνήθως τρεις μορφές Ενέργειας. Τη Δυναμική, τη Κινητική και την Εσωτερική. Έτσι η ειδική ενέργεια e ισούται: $e = e_\delta + e_k + u$, όπου e_δ, e_k, u είναι η δυναμική, η κινητική και η εσωτερική ενέργεια αντίστοιχα, ανηγμένες στη μονάδα μάζας του ρευστού.

Η Θερμότητα (Q) μεταδίδεται από μια περιοχή υψηλής θερμοκρασίας σε άλλη χαμηλότερης θερμοκρασίας με τρεις βασικούς μηχανισμούς. Με Αγωγή Θερμότητας, με Συναγωγή Θερμότητας και με Ακτινοβολία.

Στη Ρευστομηχανική, το Έργο (W) εμφανίζεται σε δύο μορφές. Ως Αξονικό Έργο (W_s) και ως Έργο Επιφανειακών δυνάμεων (W_σ).

1.2.6 Διαφορές μεταξύ Ολοκληρωματικών και Διαφορικών Εξισώσεων

Οι βασικές διαφορές μεταξύ των Ολοκληρωματικών και Διαφορικών εξισώσεων συνέχειας, μάζας και ενέργειας είναι στο τρόπο με τον οποίο τις εκφράζουν, πότε τις χρησιμοποιούν, τα αποτελέσματά τους και πού εφαρμόζονται. Μπορούν να εξαχθούν οι μεν από τις δε, μέσω του θεωρήματος απόκλισης του Gauss, αρκεί οι διαφορικές εξισώσεις να συμπληρώνονται από αρχικές και οριακές συνθήκες για να είναι εφικτή η μαθηματική ολοκλήρωσή τους. Αναλυτικότερα:

Οι Ολοκληρωματικές εξισώσεις:

- Εκφράζουν τις διατηρητικές αρχές μάζας, ορμής και ενέργειας για μία ορισμένη περιοχή του χώρου,
- Χρησιμοποιούνται όταν ενδιαφερόμαστε για μια γενική περιγραφή του πεδίου ροής.
- Δίνουν μέσες τιμές ή προσεγγιστικές σχέσεις των μεταβλητών του πεδίου ροής.
- Εφαρμόζονται σε όγκους ελέγχου πεπερασμένου μεγέθους, οι οποίοι μπορεί να περιλαμβάνουν περισσότερες από μία φάσεις (π.χ. και ρευστό και στερεά σώματα)

Οι Διαφορικές εξισώσεις:

- Εκφράζουν τις διατηρητικές αρχές μάζας, ορμής και ενέργειας για ένα ορισμένο σημείο του χώρου.
- Χρησιμοποιούνται όταν ενδιαφερόμαστε για τη λεπτομερή περιγραφή του πεδίου ροής.
- Δίνουν ακριβείς τιμές ή κατανομές των μεταβλητών του πεδίου ροής.
- Εφαρμόζονται σε όγκους ελέγχου απειροστού μεγέθους, οι οποίοι περιορίζονται σε μία μόνο φάση.

1.2.7 Οριακές και Αρχικές Συνθήκες

Οι αρχικές (ή/και τελικές, ανάλογα με το πρόβλημα) συνθήκες απομονώνουν το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει. Οι συνθήκες αυτές χρειάζονται όταν η ροή του ρευστού είναι μη μόνιμη, οπότε στις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη ροή υπάρχουν και παράγωγοι των εξαρτημένων μεταβλητών ως προς το χρόνο. Έτσι για να μπορέσουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα μη μόνιμης ροής, πρέπει να καθορίσουμε τιμές ή κατανομές τιμών για κάθε εξαρτημένη μεταβλητή τη χρονική στιγμή έναρξης (ή/και πέρατος) του πειράματος.

Οι οριακές συνθήκες αναφέρονται στα όρια του όγκου ελέγχου και μας ορίζουν κάποια φυσική αρχή, που τα χαρακτηρίζει, η οποία ισχύει για όλο το χρονικό διάστημα που εξετάζεται ο όγκος ελέγχου. Από φυσική άποψη, οι οριακές συνθήκες εκφράζουν την αλληλεπίδραση του περιβάλλοντος με τον όγκο ελέγχου, ενώ από μαθηματική άποψη μας οριοθετούν την περιοχή του χώρου που μας ενδιαφέρει. Το συνηθέστερο όριο είναι μία ορατή φυσική διεπιφάνεια, όπως στερεού-ρευστού, υγρού-υγρού και υγρού-αερίου.

Στη διεπιφάνεια στερεού-ρευστού ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης, δηλαδή, τα πραγματικά ($\mu \neq 0$) ρευστά στα σημεία επαφής τους με στερεά σώματα αποκτούν την ταχύτητα του στερεού. Για τη διεπιφάνεια υγρού-υγρού ισχύουν δύο οριακές συνθήκες, με τη πρώτη συνθήκη, γνωστή ως κινηματική οριακή συνθήκη, που αναφέρει ότι οι ταχύτητες δύο μη αναμειξιμων πραγματικών ρευστών στα σημεία επαφής τους είναι ίσες, και η δεύτερη συνθήκη, γνωστή ως συνθήκη μηχανικής ισορροπίας, που αναφέρει ότι στα σημεία επαφής υγρών-υγρών αναπτύσσονται ίσες τάσεις. Τέλος για τη διεπιφάνεια υγρού-αερίου ισχύει ότι ο ρυθμός ροής ορμής στην υγρή φάση είναι μηδέν.

Η επιλογή των κατάλληλων κάθε φορά αρχικών και οριακών συνθηκών καθορίζεται από τη φύση του προβλήματος, έτσι ώστε να οι διαφορικές εξισώσεις να μας οδηγούν σε λύσεις με φυσικό νόημα.

1.2.8 Διαφορικές Εξισώσεις Συνέχειας, Ορμής και Μηχ. Ενέργειας

Η διαφορική εξίσωση συνέχειας αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του νόμου διατήρησης της μάζας για ένα ορισμένο σημείο του χώρου. Για να εξάγουμε την εξίσωση αυτή, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μάζας σε έναν ακίνητο όγκο ελέγχου απειροστού μεγέθους διαμέσου του οποίου διέρχεται ένα ρευστό. Η αρχή διατήρησης της μάζας για όγκο ελέγχου ως φυσική έννοια εκφράζεται ως:

$$\left[\text{Ρυθμός συσσώρευσης} \right] + \left[\text{Ρυθμός καθαρής εισροής} \right] = 0$$

[μάζας στον όγκο ελέγχου] + [μάζας στον όγκο ελέγχου]

Μαθηματικά η παραπάνω εξίσωση εκφράζεται ως:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Ο ορισμός του ανυσματικού τελεστή όμως είναι:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

Οπότε η γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης σε ανυσματικό συμβολισμό, που ισχύει για κάθε περίπτωση τρισδιάστατης ροής (μόνιμης ή μη μόνιμης, στρωτής ή τυρβώδους, συμπιεστής ή ασυμπιέστης) ενός καθαρού ρευστού ή ομοιογενούς μείγματος ρευστών (πραγματικών ή ιδεατών), με την προϋπόθεση ότι δε συμβαίνουν πυρηνικές ή χημικές αντιδράσεις στον CV, είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0$$

Για μόνιμη ροή: $\nabla \cdot \rho v = 0$

Η διαφορική εξίσωση συνέχειας χρησιμοποιείται κυρίως για να απλοποιεί τις ανάλογες διαφορικές μορφές των εξισώσεων ορμής και ενέργειας, με τις οποίες πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα σε κάθε πρόβλημα ροής ρευστών.

Η διαφορική εξίσωση ορμής αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για ένα ορισμένο σημείο του χώρου. Για να εξάγουμε την εξίσωση αυτή, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής σε έναν ακίνητο όγκο ελέγχου απειροστού μεγέθους διαμέσου του οποίου διέρχεται ένα ρευστό. Η αρχή διατήρησης της ορμής για όγκο ελέγχου ως φυσική έννοια εκφράζεται ως :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της ορμής} \\ \text{του ρευστού που περιέχεται} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εισροής} \\ \text{ορμής στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Άθροισμα όλων των} \\ \text{εξωτερικών δυνάμεων που} \\ \text{δρουν πάνω στον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right]$$

Μαθηματικά η παραπάνω εξίσωση εκφράζεται με δύο τρόπους, τον τύπο Euler και τον τύπου Lagrange, στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (CFD) ωστόσο περισσότερο συνήθης είναι ο τύπος Euler.

Η τύπου Euler εξίσωση ορμής είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = -\nabla \cdot \rho v v + \rho g + \nabla \cdot \sigma$$

Συνήθως, σε εφαρμογές, η εξίσωση τύπου Euler εμφανίζεται υπό τη μορφή:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = \rho g - \nabla p + \nabla \cdot \tau$$

όπου $\partial v / \partial t$ είναι η τοπική επιτάχυνση και $v \cdot \nabla v$ είναι η επιτάχυνση μεταφοράς του ρευστού.

Η τύπου Lagrange εξίσωση ορμής είναι η ακόλουθη:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g - \nabla p + \nabla \cdot \tau$$

Επειδή η ολική επιτάχυνση ενός κινούμενου σωματιδίου είναι: $a = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v$ η παραπάνω εξίσωση μας δηλώνει ότι ένα σωματίδιο του ρευστού επιταχύνεται υπό την επίδραση των δυνάμεων βαρύτητας, πίεσης και συνεκτικότητας που ασκούνται πάνω σε αυτό από το περιβάλλον.

Στην ειδική περίπτωση που το ρευστό είναι νευτώνειο, η ροή είναι ασυμπίεστη και το ιξώδες είναι σταθερό, τότε η εξίσωση της ορμής ονομάζεται εξίσωση *Navier – Stokes*. Η εξίσωση των *Navier – Stokes* στην κατά Euler θεώρηση του πεδίου ροής γίνεται :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = \rho g - \nabla p + \mu \nabla^2 v$$

Ενώ στη περίπτωση άτριβης ροής ($\mu = 0$), η εξίσωση *Navier – Stokes* απλοποιείται στην εξίσωση Euler:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = \rho g - \nabla p$$

Η εξίσωση *Navier – Stokes* σε συμβολισμό δεικτών γράφεται:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Γενικά οι εξισώσεις *Navier – Stokes* είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού, είναι μη γραμμικές, οι οποίες δεν έχουν λυθεί ακόμα αναλυτικά. Η επίλυση των εξισώσεων αυτών γίνεται συνήθως με διάφορες αριθμητικές μεθόδους, οι οποίες, όμως, δίνουν προσεγγιστικές λύσεις. Ακριβείς λύσεις των εξισώσεων αυτών έχουν ληφθεί μόνο σε απλές περιπτώσεις ροής. Το βασικό τους πλεονέκτημα είναι ότι μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιοδήποτε πρόβλημα ροής. Ανάλογα με τις συνθήκες του προβλήματος, οι εξισώσεις *Navier – Stokes* μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά, γεγονός που διευκολύνει την επίλυσή τους.

Η διαφορική εξίσωση μηχανικής ενέργειας περιγράφει τις μεταβολές της ενέργειας που συμβαίνουν κατά την ισοθερμοκρασιακή ροή των ρευστών. Στη Ρευστομηχανική ισοθερμοκρασιακή ροή είναι, μια ροή στην οποία η θερμική ενέργεια που παράγεται από μετατροπή μηχανικής ενέργειας δεν επηρεάζει σημαντικά τη θερμοκρασία του ρευστού. Η φυσική ερμηνεία της εξίσωσης της μηχανικής ενέργειας είναι:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της κινητικής} \\ \text{και της δυναμικής ενέργειας του} \\ \text{σωματιδίου ανά μονάδα όγκου} \end{array} \right] = \\
& = - \left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός εκτέλεσης έργου ανά μονάδα όγκου} \\ \text{απο τις δυνάμεις πίεσης που δρούν πάνω} \\ \text{στην επιφάνεια του σωματιδίου} \end{array} \right] \\
& + \left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός εκτέλεσης έργου ανά μονάδα όγκου} \\ \text{απο τις ιξώδεις δυνάμεις που δρούν πάνω} \\ \text{στην επιφάνεια του σωματιδίου} \end{array} \right] \\
& + \left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός αντιστρεπτής μετατροπής μηχανικής} \\ \text{ενέργειας σε θερμική (εσωτερική) ενέργεια} \\ \text{ανά μονάδα όγκου} \end{array} \right] \\
& - \left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός αναντίστρεπτης μετατροπής μηχανικής} \\ \text{ενέργειας σε θερμική (εσωτερική) ενέργεια} \\ \text{ανά μονάδα όγκου} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Μαθηματικά η παραπάνω εξίσωση εκφράζεται ως:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) = -\nabla \cdot p\mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$$

Ο όρος $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$ αναφέρεται στην αναντίστρεπτη μετατροπή μηχανικής ενέργειας σε εσωτερική ενέργεια, η οποία συνιστά απώλεια διαθέσιμης ενέργειας, λόγω της παραγόμενης εντροπίας. Συμβολίζεται Φ και αναφέρεται συχνά ως συνάρτηση απωλειών ενέργειας. Από τη συνάρτηση $\Phi = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$ συμπεραίνουμε ότι κατά την ιξώδη ροή, η μηχανική ενέργεια του ρευστού μειώνεται συνεχώς κατά τη διεύθυνση της ροής.

Εν ολίγοις κατά τη κίνηση ρευστού σωματιδίου σε ισοθερμοκρασιακό πεδίο ροής ένα μέρος της μηχανικής ενέργειας του ρευστού μετατρέπεται σε εσωτερική (θερμική) ενέργεια. Αν η μετατροπή αυτή γίνει μέσω αντιστρεπτής διεργασίας, η διαθέσιμη ενέργεια του ρευστού διατηρείται σταθερή, ενώ αν γίνεται μέσω μιας αναντίστρεπτης διεργασίας, μειώνεται.

Κεφάλαιο 2

Ροή σε Αγωγούς (Flow in Pipes)

2.1 Εισαγωγή στους Αγωγούς

Οι αγωγοί ανήκουν στα μέσα διακίνησης των ρευστών. Οι αγωγοί μεταφοράς των ρευστών κατασκευάζονται από διάφορα υλικά, όπως τα καθαρά μέταλλα, τα κράματα, τα πλαστικά, τα κεραμικά, το τσιμέντο και το γυαλί. Η επιλογή του κατάλληλου υλικού εξαρτάται από:

- Τις διαβρωτικές ιδιότητες του μεταφερόμενου ρευστού.
- Τη θερμοκρασία και την πίεση μεταφοράς του ρευστού.
- Το κόστος.
- Την ύπαρξη περιοριστικών κανονισμών για τη συγκεκριμένη χρήση.

Οι αγωγοί ανάλογα με τη γεωμετρία της διατομής τους, έχουν και διαφορετική ορολογία. Συνηθέστεροι είναι: οι σωλήνες (αγωγοί κυκλικής διατομής), οι αεραγωγοί (ορθογωνικής διατομής), οι αγωγοί των ανοιχτών υδραγωγείων (τραπεζοειδής ή τριγωνικής διατομής) και οι αγωγοί των υδατοσηράγγων (κυκλικής ή ελλειπτικής διατομής).

Οι σωλήνες καθορίζονται με βάση την ονομαστική τους διάμετρο d_0 και το πάχος b του τοιχώματος τους (τυποποιούνται κατά DIN, ISO, ASTM, κ.ά.). Οι ονομαστικές διαμέτρους ποικίλουν από 1/8 της ίντσας μέχρι και 30 ίντσες. Για σωλήνες μεγαλύτερης διαμέτρου από 12 ίντσες, η ονομαστική διάμετρος συμπίπτει με την εξωτερική διάμετρο του αγωγού, ενώ στους μικρότερους δεν συμπίπτει με κάποια πραγματική διάσταση. Ανεξάρτητα από το πάχος του τοιχώματος, η εξωτερική διάμετρος όλων των σωλήνων που έχουν την ίδια ονομαστική διάμετρο είναι ίδια, και αυτό για να υπάρχει η δυνατότητα εναλλαγής των εξαρτημάτων σωλήνωσης.

Το πάχος του τοιχώματος ενός αγωγού υποδηλώνεται με τον αριθμό σειράς N_0 . Για αγωγό δεδομένης διαμέτρου, το πάχος του τοιχώματος του αυξάνεται με την αύξηση του αριθμού N_0 . Η επιλογή του κατάλληλου αριθμού σειράς, δεδομένης διαμέτρου, εξαρτάται κυρίως από τη πίεση του ρευστού και την επιτρεπόμενη τάση για το υλικό κατασκευής του αγωγού.

2.2 Βασικές Γνώσεις

2.2.1 Τραχύτητα Επιφανειών

Η επιφάνεια κάθε στερεού σώματος, όσο λεία και αν φαίνεται, παρουσιάζει ανωμαλίες. Το μέγεθος αυτών των ανωμαλιών εκφράζεται ποσοτικά με ένα χαρακτηριστικό μήκος, e , το οποίο ονομάζεται απόλυτη τραχύτητα της επιφάνειας. Με βάση τη τραχύτητα των τοιχωμάτων τους, οι σωλήνες διακρίνονται σε υδραυλικά λείους και σε τραχείς. Στις ρευστομηχανικές σχέσεις ροής σε αγωγούς, παρουσιάζεται συχνά ο λόγος της απόλυτης τραχύτητας e , προς την εσωτερική διάμετρο d , του αγωγού. Ο λόγος e/d είναι γνωστός ως σχετική τραχύτητα του αγωγού. Το μέγεθος της σχετικής τραχύτητας αποτελεί βασική παράμετρο της ροής σε αγωγούς.

2.2.2 Κρίσιμος Αριθμός Reynolds σε Αγωγούς

Ως κρίσιμος αριθμός Reynolds ορίζεται η τιμή στην οποία η ροή από στρωτή γίνεται τυρβώδης. Σε αγωγούς αυτή η τιμή είναι μεταξύ του 2000 και του 4000 στη πράξη, αν και σε πειράματα έχουν καταφέρει να φτάσουν το αριθμό Reynolds έως 40000 προτού εμφανιστεί τυρβώδης ροή. Ωστόσο έχει επικρατήσει να θεωρείται ως κατώτερος κρίσιμος αριθμός Reynolds, $Re = 2000$. Η φύση μιας δοσμένης ροής ασυμπιεστού ρευστού χαρακτηρίζεται από τον αριθμό Reynolds της ροής.

Για ροή σε αγωγό ο αριθμός Reynolds βρίσκεται από τη σχέση:

$$Re = \frac{vd\rho}{\mu} \text{ ή (επειδή } \frac{\rho}{\mu} = \nu) Re = \frac{vd}{\nu}$$

όπου ρ η του πυκνότητα ρευστού, μ το δυναμικό ιξώδες ρευστού, d η διάμετρος του αγωγού, v η ταχύτητα του ρευστού και ν το κινηματικό ιξώδες.

2.2.3 Υδραυλική Ακτίνα – Υδραυλική Διάμετρος

Για αγωγούς μη κυκλικής διατομής χρησιμοποιούμε την υδραυλική ακτίνα η οποία ορίζεται ως: $R_h = A/P$, όπου A = εμβαδό της διατομής του ρευστού και P = βρεχόμενη περίμετρος. Για αγωγό ή αυλό (αγωγούς κυκλικής διατομής) ο οποίος είναι απολύτως γεμάτος από υγρό που ρέει η υδραυλική ακτίνα είναι:

$$R_h = A/P \rightarrow R_h = \frac{\pi r^2}{2\pi r} \rightarrow R_h = \frac{r}{2} \leftrightarrow R_h = \frac{d}{4}$$

Η R_h δεν είναι, λοιπόν, η ακτίνα του αγωγού, γι' αυτό ο όρος «ακτίνα» θέλει προσοχή γιατί είναι παραπλανητικός. Η υδραυλική ακτίνα αποτελεί έναν εύχρηστο τρόπο για την έκφραση τόσο του σχήματος όσο και του μεγέθους του αγωγού, επειδή για το ίδιο εμβαδό διατομής η τιμή της R_h μεταβάλλεται με το σχήμα.

Για τον υπολογισμό του αριθμού Reynolds σε μη κυκλικούς αγωγούς, αντικαθιστούμε το d με το $4R_h$. Το γινόμενο $4R_h$ ονομάζεται υδραυλική διάμετρος.

2.2.4 Απώλειες Ενέργειας σε Αγωγούς

Η ποσότητα ενέργειας που χάνεται λόγω τριβών κατά τη ροή ονομάζεται ενέργεια τριβών. Το μέγεθος που μας δίνει πόσο είναι αυτή η ενέργεια λέγεται ύψος τριβών της ροής (h_f) και έχει διαστάσεις μήκους.

Για ροή σε αγωγούς κυκλικής διατομής το ύψος τριβών της ροής υπολογίζεται από την εξίσωση των Darcy – Weisbach: $h_f = f \frac{l}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g}$.

Για ροή σε αγωγούς μη κυκλικής διατομής το ύψος τριβών της ροής υπολογίζεται από την εξίσωση του Fanning: $h_f = f \frac{l}{4R_h} \frac{\bar{v}^2}{2g}$.

Όπου f ο συντελεστής τριβής, l το προς εξέταση μήκος του αγωγού, d η διάμετρος του αγωγού και g η σταθερά της βαρύτητας ($g \approx 9.81 \text{ kN/s}^2$), \bar{v} η μέση ταχύτητα του ρευστού που εξαρτάται από τη ροή (στρωτή ή τυρβώδης) και τη κατανομή της ταχύτητας στη διατομή του κάθε αγωγού.

Για αγωγό κυκλικής διατομής και στρωτή ροή η μέση ταχύτητα είναι $\bar{v} = \frac{2v_0}{2}$, ενώ για τυρβώδη ροή η μέση ταχύτητα είναι $\bar{v} = \frac{2v_0}{(1+m)(2+m)}$, όπου v_0 η μέγιστη ταχύτητα του ρευστού στον αγωγό.

Εκτός από την ενέργεια που χάνεται λόγω τριβών, απώλεια ενέργειας έχουμε από παρεμβολή διάφορων εξαρτημάτων στη ροή, καθώς επίσης και απώλειες που συμβαίνουν κατά την είσοδο και έξοδο του ρευστού στον αγωγό. Οι απώλειες αυτές ονομάζονται δευτερεύουσες απώλειες ενέργειας. Το μέγεθος που μας δίνει πόσο είναι αυτή η ενέργεια, λέγεται ύψος των δευτερευουσών απωλειών ενέργειας (h_m), και έχει και αυτό διαστάσεις μήκους. Υπολογίζεται από την παρακάτω εμπειρική σχέση: $h_m = k_m \frac{\bar{v}^2}{2g}$, όπου k_m ονομάζεται συντελεστής απωλειών του εξαρτήματος και είναι αδιάστατο μέγεθος. Η τιμή του k_m εξαρτάται από τη γεωμετρία του εξαρτήματος και από τις συνθήκες ροής.

2.2.5 Συντελεστής Τριβής

Ο συντελεστής f εξαρτάται από τις συνθήκες ροής και τη τραχύτητα της εσωτερικής επιφάνειας του αγωγού. Ο γενικός τύπος του συντελεστή τριβής που ισχύει και για στρωτή και για τυρβώδης ροή είναι: $f = 8\tau_w/\rho v^2$, όπου τ_w η διατμητική τάση.

Για στρωτή ροή ($Re \leq 2000$) σε σωλήνες (αγωγούς κυκλικής διατομής) ο συντελεστής τριβής είναι $f = 64/Re$ και δεν εξαρτάται από τη τραχύτητα του αγωγού.

Για τυρβώδη ροή και λείους σωλήνες ο συντελεστής τριβής δίνεται από δύο διαφορετικές εξισώσεις ανάλογα με τον αριθμό Reynolds. Για αριθμούς Reynolds $4000 < Re < 10^5$, ο συντελεστής τριβής f , δίνεται από την εξίσωση Blasius, ενώ για τιμές $Re > 10^5$ από την εξίσωση Prandtl.

$$\text{Εξίσωση Blasius: } f = 0.3164Re^{-1/4}$$

$$\text{Εξίσωση Prandtl: } \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(Re\sqrt{f}) - 0.8$$

Για τυρβώδη ροή και τραχείς σωλήνες, ο συντελεστής τριβής εξαρτάται, έκτος από τον αριθμό Reynolds και από τη σχετική τραχύτητα της εσωτερικής επιφάνειας του αγωγού. Και σε αυτή τη περίπτωση έχουμε δύο διαφορετικές εξισώσεις που περιγράφουν το συντελεστή τριβής f . Η εξίσωση του Nikuradse για $((d/e)/(Re\sqrt{f})) > 0.005$ και η εξίσωση του Colebrook που ισχύει για $Re > 4000$.

$$\text{Εξίσωση Nikuradse: } \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{d}{e}\right) + 1.14$$

$$\text{Εξίσωση Colebrook: } \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{e/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right)$$

Ακόμα για το συντελεστή τριβής έχουν δημιουργηθεί διαγράμματα και πίνακες, με πιο γνωστό, το διάγραμμα Moody (γνωστό επίσης και ως διάγραμμα Stanton), το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αγωγούς και κυκλικής και μη κυκλικής διατομής. Επίσης το διάγραμμα Karman χρησιμοποιείται συχνά αντί του διαγράμματος Moody στην Υδραυλική.

2.2.6 Σπηλαιώση

Όταν η πίεση p σε κάποιο σημείο του πεδίου ροής ενός υγρού μειωθεί, ώστε να φθάσει την τιμή της τάσης ατμών p_s ($p_s = 1,705 \text{ kPa}$), του υγρού για τη δεδομένη θερμοκρασία (δηλαδή, όταν $p = p_s$), τότε σχηματίζονται ταχέως φυσαλίδες ατμού στην περιοχή μείωσης της πίεσης. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται σπηλαιώση.

Ένα χρήσιμο μέγεθος για την εκτίμηση της πιθανότητας να προκληθεί σπηλαιώση σε ένα ορισμένο σημείο του πεδίου ροής, είναι η παράμετρος σπηλαιώσης Ca , η οποία ορίζεται από τη σχέση: $Ca = (p - p_s)/(\rho v_0^2/2)$. Όταν η παράμετρος $Ca = 0$, η πίεση p εξισώνεται με την τάση ατμών p_s και συνεπώς, θα πρέπει να αναμένεται ατμοποίηση του υγρού. Οι τοπικές πιέσεις που αναπτύσσονται όταν οι φυσαλίδες ατμού επανυγροποιούνται είναι της τάξης των $100 \div 1000 \text{ bar}$.

2.3 Ιξώδης Ροή σε Αγωγό

2.3.1 Στρωτή και Τυρβώδης ροή

Υπάρχουν δύο είδη ιξώδους ροής, η στρωτή (laminar) και η τυρβώδης (turbulent) και η διαφορά ανάμεσα στα δύο είδη είναι στην εσωτερική τους δομή. Στη στρωτή ροή, το ρευστό κινείται ομαλά και κατά στρώματα, χωρίς σωματίδια του ενός σώματος να μεταφέρονται στο αμέσως γειτονικό του. Σε αυτό το είδος ροής δε συμβαίνει μακροσκοπική ανάμειξη των γειτονικών στρωμάτων, αλλά μόνο μοριακή. Αντιθέτως, στην τυρβώδη ροή, τα σωματίδια του ρευστού κινούνται σε ακανόνιστες τροχιές προς όλες τις διευθύνσεις κατά εντελώς τυχαίο τρόπο, έτσι εκτός από μοριακή, έχουμε και μακροσκοπική ανάμειξη των γειτονικών στρωμάτων.

Γενικά η τύρβη εμφανίζεται σε ροές όπου υφίστανται ιξώδεις διατμητικές τάσεις που οφείλονται ή σε μεγάλες κλίσεις ταχύτητας (τύρβη στερεού σώματος) ή σε ασυνέχειες της ταχύτητας (ελεύθερη τύρβη). Οι επιφάνειες ασυνέχειας της ταχύτητας είναι εξαιρετικά ασταθείς και αποτελούν πηγές δημιουργίας τύρβης. Η βασική παράμετρος η οποία μας καθορίζει το είδος της ροής (στρωτή ή τυρβώδης) είναι ο αριθμός Reynolds.

Για καθορισμένη γεωμετρία ροής και είδος ρευστού, ο αριθμός Reynolds είναι ανάλογος με την ταχύτητα αναφοράς. Έτσι για μικρές ταχύτητες, η ροή είναι στρωτή και χαρακτηρίζεται από τις ιξώδεις δυνάμεις, που υπερτερούν των αδρανειακών δυνάμεων. Με την αύξηση της ταχύτητας οι δυνάμεις αδρανείας αυξάνονται και μετά από ένα σημείο ξεπερνούν τις ιξώδεις, έτσι η ροή από στρωτή γίνεται τυρβώδης.

2.3.2. Μήκος Εισόδου σε Αγωγό Κυκλικής Διατομής

Έστω ότι το ρευστό πριν εισέλθει στον αγωγό κινείται με ομοιόμορφη ταχύτητα v_{∞} . Κατά την είσοδο του ρευστού στον αγωγό, κοντά στα τοιχώματα του, αναπτύσσεται οριακό στρώμα, το πάχος του οποίου αυξάνεται με το μήκος του αγωγού, έως ότου συναντήσει το απέναντι οριακό στρώμα το οποίο αναπτύσσεται στην αντιδιαμετρική επιφάνεια του αγωγού. Από αυτό το σημείο και έπειτα, η διαμόρφωση της ροής παραμένει αναλλοίωτη. Η ροή μετά το πέρας αυτού του σημείου ονομάζεται πλήρως ανεπτυγμένη ροή και το μήκος του αγωγού που χρειάζεται για να έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη ροή λέγεται μήκος εισόδου l_e .

Το διάγραμμα κατανομής της ταχύτητας στην περιοχή του μήκους εισόδου αποτελείται από δύο τμήματα. Το τμήμα ομοιόμορφης ταχύτητας v_e , στο κέντρο του αγωγού, και τα τμήματα μεταβλητής ταχύτητας v_x , εντός των οριακών στρωμάτων. Καθώς κινούμαστε μέσα στον αγωγό κατά τη διεύθυνση της ροής, το εύρος της v_e μειώνεται, ενώ το εύρος περιοχών της v_x αυξάνεται. Για ασυμπίεστη ροή, η μέση ταχύτητα μέσα στον αγωγό παραμένει σταθερή και ίση με την ομοιόμορφη ταχύτητα εισόδου του ρευστού στον αγωγό, και δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{A} \iint_A v_x dA = v_\infty = \text{const}$$

όπου A η εγκάρσια διατομή του αγωγού, v_∞ η ομοιόμορφη ταχύτητα εισόδου και v_x η μεταβλητή ταχύτητα.

Στην περιοχή πλήρως ανεπτυγμένης ροής, η ταχύτητα v_x του ρευστού, εξαρτάται μόνο από την απόσταση της (r) από τον άξονα του αγωγού, ενώ η πραγματική μορφή της κατανομής της ταχύτητας εξαρτάται από το είδος της ροής.

Για στρωτή ροή το μήκος εισόδου l_e δίνεται από τη σχέση του Langhaar και είναι:

$$l_e/d = 0,0575Re$$

όπου d η διάμετρος του αγωγού. Συνήθως επειδή η μετάβαση από στρωτή ροή σε τυρβώδη γίνεται στη περιοχή εισόδου, το πραγματικό μήκος εισόδου είναι μικρότερο από το μήκος l_e που υπολογίζεται από την παραπάνω σχέση. Το μέγιστο μήκος εισόδου σε στρωτή ροή αντιστοιχεί στον κρίσιμο αριθμό Reynolds ($Re = 2000$) και είναι ίσο με $115d$.

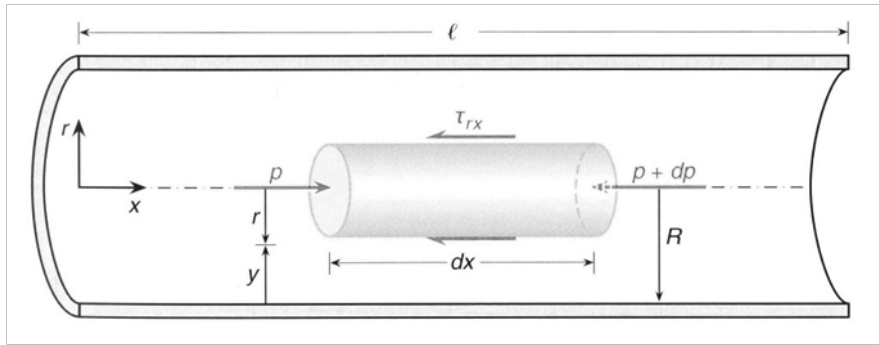
Για τυρβώδη ροή το μήκος εισόδου l_e δίνεται από τη σχέση:

$$l_e/d = 4,4Re^{1/6}$$

Τέλος στην περίπτωση που ο λόγος του μήκους του αγωγού προς τη διάμετρό του είναι πολύ μεγάλος, η επίδραση της εισόδου του ρευστού στη διαμόρφωση της ροής είναι αμελητέα και η ροή αναλύεται ως πλήρως ανεπτυγμένη από την είσοδο του αγωγού.

2.3.3 Στρωτή Ροή σε Αγωγούς Κυκλικής Διατομής

Έστω ότι η ροή μας είναι μόνιμη, ασυμπιεστή και ιξώδη σε έναν οριζόντιο αγωγό κυκλικής διατομής, μήκους l και ακτίνας R , με πλήρως ανεπτυγμένη ροή από την είσοδο του. Παρακάτω θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά ενός κυλινδρικού σωματιδίου του ρευστού, συμμετρικού ως προς τον αγωγό μας, με μήκος dx και ακτίνα r .

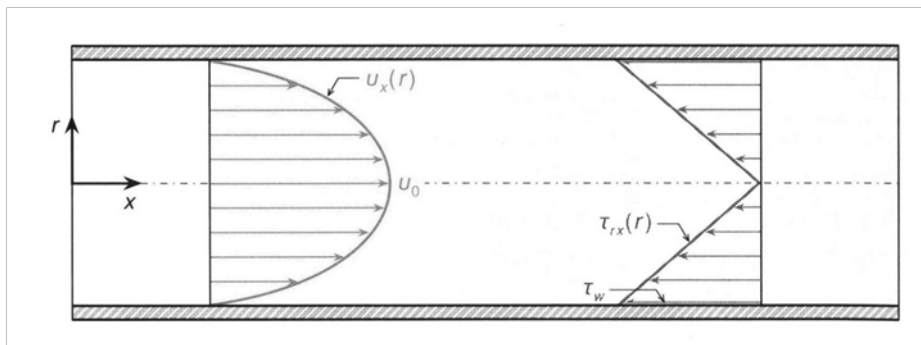


Σχήμα 2.1 Ασκούμενες δυνάμεις σε κυλινδρικό σωματίδιο ρευστού κατά τη διεύθυνση x με σταθερή ταχύτητα

Πάνω σε αυτό το σωματίδιο, κατά τη διεύθυνση x του σχήματος 2.1, δρουν οι δυνάμεις πίεσης στις βάσεις του και οι ιξώδεις διατμητικές δυνάμεις στη παράπλευρη επιφάνειά του, ενώ η πίεση (p) εξαρτάται μόνο από την απόσταση του από την είσοδο του αγωγού. Από το δεύτερο νόμο κίνησης του Newton, ισχύει ότι οι διατμητικές δυνάμεις είναι:

$$\tau_{rx} = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{r}{2}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση η διατμητική τάση τ_{rx} αυξάνεται γραμμικά ως προς την απόσταση r , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2. Η παραπάνω εξίσωση παρουσιάζει μέγιστα για $r = R$ και ελάχιστα για $r = 0$, όπου και μηδενίζει. Επίσης ισχύει και για στρωτή αλλά και για τυρβώδη ροή.



Σχήμα 2.2 Κατανομές ταχύτητας και ιξώδους διατμητικής τάσης για στρωτή ροή

Τώρα αν θεωρήσουμε το ρευστό μας νευτώνειο, από το νόμο ιξώδους του Newton, παίρνουμε την εξίσωση που συνδέει τη σχετική ταχύτητα του ρευστού, με τις διατμητικές τάσεις:

$$\tau_{rx} = -\mu \frac{dv_x}{dr}$$

Αν τώρα εξισώσουμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις, και τις ολοκληρώσουμε (ως οριακή συνθήκη για την ολοκλήρωση της νέας εξίσωσης έχουμε ότι η $v_x = 0$, για $r = R$), έχουμε μία νέα εξίσωση για την ταχύτητα v_x , η οποία μας δείχνει ότι η ταχύτητα στη στρωτή ροή είναι παραβολικής μορφής:

$$v_x = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Επίσης από τη παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι η ταχύτητα v_x μεγιστοποιείται, όταν το $r = 0$:

$$v_0 = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2}{4\mu}$$

Η μέση ταχύτητα (\bar{v}_x) και η ογκομετρική παροχή (\dot{V}) του ρευστού υπολογίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{Μέση ταχύτητα: } \bar{v}_x = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2}{8\mu}$$

$$\text{Ογκομετρική παροχή: } \dot{V} = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{\pi R^4}{8\mu}$$

Στην περίπτωση στρωτής ροής ρευστών σε κεκλιμένο αγωγό, οι παραπάνω εξισώσεις για τη διατμητική τάση, τη ταχύτητα και την ογκομετρική παροχή έχουν τη μορφή:

$$\tau_{rx} = \left(-\frac{d}{dx}(p + \rho g z)\right) \frac{r}{2}$$

$$v_x = \left(-\frac{d}{dx}(p + \rho g z)\right) \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$\dot{V} = \left(-\frac{d}{dx}(p + \rho g z)\right) \frac{\pi R^4}{8\mu}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και z η απόσταση από τη στάθμη αναφοράς ($z = 0$).

2.3.4 Τυρβώδη Ροή σε Αγωγούς Κυκλικής Διατομής

Η τυρβώδη ροή σε έναν αγωγό κυκλικής διατομής παρουσιάζει τρεις ζώνες : την ιξώδη (που βρίσκεται κοντά στο τοίχωμα), την τυρβώδη (μακριά από το τοίχωμα) και τη μεταβατική (που βρίσκεται μεταξύ τους). Η διαμόρφωση της ροής σε κάθε ζώνη εξαρτάται από το είδος των διατμητικών τάσεων που υπερισχύουν στη κάθε μια. Επειδή στη τυρβώδη ροή έχουμε διακυμάνσεις, θα χρησιμοποιήσουμε μέσες χρονικές τιμές για τις τάσεις και τις ταχύτητες.

Έτσι στην ιξώδη ζώνη υπερισχύουν οι ιξώδεις τάσεις και η ροή είναι πάντοτε στρωτή, ανεξάρτητα από τον αριθμό Reynolds. Οι ιξώδεις τάσεις βρίσκονται από την εξίσωση:

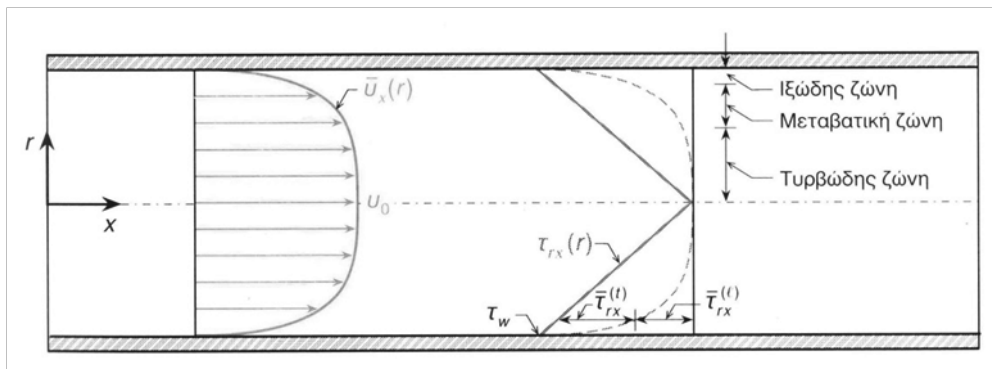
$$\bar{\tau}_{rx}^{(l)} = -\mu \frac{d\bar{v}_x}{dr}$$

Στη τυρβώδη ζώνη υπερσχύουν οι τυρβώδεις τάσεις και η ροή είναι πάντοτε τυρβώδης. Οι τυρβώδεις τάσεις βρίσκονται από την εξίσωση:

$$\bar{\tau}_{rx}^{(t)} = -\rho \overline{\tilde{u}_x \tilde{u}_r}$$

Στη μεταβατική ζώνη τόσο οι ιξώδεις τάσεις όσο και οι τυρβώδεις παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της ροής, η οποία είναι ασταθής κατά διαστήματα.

Η ολική διατμητική τάση (τ_{rx}) είναι το άθροισμα των δύο αυτών τάσεων και εξαρτάται από το σημείο του πεδίου ροής που παρουσιάζονται στο σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3 Κατανομές ταχύτητας και διατμητικών τάσεων για τυρβώδη ροή

Οι εξισώσεις κατανομής της ταχύτητας για λείο αγωγό σε κάθε ζώνη είναι:

Στην ιξώδη ζώνη, η ταχύτητα u_x μεταβάλλεται γραμμικά ως προς την απόσταση y (όπου, $y = R - r$) από το τοίχωμα του αγωγού, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\bar{u}_x = u_* \cdot \left(\frac{yu_*}{\nu} \right) \quad (0 \leq yu_*/\nu \lesssim 5)$$

όπου u_* είναι η διατμητική ταχύτητα και ν το κινηματικό ιξώδες του ρευστού. Η διατμητική ταχύτητα δίνεται από τη σχέση: $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, και η τοπική διατμητική τάση από: $\tau_w = \mu \frac{du_x}{dy}$, ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού.

Στην εσωτερική περιοχή της τυρβώδους ζώνης, η ταχύτητα u_x μεταβάλλεται λογαριθμικά ως προς την απόσταση y , σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\bar{u}_x = u_* \cdot \left[2,5 \ln \left(\frac{yu_*}{\nu} \right) + 5,0 \right] \quad (30 \lesssim yu_*/\nu \lesssim 3 \cdot 10^3)$$

Από πειραματικές μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι το εξωτερικό όριο της εσωτερικής περιοχής της τυρβώδους ζώνης εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds. Όσο περισσότερο αυξάνεται ο αριθμός Reynolds, τόσο το όριο αυτό απομακρύνεται από το τοίχωμα του αγωγού.

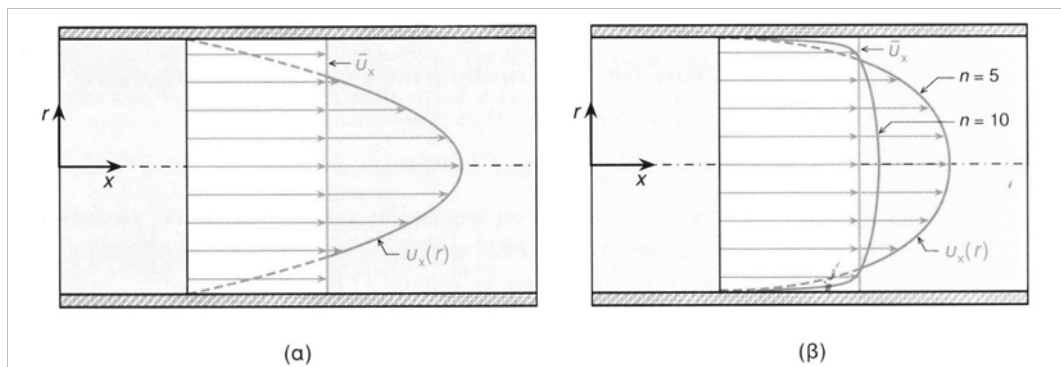
Στη μεταβατική ζώνη, η ταχύτητα είναι δύσκολο να δοθεί με ακρίβεια, συνήθως την υπολογίζουμε ως τυρβώδη ροή με την άνωθεν εξίσωση, αλλά μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και η λογαριθμική εξίσωση:

$$\bar{v}_x = v_* \cdot \left[5,0 \ln \left(\frac{y v_*}{\nu} \right) - 3,0 \right] \quad (5 \lesssim y v_* / \nu \lesssim 30)$$

Κοντά στο κέντρο του αγωγού, η διαμόρφωση της ροής επηρεάζεται από τις τυρβώδεις τάσεις. Στη περιοχή αυτή η κατανομή της ταχύτητας περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση (η οποία ισχύει και για τραχείς αγωγούς):

$$\bar{v}_x = v_0 - [v_* \cdot (2,5 \ln(R/y) + 0,8)]$$

Στο σχήμα 2.4 γίνεται σύγκριση της κατανομής της ταχύτητας νευτώνειου ρευστού για στρωτή (αριστερά) και τυρβώδη (δεξιά) ροή σε αγωγό κυκλικής διατομής. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στην τυρβώδη ροή, η κατανομή της ταχύτητας είναι πολύ κοντά στη πραγματική, σε αντίθεση με τη στρωτή που διαφέρει κατά πολύ. Στη στρωτή ροή έχουμε ομαλή και βαθμιαία μεταβολή της ταχύτητας από τη τιμή μηδέν (κοντά στα τοιχώματα), μέχρι τη μέγιστη τιμή της (στο κέντρο του αγωγού). Στην τυρβώδη ροή, από την άλλη, έχουμε ομοιόμορφη κατανομή στη περιοχή γύρω από τον άξονα του αγωγού, ενώ στη περιοχή κοντά στα τοιχώματα έχουμε απότομη μεταβολή της ταχύτητας, η οποία εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds.



Σχήμα 2.4 Τυπικές κατανομές ταχύτητας για στρωτή ροή (α) και τυρβώδη ροή (β)

Κεφάλαιο 3

Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (Computational Fluid Dynamics, CFD)

3.1 Εισαγωγή στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

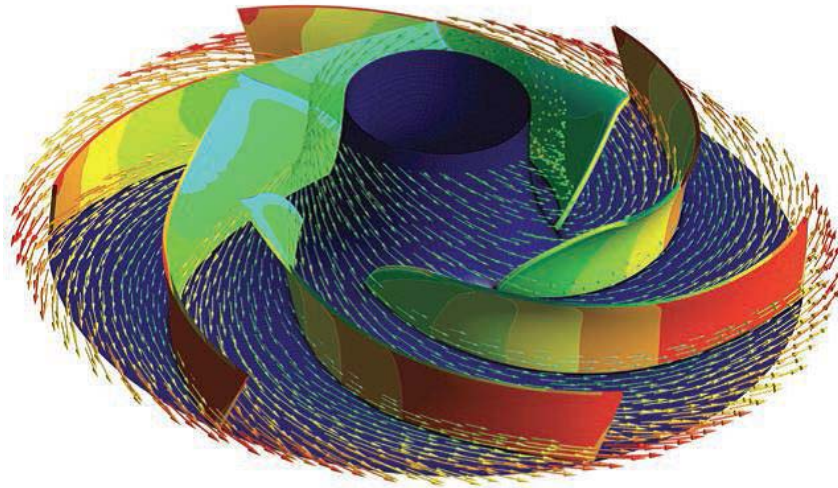
3.1.1 Ορισμός της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής

Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (Computational Fluid Dynamics) είναι ένα σύνολο από αριθμητικές μεθόδους που εφαρμόζονται για την παραγωγή προσεγγιστικών λύσεων σε προβλήματα δυναμικής των ρευστών και μεταφοράς θερμότητας. Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό, η Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (CFD) δεν αποτελεί αυτοτελή επιστήμη αλλά έναν τρόπο εφαρμογής των μεθόδων ενός επιστημονικού κλάδου (αριθμητική ανάλυση) σε έναν άλλο (μεταφορά θερμότητας και μάζας).

3.1.2 Χρησιμότητα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής

Ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα της επιστήμης της ροής των ρευστών και της μεταφοράς θερμότητας και μάζας είναι οι απαραίτητες προσεγγίσεις που πρέπει να γίνουν για την περιγραφή των φυσικών διεργασιών. Αντί των μαζικών ιδιοτήτων, όπως η ορμή ή η στροφορμή ενός σώματος στη μηχανική και η ολική ενέργεια ή η εντροπία ενός συστήματος στη θερμοδυναμική, η ανάλυση επικεντρώνεται κυρίως σε κατανεμημένες ιδιότητες. Προσπαθούμε να προσδιορίσουμε ολόκληρα πεδία, όπως η θερμοκρασία $T(x, t)$, η ταχύτητα $U(x, t)$, η πυκνότητα $\rho(x, t)$, κλπ. Ακόμα και όταν απόλυτος στόχος της ανάλυσης είναι ο υπολογισμός μια ολοκληρωτικής ποσότητας, όπως ο συντελεστής τριβής ή ο καθαρός ρυθμός μεταφοράς θερμότητας, ο τελευταίος επιτυγχάνεται με χρήση των κατανεμημένων πεδίων.

Η προσέγγιση είναι πολύ ελκυστική λόγω του επιπέδου των λεπτομερειών που παρέχει. Μπορεί να προσδιοριστεί η εξέλιξη ολόκληρης της κατανομής της θερμοκρασίας εντός ενός σώματος. Επίσης, μπορούν να υπολογιστούν οι εσωτερικές διεργασίες μιας ροής ρευστού όπως η κίνηση, η περιστροφή και η παραμόρφωση των μικροσκοπικών σωματιδίων του ρευστού (εικόνα 1.1). Βέβαια, η λεπτομερής περιγραφή κοστίζει, κυρίως στη μορφή μιας δραματικής αύξησης στην πολυπλοκότητα των εξισώσεων. Εκτός κάποιων εξαιρετικά απλοποιημένων μοντέλων, οι εξισώσεις που διέπουν τις κατανεμημένες ιδιότητες είναι διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων, συχνά μη γραμμικές. Γενικά, η Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (CFD) είναι ένας τρόπος για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε και να προβλέψουμε μια διεργασία.



Εικόνα 3.1 Χρήση CFD σε κινητή φτερωτή αντλία

3.1.3 Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Ροής

Θεωρητική Μέθοδος: Χρήση των εξισώσεων για την εύρεση αναλυτικών λύσεων. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η παραγωγή ακριβών λύσεων. Μεταξύ των μειονεκτημάτων της, το πιο σημαντικό είναι ότι αναλυτικές λύσεις υφίστανται μόνο για μια περιορισμένη κλάση προβλημάτων, τυπικά σχεδιασμένων με έναν τεχνητό, εξιδανικευμένο τρόπο.

Ένα τέτοιο παράδειγμα προβλήματος αποτελεί η λύση του Poiseuille για τη στρωτή ροή σε απείρου μήκους αγωγό. Η λύση είναι σωστή μόνο εάν ο αγωγός είναι απειροστά μακρύν, με σταθερή θερμοκρασία και με απόλυτα ασυμπίεστο ρευστό. Η κατανομή της μόνιμης στρωτής ταχύτητας έχει τη μορφή:

$$U(r) = \frac{r^2 - R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx}$$

Όπου U είναι η ταχύτητα, R είναι η ακτίνα του αγωγού, dp/dx είναι η σταθερή κλίση της πίεσης που οδηγεί τη ροή και μ είναι ο συντελεστής δυναμικής συνεκτικότητας του ρευστού.

Πειραματική Μέθοδος: Γνωστά παραδείγματα αποτελούν τα πειράματα σε αεροσήραγγες, τα οποία βοηθούν στο σχεδιασμό και τη βελτιστοποίηση της εξωτερικής μορφής των αεροσκαφών (επίσης των πλοίων, των κτηρίων κ.α.) Τα κύρια μειονεκτήματα της πειραματικής μεθόδου είναι οι τεχνικές δυσκολίες και το υψηλό κόστος (μερικές φορές μπορεί να πάρει χρόνια μέχρι την τελική ετοιμασία ενός πειράματος και την επίλυση όλων των τεχνικών προβλημάτων που μπορούν να εμφανιστούν κατά την προετοιμασία του).

Υπολογιστική (Αριθμητική) Μέθοδος: Και εδώ περιγράφουμε σχεδόν οποιαδήποτε ροή ρευστού και διεργασία μεταφοράς θερμότητας ως λύση ενός συνόλου μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ούτε αυτή η μέθοδος επιτυγχάνεται χωρίς την παρουσία

προβλημάτων, ωστόσο, η υπολογιστική μέθοδος υπερνικά τις αναλυτικές και πειραματικές μεθόδους σε μερικά πολύ σημαντικά ζητήματα, όπως: στη γενικότητα, στην ευελιξία, στην ακρίβεια και στο κόστος.

3.1.4 Ιστορία της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD)

Η ιδέα του υπολογισμού προσεγγιστικών λύσεων διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν ροές ρευστών και διεργασίες μεταφοράς θερμότητας είναι σχετικά παλιά. Η ανάπτυξη υπολογιστικών μεθόδων για την επίλυση συνήθως και μερικών διαφορικών εξισώσεων ξεκίνησε το πρώτο μισό του 20^{ου} αιώνα. Εκείνη την εποχή, οι υπολογισμοί απαιτούσαν τη χρήση πινάκων και χρονοβόρων μηχανολογικών εργασιών στις οποίες λάμβαναν μέρος δεκάδες, αν όχι εκατοντάδες, άνθρωποι. Επομένως, δεν αποτελεί έκπληξη ότι αντιμετωπίζονταν μόνο τα σημαντικότερα προβλήματα και επιλύονταν μόνο οι απλές, μονοδιάστατες εξισώσεις.

Η εφεύρεση και η συνακόλουθη ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών έδωσαν τη δυνατότητα εκτέλεσης εκατομμυρίων αριθμητικών υπολογισμών κινητής υποδιαστολής μέσα σε ελάχιστα δευτερόλεπτα. Το γεγονός αυτό προκάλεσε αύξηση των προσπαθειών για την ανάπτυξη και την εφαρμογή μεθόδων αριθμητικής προσομοίωσης. Οι πρώτες προσομοιώσεις ρεαλιστικών δισδιάστατων ροών έλαβαν μέρος στα τέλη της δεκαετίας του 1960 ενώ, οι τρισδιάστατες ροές δεν μπορούσαν να επιλυθούν μέχρι και το τέλος του 1980.

Τα τελευταία 20 με 30 χρόνια, η ανάπτυξη που παρατηρείται στην τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει αλλάξει τελείως το πρόσωπο της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD). Από επιστημονικής πλευράς, στην οποία οι ερευνητές εργάζονται για την επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων χρησιμοποιώντας ειδικά σχεδιασμένους κώδικες, έχει μεταμορφωθεί σε ένα καθημερινό εργαλείο για την μηχανοτεχνική σχεδίαση και βελτιστοποίηση και ανάλυση. Οι προσομοιώσεις συνήθως χρησιμοποιούνται σαν αντικατάσταση ή προσθήκη στην προτυποποίηση καθώς και σε άλλες τεχνικές σχεδίασης. Κώδικες για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων εξακολουθούν να αναπτύσσονται για ερευνητικούς σκοπούς αλλά, η μηχανοτεχνική πρακτική έχει στραφεί σχεδόν πλήρως στη χρήση εμπορικών ή πακέτων ελεύθερου λογισμικού Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD), όπως το FLUENT, κ.α. Όλα τους αποτελούν στην ουσία αριθμητικούς επιλυτές συστημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων που είναι εφοδιασμένοι με φυσικά και μοντέλα τύρβης, όπως επίσης και με δυνατότητες γένεσης υπολογιστικών πλεγμάτων και μετ-επεξεργασίας των τελικών αποτελεσμάτων της ανάλυσης.

3.2 Υπολογιστικές (Αριθμητικές) Μέθοδοι

3.2.1 Δυνατότητες και Περιορισμοί Υπολογιστικών Μεθόδων (Numerical Methods)

Πολλά από τα προβλήματα που σχετίζονται με τη πειραματική εργασία αντιμετωπίζονται εύκολα με την Υπολογιστική Ρευστοδυναμική. Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να προσομοιώσουμε τη ροή γύρω από ένα κινούμενο αυτοκίνητο σε μία αεροδυναμική σήραγγα, θα πρέπει να δημιουργήσουμε το μοντέλο του αυτοκινήτου και να φυσήξει αέρας προς αυτό, αλλά το έδαφος πρέπει να κινείται με τη ταχύτητα του αέρα, κάτι που είναι δύσκολο να επιτευχθεί. Δεν είναι δύσκολο όμως σε μία αριθμητική προσομοίωση. Εάν επιλύσουμε τις μεταβαλλόμενες, τρισδιάστατες εξισώσεις Navier-Stokes με ακρίβεια, οδηγούμαστε σε ένα ολοκληρωμένο σύνολο δεδομένων από το οποίο μπορεί να προκύψει κάθε ποσότητα που έχει φυσική σημασία.

Αυτά τα πλεονεκτήματα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής εξαρτώνται από τη δυνατότητα επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes με ακρίβεια, το οποίο όμως είναι εξαιρετικά δύσκολο για τα περισσότερα πεδία ροής που ενδιαφέρουν ένα μηχανικό. Εάν είναι αδύνατο να οδηγηθούμε σε ακριβείς λύσεις για όλα τα πεδία ροής, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να μπορούμε να παράγουμε, να μάθουμε να αναλύουμε και να κρίνουμε τα αποτελέσματα. Τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι πάντοτε προσεγγιστικά. Υπάρχουν λόγοι που εμφανίζονται αυτές οι αποκλίσεις μεταξύ του αριθμητικού αποτελέσματος και της «πραγματικότητας», όπως τα σφάλματα που προκύπτουν από κάθε τμήμα της διαδικασίας η οποία χρησιμοποιήθηκε ώστε να παραχθούν οι αριθμητικές λύσεις:

1. Οι διαφορικές εξισώσεις ίσως περιέχουν προσεγγίσεις και εξιδανικεύσεις
2. Οι προσεγγίσεις προκύπτουν κατά τη διαδικασία της διακριτοποίησης
3. Κατά την επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν επαναληπτικές μέθοδοι. Εάν αυτές δεν «εκτελεστούν» για μεγάλο χρονικό διάστημα, δε θα παραχθεί η ακριβής λύση των διακριτοποιημένων εξισώσεων.

Η οπτικοποίηση των αριθμητικών λύσεων μέσω διανυσμάτων, ισοσταθμικών καμπύλων ή επιφανειών ή ειδών γραφημάτων και βίντεο των μεταβαλλόμενων πεδίων ροής είναι απαραίτητη για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Είναι ασύγκριτα, ο αποδοτικότερος τρόπος παρουσίασης του μεγάλου πλήθους δεδομένων που προκύπτουν από έναν υπολογισμό. Όμως χρειάζεται τα αποτελέσματα να εξετάζονται πολύ προσεκτικά ώστε να είμαστε σίγουροι ότι είναι ποσοτικά σωστά.

3.2.2 Συνιστώσες μιας Μεθόδου Υπολογιστικής Επίλυσης

Μαθηματικό Μοντέλο: Το αρχικό σημείο κάθε υπολογιστικής μεθόδου είναι το μαθηματικό μοντέλο (mathematical model), δηλαδή το σύνολο των μερικών διαφορικών εξισώσεων και των οριακών συνθηκών. Διαλέγει κανείς λοιπόν, το κατάλληλο μοντέλο για την εφαρμογή του στόχου (ασυμπίεστη, χωρίς συνεκτικότητα, τυρβώδη ροή, 2D ή 3D, κλπ.). Επίσης μια μέθοδος επίλυσης σχεδιάζεται, συνήθως, για συγκεκριμένο σύστημα εξισώσεων. Να προσπαθεί κανείς να παράξει μία μέθοδο επίλυσης γενικού στόχου, δηλαδή μία μέθοδο η οποία να μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα πεδία ροής, δεν είναι πρακτικό, και όπως συμβαίνει με τα περισσότερα εργαλεία γενικού στόχου, δεν είναι πάντα βέλτιστο για κάθε εφαρμογή.

Μέθοδος Διακριτοποίησης: Αφού επιλέξουμε το μαθηματικό μοντέλο, θα πρέπει στη συνέχεια να επιλέξουμε μία κατάλληλη μέθοδο διακριτοποίησης (discretization method), δηλαδή μία μέθοδο προσέγγισης των διαφορικών εξισώσεων μέσω ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων για μεταβλητές, σε ένα σύνολο διακριτών σημείων στο χώρο και στο χρόνο. Υπάρχουν πολλές τέτοιες προσεγγίσεις, αλλά οι πιο σημαντικές απ' αυτές είναι : οι πεπερασμένες διαφορές (finite difference, FD), οι πεπερασμένοι όγκοι (finite volume, FV) και τα πεπερασμένα στοιχεία (finite element, FE). Άλλες μέθοδοι, όπως φασματικά σχήματα, μέθοδοι οριακού στοιχείου και κυψελοειδή αυτόματα χρησιμοποιούνται στη CFD, αλλά η χρήση τους περιορίζεται σε προβλήματα ειδικών κατηγοριών.

Συστήματα Συντεταγμένων και Διανυσμάτων Βάσης: Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να επιλέξει Καρτεσιανές, κυλινδρικές, σφαιρικές, καμπυλόγραμμες ορθογωνικές ή μη ορθογωνικές συντεταγμένες, οι οποίες μπορεί να είναι είτε σταθερές είτε κινούμενες. Η επιλογή εξαρτάται από τον στόχο του κάθε πεδίου ροής και μπορεί να επηρεάζει τη μέθοδο διακριτοποίησης και τον τύπο του πλέγματος που χρησιμοποιείται. Πρέπει να επιλέξει ακόμη, κανείς τη βάση ως προς την οποία τα διανύσματα και οι τανυστές θα οριστούν (σταθερή ή μεταβλητή, συναλλοίωτη ή ανταλλοίωτη, κλπ.). Ανάλογα με την επιλογή, το διάνυσμα ταχύτητας και ο τανυστής τάσης μπορεί να εκφραστεί ως προς τις Καρτεσιανές, φυσικές ή μη φυσικές προσανατολισμένες συνιστώσες.

Αριθμητικό Πλέγμα: Τα διακριτά σημεία στα οποία υπολογίζονται οι μεταβλητές καθορίζονται από το αριθμητικό πλέγμα το οποίο είναι αναπόφευκτα μία διακριτή αναπαράσταση του γεωμετρικού πεδίου ορισμού στο οποίο το πρόβλημα θα λυθεί. Διαχωρίζει το πεδίο ορισμού της λύσης σε πεπερασμένο αριθμό υπο-πεδίων ορισμού (στοιχεία, όγκοι ελέγχου, κλπ.). Κάποιες από τις διαθέσιμες επιλογές είναι οι παρακάτω:

- Δομημένο (κανονικό) πλέγμα: Τα δομημένα ή κανονικά πλέγματα αποτελούνται από οικογένειες σειρών πλέγματος με την εξής ιδιότητα: τα μέλη μιας οικογένειας δεν διασχίζουν το ένα το άλλο και διασχίζουν κάθε

μέλος από άλλες οικογένειες μόνο μία φορά. Αυτό επιτρέπει τη διαδοχική αρίθμηση των σειρών ενός δεδομένου συνόλου. Το μειονέκτημα των δομημένων πλεγμάτων είναι ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο για απλά γεωμετρικά πεδία ορισμού λύσεων.

- Τμηματικά δομημένο πλέγμα: Σε ένα τέτοιο δομημένο πλέγμα, υπάρχει μία, δύο (ή και περισσότερων) επιπέδων υποδιαίρεση του πεδίου ορισμού της λύσης. Στο αδρό επίπεδο, υπάρχουν τμήματα που είναι σχετικά μεγάλες περιοχές του πεδίου ορισμού, η δομή τους μπορεί να είναι ακανόνιστη και μπορεί είτε εξέχουν, είτε όχι. Στο λεπτό επίπεδο (μέσα σε κάθε τεμάχιο) είναι καθορισμένο ένα δομημένο πλέγμα. Σημειώνεται πως είναι απαραίτητη η ειδική μεταχείριση των διεπαφών των τμημάτων. Το μειονέκτημα αυτών των πλεγμάτων είναι πως η διατήρηση δεν επιβάλλεται εύκολα στα όρια του κάθε τεμαχίου. Τα πλεονεκτήματα αυτής της προσέγγισης είναι πως τα σύνθετα πεδία ορισμού αντιμετωπίζονται πιο εύκολα και ότι αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να ακολουθεί κινούμενα σώματα.
- Μη δομημένα πλέγματα: Για κάθε σύνθετη γεωμετρία, ο πιο ευέλικτος τύπος πλέγματος είναι αυτός στον οποίο μπορεί να προσαρμοστεί ένα αυθαίρετο όριο του πεδίου ορισμού της λύσης. Κατ' αρχήν, τέτοια πλέγματα θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν με οποιοδήποτε σχήμα διακριτοποίησης, αλλά προσαρμόζονται καλύτερα στις προσεγγίσεις πεπερασμένων όγκων και πεπερασμένων στοιχείων. Τα στοιχεία ή οι όγκοι ελέγχου μπορούν να έχουν οποιοδήποτε σχήμα, ενώ επίσης δεν υπάρχει περιορισμός στο νούμερο των γειτονικών στοιχείων ή κόμβων. Το πλεονέκτημα της ευελιξίας αποτελεί αντιστάθμισμα του μειονεκτήματος της ανωμαλίας των δεδομένων της δομής του. Οι θέσεις των κόμβων και η σύνδεση των γειτονικών σημείων μεταξύ τους πρέπει να καθορίζονται ρητά.

Πεπερασμένες Προσεγγίσεις: Μετά την επιλογή του τύπου του πλέγματος, πρέπει να επιλεγούν και οι προσεγγίσεις που θα χρησιμοποιηθούν κατά τη διαδικασία διακριτοποίησης. Σε μία μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, πρέπει να επιλέγονται προσεγγίσεις για τις παραγώγους στα σημεία του πλέγματος. Σε μία μέθοδο πεπερασμένων πρέπει να επιλέγει κανείς μεθόδους προσέγγισης επιφανειακών χωρικών ολοκληρωμάτων. Σε μία μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, πρέπει να διαλέξει κανείς τις συναρτήσεις μορφής (στοιχεία) και τις συναρτήσεις στάθμισης. Η τελική επιλογή επηρεάζει την ακρίβεια της προσέγγισης. Οι περισσότεροι ακριβείς προσεγγίσεις περιλαμβάνουν περισσότερους κόμβους και αποδίδουν αρτιότερα μητρώα συντελεστών. Οι υψηλότερες απαιτήσεις υπολογιστικής μνήμης, όμως, ίσως απαιτούν τη χρησιμοποίηση πιο αδρών πλεγμάτων, αντισταθμίζοντας έτσι το πλεονέκτημα της μεγάλης ακρίβειας. Συνεπώς, χρειάζεται να γίνει ένας συμβιβασμός μεταξύ της απλότητας, της ευκολίας της εκτέλεσης, της ακρίβειας και της υπολογιστικής αποδοτικότητας.

Μέθοδος Επίλυσης: Η διακριτοποίηση οδηγεί σε μεγάλο σύστημα μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η μέθοδος επίλυσης εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα.

Αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούν διαδοχική γραμμικοποίηση των εξισώσεων και τα γραμμικά συστήματα που προκύπτουν επιλύονται, σχεδόν πάντοτε, με επαναληπτικές τεχνικές. Η τελική επιλογή του επιλυτή εξαρτάται από τον τύπο του πλέγματος και τον αριθμό των κόμβων που περιλαμβάνονται σε κάθε αλγεβρική εξίσωση.

Κριτήρια Σύγκλισης: Τέλος, χρειάζεται να οριστούν τα κριτήρια σύγκλισης για την επαναληπτική μέθοδο. Συνήθως υπάρχουν δύο επίπεδα επαναλήψεων: οι εσωτερικές επαναλήψεις, κατά τις οποίες επιλύονται οι γραμμικές εξισώσεις και οι εξωτερικές, οι οποίες σχετίζονται με τη μη γραμμικότητα και τη σύζευξη των εξισώσεων. Η απόφαση σχετικά με το πότε θα σταματήσει η επαναληπτική διαδικασία κάθε επιπέδου είναι σημαντική, τόσο από άποψη ακρίβειας, όσο και από άποψη αποδοτικότητας της μεθόδου.

3.2.3 Ιδιότητες των Μεθόδων Υπολογιστικής Επίλυσης

Συμβατότητα: Η διακριτοποίηση πρέπει να είναι ακριβής καθώς οι αποστάσεις του πλέγματος τείνουν στο μηδέν. Η διαφορά μεταξύ της διακριτοποιημένης εξίσωσης και της ακριβούς ονομάζεται σφάλμα κολόβωσης. Συνήθως, υπολογίζεται αντικαθιστώντας όλες τις τιμές των κόμβων στη διακριτή προσέγγιση μέσω ενός αναπτύγματος σειράς Taylor γύρω από ένα σημείο. Σαν αποτέλεσμα, προκύπτει η αρχική διαφορική εξίσωση και ένα υπόλοιπο, το οποίο αντιπροσωπεύει το σφάλμα κολόβωσης. Για να είναι μία μέθοδος συμβατή πρέπει το σφάλμα κολόβωσης να μηδενίζεται καθώς οι αποστάσεις του πλέγματος τείνουν στο μηδέν ($\Delta t \rightarrow 0$ και/ή $\Delta x_i \rightarrow 0$).

Ευστάθεια: Μία μέθοδος αριθμητικής επίλυσης ονομάζεται ευσταθής όταν δεν μεγεθύνει τα σφάλματα που προκύπτουν κατά τη διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης. Για πρόσκαιρα προβλήματα, η ευστάθεια εγγυάται ότι η μέθοδος θα αποδώσει πραγματική λύση, όταν η λύση της ακριβούς εξίσωσης είναι πραγματική. Για επαναληπτικές μεθόδους, μια ευσταθής μέθοδος είναι αυτή που δεν αποκλίνει. Είναι σύνηθες να ερευνάται η ευστάθεια μιας μεθόδου για γραμμικά προβλήματα με σταθερούς συντελεστές, χωρίς οριακές συνθήκες. Όταν επιλύονται σύνθετες, μη γραμμικές και συζευγμένες εξισώσεις με πολύπλοκες οριακές συνθήκες, δεν υπάρχουν πολλά αποτελέσματα ως προς την ευστάθεια, συνεπώς, ίσως χρειάζεται να βασιζόμαστε στην εμπειρία και τη διαίσθηση. Η περισσότερο ευρέως χρησιμοποιημένη προσέγγιση ανάλυσης της ευστάθειας των αριθμητικών σχημάτων είναι η μέθοδος Von Neumann.

Σύγκλιση: Μία αριθμητική μέθοδος ονομάζεται συγκλίνουσα όταν η λύση των διακριτοποιημένων εξισώσεων τείνει προς την ακριβή λύση της διαφορικής εξίσωσης, καθώς οι αποστάσεις πλέγματος τείνουν στο μηδέν. Για γραμμικά προβλήματα αρχικής τιμής, το Θεώρημα Ισοδυναμίας του Lax (Richtmyer και Morton, 1967) διατυπώνει ότι «για ένα καλώς ορισμένο γραμμικό πρόβλημα αρχικής τιμής και μια προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών σε αυτό, η οποία

ικανοποιεί τη συνθήκη συμβατότητας, αναγκαία και ικανή συνθήκη για να συγκλίνει η διαδικασία είναι η ευστάθειά της». Για μη γραμμικά προβλήματα που επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από τις οριακές συνθήκες, η σύγκλιση συνήθως ελέγχεται μέσω αριθμητικών πειραματισμών, δηλαδή επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό σε μια σειρά διαδοχικών εξευγενισμένων πλεγμάτων. Εάν η μέθοδος είναι ευσταθής και όλες οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία διακριτοποίησης είναι συμβατές, συνήθως προκύπτει πως η λύση συγκλίνει σε μία λύση ανεξάρτητου πλέγματος.

Διατήρηση: Εφόσον οι εξισώσεις που πρέπει να λυθούν είναι οι διατηρητικοί νόμοι, πρέπει και το αριθμητικό σχήμα (τόσο σε τοπική, όσο και σε σφαιρική κλίμακα) να βασίζεται σε αυτούς τους νόμους. Αυτό σημαίνει ότι, σε μη μεταβαλλόμενη κατάσταση και με απουσία πηγών, η ποσότητα που εξέρχεται από έναν κλειστό όγκο είναι ίση με αυτή που εισέρχεται σε αυτόν. Ο χειρισμός των όρων των πηγών και των καταβόθρων πρέπει να είναι συμβατός, έτσι ώστε η ολική πηγή ή η καταβόθρα του πεδίου ορισμού να είναι ισοδύναμη με τη ροή της ποσότητας που διατηρείται στο δίκτυο, μέσα στα δεδομένα όρια.

Οριοθέτηση: Οι αριθμητικές επιλύσεις πρέπει να βρίσκονται εντός των κατάλληλων ορίων. Οι ποσότητες που δεν παίρνουν αρνητικές τιμές (π.χ. πυκνότητα, κινητική ενέργεια τύρβης) πρέπει να είναι πάντα θετικές. Άλλες ποσότητες, όπως η συγκέντρωση, πρέπει να παίρνουν τιμές μεταξύ 0% ~ 100%. Κατά την απουσία πηγών, κάποιες εξισώσεις (π.χ. η εξίσωση θερμότητας για θερμοκρασία όταν δεν υπάρχουν θερμικές πηγές) απαιτούν οι ελάχιστες και οι μέγιστες τιμές της μεταβλητής να βρίσκονται μέσα σε συγκριμένα όρια του πεδίου ορισμού. Αυτές οι συνθήκες πρέπει να ορίζονται από την αριθμητική προσέγγιση.

Δυνατότητα Πραγματοποίησης: Τα μοντέλα φαινομένων που είναι πολύ σύνθετα για να τα διαχειριστεί κάποιος ευθέως (π.χ. τύρβη, καύση, πολυφασική ροή), πρέπει να σχεδιάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να εγγυώνται φυσικώς ρεαλιστικές λύσεις.

Ακρίβεια: Οι αριθμητικές λύσεις των προβλημάτων πεδίων ροής ρευστού και μεταφοράς θερμότητας είναι, μόνο, προσεγγιστικές λύσεις. Πέρα από τα σφάλματα που μπορεί να προκύψουν κατά τη διαδικασία εξέλιξης του αλγορίθμου επίλυσης στο προγραμματισμό ή στον καθορισμό των οριακών συνθηκών, οι αριθμητικές επιλύσεις πάντοτε περιλαμβάνουν τρία είδη συστηματικών σφαλμάτων:

- Σφάλματα μοντελοποίησης: Ορίζονται ως η διαφορά μεταξύ του πραγματικού πεδίου ροής και της λύσης του μαθηματικού μοντέλου
- Σφάλματα διακριτοποίησης: Ορίζονται ως η διαφορά μεταξύ της ακριβούς λύσης των διατηρητικών εξισώσεων και της ακριβούς λύσης του συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων που προέκυψαν από τη διακριτοποίηση αυτών των εξισώσεων
- Επαναληπτικά σφάλματα: Ορίζονται ως η διαφορά μεταξύ της επαναληπτικής και της ακριβούς λύσης των συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων

Ο τελικός στόχος είναι να επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια με την ελάχιστη δυνατή προσπάθεια ή η μέγιστη ακρίβεια με τους διαθέσιμους πόρους.

3.2.4 Διακριτοποίηση των Μεθόδων Υπολογιστικής Επίλυσης

Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών: Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών αποτελεί την παλαιότερη μέθοδο για αριθμητική επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (PDE) και θεωρείται ότι αναπτύχθηκε από τον Euler, τον 18^ο αιώνα. Είναι επίσης η ευκολότερη μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για απλές γεωμετρίες. Το αρχικό σημείο είναι η διατηρητική εξίσωση σε διαφορική μορφή. Το πεδίο ορισμού της λύσης καλύπτεται από το πλέγμα. Σε κάθε σημείο του πλέγματος, η διαφορική εξίσωση προσεγγίζεται αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους με προσεγγίσεις που αφορούν τις τιμές των κόμβων των συναρτήσεων. Αυτό που προκύπτει είναι μία αλγεβρική εξίσωση για κάθε κόμβο του πλέγματος, στην οποία η τιμή της μεταβλητής αυτού του κόμβου και ένας αριθμός γειτονικών κόμβων εμφανίζονται ως άγνωστοι.

Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων: Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων (Finite Volume, FV) χρησιμοποιεί την ολοκληρωτική μορφή των διατηρητικών εξισώσεων ως αρχικό σημείο. Το πεδίο ορισμού της λύσης υποδιαιρείται σε ένα πεπερασμένο αριθμό γειτονικών όγκων ελέγχου και οι διατηρητικοί νόμοι εφαρμόζονται για κάθε CV (Control Volume – Όγκος Ελέγχου). Στο κέντρο βάρους κάθε όγκου βρίσκεται ο υπολογιστικός κόμβος στον οποίο θα υπολογιστούν οι τιμές τα μεταβλητής. Προκειμένου να εκφραστούν οι τιμές της μεταβλητής στην επιφάνεια του C, χρησιμοποιείται η μέθοδος της παρεμβολής με βάση τις τιμές του κόμβου (κέντρο του CV). Τα επιφανειακά και τα χωρικά ολοκληρώματα προσεγγίζονται μέσω κατάλληλων τύπων τετραγωνισμού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να προκύπτει μία αλγεβρική εξίσωση για κάθε CV, στην οποία εμφανίζονται ορισμένες τιμές γειτονικών κόμβων. Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων μπορεί να προσαρμοστεί σε κάθε τύπο πλέγματος, έτσι είναι η πιο κατάλληλη και για πολύπλοκες γεωμετρίες. Το πλέγμα καθορίζει μόνο τα όρια του όγκου ελέγχου και δεν σχετίζεται με το σύστημα συντεταγμένων. Η μέθοδος είναι διατηρητική από κατασκευής, συνεπώς όσο μεγάλα και να είναι τα επιφανειακά ολοκληρώματα, είναι το ίδιο για τους όγκους ελέγχου που μοιράζονται το ίδιο όριο. Η προσέγγιση FV ίσως είναι η απλούστερη να κατανοηθεί και να προγραμματιστεί. Όλοι οι όροι που πρέπει να υπολογιστούν έχουν φυσική σημασία, γεγονός που κάνει τη μέθοδο δημοφιλής στους μηχανικούς. Το μειονέκτημά της, συγκριτικά με τα σχήματα FD, είναι πως εμφανίζονται δυσκολίες κατά την ανάπτυξη μεθόδων τάξης μεγαλύτερης από δεύτερη, σε 3D. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η προσέγγιση FV απαιτεί τρία επίπεδα προσέγγισης: παρεμβολή, διαφόριση και ολοκλήρωση.

Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων: Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι, σε πολλές περιπτώσεις, όμοια με την FV. Το πεδίο ορισμού διαχωρίζεται σε ένα σύνολο διακριτών όγκων ή πεπερασμένων στοιχείων, τα οποία είναι κατά βάση μη

δομημένα. Το ξεχωριστό χαρακτηριστικό αυτών των μεθόδων είναι ότι οι εξισώσεις πολλαπλασιάζονται με μία συνάρτηση στάθμισης (weight function) πριν ολοκληρωθούν σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού. Στις απλούστερες μεθόδους FE, η λύση προσεγγίζεται από μία γραμμική συνάρτηση σχήματος (shape function, διαμορφική συνάρτηση) σε κάθε στοιχείο με τέτοιο τρόπο, ώστε η συνέχεια της λύσης μεταξύ των ορίων των στοιχείων να είναι εγγυημένη. Μία τέτοια συνάρτηση κατασκευάζεται με βάση τις τιμές της στις γωνίες των στοιχείων. Η συνάρτηση στάθμισης έχει συνήθως την ίδια μορφή. Στη συνέχεια, αυτή η προσέγγιση αντικαθίστανται από το σταθμισμένο ολοκλήρωμα του διατηρητικού νόμου και οι εξισώσεις που πρόκειται να επιλυθούν προέρχονται από την απαίτηση: η παράγωγος του ολοκληρώματος που αφορά την τιμή του κάθε κόμβου να ισούται με μηδέν. Αυτό αντιστοιχεί στη διαδικασία επιλογής της καλύτερης λύσης μέσα από ένα σύνολο επιτρεπόμενων συναρτήσεων (αυτή με το μικρότερο υπόλοιπο). Το αποτέλεσμα είναι ένα σύνολο μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η δυνατότητα ενασχόλησης, που δίνουν, με αυθαίρετες γεωμετρίες. Τα πλέγματα μπορούν εύκολα να εκλεπτύνονται, καθώς επίσης και κάθε στοιχείο υποδιαίρεσης. Το βασικό μειονέκτημα που εντοπίζεται σε κάθε μέθοδο που χρησιμοποιεί μη δομημένα πλέγματα, είναι ότι τα μητρώα των γραμμικοποιημένων εξισώσεων δεν είναι τόσο καλά δομημένα όσο αυτά των κανονικών πλεγμάτων.

Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων βάση Όγκων Ελέγχου (CV-FEM): Σε αυτές, οι συναρτήσεις σχήματος χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη μεταβολή των μεταβλητών σε ένα συγκεκριμένο στοιχείο. Οι όγκοι ελέγχου σχηματίζονται γύρω από κάθε κόμβο, συνδέοντας τα κέντρα βάρους των στοιχείων. Σε αυτούς τους όγκους ελέγχου, εφαρμόζονται οι διατηρητικές εξισώσεις σε ολοκληρωματική μορφή με τον ίδιο τρόπο, όπως και στη μέθοδο FV. Τα πεδία ροής που διασχίζουν τα όρια αυτών των όγκων, καθώς και οι όροι πηγής υπολογίζονται βάσει αντίστοιχων στοιχείων.

Φασματικές Μέθοδοι (Spectral Methods): Οι φασματικές μέθοδοι αποτελούν μία κατηγορία μεθόδων που προτιμώνται από τις μεθόδους πεπερασμένων όγκων (FV) και πεπερασμένων στοιχείων (FE) σε ορισμένες εφαρμογές (π.χ. για προσομοίωση τύρβης απλής γεωμετρίας), αλλά αποφεύγονται σε προγράμματα γενικού σκοπού. Στις φασματικές μεθόδους οι χωρικές παράγωγοι εκτιμώνται με τη βοήθεια σειράς Fourier ή με κάποια από τις γενικεύσεις της. Η απλούστερη φασματική μέθοδος χρησιμοποιεί περιοδικές συναρτήσεις οι οποίες καθορίζονται από τις τιμές τους σε ένα ομοιόμορφα διαστοιχισμένο σύνολο σημείων. Κάθε τέτοια συνάρτηση είναι δυνατό να αναπαρασταθεί από μία διακριτή σειρά Fourier. Επίσης οι φασματικές μέθοδοι δεν παρουσιάζουν αναδίπλωση (aliasing), η οποία είναι συνηθισμένη πηγή σφαλμάτων σε αριθμητικές μεθόδους επίλυσης μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

3.3 Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων (Finite Volume, FV)

3.3.1 Εισαγωγή στη Μέθοδο Πεπερασμένων Όγκων

Οι περισσότεροι κώδικες γενικού σκοπού για ροές ρευστών εμπορικών προγραμμάτων Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD), στηρίζονται στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων (FV). Ο κύριος λόγος που γίνεται αυτό είναι δύο σημαντικά πλεονεκτήματα της μεθόδου αυτής, πρώτον την ευκολία της χρήσης της σε αδόμητα πλέγματα και δεύτερον την γενική διατηρητική ιδιότητα που εμφανίζει. Τα σχήματα πεπερασμένου όγκου προκύπτουν αν διακριτοποιήσουμε απευθείας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις των φυσικών νόμων διατήρησης, τις οποίες γράφουμε για μικρούς όγκους (πεπερασμένους) ελέγχου. Έτσι η ολοκληρωτική εξίσωση διατήρησης για τυχόν βαθμωτό πεδίο Φ είναι η:

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \Phi dCV = - \int_{CS} \Phi V \cdot n dCS + \int_{CS} \chi \nabla \Phi \cdot n dCS + \int_{CV} Q dCV$$

η οποία αφορά τυχόντα όγκο ελέγχου (CV) με παράπλευρη επιφάνεια (CS) και μοναδιαίο διάνυσμα (n), κάθετο προς την επιφάνεια και με φορά προς τα έξω, ενώ εκφράζει τη διατήρηση του βαθμωτού πεδίου Φ εντός του όγκου ελέγχου (CV). Κάθε όρος έχει αντίστοιχο στις ολοκληρωτικές εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας. Η παραπάνω εξίσωση ως φυσική έννοια εκφράζεται ως:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της} \\ \text{ποσότητας } \Phi \text{ στον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{l} \text{Συναγωγική ρύση} \\ \text{διαμέσου της} \\ \text{επιφάνειας ελέγχου} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Διαχυτική ρύση} \\ \text{διαμέσου της} \\ \text{επιφάνειας ελέγχου} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της } \Phi \\ \text{λόγω εσωτερικών πηγών} \\ \text{έντασης ανά μονάδα όγκου} \end{array} \right)$$

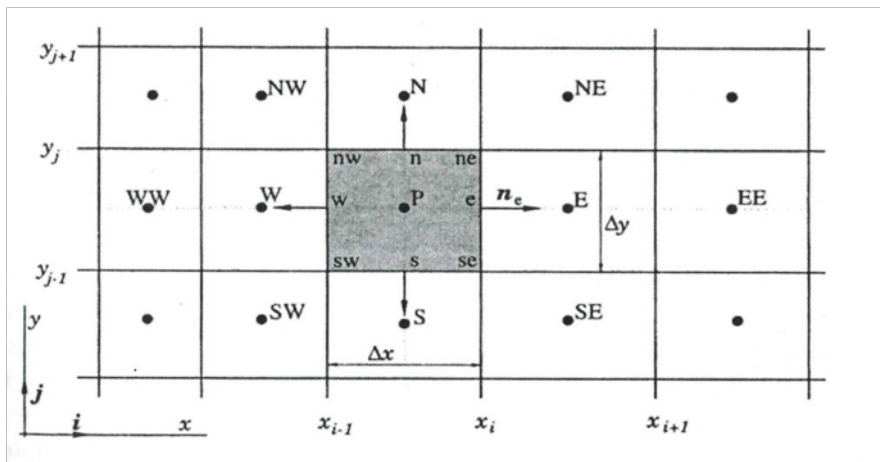
Στη μέθοδο του πεπερασμένου όγκου, η υπολογιστική περιοχή υποδιαιρείται σε μικρά, μη επικαλυπτόμενα υποχωρία τα οποία ονομάζονται κυψέλες (cells).

3.3.2 Διακριτοποίηση Χρόνου και Χώρου

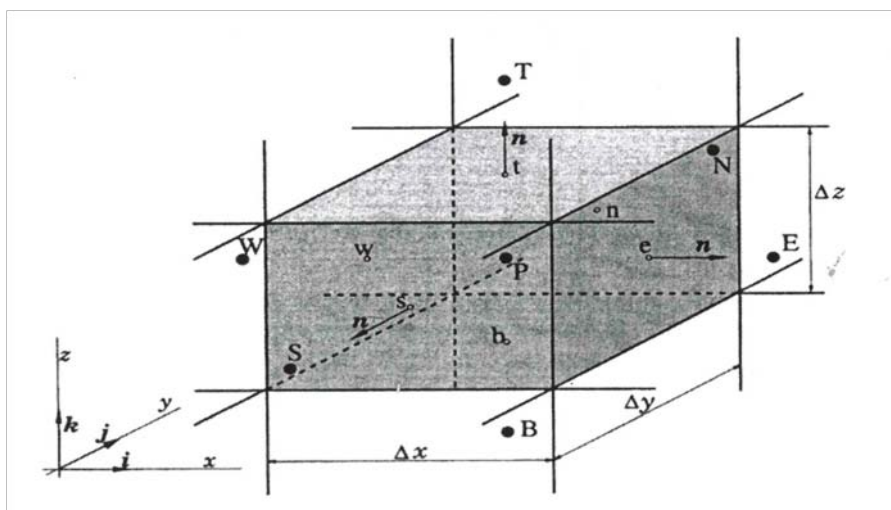
Η χρονική διακριτοποίηση (time discretization) στα σχήματα πεπερασμένων όγκων δεν διαφέρει από την χρονική διακριτοποίηση που χρησιμοποιούμε στα σχήματα πεπερασμένων διαφορών ή πεπερασμένων στοιχείων. Αντίθετα η χωρική διακριτοποίηση (spatial discretization) εξαρτάται από τη μέθοδο διακριτοποίησης.

Διακριτοποίηση του Χρόνου: Το πλέγμα που επικαλύπτει το χρονικό διάστημα της λύσης αποτελείται από χρονικά στρώματα, που είτε είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα (uniformly) δηλαδή με σταθερό χρονικό βήμα Δt , είτε είναι ανομοιόμορφα (non uniformly) με μεταβαλλόμενο Δt . Η μέθοδος μεταβλητού χρονικού βήματος (variable timestep) χρησιμοποιείται μόνο όταν της είναι επιτρεπτό από το πρόβλημα. Για το Δt τίθενται άνω όρια εξαιτίας της απαιτούμενης ακρίβειας και της αριθμητικής ευστάθειας του προβλήματος.

Διακριτοποίηση του Χώρου: Το πεδίο της λύσης υποδιαιρείται σε πεπερασμένο αριθμό μικρών όγκων ελέγχου (CV) με ένα πλέγμα το οποίο καθορίζει τα όρια των όγκων ελέγχου και όχι τους υπολογιστικούς κόμβους. Ωστόσο, είναι συνήθης η εισαγωγή ενός πλεγματοειδούς σημείου (grid point) μέσα σε κάθε κυψέλη και η διατύπωση των μεθόδων συναρτήσει των κατά προσέγγιση τιμών των μεταβλητών αυτών στα θεωρούμενα πλεγματοειδή σημεία. Υπάρχουν διάφορες άλλες παραλλαγές μεθόδων πεπερασμένου όγκου, ωστόσο οι αρχές διακριτοποίησης είναι ίδιες για τις περισσότερες από αυτές. Οι ολοκληρωτικές διατηρητικές εξισώσεις εφαρμόζονται σε κάθε όγκο ελέγχου, καθώς και σε όλο το πεδίο λύσης. Αν αθροίσουμε τις εξισώσεις για όλους τους όγκους ελέγχου, τα επιφανειακά ολοκληρώματα στις εσωτερικές έδρες αλληλομηδενίζονται. Έτσι, λαμβάνουμε την καθολική (global) εξίσωση διατήρησης, η οποία είναι ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου.



Σχήμα 3.2 Τυπικός όγκος ελέγχου (CV) σε δομημένο καρτεσιανό πλέγμα 2D



Σχήμα 3.3 Τυπικός όγκος ελέγχου (CV) σε δομημένο καρτεσιανό πλέγμα 3D

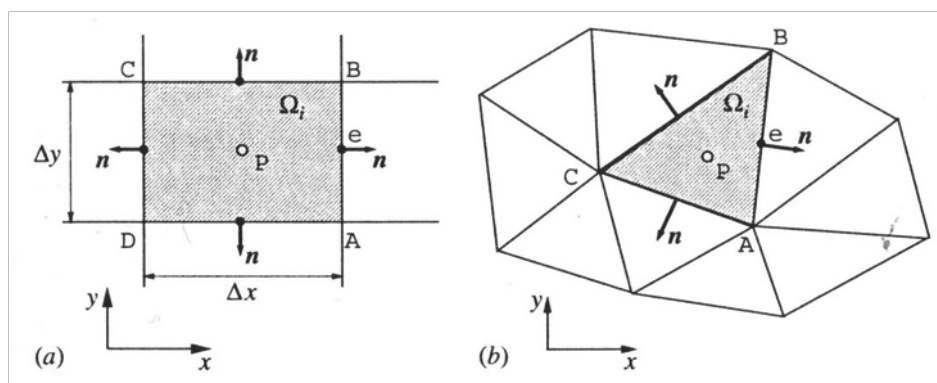
3.3.3 Προσεγγισμός Ολοκληρωμάτων

Οι αλγεβρικές εξισώσεις διακριτοποίησης, που αποτελούν ένα σχήμα πεπερασμένου όγκου, προκύπτουν από την προσέγγιση των ολοκληρωτικών εξισώσεων για όλες τις κυψέλες πεπερασμένου όγκου.

Ογκικά Ολοκληρώματα: Ο απλούστερος τρόπος προσέγγισης ενός ογκικού ολοκληρώματος είναι η αντικατάσταση του με το γινόμενο του εμβαδού (για 2D περιπτώσεις ή του όγκου της κυψέλης για 3D) $|CV|$ επί τη μέση τιμή της ολοκληρωτέας συνάρτησης $\bar{\Phi}$ η οποία έχει προσεγγιστεί βάσει των τιμών στα πλεγματικά σημεία. Όταν χρησιμοποιούμε την κυψελικά κεντρωμένη διάταξη των πλεγματικών σημείων (όπως στο σχήμα 3.3), μπορούμε να αντικαθιστούμε την μέση τιμή με την τιμή στο κεντρικό πλεγματικό σημείο:

$$\int_{CV} \Phi dCV = \bar{\Phi} \cdot |CV| \approx \Phi_P \cdot |CV|$$

Αυτή η προσέγγιση παράγει το σφάλμα αποκοπής (truncation), που περιέχει τον δευτεροτάξιο όρο μέτρου συναρτήσεως των διαστάσεων της κυψέλης, $O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$. Για σχήματα δευτεροτάξιας ακρίβειας η $\bar{\Phi}$ αρκεί να αντικατασταθεί από τιμές της ολοκληρωτέας συνάρτησης στο κεντρικό πλεγματικό σημείο P . Αν, όμως, το σχήμα είναι μεγαλύτερης ακρίβειας, η $\bar{\Phi}$ πρέπει να αντικατασταθεί από προσεγγισμό μεγαλύτερης ακρίβειας όπου χρησιμοποιούνται οι τιμές της ολοκληρωτέας συνάρτησης σε άλλα σημεία του εσωτερικού της κυψέλης, όπως είναι οι κορυφές A, B, C, D ή τα κέντρα των κυψελικών εδρών, όπως το e . Αν τα σημεία αυτά δεν ανήκουν στο πλέγμα (όπως στην κυψελικά κεντρωμένη διάταξη), τότε οι τιμές των μεταβλητών της σε αυτά θα πρέπει να υπολογίζονται παρεμβολικά βάσει των γειτονικών πλεγματικών σημείων.



Σχήμα 3.4 Απεικόνιση της προσέγγισης ογκικών και επιφανειακών ολοκληρωμάτων

Επιφανειακά Ολοκληρώματα: Η επιφάνεια ∂CV της κυψέλης CV αποτελείται από διάφορες έδρες, οι οποίες είναι γραμμές στην περίπτωση 2D και επιφάνειες στην περίπτωση 3D. Το σχήμα και το πλήθος τους αλλάζει ανάλογα με το πλέγμα, για παράδειγμα, στην περίπτωση του σχήματος 3.4 οι έδρες είναι τα τέσσερα διαστήματα AB, BC, CD, DA . Κάθε επιφανειακό ολοκλήρωμα της κυψελικής

εξίσωσης αναλύεται σε άθροισμα ολοκληρωμάτων επί των εδρών της κυψέλης, τα οποία υπολογίζονται χωριστά.

Το σημείο κλειδί της προσέγγισης των επιφανειακών ολοκληρωμάτων αποτελεί ο κανόνας του κεντρικού σημείου (midpoint rule). Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως γινόμενο της επιφάνειας της έδρας επί τη μέση τιμή της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Η μέση τιμή προσεγγίζεται από την τιμή της ολοκληρωτέας συνάρτησης στο κέντρο της έδρας (midpoint of the face). Για παράδειγμα στην έδρα AB του σχήματος 3.4, μια τυχαία ολοκληρωτέα συνάρτηση Φ εκφράζεται ως:

$$\int_{AB} f dCS = \bar{f} CS_{AB} \approx f_e CS_{AB}$$

όπου CS_{AB} είναι η επιφάνεια (για 3D κυψέλη) ή το μήκος (για 2D κυψέλη) της έδρας.

Η προσέγγιση του ολοκληρώματος συναγωγικής ρύσης της είναι:

$$\int_{AB} \Phi V \cdot n dCS = \overline{\Phi V \cdot n} CS_{AB} \approx (\Phi V \cdot n)_e CS_{AB}$$

όπου e είναι το κέντρο της έδρας AB .

Τα επιφανειακά ολοκληρώματα περιέχουν προβολές των διανυσμάτων λύσης, όπως το V , κατά τη κατεύθυνση του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος n . Αν το πλέγμα είναι δομημένο η λήψη των προβολών είναι απλή. Σε πολλές περιπτώσεις όμως, το κάθετο διάνυσμα δεν ευθυγραμμίζεται με άξονα ενός ολομερούς (καθολικού) συστήματος συντεταγμένων. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για αδόμητα πλέγματα.

3.3.4 Μέθοδοι Παρεμβολής

Η προσέγγιση επιφανειακών ολοκληρωμάτων απαιτεί γνώση των μεταβλητών λύσης και των παραγώγων τους στα κέντρα των κυψελικών εδρών. Τα σημεία αυτά δεν αποτελούν συνήθως μέρος του πλέγματος, οπότε οι τιμές θα πρέπει να προσδιορίζονται μέσω παρεμβολής από τα πλεγματικά σημεία. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι γι' αυτό το λόγο. Παρακάτω αναφέρονται οι σημαντικότερες και συνηθέστερες από αυτές.

Ανάντη Παρεμβολή ή UDS (Upwind Differencing Scheme): Πρόκειται για τη μόνη μέθοδο η οποία χωρίς προϋποθέσεις πληροί το κριτήριο του ορίου (bound nesscriterion), δηλαδή, δεν οδηγεί ποτέ σε ταλαντούμενες λύσεις. Αυτό επιτυγχάνεται γιατί είναι αριθμητικά διαχυτή (numerically diffusive). Το μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι η ακρίβειά της είναι μόνο πρωτοτάξια. Το σφάλμα αποκοπής των UDS περιέχουν ισχυρή αριθμητική διάχυση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να απαιτούνται πολύ λεπτά πλέγματα ώστε να προκύπτουν ακριβείς λύσεις.

Γραμμική Παρεμβολή ή CDS (Central Differencing Scheme): Αυτή η μέθοδος στηρίζεται σε γραμμική παρεμβολή μεταξύ των δύο πλησιέστερων κόμβων. Πρόκειται για το πιο απλό δευτεροτάξιο σχήμα και είναι το πλέον χρησιμοποιούμενο. Όπως συμβαίνει για όλες τις μεθόδους ανώτερης τάξης του ένα, το σχήμα αυτό ενδέχεται να παρουσιάσει ταλαντούμενες λύσεις. Ο πρωτεύων όρος του σφάλματος αποκοπής είναι ανάλογος του τετραγώνου της πλεγματικής διαστοίχισης (spacing) σε ομοιόμορφα και μη ομοιόμορφα πλέγματα.

Δευτεροβάθμια Ανάντη Παρεμβολή Συναγωγικής Κινηματικής ή QUICK (Quadratic Upwind Interpolation of Convective Kinematics): Είναι ένα δημοφιλές σχήμα ανώτερης τάξης. Αυτό το δευτεροβάθμιο σχήμα παρεμβολής έχει τριτάξια σφάλματα αποκοπής τόσο για ομοιόμορφα όσο και για μη ομοιόμορφα πλέγματα. Όταν χρησιμοποιούμε αυτή τη μέθοδο παρεμβολής σε συνδυασμό με την προσέγγιση του κανόνα του κεντρικού σημείου για το επιφανειακό ολοκλήρωμα, η συνολική προσέγγιση εξακολουθεί να έχει δευτεροτάξια ακρίβεια, αλλά είναι λίγο ακριβέστερος από τον CDS (Γραμμική Παρεμβολή), αν και οι διαφορές σπάνια είναι μεγάλες.

3.3.5 Υλοποίηση Οριακών Συνθηκών και Αλγεβρικό Σύστημα Εξισώσεων

Κάθε όγκος ελέγχου (CV) μας δίνει μία αλγεβρική εξίσωση. Τα ογκικά ολοκληρώματα υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο για κάθε όγκο ελέγχου, αλλά ροές διαμέσου εδρών όγκων ελέγχου που συμπίπτουν με το όριο του πεδίου απαιτούν ειδικό χειρισμό. Αυτές τις συνοριακές ροές πρέπει ή να τις γνωρίζουμε ή να τις εκφράσουμε ως συνδυασμό εσωτερικών τιμών και συνοριακών δεδομένων. Επειδή δε δίνουν επιπλέον εξισώσεις, δεν εισάγουν επιπλέον αγνώστους. Αυτές οι προσεγγίσεις πρέπει να βασίζονται σε μονόπλευρες διαφορές ή παρεμβολές, γιατί δεν υπάρχουν κόμβοι εκτός του ορίου.

Αθροίζοντας όλες τις προσεγγίσεις της ροής και των όρων πηγής, βρίσκουμε μία αλγεβρική εξίσωση η οποία συσχετίζει την τιμή της μεταβλητής στο κέντρο του όγκου ελέγχου με τις τιμές σε διάφορους γειτονικούς όγκους ελέγχου. Ο αριθμός εξισώσεων και αγνώστων είναι ίσος με τον αριθμό των όγκων ελέγχου, οπότε το σύστημα είναι καλώς διατυπωμένο.

Κεφάλαιο 4

Προσομοίωση της Τυρβώδους Ροής (Turbulence Modeling)

4.1 Εισαγωγή στην Τυρβώδη Ροή

4.1.1 Ταχύτητα και Πίεση Τυρβώδους Ροής

Το κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμα της τυρβώδους ροής είναι ότι η ταχύτητα και η πίεση, σε τυχαίο σημείο του πεδίου ροής, παρουσιάζουν συνεχείς, ακανόνιστες, μεγάλης συχνότητας διακυμάνσεις (με τη συχνότητα συχνά να φτάνει $10kHz$). Αυτή η ακανόνιστη και τυχαία διακύμανση των ιδιοτήτων του ρευστού καθιστά αδύνατη την αναλυτική έκφραση του πεδίου τυρβώδους ροής ως συνάρτηση του χρόνου και του χώρου, αλλά μπορεί να περιγραφεί στατιστικά. Έτσι, σύμφωνα με τον Reynolds, η στιγμιαία ταχύτητα του ρευστού v μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα δύο συνιστωσών, της μέσης κίνησης και της διακυμαινόμενης κίνησης της τύρβης.

Έστω η στιγμιαία τοπική ταχύτητα $v_x = \bar{v}_x + \tilde{v}_x$ και αντιστοίχως $v_y = \bar{v}_y + \tilde{v}_y$ και $v_z = \bar{v}_z + \tilde{v}_z$.

Η μέση χρονική ταχύτητα, \bar{v}_x , ορίζεται από την εξίσωση: $\bar{v}_x = 1/T \int_0^T v_x dt$, όπου T είναι η χρονική περίοδος για την οποία υπολογίζεται η μέση τιμή \bar{v}_x . Η περίοδος T δεν είναι τυχαία επιλογή, έτσι για τυρβώδεις ροές αερίων και νερού, μια μέση περίοδος $T \approx 5sec$ είναι συνήθως αρκετή για τον υπολογισμό σταθερών μέσων χρονικών τιμών των ιδιοτήτων του ρευστού.

Η διακύμανση της ταχύτητας, \tilde{v}_x , μπορεί να οριστεί ως η απόκλιση της στιγμιαίας ταχύτητας, v_x , από τη μέση χρονική ταχύτητα, \bar{v}_x : $\tilde{v}_x = v_x - \bar{v}_x$

Η μέση χρονική τιμή της ταχύτητας \tilde{v}_x είναι μηδέν:

$$\overline{\tilde{v}_x} = 1/T \int_0^T (v_x - \bar{v}_x) dt = \bar{v}_x - \bar{v}_x = 0$$

Αντίστοιχες εξισώσεις ισχύουν και για τις ταχύτητες v_y και v_z .

Σε ανυσματικό συμβολισμό, το άνυσμα, v , της στιγμιαίας ταχύτητας του ρευστού σε ένα σημείο του πεδίου ροής ισούται με το ανυσματικό άθροισμα των ανυσμάτων της μέσης χρονικής τιμής της ταχύτητας, \bar{v} , και της διακύμανσης της ταχύτητας, \tilde{v} :

$$v = \bar{v} + \tilde{v} = (i\bar{v}_x + j\bar{v}_y + k\bar{v}_z) + (i\tilde{v}_x + j\tilde{v}_y + k\tilde{v}_z)$$

Ό, τι ισχύει για την ταχύτητα, ισχύει και για τις άλλες μεταβλητές του πεδίου ροής. Έτσι η στατική πίεση, p , σε ένα σημείο του χώρου μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα της μέσης χρονικής πίεσης, \bar{p} , και της διακύμανσης της πίεσης, \tilde{p} : $p = \bar{p} + \tilde{p}$

4.1.2 Κανόνες Reynolds για Μέσες Χρονικές Στιγμές

Ο Reynolds διατύπωσε ορισμένους βασικούς κανόνες για τον υπολογισμό διάφορων μεταβλητών της τυρβώδους ροής, λόγω της ιδιαίτερης σημασίας που έχουν οι μέσες χρονικές τιμές των μεταβλητών αυτών, οι οποίοι είναι γνωστοί ως κανόνες του Reynolds. Για τη διατύπωση αυτών των κανόνων θεωρούμε δύο συνεχείς μεταβλητές, οι οποίες θα αποτελούνται από ένα μέσο χρονικό και έναν όρο διακύμανσης. Έτσι έχουμε: $A = \bar{A} + \tilde{A}$ και $B = \bar{B} + \tilde{B}$.

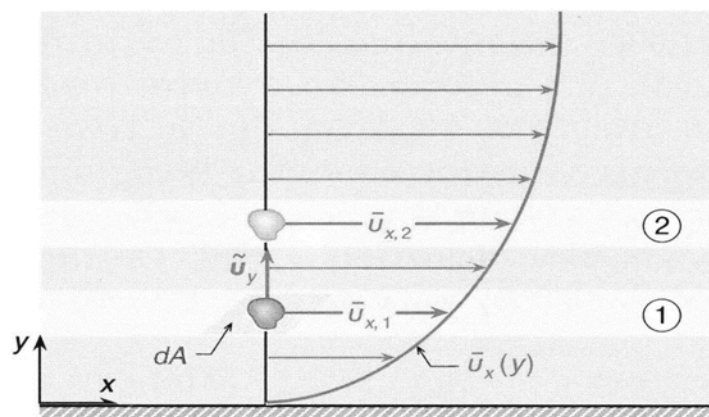
Οι κανόνες του Reynolds είναι οι εξής:

- I. Η μέση χρονική στιγμή μιας μεταβλητής θεωρείται σε επόμενες πράξεις υπολογισμού μέσων χρονικών τιμών σαν σταθερή ποσότητα: $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$
- II. Η μέση χρονική τιμή της διακύμανσης μιας μεταβλητής είναι μηδέν: $\overline{\tilde{A}} = 0$
- III. Η μέση χρονική τιμή του τετραγώνου του όρου διακύμανσης μιας μεταβλητής είναι διάφορη του μηδενός: $\overline{\tilde{A}^2} \neq 0$
- IV. Η μέση χρονική τιμή του γινομένου δύο διαφορετικών όρων διακύμανσης είναι διάφορη του μηδενός: $\overline{\tilde{A}\tilde{B}} \neq 0$
- V. Η μέση χρονική τιμή του αθροίσματος (ή διαφοράς) δύο μεταβλητών είναι ίση με το άθροισμα (ή διαφορά) των μέσων χρονικών τιμών τους: $\overline{A \pm B} = \bar{A} \pm \bar{B}$
- VI. Η μέση χρονική τιμή του γινομένου μιας σταθεράς κ επί μια μεταβλητή, είναι ίση με το γινόμενο της κ επί τη μέση χρονική τιμή της μεταβλητής: $\overline{\kappa A} = \kappa \bar{A}$
- VII. Η μέση χρονική τιμή του γινομένου των A και B είναι ίση με το άθροισμα του γινομένου των μέσων χρονικών τιμών και της μέσης χρονικής τιμής του γινομένου των όρων διακύμανσης: $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} + \overline{\tilde{A}\tilde{B}}$
- VIII. Η μέση χρονική τιμή της μερικής παραγώγου μιας μεταβλητής ως προς μια χωρική συντεταγμένη, π.χ. τη x , είναι ίση με τη μερική παράγωγο της μέσης χρονικής τιμής ως προς το x : $\overline{\partial A / \partial x} = \partial \bar{A} / \partial x$

4.1.3 Τάσεις Reynolds

Στη τυρβώδη ροή αναπτύσσονται εκτός από τις τάσεις που οφείλονται στη μοριακή κίνηση του ρευστού και τάσεις που οφείλονται στην τυρβώδη κίνηση των σωματιδίων του. Αυτές οι τάσεις είναι γνωστές ως τάσεις Reynolds (ή τυρβώδεις τάσεις). Οι τάσεις Reynolds μπορεί να θεωρηθούν ότι αποτελούν μακροσκοπική εκδήλωση της τυρβώδους κίνησης των σωματιδίων του ρευστού.

Έστω τυρβώδη ροή ρευστού κινούμενου κατά τη διεύθυνση x , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Λόγω της διακύμανσης της ταχύτητας, \tilde{u}_y , σωματίδια ρευστού μετακινούνται από το στρώμα 1, με ταχύτητα $\bar{u}_{x,1}$, στο στρώμα 2, με ταχύτητα $\bar{u}_{x,2}$. Όταν το μετακινούμενο σωματίδιο φτάνει στο στρώμα 2, η διαφορά ταχύτητας ($\bar{u}_{x,2} - \bar{u}_{x,1}$) εκδηλώνεται ως στιγμιαία διακύμανση της x -συνιστώσας της ταχύτητας και μάλιστα η ορμή του μετακινηθέντος σωματιδίου αυξάνεται σε βάρος της ορμής του στρώματος 2, το οποίο επιβραδύνεται. Ας υποθέσουμε ότι το μετακινούμενο σωματίδιο διέρχεται από μια στοιχειώδη επιφάνεια dA στην οποία είναι κάθετο το άνωσμα της διακύμανσης της ταχύτητας, \tilde{u}_y . Η παροχή μάζας διαμέσου της στοιχειώδους επιφάνειας dA είναι $\rho \tilde{u}_y dA$, επειδή η μέση ροή είναι μόνο κατά τη διεύθυνση x . Αυτό σημαίνει ότι η x -ορμή του στρώματος 2 μεταβάλλεται με ρυθμό $-\rho \tilde{u}_x \tilde{u}_y dA$. Συνεπάγεται ότι η μεταβολή της x -ορμής του στρώματος 2 είναι το αποτέλεσμα της δράσης της τυρβώδους διατμητικής τάσης $\bar{\tau}_{yx}^{(t)}$ την οποία ασκεί το στρώμα 1 πάνω στο στρώμα 2. Το μέτρο της τάσης $\bar{\tau}_{yx}^{(t)}$ είναι ίσο με τον ανά μονάδα επιφάνειας ρυθμό μεταφοράς x -ορμής κατά τη διεύθυνση y : $\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho \overline{\tilde{u}_y \tilde{u}_x}$. Το σωματίδιο του ρευστού φτάνοντας στο στρώμα 2, μπορεί να προκαλέσει, εκτός από τη διακύμανση \tilde{u}_x της συνιστώσας u_x , και διακυμάνσεις \tilde{u}_y και \tilde{u}_z των συνιστωσών u_y και u_z της ταχύτητας, αντίστοιχα. Αυτό είναι αποτέλεσμα της δράσης δύο επιπλέον τυρβωδών τάσεων: $\bar{\tau}_{yy}^{(t)} = -\rho \overline{\tilde{u}_y \tilde{u}_y}$ και $\bar{\tau}_{yz}^{(t)} = -\rho \overline{\tilde{u}_y \tilde{u}_z}$.



Σχήμα 4.1 Μηχανισμός μεταφοράς ορμής σε τυρβώδη ροή κατά τη διεύθυνση x

Με την ίδια λογική ορίζονται και οι υπόλοιπες έξι τυρβώδεις τάσεις οι οποίες ενεργούν στο πεδίο ροής:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{xx}^{(t)} &= -\rho \overline{\tilde{u}_x \tilde{u}_x}, & \bar{\tau}_{xy}^{(t)} &= -\rho \overline{\tilde{u}_x \tilde{u}_y}, & \bar{\tau}_{xz}^{(t)} &= -\rho \overline{\tilde{u}_x \tilde{u}_z} \\ \bar{\tau}_{zx}^{(t)} &= -\rho \overline{\tilde{u}_z \tilde{u}_x}, & \bar{\tau}_{zy}^{(t)} &= -\rho \overline{\tilde{u}_z \tilde{u}_y}, & \bar{\tau}_{zz}^{(t)} &= -\rho \overline{\tilde{u}_z \tilde{u}_z}\end{aligned}$$

Οι παραπάνω τάσεις αποτελούν τις εννέα καρτεσιανές συνιστώσες του δυαδικού τυρβώδους τάσης: $\bar{\tau}^{(t)} = -\rho \overline{\tilde{u} \tilde{u}}$, ο οποίος είναι συμμετρικός (όταν είναι σε μορφή πίνακα), δηλαδή οι συνιστώσες $\bar{\tau}_{ij}^{(t)} = \bar{\tau}_{ji}^{(t)}$, για κάθε $i \neq j$.

4.1.4 Ημιεμπειρικές Σχέσεις Τυρβωδών Τάσεων

Θεωρία Boussinesq: Σύμφωνα με τη θεωρία του Boussinesq, οι τυρβώδεις τάσεις μπορεί να εκφραστούν μαθηματικά όπως και οι αντίστοιχες ιξώδεις τάσεις. Έτσι κατ' αναλογία προς το νόμο ιξώδους του Νεύτωνα: $\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = \eta \frac{d\bar{u}_x}{dy}$, όπου το η ονομάζεται ιξώδες τύρβης ή τυρβώδης συνεκτικότητα (eddy viscosity). Ο λόγος του ιξώδους τύρβης προς την πυκνότητα του ρευστού ορίζεται ως κινηματικό ιξώδες τύρβης και ισούται: $\varepsilon = \eta / \rho$

Όμως, ενώ το ιξώδες (viscosity) είναι ιδιότητα του ρευστού, ανεξάρτητη της κίνησης, το ιξώδες τύρβης είναι ιδιότητα της ροής, η οποία, εκτός από τη θέση, εξαρτάται και από τη συχνότητα και την ένταση των διακυμάνσεων της τύρβης. Το ιξώδες τύρβης είναι πολύ μεγαλύτερο από το ιξώδες σε όλο το πεδίο ροής, εκτός από την περιοχή του ρευστού που βρίσκεται κοντά σε στερεά σώματα, όπου η τιμή του θεωρείται αμελητέα. Για παράδειγμα σε ροές ρευστών σε αγωγούς, το ιξώδες τύρβης είναι συνήθως 100~200 φορές μεγαλύτερο από το ιξώδες του ρευστού.

Θεωρία μήκους ανάμειξης του Prandtl: Η θεωρία αυτή είναι παρόμοια προς την κινητική θεωρία των αερίων. Το μήκος ανάμειξης είναι ένα μέγεθος ανάλογο προς τη μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων ενός αερίου (τη μέση απόσταση την οποία διανύουν τα μόρια ενός αερίου μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεών τους). Για τη διατύπωση της αναλυτικής έκφρασης της τυρβώδους τάσης $\bar{\tau}_{yx}^{(t)}$ με βάση τη θεωρία του Prandtl, θεωρούμε την τυρβώδη ροή ενός ρευστού το οποίο κινείται κατά τη διεύθυνση x όπως στο σχήμα 4.2. Για τις διακυμάνσεις των ταχυτήτων ισχύουν οι ακόλουθες δύο παραδοχές, οι οποίες αποτελούν τη βάση ανάπτυξης της θεωρίας του Prandtl:

- a) Το μέσο μέγεθος της διακύμανσης της ταχύτητας v_x ισούται με το γινόμενο της απόστασης λ επί την τοπική κλίση της καμπύλης $\bar{u}_x(y)$: $|\bar{v}_x| = \lambda \left| \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right|$

b) Λόγω συνέχειας, η διακύμανση της ταχύτητας v_y είναι της ίδιας τάξης μεγέθους και ανάλογη προς τη διακύμανση της ταχύτητας v_x : $|\overline{\tilde{v}_y}| = k_1 |\overline{\tilde{v}_x}|$, όπου k_1 μία άγνωστη σταθερά.

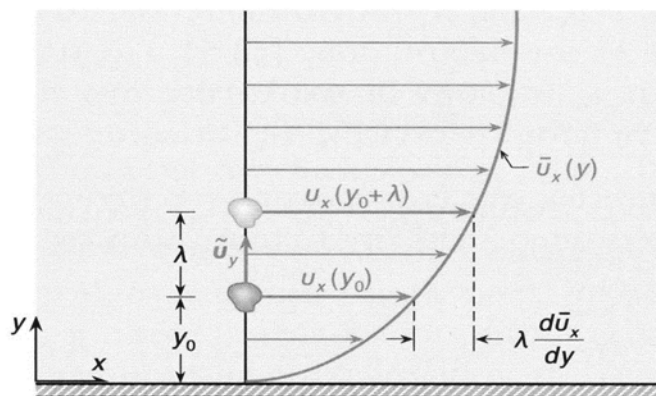
Μπορούμε να τροποποιήσουμε την εξίσωση της τυρβώδους τάσης: $\overline{\tau_{yx}^{(t)}} = -\rho \overline{\tilde{v}_y \tilde{v}_x}$, αν συσχετίσουμε τα γινόμενα $\overline{\tilde{v}_y \tilde{v}_x}$ και $|\overline{\tilde{v}_y}| |\overline{\tilde{v}_x}|$. Επειδή οι διακυμάνσεις των ταχυτήτων v_y και v_x είναι αντίθετες, η μέση χρονική τιμή του γινομένου τους μπορεί να γραφεί: $\overline{\tilde{v}_y \tilde{v}_x} = -k_2 |\overline{\tilde{v}_y}| |\overline{\tilde{v}_x}|$, όπου k_2 είναι σταθερά ($0 < k_2 < 1$).

Έτσι έχουμε: $\overline{\tau_{yx}^{(t)}} = \rho k_2 |\overline{\tilde{v}_y}| |\overline{\tilde{v}_x}|$, και λόγω των παραπάνω παραδοχών γίνεται:

$$\overline{\tau_{yx}^{(t)}} = \rho k_1 k_2 \lambda^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2.$$

Οι σταθερές k_1 και k_2 μπορούν να ενσωματωθούν στο λ , έτσι ώστε να προκύψει ένα νέο μήκος, l , το οποίο ο Prandtl ονόμασε μήκος ανάμειξης και $l = k_1 k_2 \lambda^2$. Η τυρβώδη τάση εν τέλει ισούται: $\overline{\tau_{yx}^{(t)}} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy}$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε συσχετισμό ανάμεσα στο μήκος ανάμειξης και στο ιξώδες τύρβης: $\eta = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|$



Σχήμα 4.2 Απεικόνιση του μηχανισμού μεταφοράς σωματιδίων ρευστού εγκάρσια προς την κύρια διεύθυνση τυρβώδους ροής

Θεωρία ομοιότητας της τύρβης του von Karman: Για την ανάπτυξη της θεωρίας αυτής ο von Karman βασίστηκε στις παρακάτω παραδοχές:

- 1) Ο μηχανισμός ανάπτυξης της τύρβης δεν εξαρτάται από το ιξώδες, εκτός από τις περιοχές του πεδίου ροής γύρω από στερεά.
- 2) Η τύρβη είναι στατιστικώς όμοια σε όλα τα σημεία του πεδίου ροής. Αυτό σημαίνει ότι η τυρβώδης ροή διαφέρει από σημείο σε σημείο κατά σταθερούς συντελεστές μήκους και χρόνου.

Έτσι κατέληξε σε μία πιο βελτιωμένη σχέση για το μήκος ανάμειξης, από εκείνη του

Prandtl, όπου: $l = k \left| \frac{d\bar{v}_x/dy}{d^2\bar{v}_x/dy^2} \right|$, με συντελεστή αναλογίας $k (\approx 0,40)$, γνωστή και ως

παγκόσμια σταθερά von Karman. Αργότερα αποδείχθηκε, ότι ο k δεν είναι πραγματική σταθερά, αφού οι τιμές που μπορεί να πάρει, κυμαίνονται από 0,36 έως 0,41 ανάλογα με τη φύση της ροής.

Αντίστοιχα, η τυρβώδη τάση ισούται: $\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = \rho k^2 \left| \frac{(d\bar{v}_x/dy)^3}{(d^2\bar{v}_x/dy^2)^2} \right|$

4.1.5 Κινητική Ενέργεια Τύρβης

Η ανά μονάδα μάζας κινητική ενέργεια, e_k , του ρευστού σε ένα δεδομένο σημείο του πεδίου ροής δίνεται από την εξίσωση:

$$e_k = \frac{1}{2}(v \cdot v) = \frac{1}{2}|v|^2 = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Όπου v είναι το άνυσμα της στιγμιαίας τοπικής ταχύτητας και v_x, v_y και v_z οι καρτεσιανές συνιστώσες του. Στην τυρβώδη ροή μας ενδιαφέρει η μέση χρονική τιμή της ανά μονάδα μάζας κινητικής ενέργειας, \bar{e}_k , η οποία δίνεται από τη παρακάτω σχέση:

$$\bar{e}_k = \frac{1}{2}(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2) + \frac{1}{2}(\bar{v}'_x^2 + \bar{v}'_y^2 + \bar{v}'_z^2)$$

Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της παραπάνω εξίσωσης παριστάνει την ανά μονάδα μάζας κινητική ενέργεια της μέσης ροής: $\bar{e}_k^{(m)} = \frac{1}{2}(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2) = \frac{1}{2}v^2$

Ενώ, ο δεύτερος όρος παριστάνει την ανά μονάδα μάζας κινητική ενέργεια της τύρβης: $\bar{e}_k^{(t)} = \frac{1}{2}(\bar{v}'_x^2 + \bar{v}'_y^2 + \bar{v}'_z^2) = \frac{1}{2}\bar{v}'^2$

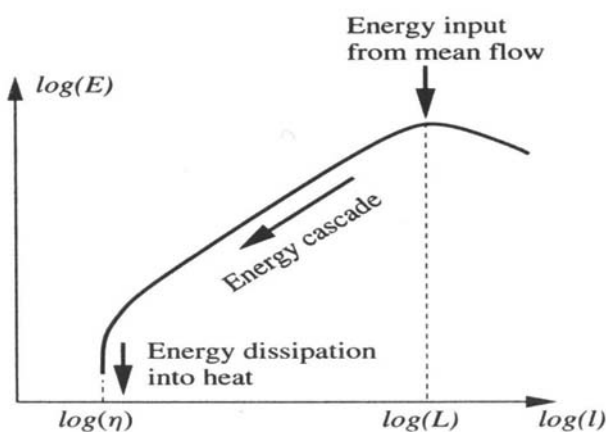
Άρα, στη τυρβώδη ροή, η μέση χρονική τιμή της κινητικής ενέργειας είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας της μέσης ροής και της κινητικής ενέργειας της τύρβης: $\bar{e}_k = \bar{e}_k^{(m)} + \bar{e}_k^{(t)}$

4.1.6 Χαρακτηριστικά Τυρβώδους Ροής

Αστάθεια: Η τυρβώδης ροή παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά, δηλαδή, το διάγραμμα της ταχύτητας του ρευστού συναρτήσει του χρόνου, στα περισσότερα σημεία της ροής, φαίνεται τυχαίο. Ωστόσο, μια τυρβώδης ροή περιγράφεται επίσης

και από την πλήρη επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes, χωρίς κανέναν πιθανολογικό όρο. Η ροή με αυτή τη λογική θα έπρεπε να ακολουθεί μια πλήρως προβλέψιμη πορεία εξέλιξης προσδιοριζόμενη από τις εξισώσεις, τις οριακές και τις αρχικές συνθήκες. Ο λόγος όμως για αυτή τη ψευδο-χαοτικότητα είναι ότι οι μικρού μεγέθους διαταραχές που προστίθενται σταθερά σε μια τυρβώδη λύση, ενισχύονται εκθετικά με το χρόνο. Υπό αυτή την έννοια οι τυρβώδεις ροές λέγονται και σταθερά ασταθείς.

Ευρύ φάσμα κλιμάκων μήκους και χρόνου: Μια τυρβώδης ροή αποτελείται από κινήσεις που χαρακτηρίζονται από τυπικές κλίμακες μήκους και χρόνου που κυμαίνονται συνεχώς σε ένα ευρύ φάσμα. Αυτό το φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί από τη μη γραμμικότητα των εξισώσεων Navier–Stokes ή από τις υδροδυναμικές αστάθειες και την αλληλεπίδραση μεταξύ των δομών της ροής. Η συμπεριφορά αυτή μοντελοποιείται με χρήση της έννοιας του υποβιβασμού της ενέργειας που παρουσιάστηκε από τον Richardson το 1922. Σύμφωνα με τον Richardson, οι μεγάλης κλίμακας δομές της ροής (δίνες ή στρόβιλοι) που παράγονται συνεχώς από την υδροδυναμική αστάθεια της ροής, είναι οι ίδιες ασταθείς, δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό μικρότερης κλίμακας δίνες. Οι μικρότερες δίνες είναι επίσης ασταθείς και διαχωρίζονται σε ακόμα μικρότερες. Ως εκ τούτου, η κινητική ενέργεια μεταφέρεται συνεχώς, από τις κινήσεις της μεγαλοκλίμακας σε αυτές της μικροκλίμακας. Ο υποβιβασμός της ενέργειας σταματά στο επίπεδο όπου οι δομές της ροής είναι τόσο μικρές που οι μεγάλες κλίσεις του πεδίου της ταχύτητας οδηγούν στην πλήρη καταστροφή της κινητικής ενέργειας και την μετατροπή της σε θερμότητα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.3 Η κατανομή της ενέργειας των διαταραχών της ταχύτητας συναρτήσει των κλιμάκων μήκους για μια τυρβώδη ροή. L είναι το τυπικό μέγεθος των μεγαλύτερων διαταραχών, ενώ η είναι το τυπικό μέγεθος των μικρότερων διαταραχών ή αλλιώς κλίμακα Kolmogorov

Η έννοια του υποβιβασμού της ενέργειας σε συνδυασμό με φυσικές υποθέσεις οδήγησαν τον Kolmogorov το 1941 να αναπτύξει τη φαινομενολογική εικόνα της

τύρβης. Πιο συγκεκριμένα, μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το εύρος των ενεργών κλίμακων της ροής. Οι εκτιμήσεις αυτές ισχύουν αυστηρά και μόνο για την περίπτωση της ισοτροπικής και ομοιογενούς τύρβης, αλλά είναι ποιοτικά σωστές και για τη γενική περίπτωση. Οι τυπικές κλίμακες μήκους και χρόνου των μικρότερων δινών η και τ , σχετίζονται με τις τυπικές κλίμακες μήκους και χρόνου των μεγαλύτερων δινών ως:

$$\frac{\eta}{L} \sim Re^{-3/4}, \quad \frac{\tau}{T} \sim Re^{-1/2}$$

Η κινητική ενέργεια κατανέμεται αρκετά ανομοιόμορφα στις ενεργές κλίμακες μήκους. Όπως φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα, οι διαταραχές της μικροκλίμακας έχουν κατά αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότερη ενέργεια από αυτές της μεγαλοκλίμακας.

Ισχυρή Ανάμειξη: Οι τυρβώδεις διαταραχές συνιστούν έναν πολύ αποδοτικότερο μηχανισμό ανάμειξης σε σχέση με τη μοριακή διάχυση. Αυτός ο μηχανισμός αφορά όλα τα είδη ανάμειξης: της ορμής, της εσωτερικής ενέργειας (σε ροές μεταφοράς θερμότητας) ή της ανάμειξης διαλυμάτων. Η πραγματική ανάμειξη (που ορίζεται ως η μεταφορά οποιουδήποτε από αυτά τα πεδία μεταξύ δύο γειτονικών στοιχείων ρευστού) εξακολουθεί να γίνεται και με μοριακή διάχυση. Ο ρόλος των τυρβωδών διαταραχών στο πεδίο της ανάμειξης είναι η δημιουργία έντονων κινήσεων ανάδευσης που φέρνουν τα ρευστοστοιχεία με διαφορετικές συγκεντρώσεις σε επαφή μεταξύ τους.

Συνεκτικές Δομές: Οι τοπικές συνεκτικές δομές (coherent structures), οι οποίες έχουν συγκεκριμένες μορφές, παράγονται με επαναλαμβανόμενο τρόπο από τη ροή και διαρκούν για σχετικά μεγάλα διαστήματα. Οι δομές αυτές έχουν τυπικά μεγέθη που κυμαίνονται σε ένα ευρύ φάσμα και παρουσιάζουν διάφορες μορφές, όπως περιοχές ισχυρής στροβιλότητας ή υψηλής (ή χαμηλής) ταχύτητας και διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο στην τυρβώδη ανάμειξη. Το μέγεθος των δομών, ο χρόνος δημιουργίας τους, η θέση τους και η μορφή τους ακολουθεί τη ψευδοχαστική φύση της τύρβης.

4.2 Αριθμητικές Προσεγγίσεις Τυρβώδους Ροής

4.2.1 Άμεση Αριθμητική Προσομοίωση (Direct Numerical Simulation, DNS)

Η Άμεση Αριθμητική Προσομοίωση (DNS) είναι η πιο ακριβής προσέγγιση προσομοίωσης τυρβώδους ροής και περιλαμβάνει την επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes χωρίς τη χρήση μέσων τιμών ή προσεγγίσεων άλλων, πέραν της αριθμητικής διακριτοποίησης, το σφάλμα της οποίας μπορεί να υπολογιστεί και να ελεγχθεί. Στη DNS επιλύονται όλες οι κινήσεις που περιέχονται στη ροή, έτσι το

υπολογιστικό πεδίο που προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων, είναι ισοδύναμο με το αντίστοιχο που θα προέκυπτε από μία απλή πραγματοποίηση της ροής.

Σε μία DNS προκειμένου να ληφθούν υπόψη όλες οι σημαντικές πληροφορίες γύρω από τη συμπεριφορά της τύρβης, το πεδίο ορισμού της θα πρέπει να είναι τουλάχιστον όσο μεγάλο είναι το πεδίο ορισμού του πραγματικού προβλήματος, ή της μέγιστης δίνης (eddy). Η μέτρηση της μέγιστης δίνης γίνεται μέσω της ολοκληρωτικής κλίμακας (L) της τύρβης, που ουσιαστικά είναι το μήκος στο οποίο η κυμαινόμενη συνιστώσα της ταχύτητας παραμένει συσχετισμένη. Έτσι, κάθε γραμμική διάσταση του πεδίου ορισμού θα πρέπει να είναι τουλάχιστον λίγες φορές μεγαλύτερη αυτής της κλίμακας. Επίσης σημαντικό είναι να λαμβάνεται υπόψη όλο το ποσό της κινητικής ενέργειας που καταστρέφεται. Αυτό είναι εφικτό όταν το μέγεθος του πλέγματος ορίζεται σύμφωνα με τη κλίμακα Kolmogorov (η).

Για τον απλούστερο τύπο τύρβης, την ομογενή ισότροπη τύρβη, και με χρησιμοποιούμενο το ομοιόμορφο πλέγμα, ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος σε κάθε διεύθυνση θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσος με L/η . Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω ο λόγος αυτός είναι ανάλογος του $Re_L^{3/4}$ όπου Re_L είναι ο αριθμός Reynolds που βασίζεται στο μέγεθος της κύμανσης της ταχύτητας και την ολοκληρωτική κλίμακα και ισούται σε σχέση με τη τιμή του αριθμού Reynolds της ροής: $Re_L = 0,01 \cdot Re$. Καθώς ο αριθμός των κόμβων θα χρησιμοποιηθεί σε κάθε μια από τις τρεις διευθύνσεις και το χρονικό βήμα σχετίζεται με το μέγεθος του πλέγματος, το κόστος της προσομοίωσης είναι ανάλογο του Re_L^3 .

Τα αποτελέσματα μιας DNS περιέχουν λεπτομερείς πληροφορίες της ροής, για την ταχύτητα, την πίεση και οποιοδήποτε άλλο μέγεθος σε μεγάλο πλήθος κόμβων του πλέγματος, οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες γιατί τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμα με αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα και ως εκ τούτου μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εξαγωγή στατιστικών πληροφοριών ή στην απεικόνιση της «Υπολογιστικής Ροής». Βέβαια ο μεγάλος όγκος πληροφοριών έχει και μειονεκτήματα, όπως, πρώτον οι πληροφορίες αυτές είναι περισσότερες από ότι χρειάζεται ένας μηχανικός και δεύτερον η DNS απαιτεί μεγάλη υπολογιστική ισχύ, έτσι για την ώρα, μπορεί να εφαρμοστεί μόνο για ροές που αντιστοιχούν σε σχετικά μικρούς αριθμούς Reynolds και σε απλά γεωμετρικά πεδία ορισμού. Συμπερασματικά λοιπόν, η Άμεση Αριθμητική Προσομοίωση (DNS), με τους σύγχρονους υπολογιστές που έχουμε στη διάθεσή μας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ερευνητικό εργαλείο. Κάποια παραδείγματα τύπων προβλημάτων στα οποία μπορεί να αξιοποιηθεί η DNS είναι τα ακόλουθα:

- Κατανόηση των μηχανισμών παραγωγής της τύρβης, της μεταφοράς ενέργειας και της καταστροφής ενέργειας.

- Προσομοίωση της παραγωγής του αεροδυναμικού θορύβου.
- Κατανόηση των συνεπειών της συμπίεσότητας στην τύρβη.
- Κατανόηση της αλληλεπίδρασης καύσης και τύρβης.
- Έλεγχος και μείωση της οπισθέλκουσας σε στερεή επιφάνεια.

Στην Άμεση Αριθμητική Προσομοίωση (DNS), καθώς και στη Προσομοίωση Μεγάλων Δινών (LES), μπορούν να χρησιμοποιηθούν σχεδόν όλες οι αριθμητικές μέθοδοι. Ωστόσο, υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των DNS και LES και των προσομοιώσεων μόνιμων ροών. Η μεγαλύτερη απαίτηση από μια αριθμητική μέθοδο για την εφαρμογή των DNS και LES σχετίζεται με την ανάγκη ακριβούς υλοποίησης μιας ροής, η οποία περιέχει μεγάλο εύρος κλιμάκων μήκους και χρόνου. Η ανάγκη για ακρίβεια απαιτεί το χρονικό βήμα να είναι μικρό και η μέθοδος της χρονοπροέλασης (time advance method) θα πρέπει να είναι σταθερή για το επιλεγέν χρονικό βήμα. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι μη πεπλεγμένες μέθοδοι οι οποίες είναι σταθερές για το χρονικό βήμα που απαιτεί η επιθυμητή ακρίβεια, είναι διαθέσιμες και έτσι αποφεύγονται οι πεπλεγμένες μέθοδοι που απαιτούν περισσότερο υπολογιστικό κόστος. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι περισσότερες προσομοιώσεις χρησιμοποιούν μη πεπλεγμένες μεθόδους χρονοπροέλασης.

Οι μέθοδοι χρονοπροέλασης που συνήθως χρησιμοποιούνται στη DNS και τη LES είναι δευτέρου έως τετάρτου βαθμού ακρίβειας. Για μια δεδομένη τάξη ακρίβειας, οι μέθοδοι Runge-Kutta γενικά προτιμώνται έναντι άλλων μεθόδων (π.χ. μέθοδοι πολλών σημείων) παρόλο που απαιτούν περισσότερο υπολογιστικό χρόνο ανά χρονικό βήμα, γιατί τα σφάλματα που παράγονται σε ένα συγκεκριμένο χρονικό βήμα είναι πολύ μικρότερα. Έτσι στη πράξη επιτρέπουν τη χρήση μεγαλύτερου χρονικού βήματος για την ίδια ακρίβεια, αντισταθμίζοντας τον αυξανόμενο υπολογιστικό χρόνο που απαιτούν. Η μέθοδος Crank-Nicolson εφαρμόζεται συχνά σε περιπτώσεις που εμπλέκονται όροι οι οποίοι θα πρέπει να αντιμετωπιστούν πεπλεγμένα.

Μια δυσκολία που συναντά κανείς κατά τη χρήση των μεθόδων χρονοπροέλασης αφορά στο γεγονός ότι η επιλογή ακρίβειας μεγαλύτερης από πρώτης τάξης, απαιτεί την αποθήκευση δεδομένων που αντιστοιχούν σε περισσότερα από ένα χρονικά βήματα. Καθώς το πλήθος των δεδομένων που περιέχονται σε ένα απλό πεδίο ταχυτήτων είναι μεγάλο, η απαιτούμενη μνήμη για την αποθήκευσή τους μπορεί να ξεπερνά τη διαθέσιμη μεγάλη μνήμη των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών. Το υψηλό αποθηκευτικό κόστος δίνει πλεονέκτημα στις μεθόδους που έχουν σχετικά χαμηλές απαιτήσεις αποθήκευσης.

Μία άλλη σημαντική παράμετρος της DNS είναι η ανάγκη χειρισμού μεγάλου εύρους κλιμάκων μήκους. Ο πιο κοινός δείκτης ακρίβειας μιας μεθόδου χωρικής διακριτοποίησης, είναι ο βαθμός της. Ένας αριθμός δηλαδή ο οποίος περιγράφει το

ρυθμό μείωσης του σφάλματος διακριτοποίησης σε συνάρτηση με τη μείωση του μεγέθους του πλέγματος. Βέβαια αυτός ο δείκτης δεν είναι κατάλληλος απαραίτητα για ποιοτική αξιολόγηση.

Η ακρίβεια είναι δύσκολο να μετρηθεί στις μεθόδους DNS και LES. Η αιτία είναι η φύση της ίδιας της τυρβώδους ροής. Μία μικρή μεταβολή των αρχικών συνθηκών της τυρβώδους ροής ενισχύεται εκθετικά με το χρόνο και μετά από σχετικά μικρό χρονικό διάστημα, η διαταραγμένη ροή ελάχιστα θυμίζει την αρχική. Αυτό είναι ένα φυσικό φαινόμενο που δεν σχετίζεται με τη χρησιμοποιούμενη υπολογιστική μέθοδο. Καθώς κάθε μέθοδος εισάγει ένα σφάλμα και κάθε μεταβολή στη μέθοδο ή τις παραμέτρους μεταβάλλει το σφάλμα αυτό, άμεση σύγκριση δύο λύσεων ως προς τον προσδιορισμό του σφάλματος είναι αδύνατη. Μια απλή προσέγγιση, η οποία χρησιμοποιείται κατά την υπολογιστική μελέτη απλών τυρβωδών ροών, είναι η μελέτη του φάσματος της τύρβης. Εάν η ενέργεια στις χαμηλότερες κλίμακες είναι αρκετά μικρότερη από ότι στις κορυφές του ενεργειακού φάσματος, τότε η ροή θεωρούμε ότι έχει αναλυθεί καλά.

Μία άλλη δυσκολία στην DNS είναι η παραγωγή αρχικών και οριακών συνθηκών. Οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να περιλαμβάνουν όλες τις λεπτομέρειες του αρχικού τρισδιάστατου πεδίου ταχυτήτων. Καθώς οι συνεκτικές δομές αποτελούν σημαντική συνιστώσα της ροής, είναι δύσκολη η κατασκευή ενός τέτοιου πεδίου. Ακόμα, η επίδραση των αρχικών συνθηκών στη ροή τυπικά διατηρείται για σημαντικό χρονικό διάστημα (συνήθως μερικές διάρκειες ζωής της δίνης). Η διάρκεια ζωής της δίνης είναι ουσιαστικά η ολοκληρωτική κλίμακα χρόνου της ροής ή η ολοκληρωτική κλίμακα μήκους διαιρεμένη με τη ρίζα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης της ταχύτητας. Συχνά, το πρώτο μέρος μιας προσομοίωσης το οποίο ξεκινά με τεχνητά κατασκευασμένες αρχικές συνθήκες θα πρέπει να απορρίπτεται γιατί δε συνάδει με τη φυσική του προβλήματος. Οι καλύτερες αρχικές συνθήκες για άλλες ροές λαμβάνονται από τα αποτελέσματα προηγούμενων προσομοιώσεων. Παραδείγματος χάριν, για ομογενή τύρβη που υπόκεινται σε παραμόρφωση, η καλύτερη αρχική συνθήκη λαμβάνεται από ανεπτυγμένη ισοτροπική τύρβη, ενώ για ροή σε κανάλι, είναι ένα μίγμα μέσης ταχύτητας, καταστάσεων αστάθειας και θορύβου.

Παρόμοιες υποθέσεις εφαρμόζονται και στις οριακές συνθήκες όπου η ροή εισέρχεται στο πεδίο ορισμού (συνθήκες εισροής). Οι σωστές συνθήκες θα πρέπει να περιέχουν ολόκληρο το πεδίο ταχυτήτων μιας τυρβώδους ροής σε μια πλάκα (ή άλλη επιφάνεια) σε κάθε χρονικό βήμα, κάτι που είναι δύσκολο να κατασκευασθεί. Για παράδειγμα σε ένα καμπύλο κανάλι αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της ροής σε ένα επίπεδο κανάλι. Η προσομοίωση της ροής στο επίπεδο κανάλι πραγματοποιείται (ταυτόχρονα ή εκ των προτέρων) και οι

συνιστώσες της ταχύτητας σε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση της κύριας ροής αποτελούν τις συνθήκες εισροής για το καμπύλο κανάλι.

Οι οριακές συνθήκες, όπου η ροή εξέρχεται από το πεδίο ορισμού (συνθήκες εκροής) είναι ευκολότερες στο χειρισμό. Μία δυνατότητα είναι η χρήση συνθηκών που προκύπτουν από μεθόδους παρεμβολής (extrapolation), οι οποίες απαιτούν οι παράγωγοι όλων των ποσοτήτων στην κάθετη στο όριο διεύθυνση να είναι μηδέν:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

όπου φ οποιαδήποτε από τις εξαρτημένες μεταβλητές. Η συνθήκη αυτή συχνά χρησιμοποιείται σε μόνιμες ροές αλλά δεν είναι ικανοποιητική στην περίπτωση μη μόνιμων ροών. Στις μη μόνιμες ροές είναι καλύτερη η αντικατάσταση αυτής της συνθήκης με μια μη μόνιμη συνθήκη συναγωγής. Μία από τις ευρέως χρησιμοποιούμενες είναι:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

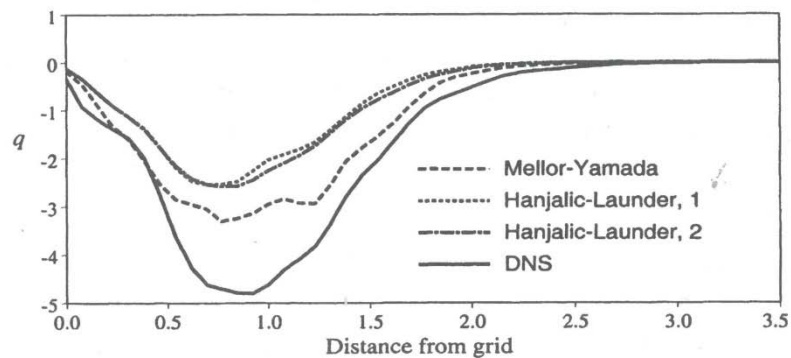
όπου U είναι η ταχύτητα η οποία είναι ανεξάρτητη της τοποθεσίας στην επιφάνεια εκροής και επιλέγεται έτσι ώστε να διατηρούνται οι εξισώσεις διατήρησης, δηλαδή, θα πρέπει η ταχύτητα να είναι τέτοια ώστε η ροή μάζας εκροής να είναι ίση με τη ροή μάζας εισροής.

Στα στερεά τοιχώματα χρησιμοποιούνται οριακές συνθήκες μη ολίσθησης. Σε τέτοια όρια η τύρβη τείνει να αναπτύσσει μικρές, αλλά πολύ σημαντικές δομές, οι οποίες απαιτούν πολύ λεπτό πλέγμα, ειδικά στην κάθετη στο τοίχωμα διεύθυνση αλλά και σε μικρότερο βαθμό στην εγκάρσια διεύθυνση.

Συμμετρικές οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται συνήθως στην υπολογιστική επίλυση των εξισώσεων RANS προκειμένου να μειωθεί το μέγεθος του πεδίου ορισμού, δεν είναι εφαρμόσιμες, επί το πλείστον, στις περιπτώσεις της DNS και της LES, καθώς παρά το ότι η μέση ροή είναι συμμετρική ως προς συγκεκριμένο επίπεδο, η στιγμιαία ροή δεν είναι, ενώ σημαντικές φυσικές παράμετροι του προβλήματος μπορεί με τον τρόπο αυτό να παραληφθούν. Οι συμμετρικές οριακές συνθήκες χρησιμοποιούνται ωστόσο στη μελέτη ελεύθερων επιφανειών.

Με τη πάροδο των χρόνων και παρά τις οποίες προσπάθειες έγιναν ώστε οι αρχικές και οριακές συνθήκες να γίνουν κατά το δυνατό πιο ρεαλιστικές, η προσομοίωση θα πρέπει να τρέξει για κάποιο ορισμένο χρονικό διάστημα πριν η ροή αναπτύξει όλα τα σωστά χαρακτηριστικά της φυσικής ροής. Το στοιχείο αυτό απορρέει από τη φυσική των τυρβωδών ροών και επομένως είναι περιορισμένες οι δυνατότητες επιτάχυνσης της διαδικασίας. Ο καλύτερος τρόπος για την εξασφάλιση της ολοκληρωτικής ανάπτυξης της ροής είναι η καταγραφή μιας παραμέτρου, κατά

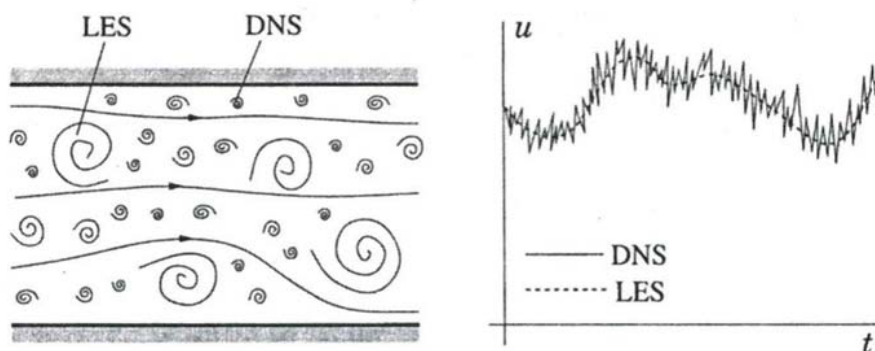
προτίμηση κάποιας η οποία επηρεάζεται από τμήματα της ροής που αναπτύσσονται πιο αργά. Η επιλογή αυτή εξαρτάται κάθε φορά από την προσομοιούμενη ροή. Η διαδικασία ανάπτυξης μπορεί να επιταχυνθεί χρησιμοποιώντας αρχικά ένα χονδροειδές πλέγμα. Όταν η ροή αναπτυχθεί σε αυτό, το λεπτότερο πλέγμα μπορεί να εισαχθεί στη μελέτη. Κατόπιν, μικρή αναμονή εξακολουθεί να είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη της ροής στο λεπτό πλέγμα, αλλά μικρότερη από την αντίστοιχη, αν είχαμε λεπτό πλέγμα από την αρχή στην προσομοίωση.



Σχήμα 4.4 Το προφίλ της ροής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, q , με χρήση DNS, συγκρινόμενη με τις προβλέψεις μοντέλων τύρβης

4.2.2 Προσομοίωση Μεγάλων Δινών (Large Eddy Simulation, LES)

Οι τυρβώδεις ροές περιέχουν μία ευρεία κλίμακα μηκών και κλιμάκων χρόνου. Το εύρος των μεγεθών των δινών που μπορεί να βρεθούν σε μία τυρβώδη ροή, καθώς και η χρονική εξέλιξη μια τυπικής συνιστώσας της ταχύτητας σε ένα σημείο της ροής, φαίνονται στο σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5 Απεικόνιση τυρβώδους κίνησης (αριστερά) και της χρονικής εξάρτησης μιας συνιστώσας της ταχύτητας σε ένα σημείο (δεξιά)

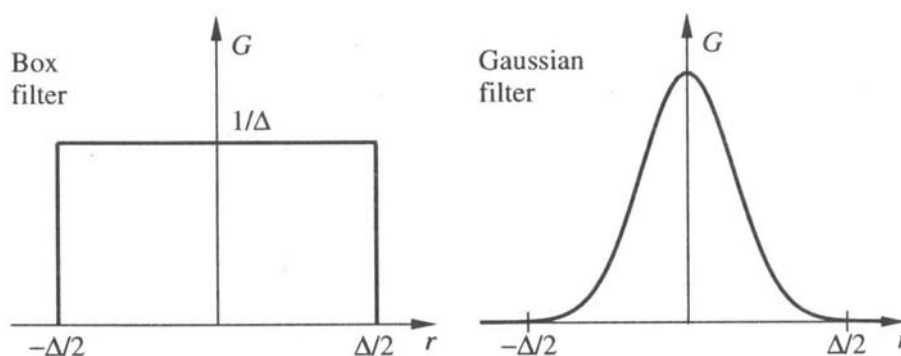
Οι μεγάλες κλίμακες κίνησης είναι γενικά πολύ πιο ενεργητικές από τις αντίστοιχες μικρές. Το μέγεθος και η ισχύς τους, τις καθιστά τους πιο σημαντικούς μετατροπείς των συντηρητικών μεγεθών. Οι μικρές κλίμακες είναι συνήθως πολύ ασθενέστερες

και προκαλούν μικρή μετατροπή των μεγεθών αυτών. Στη μέθοδο των μεγάλων δινών (LES), υπολογίζουμε άμεσα τη μέση ροή και τις μη μόνιμες κινήσεις της ενδιάμεσης και μεγάλης κλίμακας. Η επίδραση των δινών (διαταραχών) της μικροκλίμακας στο υπόλοιπο πεδίο της ροής μοντελοποιείται κατάλληλα. Αυτή η μοντελοποίηση εισάγει σφάλματα, τα οποία, παρόλο που είναι γενικά μικρότερα από εκείνα των μοντέλων RANS, παραμένουν σημαντικά. Αγνοώντας την απαίτηση για ακριβή ανάλυση των κινήσεων της μικροκλίμακας, μειώνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος συγκριτικά με τη μέθοδο DNS και καθιστά εφικτή την προσομοίωση ροών σε περισσότερο σύνθετες γεωμετρίες και υψηλότερους αριθμούς Reynolds. Από την άλλη μεριά, το υπολογιστικό κόστος της LES είναι κατά πολύ υψηλότερο από εκείνο των μοντέλων RANS. Η τρέχουσα χρήση της μεθόδου LES περιορίζεται σε ροές στις οποίες η απαίτηση για αναπαράσταση των τυρβωδών διαταραχών της μεγαλοκλίμακας και, όχι μόνο της μέσης ροής, είναι σημαντική, παρόλο που τα πεδία εφαρμογής διευρύνονται ταχέως ακολουθώντας την ανάπτυξη της υπολογιστικής ισχύος.

Στη μέθοδο LES, αντί της πραγματικής ροής όπως κάναμε στη DNS, προσομοιώνουμε τη συμπεριφορά πεδίων που παράγονται ως αποτέλεσμα εφαρμογής ενός χαμηλοπερατού φίλτρου. Εξ ορισμού, η φιλτραρισμένη ταχύτητα είναι :

$$\bar{u}(x, t) = \int G(r, x)u(x - r, t)dr$$

όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε ολόκληρο το χωρίο ροής. G είναι μια συνάρτηση φίλτρου που ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνιότητας: $\int G(r, x)dr = 1$ και είναι σχεδόν μηδενική για $r = |r| > \Delta/2$. Η παράμετρος Δ ονομάζεται εύρος φιλτραρίσματος. Έχουν προταθεί ποικίλες μορφές για τη συνάρτηση φίλτρου. Έστω για την απλή περίπτωση όπου το φίλτρο είναι ομοιόμορφο (η συνάρτηση G δεν εξαρτάται από το x) και ιστροπικό (η εξάρτηση από το r περιορίζεται στην εξάρτηση από την απόλυτη τιμή του r). Στο σχήμα 4.6 απεικονίζονται το φίλτρο τύπου κουτιού και το φίλτρο Gauss.

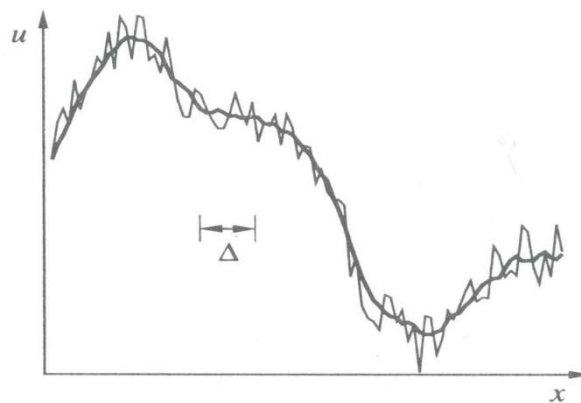


Σχήμα 4.6 Φίλτρα τύπου κουτιού (αριστερά) και τύπου Gauss (δεξιά)

$$\text{Φίλτρο Κουτιού} : G(r) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{αν } r < \Delta/2 \\ 0 & \text{αν } r > \Delta/2 \end{cases}$$

$$\text{Φίλτρο Gauss} : G(r) = \left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(-\frac{6r^2}{\Delta^2}\right)$$

Η τέλεση του ισοτροπικού φιλτραρίσματος είναι απλά μια σταθμισμένη και τοπική (σε σφαίρα διαμέτρου Δ) διαδικασία λήψης μέσων τιμών. Οι δίνες με κλίμακες μήκους σημαντικά μικρότερες από τη Δ εξομαλύνονται. Αυτή η διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 4.7 όπου γίνεται χρήση ενός μονοδιάστατου παραδείγματος. Οι μικρότερες κλίμακες που παραμένουν στο φιλτραρισμένο σήμα είναι τάξης μεγέθους Δ . Το γεγονός αυτό εξηγεί την υπολογιστική απόδοση της μεθόδου LES συγκριτικά με τη μέθοδο DNS. Επειδή οι δίνες με κλίμακες μικρότερες από Δ είναι απύσες, είναι αρκετά αποδοτικό να χρησιμοποιήσουμε ένα υπολογιστικό πλέγμα με βήματα περίπου ίσα με Δ παρά με την κατά πολύ μικρότερη κλίμακα Kolmogorov η .



Σχήμα 4.7 Αποτέλεσμα φιλτραρίσματος τύπου κουτιού σε ένα τυρβώδες σήμα με εύρος φιλτραρίσματος Δ

Μερικές φορές, υποθέτουμε ότι το εύρος φιλτραρίσματος είναι ίσο με τα πλεγματικά βήματα. Τα φιλτραρισμένα πεδία, όπως το \bar{u} , καλούνται αναλυθέντα πεδία, και ο όρος υποπλεγματική κλίμακα χρησιμοποιείται για τις εξομαλυμένες δίνες:

$$u' = u - \bar{u}$$

Στη περίπτωση όμως, όπου τα πλεγματικά βήματα διαφέρουν σε μέγεθος από το εύρος φιλτραρίσματος, οι κατάλληλοι όροι για αυτή την περίπτωση είναι φιλτραρισμένα πεδία για την \bar{u} και υπολειπόμενα πεδία για την u' .

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία φιλτραρίσματος (η οποία είναι γραμμική και εφαρμόζεται στις μερικές παραγώγους) στις εξισώσεις *Navier – Stokes*, για παράδειγμα στη παράγωγο $\partial u / \partial t$ έχουμε:

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)} = \int G(r, x) \frac{\partial u}{\partial t}(x - r, t) dr = \frac{\partial}{\partial t} \int G(r, x) u(x - r, t) dr = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

Ενώ για το σύστημα των εξισώσεων *Navier – Stokes* γενικώς το αποτέλεσμα είναι:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 \bar{u}_i, \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

Η μη γραμμικότητα της εξίσωσης της ορμής είναι ο λόγος όπου το φιλτραρισμένο γινόμενο $\overline{u_i u_j}$ δεν μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της φιλτραρισμένης ταχύτητας. Δηλαδή: $\overline{u_i u_j} \neq \bar{u}_i \bar{u}_j$. Έτσι οι φιλτραρισμένες εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_j}, \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

όπου: $\tau_{ij}^R = \rho \overline{u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j$, είναι ο τανυστής των υπολειπόμενων τάσεων ή υποπλεγματικής κλίμακας τάση Reynolds (residual stress tensor or subgrid-scale Reynolds stress).

Παρά την ομοιότητα στην εμφάνιση, υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ αυτού του τανυστή και του τανυστή των τάσεων Reynolds της μεθόδου RANS. Οι τάσεις Reynolds αναπαριστούν τη ροή της ορμής λόγω όλων των τυρβωδών δινών, ενώ οι υπολειπόμενες τάσεις περιλαμβάνουν μόνο την επίδραση των δινών με κλίμακες μήκους μικρότερες από το εύρος φιλτραρίσματος της μεθόδου LES.

Αν αναπτύξουμε τον όρο τ_{ij}^R στο άθροισμα ενός ανιστροπικού και ενός διαγώνιου τμήματος:

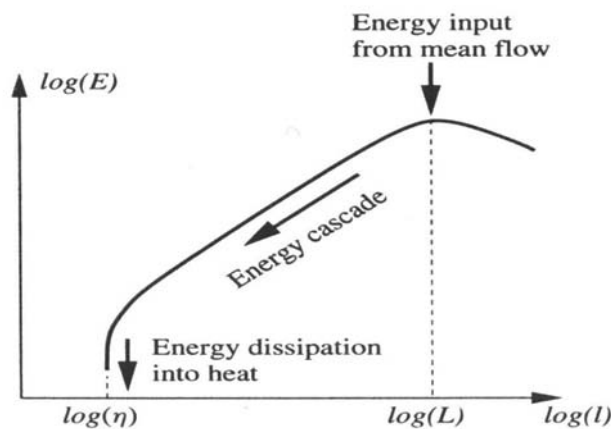
$$\tau_{ij}^R = \tau_{ij}^r + 1/3 \delta_{ij} \tau_{ii}^R$$

και εισάγοντας το τροποποιημένο πεδίο πίεσης: $\bar{p}^* = \bar{p} + 1/3 \tau_{ii}^R$, τότε έχουμε το τελικό σύστημα των φιλτραρισμένων εξισώσεων:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_j}, \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

Το διαγώνιο τμήμα του τανυστή των υπολειπόμενων τάσεων αποτελεί πλέον τμήμα του τροποποιημένου πεδίου πίεσης που μπορεί να υπολογισθεί με χρήση κάποιας από τις τεχνικές πρόβλεψης. Ο ανιστροπικός τανυστής των υπολειπόμενων τάσεων τ_{ij}^r σε κάθε περίπτωση παραμένει στην εξίσωση. Επίσης είναι άγνωστος και δε μπορεί να γραφεί συναρτήσει του πεδίου ταχυτήτων (\bar{u}) και του τροποποιημένου πεδίου πίεσης (\bar{p}^*). Συνεπώς το σύστημα των φιλτραρισμένων εξισώσεων LES δεν είναι κλειστό μαθηματικά. Η αριθμητική του επίλυση είναι αδύνατη ως έχει, έκτος αν με κάποιο τρόπο, μοντελοποιήσουμε τον τανυστή τ_{ij}^r συναρτήσει των φιλτραρισμένων πεδίων ροής.

Τα μοντέλα, λοιπόν, που χρησιμοποιούνται για να προσεγγίσουμε τον τανυστή τ_{ij}^r καλούνται μοντέλα κλεισίματος ή μοντέλα υποπλεγματικής κλίμακας (SGS). Για να είναι ένα μοντέλο κατάλληλο για το κλείσιμο του συστήματος των εξισώσεων, η προσέγγιση του τανυστή τ_{ij}^r θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από τα φιλτραρισμένα πεδία ροής και γνωστές παραμέτρους, όπως το πλάτος φιλτραρίσματος. Μία γεωμετρική απαίτηση είναι ότι το μοντέλο θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς κύριων συντεταγμένων, ενώ από φυσική άποψη, θα πρέπει να αναπαριστά την επίδραση των υπολειπόμενων δινών με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια. Από τη στιγμή που η μέθοδος LES δεν προσομοιώνει τις δίνες της μικροκλίμακας, η καταστροφή της τυρβώδους ενέργειας δε μπορεί να ακολουθήσει τη φυσική διαδρομή της (σχήμα 4.8), έτσι ένα μοντέλο κλεισίματος θα πρέπει να παρέχει μια καταβόθρα ενέργειας κατάλληλης έντασης με κλίμακα μήκους προσεγγιστικά ίση με το εύρος φιλτραρίσματος Δ όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.8 Η κατανομή και καταστροφή της ενέργειας στη μέθοδο LES

Πλέον υπάρχουν αρκετά διαφορετικά μοντέλα υπό-πλεγματικής κλίμακας τα οποία θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε. Εδώ θα αναφέρουμε μόνο το μοντέλο Smagorinsky, το οποίο ήταν το παλαιότερο και αποτελεί και τη βάση για πολλά σύγχρονα μοντέλα υπό-πλεγματικής κλίμακας. Διατυπώθηκε από τον Smagorinsky το 1963 και είναι μοντέλο συνεκτικής δίνης, δηλαδή, στηρίζεται στη θεώρηση ότι τα κυρίαρχα αποτελέσματα του τανυστή υπολειπόμενων τάσεων είναι η αυξημένη μεταφορά και καταστροφή. Έτσι το μοντέλο Smagorinsky χρησιμοποιεί την υπόθεση της τυρβώδους συνεκτικότητας: $\tau_{ij}^r = -2\mu_t \bar{S}_{ij}$, όπου μ_t είναι η τυρβώδης συνεκτικότητα και \bar{S}_{ij} είναι ο ρυθμός του τανυστή των παραμορφώσεων της φιλτραρισμένης ροής. Η τυρβώδης συνεκτικότητα μοντελοποιείται βάσει της θεωρίας για το μήκος ανάμειξης του Prandtl ως:

$$\mu_t = \rho l_s^2 |\bar{S}| = \rho (C_s \Delta)^2 |\bar{S}|$$

όπου $|\bar{S}| = (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2}$ και η χαρακτηριστική κλίμακα μήκους l_s προσεγγίζεται ως το γινόμενο του εύρους φιλτραρίσματος Δ και της εμπειρικής σταθεράς του Smagorinsky C_s . Ο ρυθμός καταστροφής της ενέργειας από αυτό το μοντέλο υπό-πλεγματικής κλίμακας είναι:

$$P_t = -\tau_{ij}^r \bar{S}_{ij} = 2\mu_t \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} = \mu_t |\bar{S}|^2$$

Η δημοφιλία του μοντέλου Smagorinsky οφείλεται κυρίως στην απλότητα και την υπολογιστική του απόδοση. Ωστόσο, έχει σημαντικά μειονεκτήματα που το καθιστούν λιγότερο ακριβές και ευέλικτο από τα περισσότερα σύνθετα μοντέλα. Το βασικό πρόβλημα του μοντέλου είναι η εμπειρική σταθερά του Smagorinsky C_s . Γενικά η βέλτιστη τιμή της εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της ροής (αριθμό Reynolds, την ένταση της μέσης διάτμησης, κ.λπ.) και υπάρχει πάντα ο κίνδυνος να χρησιμοποιήσουμε τη μεγαλύτερη τιμή της σταθεράς και, σαν αποτέλεσμα, να πάρουμε ανακριβή αποτελέσματα. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η συμπεριφορά του μοντέλου κατά τις προσομοιώσεις στρωτών ροών. Σε τέτοιες ροές ο τανυστής των υπολειπόμενων τάσεων τ_{ij}^r είναι πρακτικά μηδέν, ενώ ο φιλτραρισμένος τανυστής των ρυθμών παραμόρφωσης S_{ij} δεν είναι, έτσι σε μία τέτοια ροή το μοντέλο Smagorinsky θα προέβλεπε μηδενικό υπόλοιπο για τον όρο των τάσεων και θα πρόσθετε ένα λάθος μηχανισμό καταστροφής ενέργειας που θα οδηγούσε σε λαθεμένη εικόνα της ροής. Αυτό το χαρακτηριστικό του μοντέλου το καθιστά ιδιαίτερα επικίνδυνο στον υπολογισμό ροών που εξελίσσονται μεταξύ στρωτής και τυρβώδους ροής.

4.2.3 Μοντέλα των Μέσων κατά Reynolds Εξισώσεων Navier – Stokes (RANS)

Η μέθοδος των Μέσων κατά Reynolds Εξισώσεων Navier – Stokes είναι η παλαιότερη μέθοδος για τη μοντελοποίηση της τύρβης και παραμένει ακόμα και σήμερα η πιο δημοφιλής. Τα πλεονεκτήματά της είναι η απλότητα, το χαμηλό υπολογιστικό κόστος (σε σχέση με τις μεθόδους DNS και LES), το ευρύ φάσμα στις επιλογές μοντέλων άμεσα διαθέσιμων στους κώδικες CFD γενικού σκοπού, καθώς και η σημαντική συσσωρευμένη εμπειρία σε εφαρμογές με διαφορετικά είδη τυρβώδους ροής. Τα μειονεκτήματα της εντοπίζονται στο χαμηλό επίπεδο περιγραφής (το μόνο που περιγράφεται είναι τα χαρακτηριστικά της μέσης ροής), στην ανάγκη για προσαρμογή των μοντέλων στα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά μιας ροής και τα σχετικά μεγάλα σφάλματα μοντελοποίησης.

Τα συνηθέστερα μοντέλα RANS στηρίζονται στη θεώρηση που έκανε ο Reynolds, πριν από περίπου έναν αιώνα, πως η στιγμιαία ταχύτητα και πίεση μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά, σε άθροισμα δύο μεταβλητών, της μέσης και της κυμαινόμενης. Με αυτό τον τρόπο η ροή περιγράφεται στατιστικά από τη μέση

ταχύτητα της ροής και της διακυμαινόμενης κίνησης της τύρβης. Ως εκ τούτου, οι εξισώσεις που λαμβάνονται με αυτό τον τρόπο λέγονται Μέσες κατά Reynolds Εξισώσεις (RANS) και για ασυμπίεστες και Νευτώνειες ροές έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\rho \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 \langle u_i \rangle - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0$$

όπου $\langle u \rangle$ και $\langle p \rangle$ η μέση ταχύτητα και πίεση αντίστοιχα. Επειδή οι συνιστώσες του ταυυστή των τάσεων Reynolds είναι άγνωστες και δεν μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της μέσης ταχύτητας και πίεσης, το σύστημα δεν μπορεί να κλείσει μαθηματικά. Τα μοντέλα RANS μας παρέχουν τη δυνατότητα να επιλύσουμε το σύστημα αριθμητικά, αφού μπορούμε να προσεγγίσουμε τις τάσεις τ_{ij} συναρτήσει των ποσοτήτων της μέσης ροής, και να κλείσουμε το σύστημα.

Υπόθεση της τυρβώδους συνεκτικότητας: Υποθέτουμε ότι η τυρβώδης μεταφορά εξαρτάται από τις κλίσεις της μέσης ταχύτητας με τον ίδιο τρόπο που η μοριακή μεταφορά εξαρτάται από τις κλίσεις του πλήρους πεδίου ταχυτήτων. Ο ταυυστής των τάσεων Reynolds ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\tau_{ij} \equiv \rho \langle u'_i u'_j \rangle = -2\mu_t \langle S_{ij} \rangle + \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k$$

όπου $\langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right)$ είναι ο ρυθμός του ταυυστή παραμορφώσεων της μέσης ροής, μ_t είναι η τυρβώδης συνεκτικότητα και k είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια και ισούται: $k \equiv \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle = \frac{1}{2} \langle u'_x u'_x + u'_y u'_y + u'_z u'_z \rangle$. Η τύρβη χαρακτηρίζεται πλήρως από την κινητική ενέργεια των τυρβωδών διαταραχών k ή από την χαρακτηριστική ταχύτητα (RMS, Root Mean Square) $q = \left(2k/3 \right)^{1/2}$ και μία συγκεκριμένη κλίμακα μήκους l . Με τη χρήση διαστατικής ανάλυσης έχουμε ότι $\mu_t = C_\mu \rho q l$, όπου C_μ είναι μια αδιάστατη σταθερά αναλογίας.

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι που παρέχουν τιμές για την τυρβώδη συνεκτικότητα και συνήθως κατηγοριοποιούνται από τον αριθμό των επιπλέον εξισώσεων που χρειάζονται για το μαθηματικό τους κλείσιμο. Στην απλούστερη περίπτωση των μοντέλων δε χρειαζόμαστε επιπλέον εξισώσεις και λέγονται μοντέλα μηδενικών εξισώσεων (zero-equation models), το μοντέλο μήκους ανάμιξης του Prandtl είναι ένα από αυτά. Αντίστοιχα υπάρχουν μοντέλα ενός (one-equation) ή δύο (two-equation) εξισώσεων, στα οποία για το μαθηματικό τους κλείσιμο χρειαζόμαστε να λύνονται μία ή δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις (Partial Differential Equations, PDE) ταυτόχρονα με τις εξισώσεις RANS. Ο βαθμός ακρίβειας του κάθε μοντέλου εξαρτάται από το πόσο σωστές είναι οι υποθέσεις που κάναμε πριν το

εφαρμόσουμε. Τα πλέον γνωστά και συνήθη μοντέλα που χρησιμοποιούνται από τους μηχανικούς είναι τα μοντέλα δύο εξισώσεων.

Μοντέλα Μηδενικών Εξισώσεων: Το μοντέλο μήκους ανάμιξης, όπως περιγράψαμε παραπάνω (ενότητα 4.1.4), ανήκει σε αυτή τη κατηγορία. Σύμφωνα με τον Prandtl σε απλές δισδιάστατες τυρβώδεις δομές όπου η μοναδική σημαντική τάση Reynolds είναι η $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'}$ και η μόνη σημαντική κλίση της μέσης ταχύτητας είναι η $\partial U / \partial y$, η τυρβώδης τάση Reynolds περιγράφεται σε σχέση με κλίμακα μήκους του Prandtl (l_m) ως:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}$$

Η τύρβη είναι συνάρτηση της ροής και αν η τύρβη μεταβάλλεται είναι απαραίτητο η μεταβολή αυτή να προβλέπεται εντός του μοντέλου μήκους ανάμιξης, μεταβάλλοντας το l_m . Για μια σημαντική κατηγορία απλών τυρβωδών ροών, η τυρβώδης δομή είναι επαρκώς απλή οπότε το l_m μπορεί να περιγραφεί μέσω απλών αλγεβρικών τύπων, όπως παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1.

Ροή	Μήκος Ανάμιξης l_m	L
Στρώμα ανάμιξης	$0.07L$	Πάχος στρώματος
Δέσμη	$0.09L$	Μισό πάχος δέσμης
Απόρρους	$0.16L$	Μισό πάχος απόρρου
Αξονοσυμμετρική δέσμη	$0.075L$	Μισό πάχος δέσμης
Οριακό στρώμα ($\partial p / \partial x = 0$) Στρωτό υπόστρωμα και στρώμα λογαριθμικού νόμου ($y/L \leq 0.22$)	$\kappa y [1 - \exp(-y^+/26)]$	Πάχος οριακού στρώματος
Οριακό στρώμα ($\partial p / \partial x = 0$) Εξωτερικό στρώμα ($y/L \geq 0.22$)	$0.09L$	Πάχος οριακού στρώματος
Αγωγοί και κανάλια (πλήρως ανεπτυγμένη ροή)	$L [0.14 - 0.08(1 - y/L)^2 - 0.06(1 - y/L)^4]$	Ακτίνα αγωγού ή ημιεύρος καναλιού

Πίνακας 4.1

Μοντέλα Μίας Εξίσωσης (one equation models): Το μοντέλο των Spalart-Allmaras είναι παράδειγμα αυτής της κατηγορίας, το οποίο περιλαμβάνει μια εξίσωση μεταφοράς για την παράμετρο του κινηματικού ιξώδους τύρβης $\tilde{\nu}$ και τον καθορισμό μιας κλίμακας μήκους μέσω αλγεβρικού τύπου. Το ιξώδες τύρβης σχετίζεται με το κινηματικό ιξώδες τύρβης $\tilde{\nu}$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}$$

Η παραπάνω εξίσωση περιέχει τη συνάρτηση απόσβεσης του τοιχώματος $f_{v1} = f_{v1}(\tilde{\nu}/\nu)$, η οποία τείνει στη μονάδα για μεγάλους αριθμούς Reynolds, ενώ στο τοίχωμα τείνει στο μηδέν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η παράμετρος του κινηματικού ιξώδους τύρβης να είναι ίση με το ιξώδες τύρβης ($\tilde{\nu} = \nu_t$).

Οι τάσεις Reynolds υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} = \rho \tilde{\nu} f_{v1} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Η εξίσωση μεταφοράς για τη παράμετρο κινηματικού ιξώδους τύρβης είναι η εξής:

$$\frac{\partial(\rho \tilde{\nu})}{\partial t} + \text{div}(\rho \tilde{\nu} U) = \frac{1}{\sigma_v} \text{div} \left[(\mu + \rho \tilde{\nu}) \text{grad}(\tilde{\nu}) + C_{p2} \rho \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] + C_{b1} \rho \tilde{\nu} \tilde{\Omega} - C_{w1} \rho \left(\frac{\tilde{\nu}}{\kappa y} \right)^2 f_w$$

Με τη φυσική τους έννοια να είναι:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός μεταβολής} \\ \text{της παραμέτρου} \\ \text{του ιξώδους } \tilde{\nu} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Μεταφορά} \\ \text{του } \tilde{\nu} \\ \text{με συναγωγή} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Μεταφορά} \\ \text{του } \tilde{\nu} \text{ με} \\ \text{τυρβώδη διάχυση} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{παραγωγής} \\ \text{του } \tilde{\nu} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{σκέδασης} \\ \text{του } \tilde{\nu} \end{array} \right]$$

Όπου ο ρυθμός παραγωγής του $\tilde{\nu}$ σχετίζεται με την τοπική μέση στροβιλότητα ως εξής:

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \frac{\tilde{\nu}}{(\kappa y)^2} f_{v2}$$

ενώ $\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} = \eta$ μέση στροβιλότητα

και $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \tau$ ανυστής μέσης στροβιλότητας

Οι συναρτήσεις $f_{v2} = f_{v2}(\tilde{\nu}/\nu)$ και $f_w = f_w(\tilde{\nu}/(\tilde{\Omega} \kappa^2 y^2))$ αποτελούν πρόσθετες συναρτήσεις απόσβεσης τοιχώματος.

Στα μοντέλα μίας εξίσωσης, η κλίμακα μήκους δεν μπορεί να υπολογιστεί, πρέπει, όμως, να καθοριστεί ώστε να προσδιοριστεί ο ρυθμός σκέδασης της ποσότητας της μεταφερόμενης τύρβης. Η παρατήρηση του τελευταίου όρου, του δεξιού σκέλους, της εξίσωσης μεταφοράς για τη παραμετρική παράμετρο κινηματικού ιξώδους τύρβης αποκαλύπτει ότι το κy (με $y =$ απόσταση από το στερεό τοίχωμα) έχει χρησιμοποιηθεί σε αυτό το μοντέλο ως κλίμακα μήκους l .

Οι σταθερές του μοντέλου είναι οι εξής:

$$\sigma_v = 2/3, \quad \kappa = 0.4187, \quad C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622$$

$$C_{b1} = C_{b2} + \kappa^2 \frac{1 + C_{b2}}{\sigma_v}$$

Στις παραπάνω σταθερές προστίθενται και τρεις ακόμη που είναι κρυμμένες στις συναρτήσεις τοιχώματος.

Μοντέλα Δύο Εξισώσεων: Σε αυτά τα μοντέλα οι κλίμακες ταχύτητας (q) και μήκους τύρβης (l) για την τυρβώδη συνεκτικότητα (μ_t) προσδιορίζονται ως λύσεις δύο επιπρόσθετων PDE. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα τους, συγκριτικά με τα αλγεβρικά μοντέλα, είναι ότι οι κλίμακες ταχύτητας και μήκους υπολογίζονται συναρτήσει του χώρου και του χρόνου βάσει της τοπικής κατάστασης της ροής, έτσι μπορούν να βρουν εφαρμογή σε οποιαδήποτε είδος ροής.

Μία απλή προσέγγιση για τη μοντελοποίηση της ταχύτητας και της χαρακτηριστικής κλίμακας μήκους είναι να λύσουμε την k εξίσωση για την ταχύτητα και την l εξίσωση για την χαρακτηριστική κλίμακα μήκους. Συνήθως το όνομα ενός μοντέλου δύο εξισώσεων αντικατοπτρίζει τις ιδιότητες που μοντελοποιούνται από αυτό. Έτσι ένα μοντέλο δύο εξισώσεων που προσεγγίζει τις k και l ονομάζεται $k - l$ μοντέλο. Το l σε πολλά μοντέλα αντικαθιστάται από άλλη ιδιότητα, με την οποία προφανώς μπορούμε να το υπολογίσουμε. Γενικά μπορούμε να γράψουμε μία οποιαδήποτε ιδιότητα φ η οποία εξαρτάται από τη κλίμακα μήκους l : $\varphi = k^\alpha l^\beta$. Π.χ. για το μοντέλο $k - l$ έχουμε: $\alpha = 0$ και $\beta = 1$, οπότε $\varphi = l$. Έτσι με διαφορετικές τιμές για τα α και β έχουμε και πολλές διαφορετικές επιλογές στο ποια ιδιότητα μπορούμε να υπολογίζουμε στη δεύτερη εξίσωση. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται μερικές από τις συνήθεις ιδιότητες για το προσδιορισμό της χαρακτηριστικής κλίμακας μήκους :

α	β	φ	Εναλλακτικό σύμβολο	Ερμηνεία του φ
0	1	l	l	Κλίμακα μήκους
1	-2	k/l^2	ω	Συχνότητα τύρβης
1/2	-1	$k^{1/2}/l$	f	Κλίμακα συχνότητας
-1/2	1	$k^{-1/2}/l$	τ	Κλίμακα χρόνου
3/2	-1	$k^{3/2}/l$	ε	Ρυθμός σκέδασης κινητικής ενέργειας

Το κλασικό μοντέλο $k - \varepsilon$ (standard $k - \varepsilon$): Ο ρυθμός καταστροφής της ενέργειας, ε , είναι η πιο διαδεδομένη από τις παραπάνω μεταβλητές. Έτσι στο μοντέλο $k - \varepsilon$ περιγράφεται η τύρβη χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή k και τη μεταβλητή ε (κινητική ενέργεια της τύρβης και ρυθμός σκέδασης κινητικής ενέργειας αντίστοιχα). Ο συσχετισμός μεταξύ της χαρακτηριστικής κλίμακας μήκους και του ρυθμού σκέδασης της κινητικής ενέργειας είναι :

$$\varphi = k^{3/2}/l = \varepsilon.$$

Χρησιμοποιούμε τα k και ε για να ορίσουμε την κλίμακα ταχύτητας q και την κλίμακα μήκους l που αντιπροσωπεύουν την τύρβη μεγάλης κλίμακας ως εξής:

$$q = k^{1/2}, l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

Εφαρμόζοντας τη διαστατική ανάλυση μπορούμε να καθορίσουμε τη τυρβώδη συνεκτικότητα ως:

$$\mu_t = C_\mu \rho q l = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

όπου C_μ είναι μια αδιάστατη σταθερά. Το πρότυπο μοντέλο $k - \varepsilon$ χρησιμοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις μεταφοράς για τα k και ε :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad } k \right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon U) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

όπου η φυσική τους έννοια είναι :

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{μεταβολής} \\ \text{του } k \text{ ή του } \varepsilon \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Μεταφορά} \\ \text{του } k \text{ ή του } \varepsilon \\ \text{με συναγωγή} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Μεταφορά} \\ \text{του } k \text{ ή του } \varepsilon \\ \text{με διάχυση} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{παραγωγής} \\ \text{του } k \text{ ή του } \varepsilon \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{καταστροφής} \\ \text{του } k \text{ ή του } \varepsilon \end{array} \right]$$

Οι παραπάνω εξισώσεις περιέχουν πέντε προσαρμόσιμες σταθερές: $C_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$. Το μοντέλο $k - \varepsilon$ χρησιμοποιεί τιμές για τις παραπάνω σταθερές που προκύπτουν με ευρεία προσαρμογή πειραματικών δεδομένων για ένα μεγάλο εύρος τυρβωδών ροών: $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.00$, $\sigma_\varepsilon = 1.30$, $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_{2\varepsilon} = 1.92$

Η παραγωγή και η καταστροφή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας είναι πάντα στενά συνδεδεμένες. Ο ρυθμός σκέδασης ε είναι μεγάλος εκεί όπου η παραγωγή του k είναι μεγάλη. Η εξίσωση μοντελοποίησης του ε υποθέτει ότι οι όροι της παραγωγής και της καταστροφής είναι ανάλογοι προς τους x όρους παραγωγής και καταστροφής της εξίσωσης k . Η υπόθεση αυτή διασφαλίζει ότι το ε αυξάνει ταχύτατα αν και το k αυξάνει ταχύτατα και ότι ελαττώνεται αρκετά γρήγορα, ώστε να αποφεύγονται οι αρνητικές τιμές της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, αν το k μειώνεται. Ο παράγοντας ε/k στους όρους παραγωγής και καταστροφής καθιστά τους όρους αυτούς διαστατικά ορθούς, στην εξίσωση ε . Τέλος οι σταθερές $C_{1\varepsilon}$ και $C_{2\varepsilon}$ εξηγούν τη σωστή αναλογία μεταξύ των όρων στις εξισώσεις k και ε .

Για τον υπολογισμό των τάσεων Reynolds χρησιμοποιούμε τη σχέση του Boussinesq:

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

Οι εξισώσεις μοντελοποίησης για τα k και τα ε είναι ελλειπτικές λόγω του όρου της βαθμιδωτής διάχυσης. Έτσι χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε ορισμένες οριακές συνθήκες:

- Είσοδος: πρέπει να δίνονται οι κατανομές των k και ε
- Έξοδος, άξονας συμμετρίας: $\partial k / \partial n = 0$ και $\partial \varepsilon / \partial n = 0$
- Ελεύθερη ροή: πρέπει να δίνονται τα k και ε ή $\partial k / \partial n = 0$ και $\partial \varepsilon / \partial n = 0$
- Στερεά τοιχώματα: η προσέγγιση εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds

Μπορούν να γίνουν γενικές προσεγγίσεις για τις κατανομές εισόδου των k και ε σε εσωτερικές ροές, από την ένταση της τύρβης και από ένα χαρακτηριστικό μήκος της διάταξης που μελετάται (π.χ. ισοδύναμη διάμετρος), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$k = \frac{2}{3} (U_{ref} T_i)^2, \quad \varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l}, \quad l = 0.07L$$

όπου U_{ref} = κλίμακα μέσης ταχύτητας, T_i = ένταση της τύρβης, L = χαρακτηριστικό μήκος. Οι παραπάνω τύποι συνδέονται στενά με τον τύπο μήκους ανάμιξης και τις γενικές κατανομές κοντά σε στερεό τοίχωμα. Οι οριακές συνθήκες που επιλέγονται για ελεύθερη ροή χωρίς τύρβη είναι συνήθως μικρές και πεπερασμένες τιμές, καθώς αν επιλεχθούν $k = 0$ και $\varepsilon = 0$ θα είχαμε απροσδιόριστες τιμές της τυρβώδους συνεκτικότητας.

Σε υψηλούς αριθμούς Reynolds και στην περίπτωση του μοντέλου $k - \varepsilon$ οι συναρτήσεις τοιχώματος, οι οποίες συνδέουν την τοπική διατμητική τάση του τοιχώματος (μέσω της διατμητικής ταχύτητας, u_τ) με τη μέση ταχύτητα (U), την τυρβώδη κινητική ενέργεια και το ρυθμό σκέδασης είναι οι:

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey_p^+), \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}$$

Για λεία τοιχώματα, η σταθερά του von Karman είναι $\kappa = 0.41$ και η παράμετρος τραχύτητας του τοιχώματος είναι $E = 9.8$.

Σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds (δηλαδή σε περιοχές ροών πολύ κοντά σε τοίχωμα, όπου ο αριθμός Reynolds βασίζεται στην τοπική ταχύτητα και στην τοπική απόσταση του σημείου επίλυσης από το τοίχωμα), ο λογαριθμικός νόμος δεν ισχύει, οπότε οι προαναφερόμενες οριακές συνθήκες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Για να διασφαλιστεί ότι οι τάσεις λόγω του ιξώδους επικρατούν των τυρβωδών τάσεων Reynolds, θα πρέπει να εφαρμοστεί απόσβεση της τύρβης κοντά στο τοίχωμα. Οι εξισώσεις για τα k και ε του μοντέλου $k - \varepsilon$, καθώς και η τυρβώδης συνεκτικότητα τροποποιούνται για χαμηλούς αριθμούς Reynolds ως εξής:

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad } k \right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon U) = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \text{grad } \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} f_1 \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon} f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Η προφανέστερη τροποποίηση είναι η συμπερίληψη του μοριακού ιξώδους, μ , στους όρους διάχυσης των εξισώσεων. Οι σταθερές $C_\mu, C_{1\varepsilon}$ και $C_{2\varepsilon}$ πολλαπλασιάζονται με τις συναρτήσεις «απόσβεσης τοιχώματος» f_μ, f_1 και f_2 , αντίστοιχα, οι οποίες είναι και οι ίδιες, συναρτήσεις του αριθμού Reynolds της τύρβης.

$$f_\mu = [1 - \exp(-0.0165 Re_y)]^2 \left(1 + \frac{20.5}{Re_t} \right)$$

$$f_1 = \left(1 + \frac{0.05}{f_\mu} \right)^3, \quad f_2 = 1 - \exp(-Re_t^2)$$

$$Re_t = \frac{q l}{\nu} = k^2(\varepsilon \cdot \nu), \quad Re_y = \sqrt{k} \frac{y}{\nu}$$

Οι εξισώσεις RANS και οι εξισώσεις για τα k και ε πρέπει να ολοκληρωθούν έως το τοίχωμα, αλλά η οριακή συνθήκη για το ε δημιουργεί προβλήματα. Οι καλύτερες διαθέσιμες μετρήσεις υποδεικνύουν ότι ο ρυθμός σκέδασης της τυρβώδους ενέργειας αυξάνεται καθώς το τοίχωμα προσεγγίζεται και τείνει προς μια (άγνωστη) σταθερή τιμή.

Μοντέλο $k - \varepsilon$ δύο στιβάδων (two-layer $k - \varepsilon$ model): Το μοντέλο δύο στιβάδων αντιπροσωπεύει μια βελτιωμένη μελέτη της κοντινής σε τοίχωμα περιοχής, για τυρβώδεις ροές σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds. Σκοπός είναι η ολοκλήρωση έως το τοίχωμα με την τοποθέτηση του κοντινού στο τοίχωμα σημείου του πλέγματος στο στρωτό υπόστρωμα ($y^+ < 1$). Τα προβλήματα αριθμητικής σταθερότητας που συνδέονται με τις μη γραμμικές συναρτήσεις απόσβεσης τοιχώματος, που είναι απαραίτητες για την ολοκλήρωση των εξισώσεων k και ε έως το τοίχωμα, στο μοντέλο $k - \varepsilon$ σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds, αποφεύγονται με την υποδιαίρεση του οριακού στρώματος σε δύο περιοχές

- 1) Πλήρως τυρβώδης περιοχή, $Re_y = y\sqrt{k}/\nu \geq 200$: χρησιμοποιείται το κλασικό μοντέλο $k - \varepsilon$ με τις γνωστές εξισώσεις για τα k και ε , ενώ η τυρβώδης συνεκτικότητα υπολογίζεται από τη συνηθισμένη σχέση: $\mu_{t,t} = C_\mu \rho k^2/\varepsilon$
- 2) Περιοχή επίδρασης ιξώδους, $Re_y < 200$: σε αυτήν τη περιοχή, επιλύεται μόνο η εξίσωση k και η κλίμακα μήκους μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας τη σχέση: $l = \kappa y [1 - \exp(-Re_y/A)]$, όπου για τον υπολογισμό του ρυθμού σκέδασης χρησιμοποιείται η σχέση:

$\varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l}$ και $A = 2\kappa C_\mu^{-3/4}$ στον παραπάνω τύπο για το l , ενώ αντίστοιχα για τον υπολογισμό της τυρβώδους συνεκτικότητας σε αυτή τη περιοχή χρησιμοποιείται ο τύπος: $\mu_{t,v} = C_\mu^{1/4} \rho \sqrt{k} l$ και $A = 70$ στον παραπάνω τύπο για το l .

Για να αποφευχθούν αστάθειες που συνδέονται με διαφορές μεταξύ των $\mu_{t,t}$ και $\mu_{t,v}$ εκεί όπου ενώνονται οι πλήρως τυρβώδεις περιοχές με τις περιοχές επίδρασης του ιξώδους, χρησιμοποιείται ένας συνδυαστικός τύπος για τον υπολογισμό της τυρβώδους συνεκτικότητας σε:

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i' u_j'} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

$$\mu_\tau = F_\mu \mu_{t,t} + (1 - F_\mu) \mu_{t,v}$$

Η συνδυαστική συνάρτηση $F_\mu = F_\mu(Re_y)$ είναι μηδέν στο τοίχωμα και τείνει στο 1 στην πλήρως τυρβώδη περιοχή όταν $Re_y \gg 200$. Η συναρτησιακή μορφή του F_μ σχεδιάζεται, έτσι ώστε να εξασφαλίζει μια ομαλή μετάβαση στο $Re_y = 200$. Το μοντέλο $k - \varepsilon$ δύο στιβάδων είναι λιγότερο εξαρτώμενο από το πλέγμα και σταθερότερο αριθμητικά από το κλασικό μοντέλο $k - \varepsilon$ σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds.

Μοντέλο RNG $k - \varepsilon$: Η προσέγγιση από την πλευρά της στατιστικής μηχανικής έχει οδηγήσει σε μαθηματικούς φορμαλισμούς, όπως η τεχνική ανα-κανονικοποίησης (ReNormalization-Group, RNG, technique). Οι επιδράσεις της τύρβης μικρής κλίμακας αναπαρίστανται μέσω μιας τυχαίας συνάρτησης εξαναγκασμού στην εξίσωση Navier – Stokes. Η διαδικασία RNG απομακρύνει συστηματικά τις μικρές κλίμακες κίνησης από τις διέπουσες εξισώσεις εκφράζοντας τις επιδράσεις τους από την άποψη κινήσεων μεγαλύτερης κλίμακας και ενός τροποποιημένου ιξώδους. Οι εξισώσεις για τα k και ε , του μοντέλου RNG $k - \varepsilon$ που περιγράφουν ροές με μεγάλους αριθμούς Reynolds είναι:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) = \text{div}[\alpha_k \mu_{eff} \text{grad } k] + \tau_{ij} S_{ij} - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon U) = \text{div}[\alpha_\varepsilon \mu_{eff} \text{grad } \varepsilon] + C_{1\varepsilon}^* \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} S_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

όπου

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i' u_j'} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t, \quad \mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$C_\mu = 0.0845, \quad \alpha_k = \alpha_\varepsilon = 1.39, \quad C_{1\varepsilon} = 1.42, \quad C_{2\varepsilon} = 1.68$$

$$C_{1\varepsilon}^* = C_{1\varepsilon} - \frac{\eta(1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta\eta^3}, \quad \eta = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2S_{ij} \cdot S_{ij}}, \quad \eta_0 = 4.377, \quad \beta = 0.012$$

Η σταθερά β είναι ρυθμίσιμη και υπολογίζεται από τα δεδομένα της τύρβης κοντά στο τοίχωμα. Όλες οι άλλες σταθερές υπολογίζονται άμεσα ως μέρος της διαδικασίας RNG. Στο κλασσικό μοντέλο $k - \varepsilon$ η κύρια πηγή περιορισμών της ακρίβειας, σε ροές που υφίστανται μεγάλους ρυθμούς παραμόρφωσης, είναι η εξίσωση ε . Το μοντέλο RNG $k - \varepsilon$ περιέχει, στη σταθερά $C_{1\varepsilon}$, έναν όρο διόρθωσης (η) εξαρτώμενο από την τάση. Κατά συνέπεια, η επίδραση στο ρυθμό σκέδασης ε είναι η ίδια ανεξάρτητα από το πρόσημο της τάσης. Έτσι, η απόδοση του μοντέλου RNG $k - \varepsilon$ είναι καλύτερη από το κλασσικό μοντέλο $k - \varepsilon$ για διευρυμένο αγωγό, αλλά χειρότερη για αγωγό μειούμενης διατομής με την ίδια αναλογία εμβαδού.

Μοντέλο $k - \omega$: Σε αυτό το μοντέλο ως δεύτερη μεταβλητή χρησιμοποιείται η συχνότητα της τύρβης, $\omega = \varepsilon/k$ (με διαστάσεις s^{-1}). Ο συσχετισμός μεταξύ της χαρακτηριστικής κλίμακας μήκους και της συχνότητας της τύρβης είναι:

$$\varphi = k/l^2 = \omega \rightarrow l = \frac{\sqrt{k}}{\omega}$$

Η τυρβώδης συνεκτικότητα δίνεται από τη σχέση: $\mu_t = \rho k/\omega$. Οι τάσεις Reynolds υπολογίζονται, όπως και στο κλασσικό μοντέλο $k - \varepsilon$, από τη σχέση του Boussinesq:

$$\tau_{ij} = -\rho u'_i u'_j = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

Οι εξισώσεις μεταφοράς που χρησιμοποιεί το μοντέλο $k - \omega$ για τυρβώδεις ροές σε μεγάλους αριθμούς Reynolds για τα k και ω :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad } k \right] + P_k - \beta^* \rho k \omega$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \text{div}(\rho \omega U) = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \text{grad } \omega \right] + \gamma_1 \left(2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}\rho \omega \frac{\partial_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) - \beta_1 \rho \omega^2$$

όπου η φυσική τους έννοια είναι:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{μεταβολής} \\ \text{του } k \text{ ή του } \omega \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Μεταφορά} \\ \text{του } k \text{ ή του } \omega \\ \text{με συναγωγή} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Μεταφορά} \\ \text{του } k \text{ ή του } \omega \text{ με} \\ \text{τυρβώδη διάχυση} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{παραγωγής} \\ \text{του } k \text{ ή του } \omega \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{σκέδασης} \\ \text{του } k \text{ ή του } \omega \end{array} \right]$$

με το ρυθμό παραγωγής κινητικής ενέργειας της τύρβης να είναι:

$$P_k = \left(2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right)$$

Οι σταθερές του μοντέλου που περιέχονται στις παραπάνω εξισώσεις είναι οι εξής:

$$\sigma_k = 2.0, \quad \sigma_\omega = 2.0, \quad \gamma_1 = 0.553, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \beta^* = 0.09$$

Το μοντέλο $k - \omega$ έχει το πλεονέκτημα ότι η ολοκλήρωση έως το τοίχωμα δεν απαιτεί συναρτήσεις απόσβεσης τοιχώματος σε εφαρμογές χαμηλού αριθμού Reynolds. Η τιμή της κινητικής ενέργειας της τύρβης k στο τοίχωμα ορίζεται ίση με μηδέν. Στο τοίχωμα, η συχνότητα ω τείνει στο άπειρο, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε μια υπερβολική παραβολή $\omega_p = \frac{6\nu}{(\beta_1 y_p^2)}$ στο πρώτο κοντινό στο τοίχωμα σημείο του πλέγματος.

Στα όρια εισόδου, οι τιμές των k και ω πρέπει να καθορίζονται, ενώ στα όρια εξόδου χρησιμοποιούνται οι συνήθεις συνθήκες μηδενικής κλίσης. Οι οριακές συνθήκες του ω στην ελεύθερη ροή, όπου η κινητική ενέργεια της τύρβης $k > 0$ και η συχνότητα της τύρβης $\omega > 0$, είναι η πιο προβληματική. Η τυρβώδης συνεκτικότητα είναι απροσδιόριστη ή τείνει στο άπειρο καθώς $\omega > 0$ και έτσι πρέπει να οριστεί μια μικρή μη μηδενική τιμή για το ω . Δυστυχώς τα αποτελέσματα του μοντέλου τείνουν να εξαρτώνται από την υποτιθέμενη τιμή ελεύθερης ροής του ω .

Μοντέλο SST $k - \omega$: Είναι ένα υβριδικό μοντέλο το οποίο χρησιμοποιεί έναν μετασχηματισμό του μοντέλου $k - \varepsilon$ σε μοντέλο $k - \omega$ στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα και το μοντέλο $k - \varepsilon$ στην πλήρως τυρβώδη περιοχή μακριά από το τοίχωμα. Ο υπολογισμός της τάσης Reynolds καθώς και η εξίσωση k είναι τα ίδια με το μοντέλο $k - \omega$ αλλά η εξίσωση ε μετασχηματίζεται σε εξίσωση ω αντικαθιστώντας $\varepsilon = k\omega$. Έτσι :

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \text{div}(\rho\omega U) = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega,1}} \right) \text{grad } \omega \right] + \gamma_2 \left(2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}\rho\omega \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) - \beta_2 \rho \omega^2 + 2 \frac{\rho}{\sigma_{\omega,2}} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$$

Σε σχέση με την αντίστοιχη εξίσωση για το ω στο μοντέλο $k - \omega$ η παραπάνω εξίσωση διαθέτει τον όρο διασταυρούμενης διάχυσης (ο τελευταίος όρος στο δεξιό σκέλος), ο οποίος προκύπτει κατά τη διάρκεια του μετασχηματισμού $\varepsilon = k\omega$ του όρου διάχυσης στην εξίσωση ε . Οι σταθερές του μοντέλου που περιέχονται στις παραπάνω εξισώσεις είναι οι εξής:

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_{\omega,1} = 2.0, \quad \sigma_{\omega,2} = 1.17, \quad \gamma_2 = 0.44, \quad \beta_2 = 0.083, \quad \beta^* = 0.09$$

Από τις διαφορές στις υπολογιζόμενες τιμές της τυρβώδους συνεκτικότητας με το μοντέλο $k - \varepsilon$ στη πλήρως τυρβώδη περιοχή και με το μετασχηματισμένο μοντέλο $k - \varepsilon$ στη περιοχή κοντά στο τοίχωμα μπορούν να προκύψουν αριθμητικές αστάθειες. Υπάρχουν όμως κάποιες συναρτήσεις οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη ομαλής μετάβασης μεταξύ των δύο μοντέλων. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται συναρτήσεις ανάμιξης και εισάγονται στην εξίσωση για την τροποποίηση του όρου της διασταυρούμενης διάχυσης και επίσης

χρησιμοποιούνται ως σταθερές του μοντέλου που λαμβάνουν την τιμή C_1 για το μοντέλο $k - \omega$ και C_2 για το μετασχηματισμένο μοντέλο $k - \varepsilon$:

$$C = F_C C_1 + (1 - F_C) C_2$$

Τυπικά μια συνάρτηση ανάμιξης $F_C = F_C(l_t/y, Re_y)$ είναι μια συνάρτηση του λόγου της τύρβης $l_t = \sqrt{k}/\omega$ και της απόστασης y από το τοίχωμα και ενός αριθμού Reynolds της τύρβης $Re_y = y^2\omega/\nu$. Με τον τρόπο αυτό, η μέθοδος συνδυάζει την καλή συμπεριφορά κοντά στο τοίχωμα που εμφανίζει το μοντέλο $k - \omega$ και την ευρωστία του μοντέλου $k - \varepsilon$ στην πλήρως τυρβώδη περιοχή, μακριά από το τοίχωμα.

Το μοντέλο SST $k - \omega$ έχει κάποιους περιοριστές χάρις τους οποίους η βελτιωμένη απόδοση της τυρβώδους συνεκτικότητας περιορίζεται σε ροές με δυσμενείς κλίσεις πίεσης, ενώ η αποτροπή της συσσώρευσης τύρβης από την παραγωγή κινητικής ενέργειας τύρβης περιορίζεται σε περιοχές ανακοπής. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω των παρακάτω εξισώσεων:

$$\mu_t = \frac{\alpha_1 \rho k}{\max(\alpha_1 \omega, SF_2)}$$

Όπου $S = \sqrt{2S_{ij} \cdot S_{ij}}$, $\alpha_1 = \text{σταθερά}$, F_2 μια συνάρτηση ανάμιξης και

$$P_k = \min \left(10\beta^* \rho k \omega, 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right)$$

4.2.4 Μοντέλο Τάσεων Reynolds (Reynolds Stress Model, RSM)

Είναι το πολυπλοκότερο, κλασσικό μοντέλο τύρβης το οποίο, σε αντίθεση με τα μοντέλα δύο εξισώσεων, δε στηρίζεται στην ισοτροπική θεώρηση της τυρβώδους συνεκτικότητας, η οποία είναι και το βασικό τους μειονέκτημα. Η ακριβής εξίσωση μεταφοράς τάσης Reynolds (όπου τάση Reynolds $R_{ij} = -\tau_{ij}/\rho = \overline{u'_i u'_j}$) μπορεί να λάβει υπόψη τις κατευθυντικές επιπτώσεις του πεδίου τάσεων Reynolds. Η ακριβής εξίσωση για τη μεταφορά του R_{ij} παίρνει τη μορφή:

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + C_{ij} = P_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Pi_{ij} + \Omega_{ij}$$

Όπου η φυσική τους έννοια είναι:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{μεταβολής} \\ \text{του } R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Μεταφορά} \\ \text{του } R_{ij} \\ \text{με συναγωγή} \end{array} \right] \\ & = \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{παραγωγής} \\ \text{του } R_{ij} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Μεταφορά} \\ \text{του } R_{ij} \text{ με} \\ \text{διάχυση} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{σκέδασης} \\ \text{του } R_{ij} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Μεταφορά του } R_{ij} \\ \text{λόγω τυρβώδους πίεσης} \\ \text{αλληλεπιδράσεις} \\ \text{παραμόρφωσης} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Μεταφορά} \\ \text{του } R_{ij} \text{ λόγω} \\ \text{περιστροφής} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει έξι μερικές διαφορικές εξισώσεις, μία για τη μεταφορά κάθε μιας από τις έξι ανεξάρτητες τάσεις Reynolds. Στους υπολογισμούς CFD με τις εξισώσεις μεταφοράς τάσεων Reynolds, οι όροι της συναγωγής, της παραγωγής και της περιστροφής μπορούν να διατηρηθούν στην ακριβή τους μορφή.

Ο όρος της συναγωγής είναι:

$$C_{ij} = \frac{\partial(\rho U_k \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} = \text{div}(\rho \overline{u'_i u'_j} U)$$

Ο όρος της παραγωγής είναι:

$$P_{ij} = - \left(R_{im} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + R_{jm} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right)$$

Ο όρος της περιστροφής είναι:

$$\Omega_{ij} = -2\omega_k (\overline{u'_j u'_m} e_{ikm} + \overline{u'_i u'_m} e_{jkm})$$

Όπου $\omega_k = e_{ijk}$ και είναι το διάνυσμα περιστροφής. Αν τα i, j, k είναι διαφορετικά και σε κυκλική σειρά έχουμε $e_{ijk} = 1$, ενώ αν τα i, j, k είναι διαφορετικά αλλά σε αντι-κυκλική σειρά έχουμε $e_{ijk} = -1$ και αν οποιοδήποτε δύο δείκτες είναι ίδιοι έχουμε $e_{ijk} = 0$. Για να μπορέσουμε να λύσουμε την ακριβή εξίσωση για τη μεταφορά της τάσης Reynolds, πρέπει να μοντελοποιήσουμε τη διάχυση, τον ρυθμό σκέδασης και τους όρους συσχέτισης πίεσης-παραμόρφωσης.

Ο όρος της διάχυσης D_{ij} μπορεί να μοντελοποιηθεί με την παραδοχή ότι ο ρυθμός μεταφοράς των τάσεων Reynolds με διάχυση είναι ανάλογος προς τις κλίσεις των τάσεων Reynolds:

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right) = \text{div} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \text{grad } R_{ij} \right)$$

όπου $v_t = C_\mu (k^2 / \varepsilon)$, $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.0$

Ο ρυθμός σκέδασης ε_{ij} μοντελοποιείται αν δεχτούμε ισοτροπία των μικρών σκεδαζόμενων δινών. Ρυθμίζεται, ώστε αν επιδρά μόνο στις ορθές τάσεις Reynolds και κάθε συνιστώσα της τάσης κατά το ίδιο μέτρο. Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$$

Όπου $\varepsilon = 2\nu \overline{s'_{ij} s'_{ij}}$, με s'_{ij} είναι η κυμαινόμενη παραμόρφωση και δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker και δίνεται από τη σχέση $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$ αν $i \neq j$.

Οι αλληλεπιδράσεις πίεσης-παραμόρφωσης αποτελούν έναν από τους σημαντικότερους όρους, αλλά είναι και ο δυσκολότερος για να μοντελοποιηθεί με ακρίβεια. Η επίδρασή τους στις τάσεις Reynolds προκαλείται από δύο φυσικές διαδικασίες, πρώτον μια «αργή» διαδικασία που μειώνει την ανισοτροπία των τυρβωδών δινών λόγω αμοιβαίων αλληλεπιδράσεων και δεύτερον μια «ταχεία» διαδικασία, λόγω αλληλεπιδράσεων μεταξύ των τυρβωδών διακυμάνσεων και της τάσης της μέσης ροής που παράγουν τις δίνες έτσι ώστε η ανισότροπη παραγωγή τυρβωδών δινών να είναι αντιτιθέμενη. Το συνολικό αποτέλεσμα και των δύο διαδικασιών είναι η ανακατανομή ενέργειας μεταξύ των ορθών τάσεων Reynolds ($i = j$), ώστε να καταστούν περισσότερο ισότροπες και να μειωθούν οι διατμητικές τάσεις Reynolds ($i \neq j$). Η απλούστερη αναπαράσταση του όρου πίεσης-παραμόρφωσης στην εξίσωση μεταφοράς τάσης Reynolds είναι:

$$\Pi_{ij} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right)$$

όπου $C_1 = 1.8$, $C_2 = 0.6$

Η κινητική ενέργεια της τύρβης είναι απαραίτητη στους παραπάνω τύπους και μπορεί να υπολογιστεί με απλή άθροιση των τριών ορθών τάσεων:

$$k = \frac{1}{2} (R_{11} + R_{22} + R_{33}) = \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2})$$

Οι έξι εξισώσεις για τη μεταφορά των τάσεων Reynolds λύνονται μαζί με μια εξίσωση για τον υπολογισμό του ρυθμού βαθμωτής σκέδασης ε :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \text{div} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2v_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

όπου $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_{2\varepsilon} = 1.92$

Για την επίλυση των εξισώσεων μεταφοράς τάσεων Reynolds είναι απαραίτητες οι συνηθισμένες οριακές συνθήκες για ελλειπτικές ροές:

- Είσοδος: καθορισμένες κατανομές των R_{ij} και ε
- Έξοδος και συμμετρία: $\partial R_{ij} / \partial R_n = 0$ και $\partial \varepsilon / \partial n = 0$
- Ελεύθερη ροή: $R_{ij} = 0$ και $\varepsilon = 0$ δίνονται ή $\partial R_{ij} / \partial R_n = 0$ και $\partial \varepsilon / \partial n = 0$
- Τοίχωμα: χρησιμοποιούνται συναρτήσεις τοιχώματος που συσχετίζουν το R_{ij} με το k ή το u_τ^2 , π.χ. $\overline{u_1'^2} = 1.1k$, $\overline{u_2'^2} = 0.25k$, $\overline{u_3'^2} = 0.66k$, $-\overline{u_1' u_2'} = 0.26k$

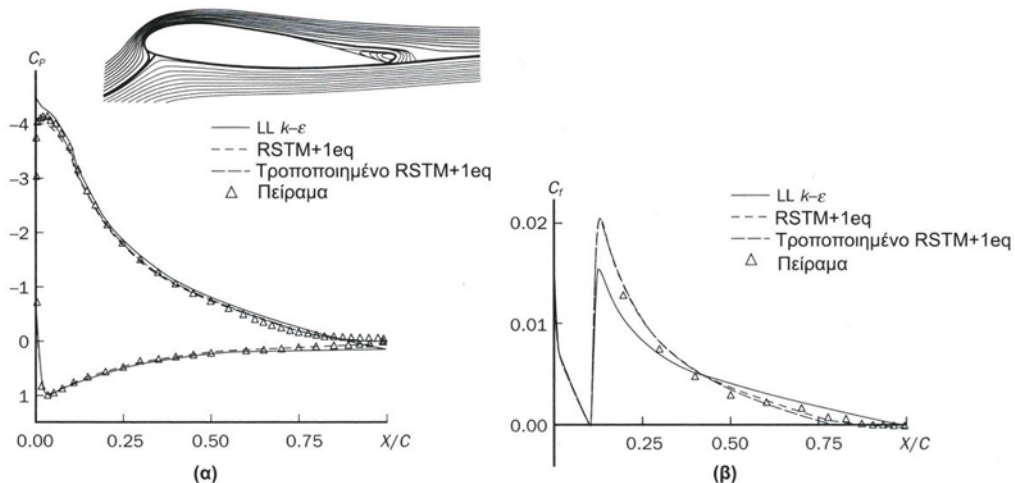
Αν υπάρχει απουσία πληροφοριών, οι κατά προσέγγιση κατανομές εισόδου για το R_{ij} μπορούν να υπολογιστούν από την ένταση της τύρβης T_i και το χαρακτηριστικό μήκος L της διάταξης που μελετάται, μέσω των παρακάτω σχέσεων:

$$k = \frac{2}{3}(U_{ref}T_i)^2, \quad \varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l}, \quad l = 0.07L$$

$$\overline{u_1'^2} = k, \quad \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} = \frac{1}{2}k$$

$$u_i' u_j' = 0 \quad (i \neq j)$$

Για υπολογισμούς σε υψηλούς αριθμούς Reynolds μπορούν να χρησιμοποιηθούν οριακές συνθήκες τύπου συναρτήσεων τοιχώματος, οι οποίες έχουν πολλές ομοιότητες με αυτές του μοντέλου $k - \varepsilon$ και συσχετίζουν τη διατμητική τάση του τοιχώματος με τις ποσότητες της μέσης ροής. Οι τροποποιήσεις χαμηλού αριθμού Reynolds στα μοντέλα μπορούν να ενσωματωθούν, ώστε να προστεθούν οι επιπτώσεις του μοριακού ιξώδους στους όρους διάχυσης και να ληφθεί υπόψη η ανισοτροπία στο όρο του ρυθμού διάχυσης στις εξισώσεις μεταφοράς τάση Reynolds.



Σχήμα 4.7 Σύγκριση των προβλέψεων του RSM και του μοντέλου $k-\varepsilon$ με μετρήσεις σε αεροτομή όπου δίνονται (α) ο συντελεστής πίεσης και (β) ο συντελεστής επιφανειακής τριβής

4.2.5 Αλγεβρικό Μοντέλο Τάσεων (Algebraic Stress Model, ASM)

Το αλγεβρικό μοντέλο τάσεων είναι ένας οικονομικός τρόπος πρόβλεψης της ανισοτροπίας των τάσεων Reynolds χωρίς να υπάρχει ανάγκη επίλυσης όλων των εξισώσεων μεταφοράς τους. Το μεγάλο υπολογιστικό κόστος επίλυσης του RSM οφείλεται στο ότι οι παραγωγίσεις των τάσεων Reynolds εμφανίζονται στους όρους συναγωγής και στους όρους διάχυσης της εξίσωσης μεταφοράς των τάσεων Reynolds. Αν υποθέσουμε ότι το άθροισμα των όρων συναγωγής και διάχυσης των τάσεων Reynolds είναι ανάλογο προς το άθροισμα των όρων συναγωγής και διάχυσης της κινητικής ενέργειας της τύρβης έχουμε τον παρακάτω τύπο:

$$\frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} - D_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} (-\overline{u'_i u'_j} \cdot S_{ij} - \varepsilon)$$

Οι όροι στις παρενθέσεις του δεξιού σκέλους αποτελούν το άθροισμα του ρυθμού παραγωγής και του ρυθμού σκέδασης της κινητικής ενέργειας της τύρβης από την ακριβή εξίσωση k . Η εισαγωγή της παραπάνω προσέγγισης στην εξίσωση μεταφοράς τάσεων Reynolds δίνει το αλγεβρικό μοντέλο τάσεων:

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} + \alpha_{ASM} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \frac{k}{\varepsilon}$$

όπου $\alpha_{ASM} = \alpha_{ASM} (P/\varepsilon)$ και $P = \text{ρυθμός παραγωγής κινητικής ενέργειας}$

Ο παράγοντας α_{ASM} πρέπει να ενσωματώνει όλη τη φυσική που χάνεται στην αλγεβρική προσέγγιση και είναι συνάρτηση του λόγου των ρυθμών παραγωγής και σκέδασης της κινητικής ενέργειας της τύρβης, ο οποίος, σε βραδέως μεταβαλλόμενες ροές είναι κοντά στη μονάδα, ενώ για περιστροφικές ροές η τιμή του $\alpha_{ASM} = 0.25$.

Οι τάσεις Reynolds εμφανίζονται και στα δύο σκέλη της παραπάνω εξίσωσης και έτσι η παραπάνω εξίσωση αποτελεί ένα σύνολο έξι ταυτόχρονων αλγεβρικών εξισώσεων για τις έξι άγνωστες τάσεις Reynolds R_{ij} που μπορούν να επιλυθούν με αναστροφή πινάκων ή με επαναληπτικές τεχνικές αν τα k και ε είναι άγνωστα. Συνεπώς, οι τύποι λύνονται σε συνδυασμό με τις εξισώσεις του κλασσικού μοντέλου $k - \varepsilon$.

4.2.6 Σύγχρονα Μοντέλα Τύρβης

Έχουν προταθεί πολλές σύγχρονες μέθοδοι οι οποίες συνδυάζουν τα πλεονεκτήματα των DNS και LES προσομοιώσεων σε συνδυασμό με τα μοντέλα RANS. Τα υβριδικά μοντέλα LES-RANS όπως η Προσομοίωση Αποκολλημένων Δινών (Detached Eddy Simulation, DES), αλλά και τα μοντέλα που στηρίζονται σε παραλλαγές των μοντέλων υποπλεγματικής κλίμακας της LES, όπως η ILES, είναι κάποιες από αυτές.

Προσομοίωση Πολύ Μεγάλων Δινών (Very Large Eddy Simulation, VLES): Η VLES ήταν η πρώτη προσπάθεια να εφαρμοστεί η LES σε πρακτικά μηχανολογικά προβλήματα, αλλά εξαιτίας της χαμηλής υπολογιστικής ισχύς, το πλέγμα έπρεπε να είναι πολύ αραιό για να πάρουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα ως LES, έτσι η τεχνική ονομάστηκε VLES. Δυστυχώς αυτή η προσέγγιση δεν είχε τα επιθυμητά αποτελέσματα καθώς η καταστροφή της ενέργειας που υπολογιζόταν ήταν μεγαλύτερη του κανονικού. Παρόλο της αποτυχίας της, η ιδέα να υπολογίζουμε την αστάθεια των μεγάλων

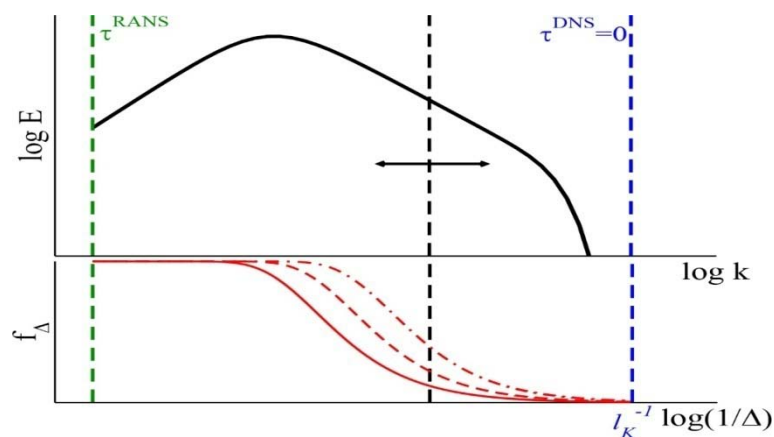
κλιμάκων μήκους της ροής με το ελάχιστο υπολογιστικό κόστος, έγινε ο στόχος των περισσότερων υβριδικών μεθόδων LES-RANS που προτάθηκαν αργότερα.

Μεθοδολογία Προσομοίωσης της Ροής (Flow Simulation Methodology, FSM): Ένα καλό ενοποιημένο μοντέλο θα πρέπει να εκπληρώνει τουλάχιστον τρεις ιδιότητες. Πρώτον, όταν η μέθοδος πλησιάζει το αραιό όριο του πλέγματος μετατρέπεται σε μοντέλο RANS, δεύτερον, στα υπόλοιπα σημεία επιλύεται ως DNS και τρίτον, να μην εφαρμόζονται επιπλέον φιλτραρίσματα ή χρησιμοποίηση μέσων τιμών.

Η κεντρική ιδέα της FSM είναι να καθορίζει τον τανυστή υπολειπόμενων τάσεων ως:

$$\tau_{ij}^{FSM} = f_{\Delta} \left(\frac{\Delta}{l_K} \right) \tau_{ij}^{RANS}, \text{ με } 0 \leq f_{\Delta} \leq 1$$

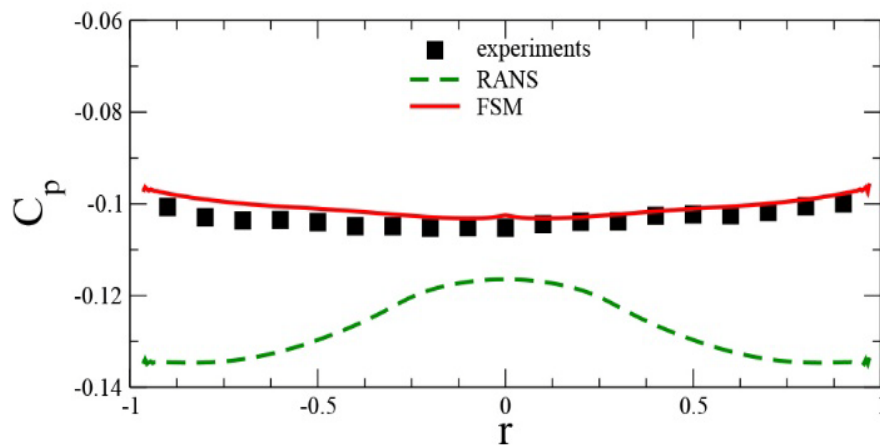
Έτσι το υβριδικό μοντέλο χωρίζεται σε δύο παράγοντες, πρώτον το μοντέλο RANS και δεύτερον, τον όρο συνεισφοράς $f_{\Delta}(\Delta/l_K)$. Το μοντέλο RANS είναι υπεύθυνο για τη μοντελοποίηση της τύρβης και εξαρτάται μόνο από φυσικές ποσότητες. Τα περισσότερα μοντέλα RANS μπορούν να χρησιμοποιηθούν, αλλά τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα είναι τα ASM καθώς επίσης και τα μοντέλα $k - \varepsilon$ και $k - \omega$. Ο ρόλος του f_{Δ} μετριάζει τη συνεισφορά του μοντέλου RANS, δεδομένου ότι ένα μέρος της τύρβης έχει επιλυθεί σε μια ενδιάμεση περιοχή όπου η λύση γίνεται ασταθής. Το θέμα δεν είναι τόσο η επίλυση για την κινητική ενέργεια όσο για την καταστροφή της, γιατί εφόσον δεν επιλυθεί, θα πρέπει να παραχθεί από το ίδιο το μοντέλο. Αν το πλέγμα είναι τόσο πυκνό ώστε όλη η καταστροφή της ενέργειας να μπορεί επιλυθεί, τότε το μοντέλο θα απενεργοποιηθεί αυτόματα. Ως εκ τούτου πρέπει να καθοριστεί η απόσταση από την DNS υπολογίζοντας υπολογιστικά τον παράγοντα Δ/l_K , όπου Δ είναι το μέγεθος του πλέγματος.



Σχήμα 4.8 Απεικόνιση της μεθόδου FSM. Η μαύρη καμπύλη μας δείχνει το ενεργειακό φάσμα, ενώ οι κόκκινες καμπύλες απεικονίζουν τον όρο $f_{\Delta}(\Delta/l_K)$. Η μαύρη διακεκομμένη γραμμή συμβολίζει τη κλίμακα του πλέγματος με αναλογία Δ^{-1} . Τα άκρα της περιοχής χαρακτηρίζονται από τον αριθμό της κλίμακας Kolmogorov με αναλογία l_K^{-1}

Ο περιορισμός $0 \leq f_{\Delta} \leq 1$ εξασφαλίζει ότι η μέθοδος FSM μπορεί να χρησιμοποιήσει ασταθή μοντέλα RANS (Unsteady RANS, URANS) για τα αραιά πλέγματα, σε σχέση με τη κλίμακα Kolmogorov l_K , και DNS στα πυκνά πλέγματα. Όπως απεικονίζεται στο σχήμα 4.8 η FSM λειτουργεί καλά και στα δύο όρια αφού το μοντέλο RANS επινοήθηκε για το σκοπό αυτό και η DNS δεν χρειάζεται περεταίρω μοντελοποιήσεις.

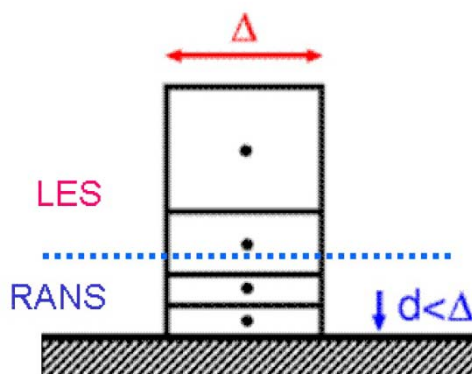
Μεταξύ αυτών των δύο «άκρων», η μέθοδος FSM μπορεί να θεωρηθεί ως μία μη «παραδοσιακή» LES η οποία γεφυρώνει το κενό μεταξύ LES και μοντέλων τύρβης RANS. Το πόσο καλά θα λειτουργήσει εξαρτάται από αρκετούς παράγοντες, μέσα στους οποίους είναι το πλέγμα που θα χρησιμοποιηθεί καθώς και οι αρχικές και οριακές συνθήκες. Ως παράδειγμα για την αποδοτικότητα της μεθόδου θα πάρουμε συμπιεστή ροή γύρω από ένα αξονοσυμμετρικό σώμα με αριθμό $Ma = 2.46$ και αριθμό $Re = 3.3 \times 10^6$, ο οποίος είναι πολύ μεγάλος για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε LES, πόσο μάλλον DNS, και όπου οι προσομοιώσεις με μοντέλα τύρβης RANS δεν είναι ικανές να προβλέψουν σωστά τις μεταβολές. Στο σχήμα 4.9 γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της FSM με μοντέλα τύρβης RANS και με πειραματικές τιμές, για τον συντελεστή πίεσης C_p .



Σχήμα 4.9 Συντελεστής πίεσης

Προσομοίωση Αποκολλημένων Δινών (Detached Eddy Simulation, DES): Η Προσομοίωση Αποκολλημένων Δινών στηρίζεται ως ιδέα στο μοντέλο μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras. Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης μεταφοράς για τη παράμετρο του κινηματικού ιξώδους τύρβης της εξίσωσης, $C_{w1\rho}(\tilde{\nu}/\kappa y)^2 f_w$, αντιπροσωπεύει το ρυθμό σκέδασης του $\tilde{\nu}$ εξαρτώμενος από την απόσταση από το τοίχωμα κy . Αυτός ο όρος μπορεί να αντικατασταθεί από μια κλίμακα μήκους $l_{DES} = C_{DES}\Delta$, η οποία να περιλαμβάνει το χωρικό βηματισμό του πλέγματος Δ καθώς επίσης και τη σταθερά C_{DES} . Ως εκ τούτου, το μοντέλο μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras μετατρέπεται σε ένα μοντέλο μιας εξίσωσης υποπλεγματικής κλίμακας (SGS) για LES. Μία μειωμένη κλίμακα μήκους αυξάνει τον όρο καταβόθρας

και έτσι αποδίδει μειωμένο κινηματικό ιξώδες τύρβης. Έτσι το χωρικό βήμα του πλέγματος είναι $\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$, ενώ για ισοτροπική τύρβη η σταθερά $C_{DES} = 0.65$. Για ροές κοντά στα τοιχώματα η παράμετρος ky αντικαθίσταται με $\overline{ky} = \min(ky, C_{DES}\Delta)$, το οποίο είναι λογικό αφού κοντά στο τοίχωμα η κλίμακα μήκους δεν πρέπει να αυξάνεται ξεφεύγοντας από τα όρια του μοντέλου RANS. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.10 κοντά στον τοίχο, όπου $ky < C_{DES}\Delta$, το μοντέλο που ισχύει είναι το μοντέλο RANS, ενώ μακριά από τον τοίχο, όπου $ky > C_{DES}\Delta$, μετατρέπεται σε μοντέλο SGS.



Σχήμα 4.10 Απεικόνιση της εναλλαγής μεταξύ του μοντέλου RANS και της LES στην κλασική DES

Η Προσομοίωση Αποκολλημένων Δινών πήρε το όνομά της αφού έχει ως στόχο να συνδυάσει χρήση της LES στην εξωτερική ροή, να επιλύσει τις αποκολλημένες δίνες από το οριακό στρώμα με όμοιο τρόπο με τη LES, ενώ χρησιμοποιεί ένα μοντέλο RANS στη ροή κοντά στο τοίχωμα. Έτσι η μέθοδος αυτή χρειάζεται πυκνό πλέγμα στη κύρια κατεύθυνση του τοιχώματος, ενώ στις εφαπτόμενες κατευθύνσεις ένα αρκετά ποιο αραιό. Η εναλλαγή μεταξύ της RANS και της LES γίνεται με αυτόματα χωρίς ο χρήστης να χρειάζεται να το καθορίσει.

Η βασική ιδέα της DES μπορεί να συνδυαστεί γενικά και με άλλα μοντέλα RANS εκτός του μοντέλου μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras, με το πλέον χρησιμοποιούμενο να είναι το μοντέλο δύο εξισώσεων SST $k - \omega$. Ανάλογα με το ποιο μοντέλο θα χρησιμοποιήσουμε η κλίμακα μήκους θα πρέπει να αναπροσαρμόζεται στα νέα δεδομένα.

Καθυστερημένη Προσομοίωση Αποκολλημένων Δινών (Delayed Detached Eddy Simulation, DDLES): Εξαιτίας του συνδυασμού ενός υψηλού ιξώδους τύρβης του μοντέλου RANS και την ενεργοποίηση εξωτερικών διακυμάνσεων, η λύση στη περιοχή RANS παρουσιάζει αδύναμες ταλαντώσεις. Στη περιοχή της LES η λύση πρέπει να γίνει ασταθής. Για να μετατραπεί σε πραγματική LES πρέπει ένα ποσοστό της τάξης του 80% της κινητικής ενέργειας των διακυμάνσεων να επιλυθεί. Η

μετάβαση μεταξύ αυτών των δύο περιοχών είναι κρίσιμη και λαμβάνει χώρα σε μία μεταβατική περιοχή. Οι διακυμάνσεις πρέπει να δημιουργηθούν από κάποιο είδος αστάθειας, αλλά για ένα προσκολλημένο οριακό στρώμα αυτό είναι αδύνατο να συμβεί αν αφήσουμε τη μέθοδο να λειτουργήσει από μόνη της. Στόχος λοιπόν αυτής της μεθόδου είναι, να αποτρέψει τη DES να μετατραπεί αμέσως σε LES και να λύσει όλα τα προσκολλημένα οριακά στρώματα με χρήση του μοντέλου RANS, ανεξαρτήτως της επιλεγμένης ανάλυσης του πλέγματος. Αυτός είναι και ο λόγος που ονομάζεται Καθυστερημένη Προσομοίωση Αποκολλημένων Δινών.

Ασταθή Μοντέλα των Μέσων Κατά Reynolds Εξισώσεων Δεύτερης Γενιάς (Second Generation Unsteady RANS Models, 2G-URANS): Τα μοντέλα RANS είναι μοντέλα τα οποία περιλαμβάνουν φυσικές κλίμακες μήκους. Από την άλλη μεριά η κλίμακα μήκους που χρησιμοποιεί η LES είναι εξαρτημένη απόλυτα από το πλέγμα που θα χρησιμοποιηθεί. Η κλίμακα μήκους είναι αυτή που καθορίζει το μέγεθος των διαταραχών που θα επιλυθούν. Τα 2G-URANS είναι μοντέλα τα οποία στοχεύουν στο να επιλύσουν ένα σημαντικό μέρος των τυρβωδών διαταραχών, αλλά χωρίς να πρέπει να εξαρτώνται απόλυτα από το υπολογιστικό πλέγμα. Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό αυτών των μοντέλων είναι ότι περιέχουν έναν όρο που μπορεί να ανιχνεύσει τη ποσότητα των επιλυμένων διαταραχών και αυτή είναι η σημαντικότερη διαφορά τους από τα κλασικά URANS μοντέλα. Σε αυτή τη κατηγορία ανήκουν δύο μοντέλα, το Μερικώς Φιλτραρισμένο Μοντέλο *Navier – Stokes* (Partially Filtered *Navier – Stokes*, PANS) και η Προσομοίωση Προσαρμοστικής Κλίμακας (Scale-Adaptive Simulation, SAS).

Implicit Large Eddy Simulation, ILES: Η μέθοδος LES, με τη χρήση συγκεκριμένων μοντέλων υποπλεγματικής κλίμακας (SGS models), χρησιμοποιείται με επιτυχία σε διάφορα είδη ροής, αλλά έχει το μειονέκτημα να παράγει περισσότερη σκέδαση κινητικής ενέργειας όταν λύνει το πλήρως τυρβώδες μέρος της ροής. Με την μέθοδο ILES οι κλίμακες μήκους της τύρβης είναι ίδιες όπως και στη κλασική LES, αλλά η υπόθεση ότι η αριθμητική διακριτοποίηση φιλτράρει τις μεγάλες και μικρές κλίμακες μήκους βάση του υπολογιστικού πλέγματος, καθιστά την χρήση συγκεκριμένων SGS μοντέλων άχρηστη στην ILES. Η βασική ιδέα είναι ότι στην ILES το σφάλμα αποκοπής στην αριθμητική διακριτοποίηση έχει την ίδια μορφή με τα SGS μοντέλα στη LES. Ένα SGS μοντέλο μπορεί να συμπεριληφθεί στο αριθμητικό σχήμα χρησιμοποιώντας τους περιοριστές ενός άναντη σχήματος (urwind differencing scheme) ή μπορεί η αριθμητική μέθοδος να περιέχει κάποιο αυτορρυθμιζόμενο μηχανισμό για να υπολογίζει τη σωστή καταστροφή της κινητικής ενέργειας. Έτσι λόγω όλων των παραπάνω, η μέθοδος διακριτοποίησης που προτιμάται στην ILES είναι η μέθοδος πεπερασμένων όγκων που προσφέρει μη ταλαντούμενες και υψηλής ακρίβειας (αναλόγως το επίπεδο που επιλέξαμε) λύσεις. Η τάξη μεγέθους του σφάλματος αποκοπής συσχετίστηκε με το SGS μοντέλο, χάρις

την παρατήρηση ότι ένα άναντη αριθμητικό σχήμα μπορεί να ξαναγραφτεί σαν κεντρικό σχήμα με έναν επιπλέον όρο καταβόθρας.

Monotonically Integrated Large Eddy Simulation, MILES: Η MILES είναι μία τεχνική που βασίστηκε στις αρχές πίσω από σχήματα που μπορούν να περιγράψουν το ωστικό κύμα που δημιουργείται κατά τις συμπιεστές ροές. Η τυρβώδης ροή χαρακτηρίζεται από τις δίνες και συνεπώς από τις απότομες αλλαγές στη κλίση της ταχύτητας, χαρακτηριστικά τα οποία μπορούν να λυθούν με τη χρήση μονοτονικών συστημάτων ανωτέρας τάξης. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, η μέση διακριτοποίηση των δεδομένων ανά κυψέλη μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κρυφό φίλτρο. Γενικά η μέθοδος MILES είναι η καταλληλότερη για μετρίως υψηλούς αριθμούς Reynolds σε ελεύθερες ροές.

Κάποιες ακόμα υβριδικές μέθοδοι είναι οι Coherent Vortex Simulation (CVS), Stochastic Coherent Adaptive Large Eddy Simulation (SCALES), Wavelet based Direct Numerical Simulation (WDNS), RANS-Limited LES και η Limited Numerical Scales (LNS).

Συνοπτικός πίνακας δημοφιλέστερων μοντέλων προσομοίωσης της τύρβης

Μοντέλο Προσομοίωσης	Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Μοντέλα μηδενικών εξισώσεων (zero equation models)	-Πολύ εύχρηστα για περιορισμένο αριθμό ροών	-Η εκτίμηση του μήκους ανάμειξης είναι δύσκολη -Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθούν σας μοντέλα γενικής χρήσης
Μοντέλα μίας εξίσωσης (one equation models)	-Πολύ εύχρηστα για περιορισμένο αριθμό ροών	-Η χρήση αλγεβρικής εξίσωσης για τη κλίμακα μήκους είναι πολύ περιοριστική
Μοντέλα δύο εξισώσεων (two equations models)	-Ολοκληρωμένα μοντέλα τα οποία προβλέπουν τη ταχύτητα και τη κλίμακα μήκους βάση εξισώσεων τοπικής ροής -Καλά αποτελέσματα σε πολλές μηχανολογικές εφαρμογές -Πολύ καλά για ανάλυση των τάσεων. Υπολογιστικά οικονομικά και εύχρηστα	-Περιορισμένα από τη χρήση της υπόθεσης της τυρβώδους συνεκτικότητας -Η ροή υποθέτετε ισοτροπική

Κλασσικό k-ε (standard k-ε)	-Το πιο διαδεδομένο και ευρέως γνωστό μοντέλο	-Μειονεκτεί σε ροές γύρω από πίδακες και ροές σε γεωμετρίες σημαντικής καμπυλότητας, έντονου στροβιλισμού, ξαφνικής επιτάχυνσης, αποκόλλησης και σε περιοχές μικρού αριθμού Reynolds
RNG k-ε	-Τροποποιημένη έκδοση του κλασσικού k-ε που βελτιώνει την απόδοσή του σε ροές έντονου στροβιλισμού και σε αποκόλληση ροής	-Δεν είναι τόσο σταθερό όσο το κλασσικό k-ε και δεν ενδείκνυται για ροές γύρω από πίδακες
Realizable k-ε	-Τροποποιημένη έκδοση του κλασσικού k-ε που βελτιώνει την απόδοσή του μοντέλου σε ροές έντονου στροβιλισμού και αποκόλλησης ροής, αλλά και σε ροές γύρω από πίδακες	-Δεν είναι τόσο σταθερό όσο το κλασσικό k-ε
k-ω	-Ενδείκνυται για ροές με χαμηλό αριθμό Reynolds και για αρνητικές κλίσεις πίεσης, καθώς και για αποκολλημένες ροές -Δε χρειάζεται οριακές συνθήκες για τα τοιχώματα	-Χρειάζεται πολύ καλό πλέγμα γύρω από το τοίχωμα -Το πρώτο πλεγματικό σημείο στο $y^+ < 5$
SST k-ω	-Χρησιμοποιεί k-ε στην ελεύθερη ροή και k-ω στη ροή γύρω από το τοίχωμα -Λειτουργεί καλά σε αρνητικές κλίσεις πίεσης και σε αποκολλημένες ροές -Τείνει να αντικαταστήσει το k-ε ως πρώτη επιλογή	-Χρειάζεται πολύ καλό πλέγμα γύρω από το τοίχωμα -Δίνει μεγαλύτερες τιμές στην τύρβη σε περιοχές με τάσεις μεγαλύτερες του κανονικού, π.χ. σε περιοχές με ισχυρή επιτάχυνση, αλλά είναι καλύτερες σε σχέση με το k-ε

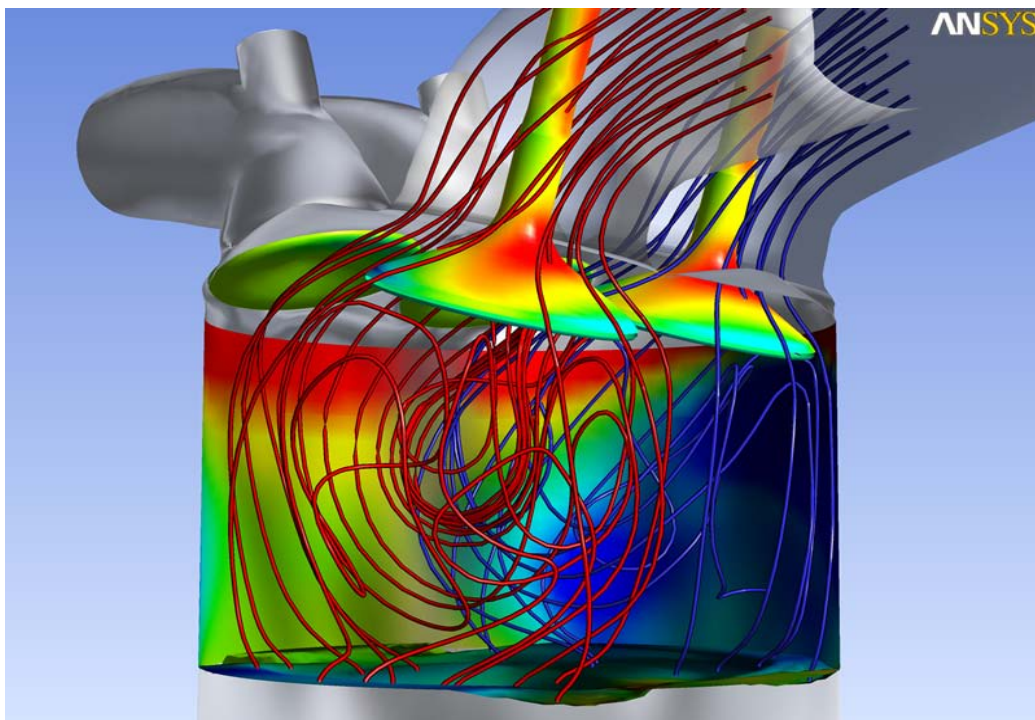
<p>Μοντέλα Τάσεων Reynolds (RSM)</p>	<p>-Εφαρμόσιμα για περίπλοκες ροές όπου τα μοντέλα που στηρίζονται στην υπόθεση της τυρβώδους συνεκτικότητας αποτυγχάνουν</p> <p>-Λειτουργούν και για ανιστροπικές ροές</p> <p>-Έχουν καλή απόδοση για πολλές περίπλοκες ροές όπως ροές έντονου στροβιλισμού και αποκολλημένες ροές</p>	<p>-Υπολογιστικά ακριβά με 11 εξισώσεις όπου πολλοί όροι δεν είναι μαθηματικά κλεισμένοι</p> <p>-Έχουν κακή απόδοση σε ορισμένες ροές</p>
<p>Προσομοίωση των Μεγάλων Δινών (LES)</p>	<p>-Εφαρμόσιμο σε περίπλοκες ροές</p> <p>-Δίνει πληροφορίες για τη δομή των τυρβωδών ροών</p> <p>-Δίνει πλήθος πληροφοριών που δεν μπορούν να παρθούν με κανένα από τα παραπάνω μοντέλα</p>	<p>-Υψηλό υπολογιστικό κόστος</p> <p>- Μεγάλο πλήθος πληροφοριών που πρέπει να αποθηκευτούν και να μετ-επεξεργασθούν</p> <p>-Δύσκολο να βρεθούν οι σωστές χρονοαναλυόμενες οριακές συνθήκες για τη ροή</p>
<p>Άμεση Αριθμητική Προσομοίωση (DNS)</p>	<p>-Δεν χρειάζεται καθόλου μοντελοποίηση στις εξισώσεις</p> <p>-Χρήσιμο στις χαμηλές τιμές Reynolds, ειδικά για ροές αερίων</p> <p>-Χρήσιμο στην ανάπτυξη και αξιολόγηση των μοντέλων τύρβης</p>	<p>-Εξαιρετικά υψηλό υπολογιστικό κόστος για χρήση εκτός από καθαρά ερευνητικούς σκοπούς</p> <p>-Τεράστιο πλήθος πληροφοριών</p>

Κεφάλαιο 5

Επίλυση Τυρβώδους Ροής σε Αγωγό με τη χρήση του Λογισμικού ANSYS Fluent

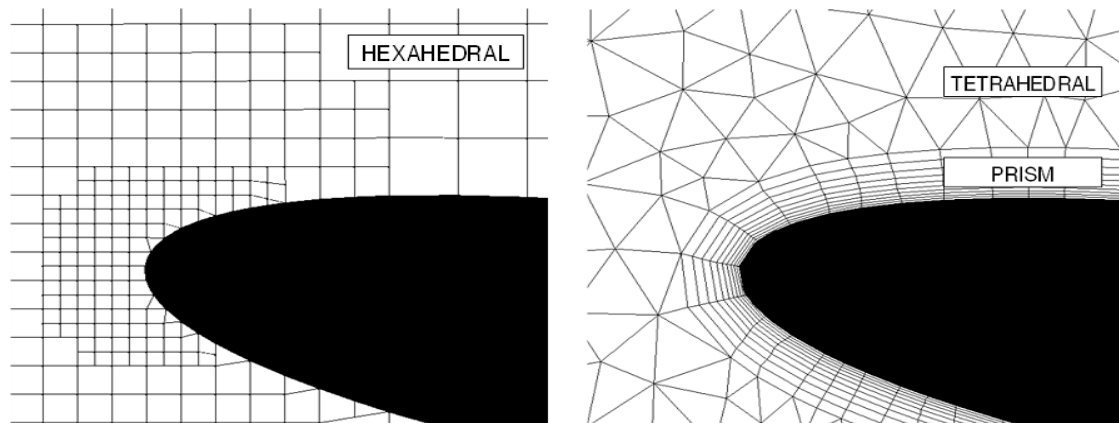
5.1 Εισαγωγή στο λογισμικό ANSYS Fluent

Το λογισμικό πακέτο ANSYS Fluent περιέχει ένα εύρος φυσικών δυνατοτήτων που απαιτούνται για τη μοντελοποίηση της ροής, της τύρβης, της μεταφοράς θερμότητας, κ.ά. Είναι ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιείται όχι μόνο για ερευνητικούς σκοπούς, αλλά έχει και ευρεία χρήση στην βιομηχανία, για παράδειγμα σε εφαρμογές όπως: ροή γύρω από ένα φτερό αεροσκάφους (τομέας αεροναυπηγικής), ροή του αίματος μέσα στις αρτηρίες ή φλέβες (τομέας εμβιομηχανικής), κατασκευή εγκαταστάσεων επεξεργασίας λυμάτων (τομέας ενέργειας), είναι κάποιες από αυτές. Επίσης διαθέτει ειδικά μοντέλα τα οποία δίνουν στο πρόγραμμα τη δυνατότητα μοντελοποίησης πιο περίπλοκων ροών, όπως ροή μέσα σε αντλίες ή στροβίλους (τομέας στροβιλομηχανικής) και εσωτερική καύση σε μηχανή ΜΕΚ.

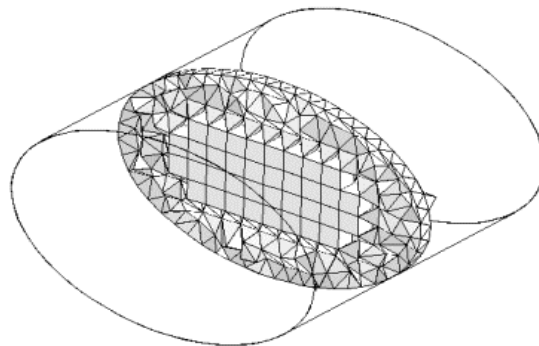


Σχήμα 5.1 Προσομοίωση εισαγωγής μίγματος αέρα-καυσίμου σε κύλινδρο κινητήρα ΜΕΚ με χρήση του λογισμικού ANSYS Fluent

Η ενσωμάτωση του ανεξάρτητου λογισμικού Fluent στο περιβάλλον (Workbench) του προγράμματος ANSYS, έδωσε τη δυνατότητα σχεδίασης της προς μελέτης γεωμετρίας, στο ANSYS Design Modeler, καθώς και σε διάφορα άλλα σύγχρονα προγράμματα σχεδίασης CAD, τα οποία είναι συμβατά με το ANSYS, όπως τα NX και JT Open της Siemens, το Creo Parametric (πρώην Pro/Engineer) της PTC, το CATIA V4 ή V5 της Dassault, κ.ά. Για τη δημιουργία του πλέγματος γίνεται χρήση του ANSYS Meshing, το οποίο, εκτός της επιλογής δημιουργίας πλέγματος εξ ολοκλήρου από το χρήστη, μας δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας αυτόματων πλεγμάτων με τετράεδρα κελιά (tetrahedral), εξάεδρα κελιά (hexahedral), με πυρήνα από εξάεδρα κελιά (hexahedral core), κλιμακωτά στρώματα πρισματικών και εξάεδρων κελιών (prismatic and hexahedral inflation layers), προσαρμοσμένο καρτεσιανό πλέγμα ανάλογα με τη γεωμετρία (body fitted Cartesian) και καρτεσιανό πλέγμα με δυνατότητα διχοτόμησης των κελιών (cut cell Cartesian).



Σχήμα 5.2 Κλιμακωτά στρώματα πρισματικών (δεξιά) και εξάεδρων (αριστερά) κελιών γύρω από την προς μελέτη γεωμετρία



Σχήμα 5.3 Πλέγμα με πυρήνα εξάεδρα κελιά (hexahedral core)

Στις επόμενες παραγράφους δίνεται μια εποπτική άποψη για τη χρήση του προγράμματος και περιγράφονται αναλυτικά οι βασικές λειτουργίες (operations) του προγράμματος οι οποίες θα αναλυθούν και είναι οι εξής:

- Εντολές που αφορούν τη σχεδίαση του προς μελέτη δοκιμίου από το ANSYS Design Modeler.
- Εντολές που αφορούν το υπολογιστικό πλέγμα που επιλέχθηκε και δημιουργήθηκε στο ANSYS Meshing.
- Εντολές που αφορούν τις οριακές συνθήκες, π.χ.: ταχύτητα εισόδου.
- Εντολές που αφορούν την αριθμητική επίλυση του προβλήματος και επίσης γίνεται ο προσδιορισμός του χρονικού και χωρικού βήματος κάτω από το οποίο θα πραγματοποιηθεί η επαναληπτική διαδικασία για τη σύγκλιση της λύσης.
- Εντολές που αφορούν την απεικόνιση των αποτελεσμάτων σε περιβάλλον με γραφικά καθώς και επίσης απεικόνιση των αποτελεσμάτων σε γραφικές παραστάσεις.

Η θεωρούμενη ροή του ρευστού, που θα μελετήσουμε, γίνεται μέσα σε κυλινδρικό αγωγό διαμέτρου $D = 0.0127m$ και μήκους $L = 5D = 0.0635m$. Η ταχύτητα εισαγωγής του ρευστού στον αγωγό είναι: $U_{in} = 6.58 m/s$. Το ρευστό έχει σταθερή πυκνότητα $\rho = 1.331 kg/m^3$ και συντελεστή ιξώδους $\mu = 2.34 \times 10^{-5} kg/(ms)$. Ο αριθμός Reynolds που χαρακτηρίζει τη ροή κατά την εισαγωγή του ρευστού στο αγωγό είναι:

$$Re = \frac{\rho U_{in} D}{\mu} \approx 4750$$

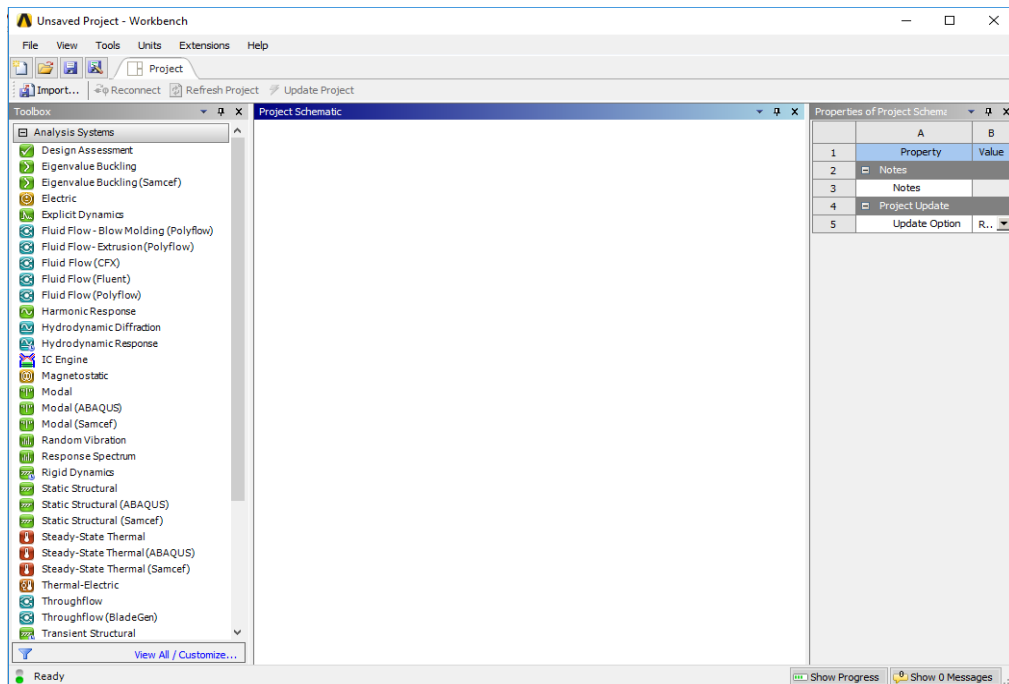
Για την επίλυση του πεδίου, χρησιμοποιήθηκε φορητός υπολογιστής με επεξεργαστή Intel® Core™ i5 – 3230M CPU @ 2.60GHz 2.60 GHz με λειτουργικό σύστημα 64-bit και εγκατεστημένη μνήμη (RAM) 16,00 GB.

5.2 Διαδικασία επίλυσης τυρβώδους ροής σε αγωγό με χρήση της LES στο λογισμικό ANSYS Fluent

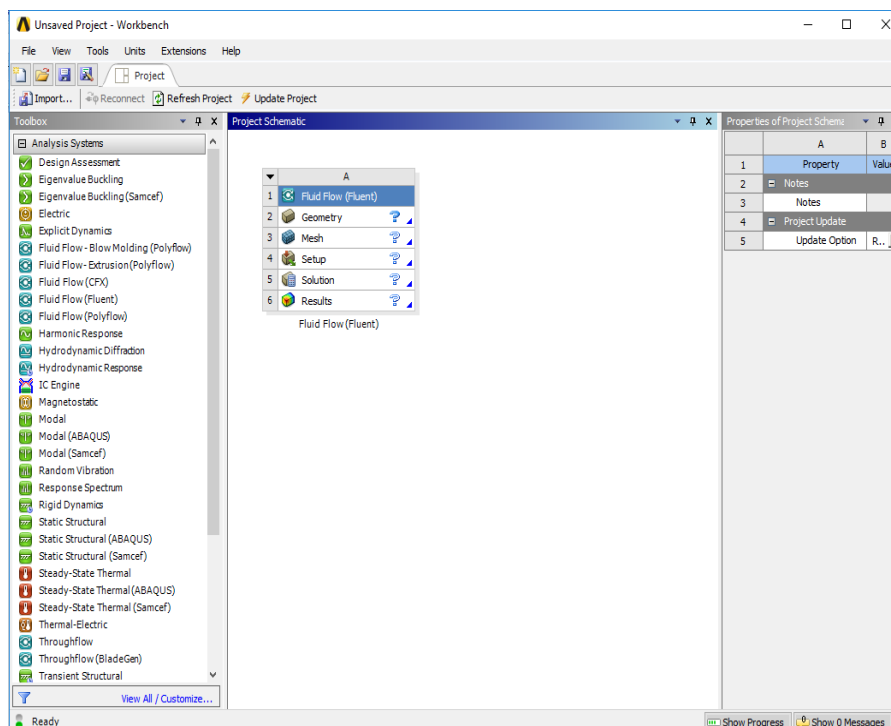
Σε αυτήν την παράγραφο παρατίθενται τα βήματα τα οποία πραγματοποιήθηκαν προκειμένου να προσομοιώσουμε το μοντέλο μας στο υπολογιστικό πρόγραμμα ANSYS Fluent. Η έκδοση του ANSYS Fluent που χρησιμοποιούμε είναι η 16.1.

Επειδή η LES είναι μία τρισδιάστατη, χρονικά εξαρτώμενη προσομοίωση, το υπολογιστικό μας πεδίο είναι ολόκληρος ο αγωγός.

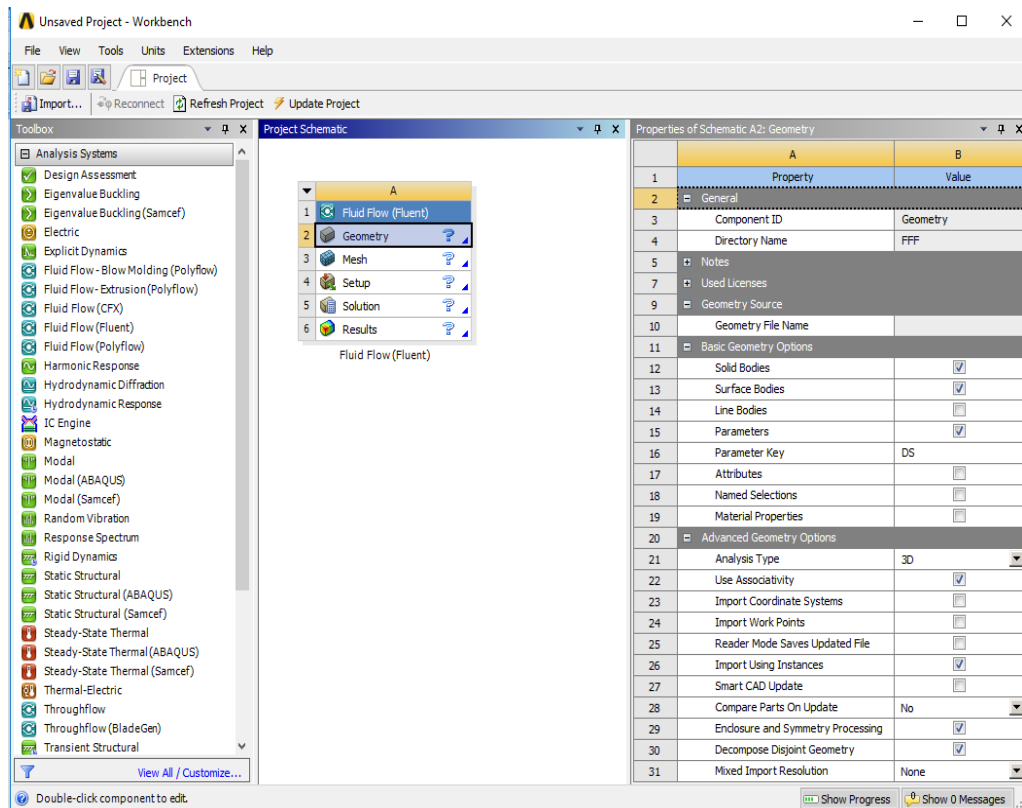
1. Αρχικά ανοίγουμε το πρόγραμμα ANSYS και πάμε στο ANSYS Workbench
Start>All Programs>Ansys 16.1> Workbench 16.1



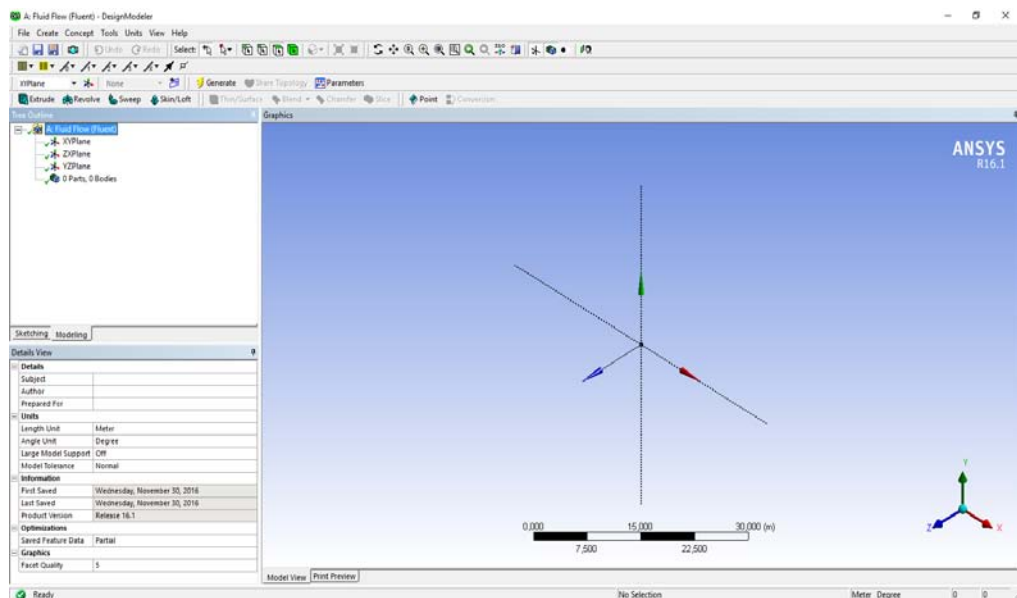
2. Στη συνέχεια σύρουμε την επιλογή **Fluid Flow (Fluent)** στο περιβάλλον εργασίας του Workbench, **Project Schematic**.



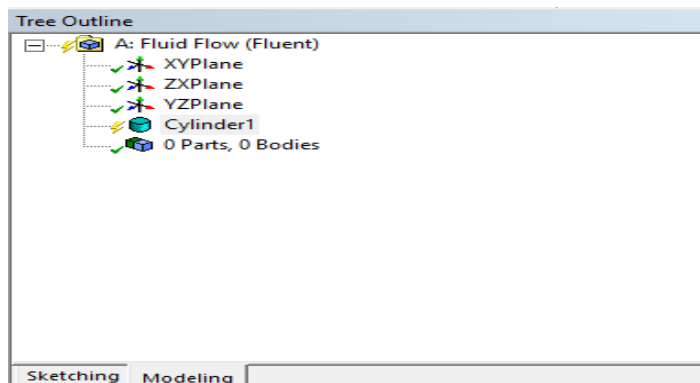
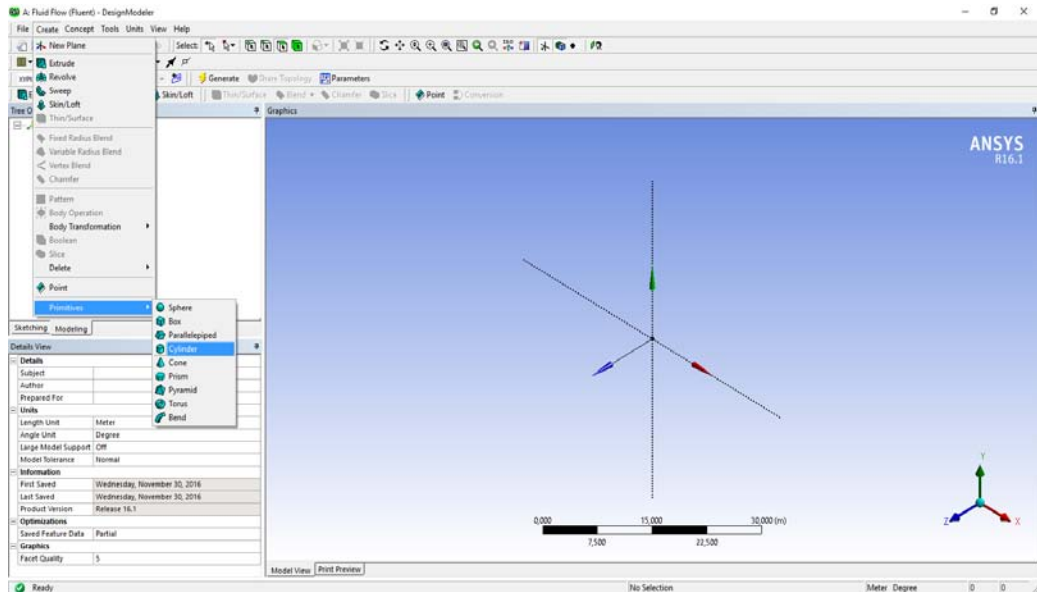
3. Τώρα πρέπει να ορίσουμε ως υπολογιστικό πεδίο όλου του αγωγού. Στο **Project Schematic** του Workbench, πατάμε δεξί κλικ στην επιλογή **Geometry** (Γεωμετρία) και πάμε στο μενού **Properties** (Ιδιότητες). Ελέγχουμε στην κατηγορία **Advanced Geometry Options**, να είναι κλικαρισμένο το **3D**, δίπλα από την επιλογή **Analysis Type**.



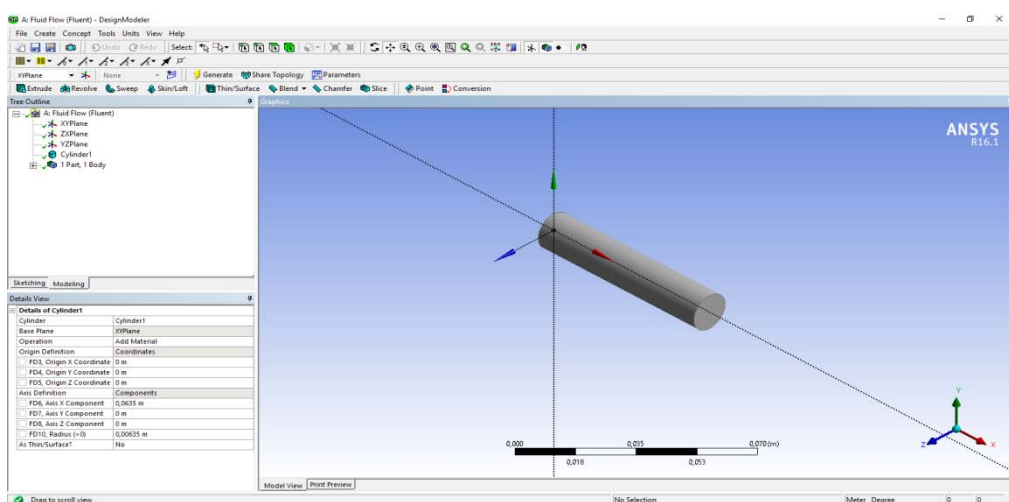
4. Επόμενο βήμα είναι να σχεδιάσουμε τη γεωμετρία του αγωγού και θα χρησιμοποιήσουμε όπως αναφέραμε παραπάνω το σχεδιαστικό πακέτο του ANSYS, **Design Modeler**. Για να μεταβούμε στο **Design Modeler** πατάμε διπλό κλικ πάνω στο **Geometry**.



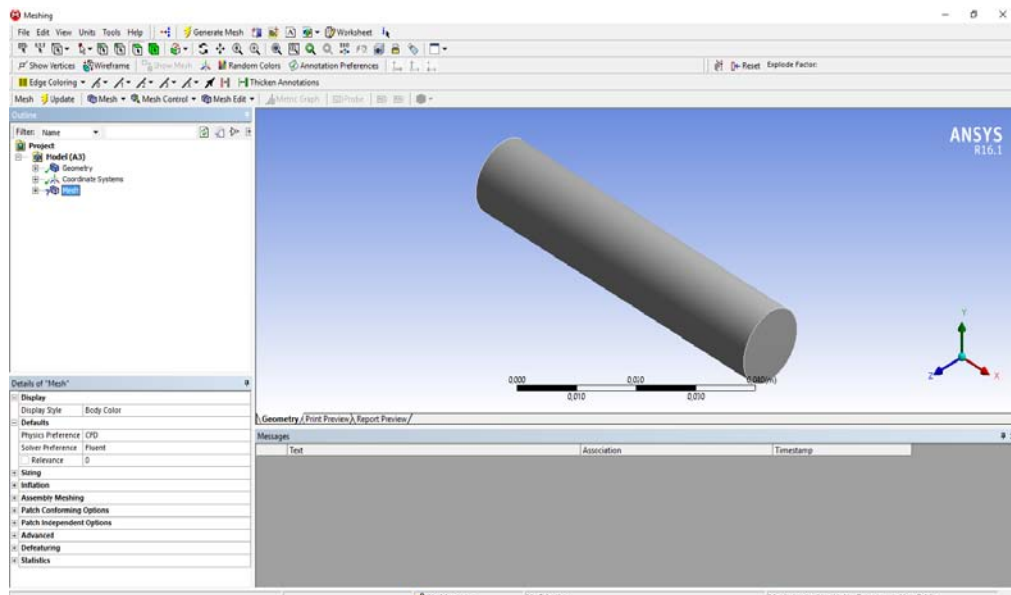
5. Για να δημιουργήσουμε τον αγωγό πάμε: **Create>Primitives>Cylinder**
Ενώ στην καρτέλα **Tree Outline** έχει εμφανιστεί τώρα η επιλογή: **Cylinder1**



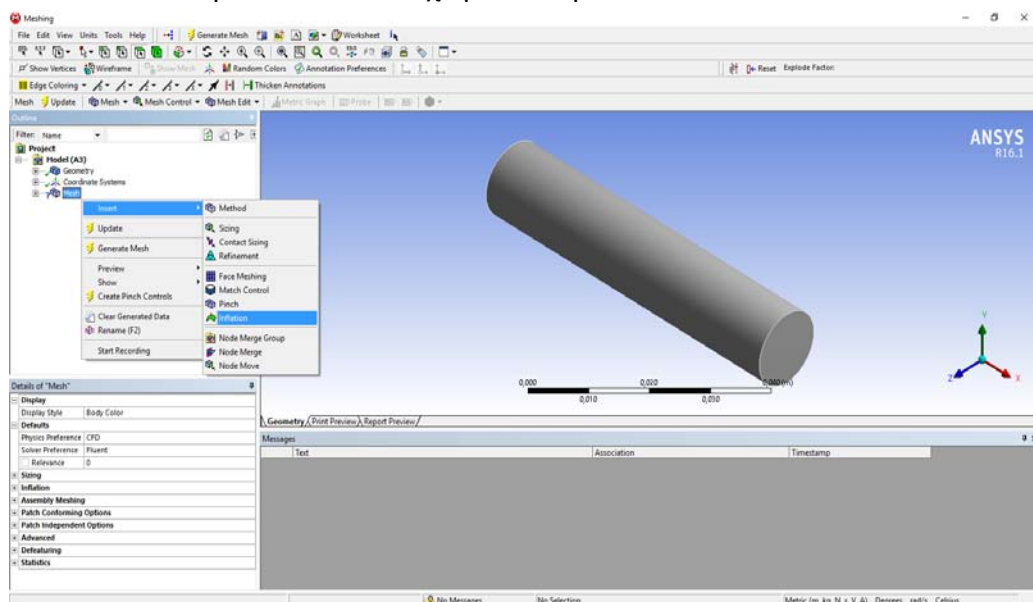
6. Τώρα πρέπει να ορίσουμε τις διαστάσεις του αγωγού, θεωρώντας ως άξονα συμμετρίας τον **x**. Στην καρτέλα **Details View**, αλλάζουμε την επιλογή **Base Plane** σε **YZ Plane** και τις επιλογές **Axis X Component** σε **0.0635m** και **Radius(> 0)** σε **0.00635m**. Μετά πατάμε την επιλογή **Generate**, η οποία θα δημιουργήσει έναν αγωγό με διάμετρο **D = 0.0127m** και μήκος **L = 0.0635m**.





7. Αφού ολοκληρώσαμε το σχεδιασμό και τη διαστασιολόγηση του αγωγού, κλείνουμε το **Design Modeler** και επιστρέφουμε στο αρχικό μενού του Workbench, **Project Schematic**. Επόμενο βήμα μας τώρα είναι να δημιουργήσουμε το υπολογιστικό πλέγμα, μέσω του εργαλείου **ANSYS Meshing**. Για να το επιτύχουμε αυτό πατάμε διπλό κλικ στην επιλογή **Mesh**.

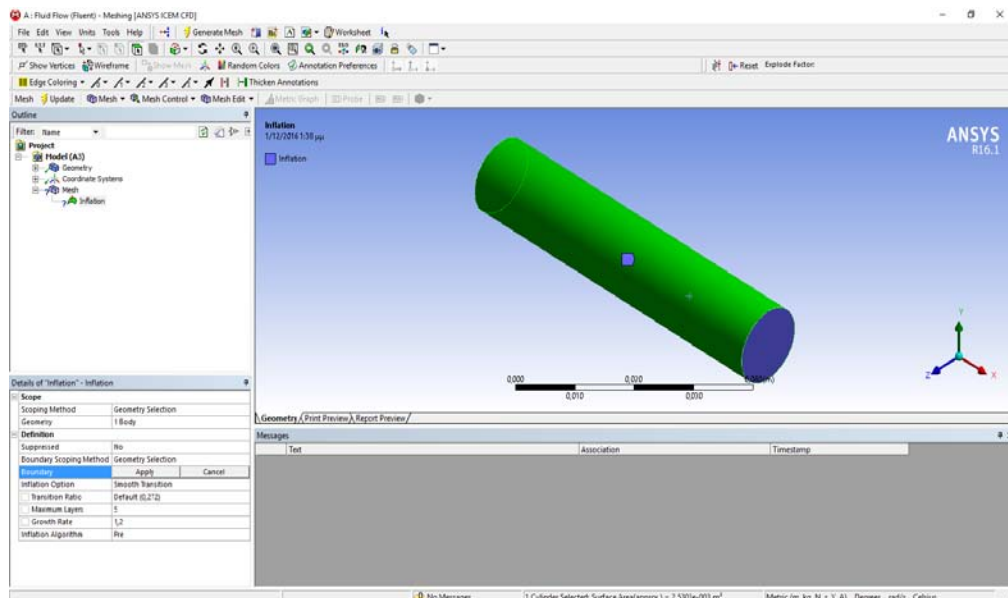
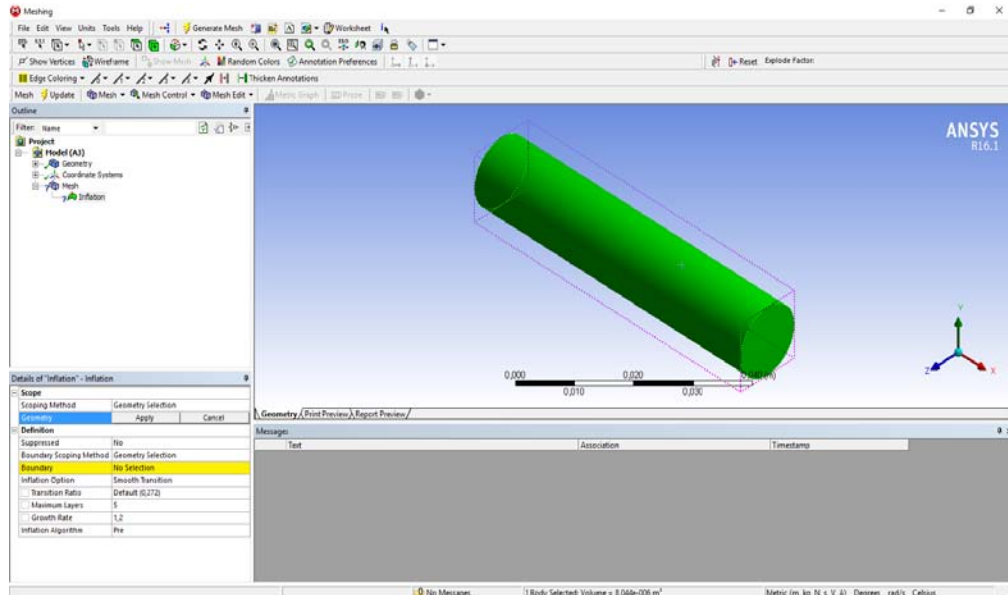


8. Για τη δημιουργία του πλέγματος χρησιμοποιήσαμε την επιλογή για κλιμακωτά στρώματα κελιών, ώστε να δημιουργήσουμε περισσότερα κελιά γύρω από τα τοιχώματα του αγωγού. Για να ορίσουμε πόσα στρώματα επιπλέον θέλουμε κοντά στο τοίχωμα πατάμε: **Mesh>Insert>Inflation**



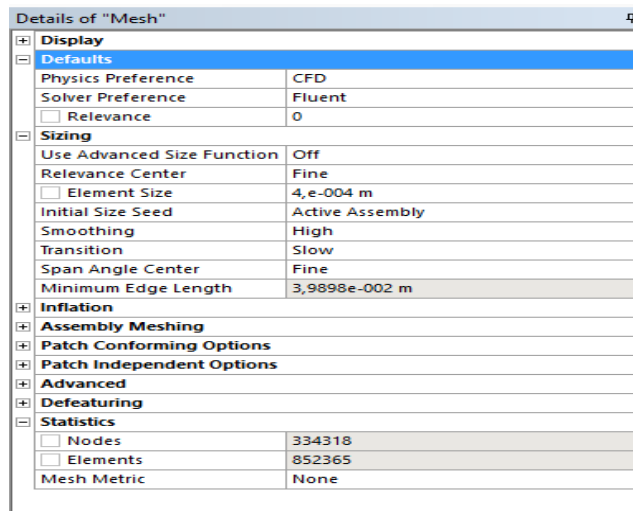
9. Πηγαίνουμε στην καρτέλα **Details of "Inflation" – Inflation** και με το **Geometry** τονισμένο, επιλέγουμε τον αγωγό με το εργαλείο **body selection tool** , που βρίσκεται στη δεύτερη κατά σειρά από πάνω

εργαλειομπάρα, και πατάμε **Apply**. Στη συνέχεια με το **Boundary** αυτή τη φορά τονισμένο, επιλέγουμε το εξωτερικό τοίχωμα του αγωγού, με το εργαλείο **face selection tool**  και πατάμε **Apply**. Τέλος, αλλάζουμε την επιλογή **Maximum Layers** σε **15**.




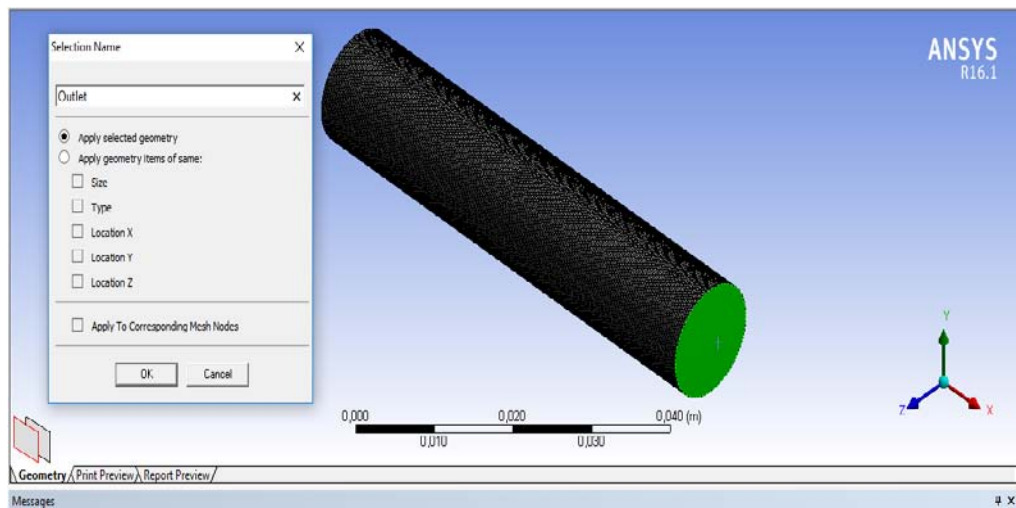
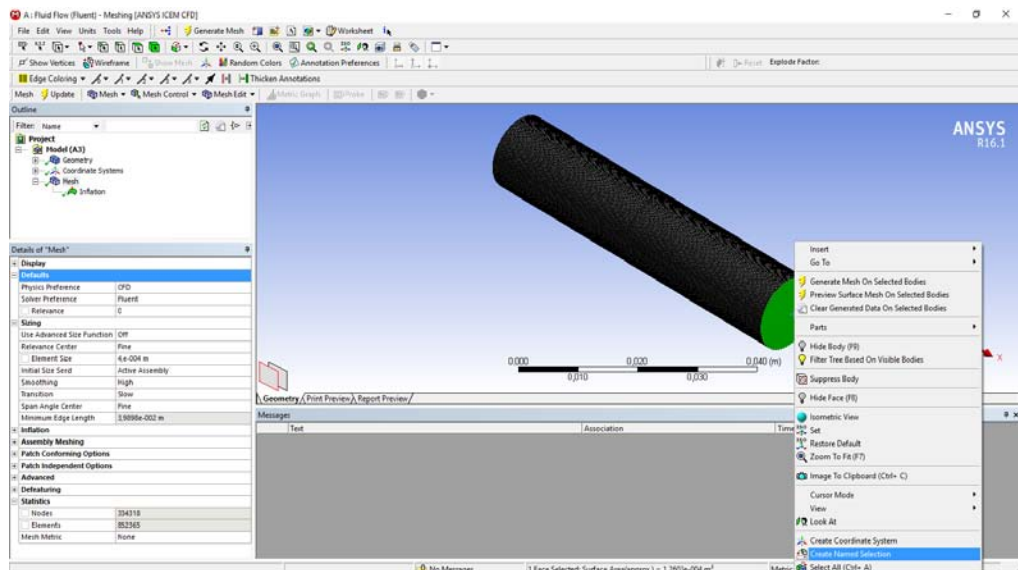
Details of "Inflation" - Inflation	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Body
Definition	
Suppressed	No
Boundary Scoping Method	Geometry Selection
Boundary	1 Face
Inflation Option	Smooth Transition
Transition Ratio	Default (0,272)
Maximum Layers	15
Growth Rate	1,2
Inflation Algorithm	Pre

10. Επόμενο βήμα είναι να πάμε στη καρτέλα **Outline** και να πατήσουμε πάνω στην επιλογή **Mesh** αριστερό κλικ. Μεταβαίνουμε στην καρτέλα **Details of "Mesh"**, που ανοίγει ακριβώς από κάτω. Κάτω από την επιλογή **Sizing** μεταβάλλουμε τις επιλογές **Use Advanced Size Function** σε **Off**, **Relevance Center** σε **Fine**, **element Size** σε **4e – 04m** και **Smoothing** σε **High**. Στη συνέχεια πατάμε την επιλογή **Generate Mesh** από τις εργαλειομπάρες και από την επιλογή **Statistics** ελέγχουμε τους κόμβους και τα στοιχεία που δημιουργήθηκαν, αν είναι αρκετά για να προχωρήσουμε. Στη προκειμένη περίπτωση είναι.

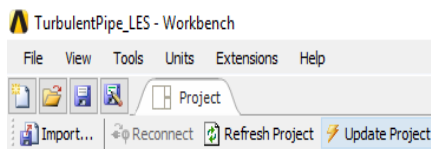


Details of "Mesh"	
Display	
<input checked="" type="checkbox"/> Defaults	
Physics Preference	CFD
Solver Preference	Fluent
<input type="checkbox"/> Relevance	0
Sizing	
Use Advanced Size Function	Off
Relevance Center	Fine
<input type="checkbox"/> Element Size	4.e-004 m
Initial Size Seed	Active Assembly
Smoothing	High
Transition	Slow
Span Angle Center	Fine
Minimum Edge Length	3,9898e-002 m
Inflation	
Assembly Meshing	
Patch Conforming Options	
Patch Independent Options	
Advanced	
Defeaturing	
Statistics	
<input type="checkbox"/> Nodes	334318
<input type="checkbox"/> Elements	852365
Mesh Metric	None

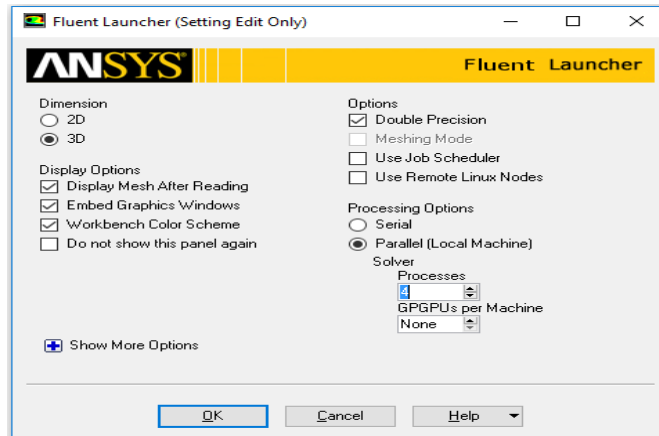
11. Στη συνέχεια για να μπορέσουμε να ορίσουμε αρχικές και οριακές συνθήκες όταν θα ανοίξουμε το Fluent, θα δώσουμε ονόματα στις επιφάνειες του αγωγού. Η αριστερή επιφάνεια του αγωγού θα ονομαστεί **Inlet**, η δεξιά **Outlet** και η κυλινδρική επιφάνεια **Pipewall**. Για να το επιτύχουμε αυτό επιλέγουμε το εργαλείο επιλογής επιφανειών, όπως και στο προηγούμενο βήμα, **face selection tool** , επιλέγουμε την επιφάνεια που θέλουμε να ονοματίσουμε, πατάμε δεξί κλικ και πάμε στην εντολή **Create Named Selection**.



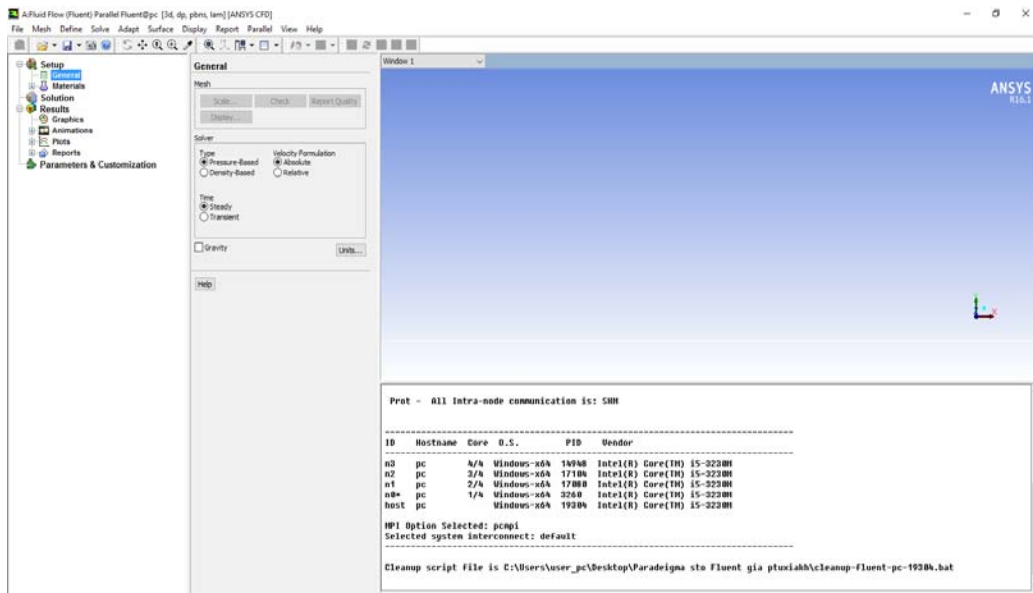
Μόλις τελειώσουμε με την ονομασία των επιφανειών αποθηκεύουμε το πλέγμα μας και κλείνουμε το **ANSYS Meshing**. Μετά πάμε στο **Workbench** και κάνουμε **Update Project**, πατώντας στο ομώνυμο εικονίδιο.



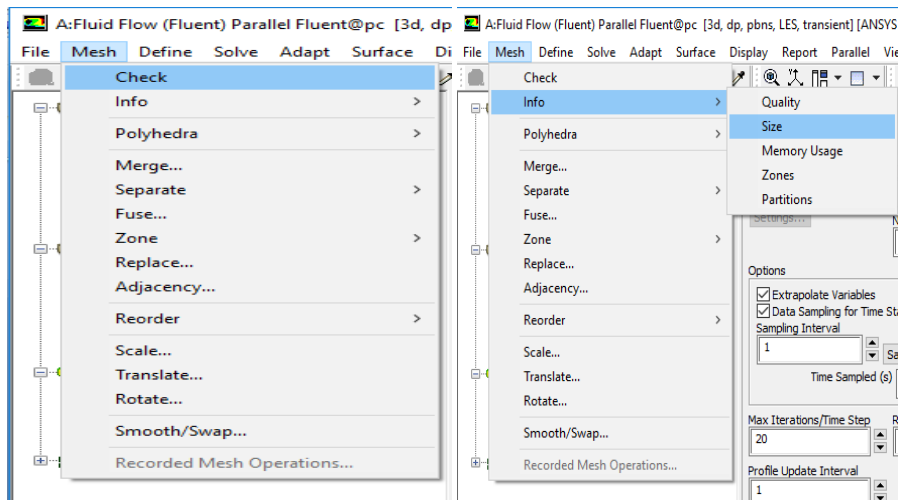
- Επόμενη ενέργεια είναι να ανοίξουμε το **Fluent**. Πηγαίνουμε στο **Project Schematic** και πατάμε διπλό κλικ πάνω στην επιλογή **Setup**, ώστε να ανοίξουμε το **FLUENT Launcher** (πρόγραμμα εκκίνησης του Fluent). Μόλις ανοίξει αλλάζουμε τα **Options** σε **Double Precision** και τα **Processing Options** σε **Parallel (Local Machine)** με **Number of Processes** ίσο με **4**. Πατάμε OK και συνεχίζουμε.



13. Μόλις ανοίξει το Fluent βλέπουμε ότι το περιβάλλον εργασίας του "χωρίζεται" σε τρία μέρη. Το αριστερό μέρος όπου ορίζουμε το πρόβλημά μας, το πάνω δεξιά όπου είναι το παράθυρο γραφικών (**Graphics pane**) και το κάτω δεξιά όπου είναι το παράθυρο εντολών (**Command pane**).



14. Πρώτο μας μέλημα είναι να ελέγξουμε το πλέγμα ότι έχει εισαχθεί σωστά από το **ANSYS Meshing** και στη συνέχεια να ληφθούν τα στατιστικά στοιχεία που αφορούν το πλέγμα. Έτσι πρώτα πατάμε **Mesh>Check** και στη συνέχεια **Mesh>Info>Size**.



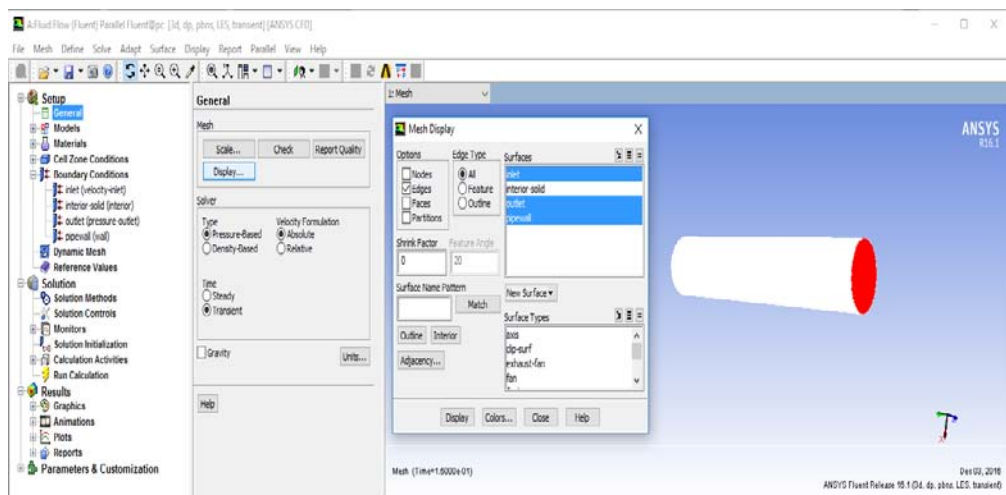
Ενώ στο παράθυρο εντολών θα εμφανιστεί η παρακάτω εντολή:

Mesh Size

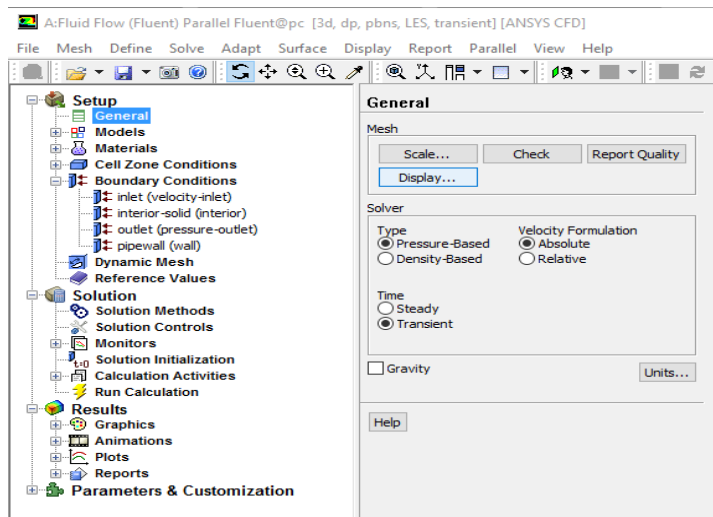
Level	Cells	Faces	Nodes	Partitions
0	1986138	4084537	394698	4

1 cell zone, 4 face zones.

15. Για να μπορέσουμε να εμφανίσουμε τον αγωγό μας στο παράθυρο γραφικών του Fluent πάμε: **General>Mesh>Display**



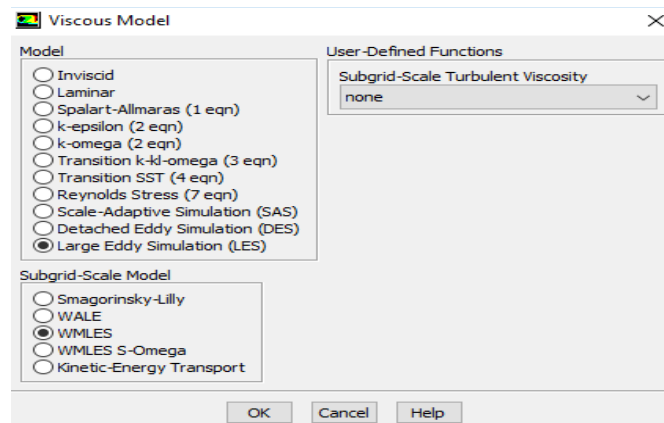
Στη συνέχεια θα πρέπει να προσδιοριστούν διάφορες ιδιότητες ώστε να επιτευχθεί η σωστή λύση. Πάμε στην ενότητα **General>Solve** και κάτω από την επιλογή **Type** επιλέγουμε **Pressure-Based**, ενώ στο **Time** επιλέγουμε **Transient**.



16. Επόμενο βήμα είναι η επιλογή της αριθμητικής μεθόδου με την οποία θα περιγραφεί η ροή. Για να το επιτύχουμε αυτό πάμε:

Problem Setup> Models> Viscous - Laminar> Edit

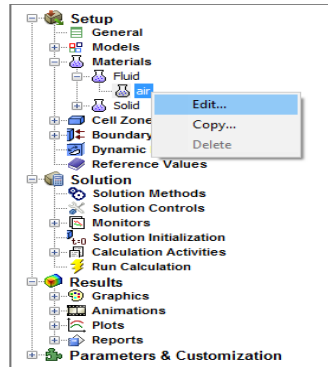
Κάτω από την επιλογή **Model** επιλέγουμε **Large Eddy Simulation (LES)**, ενώ κάτω από την επιλογή **Subgrid-Scale Model** επιλέγουμε **WMLES**.



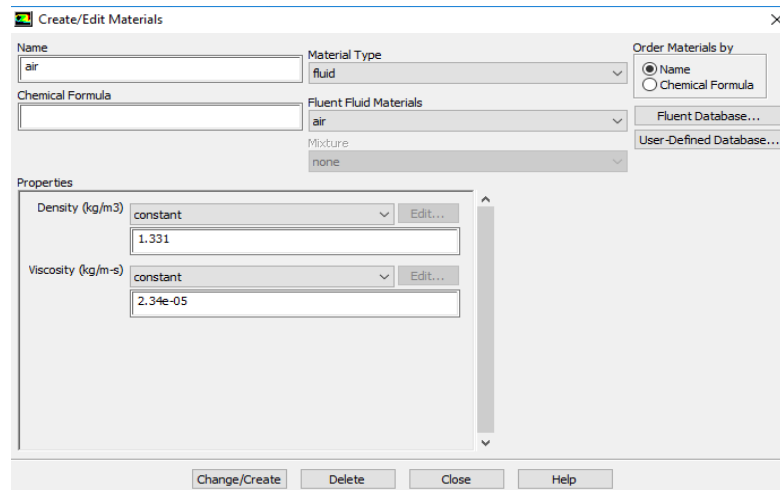
Για ασυμπίεστες ροές η εξίσωση της ενέργειας δεν συνδέεται με τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής, για αυτό το λόγο η εξίσωση δεν λύνεται. Πάμε: **Problems Setup>Models>Energy** και θέτουμε την επιλογή **Energy** σε **Off**.

17. Σε αυτό το βήμα θα ορίσουμε τις ιδιότητες του ρευστού που έχουν οριστεί από το πρόβλημα. Για τη δημιουργία ενός νέου ρευστού πάμε:

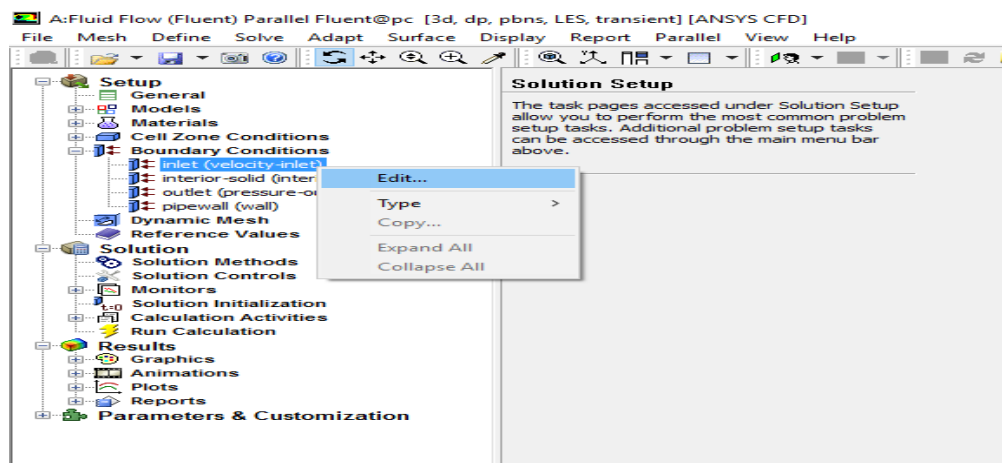
Problem Setup> Materials> Fluid> Air>Edit



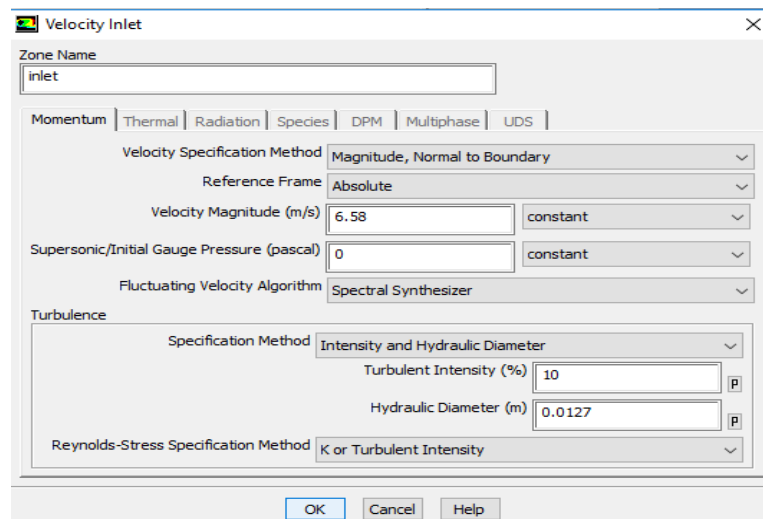
Στο μενού **Create/Edit Materials** θέτουμε **Density (constant)** να είναι μια σταθερά που ισούται με $1,331 \text{ kg/m}^3$ και **Viscosity (constant)** να είναι επίσης σταθερά και να ισούται με $2,34 \times 10^{-5}$.



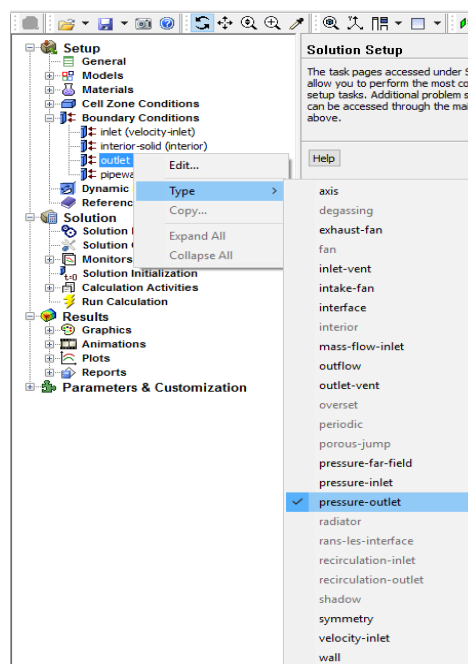
18. Επόμενη και τελευταία ενέργεια είναι να ορίσουμε τις αρχικές και οριακές συνθήκες του προβλήματος. Αυτές θα εφαρμοστούν στις πλευρές του αγωγού που ονομάσαμε νωρίτερα ως: **Inlet**, **Outlet** και **Pipewall**. Θα ξεκινήσουμε με τις αρχικές και οριακές συνθήκες στο **Inlet**. Πάμε: **Setup > Boundary Conditions > Inlet (velocity inlet) > Edit**



Στο μενού **Velocity-Inlet** θέτουμε **Velocity Specification Method** σε **Magnitude, Normal to Boundary**, **Velocity Magnitude (m/s)** σε **6,58 m/s** και **Fluctuation Velocity Algorithm** σε **Spectral Synthesizer**. Επίσης, στην ενότητα **Turbulence** θέτουμε τη **Specification Method** σε **Intensity and Hydraulic Diameter**, με την τιμή για τη **Turbulence Intensity** να ισούται με **10%**, ενώ για τη **Hydraulic Diameter (m)** με **0,0127m**. Τέλος, ορίζουμε τη **Reynolds-Stress Specification Method** σε **K or Turbulence Intensity**.

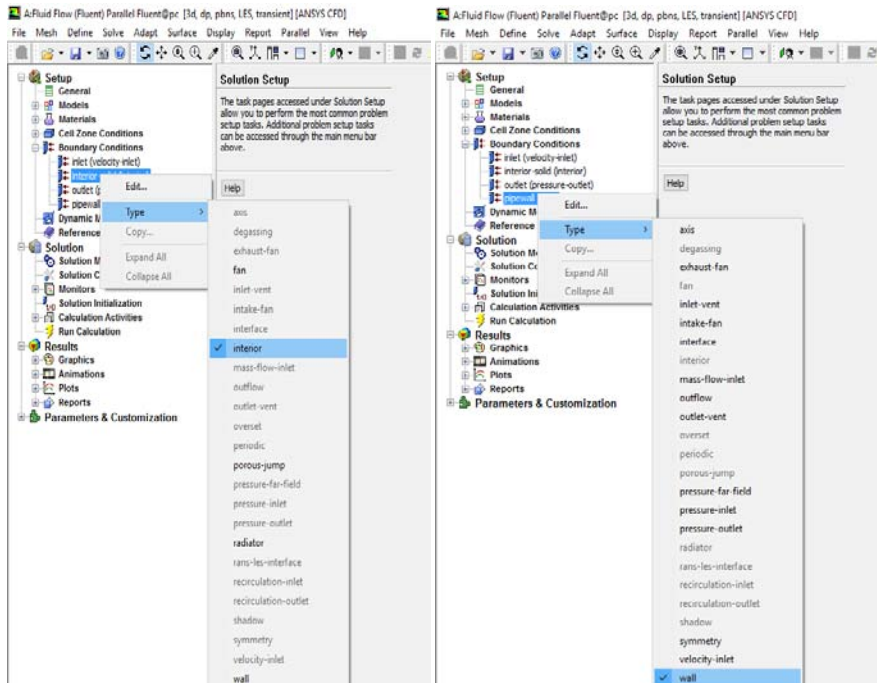


Θα συνεχίσουμε τώρα με τις οριακές συνθήκες της εξόδου, **Outlet**. Πάμε: **Setup> Boundary Conditions>Outlet > Type> pressure outlet**



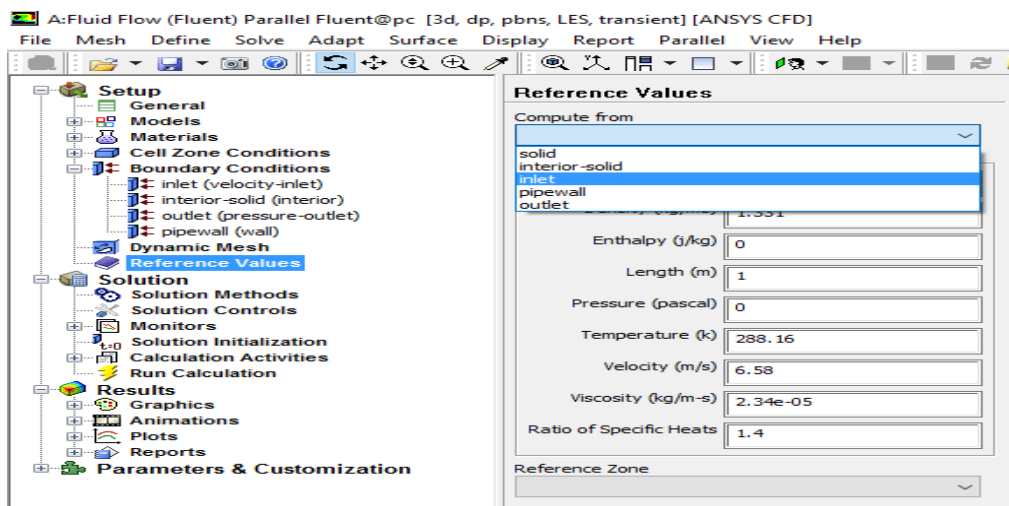
Ομοίως θα ορίσουμε τις οριακές συνθήκες που ισχύουν στα τοιχώματα του αγωγού. Πάμε:

Setup>Boundary Conditions>Interior Solid>Type>interior
Setup>Boundary Conditions>Pipewall>Type>wall



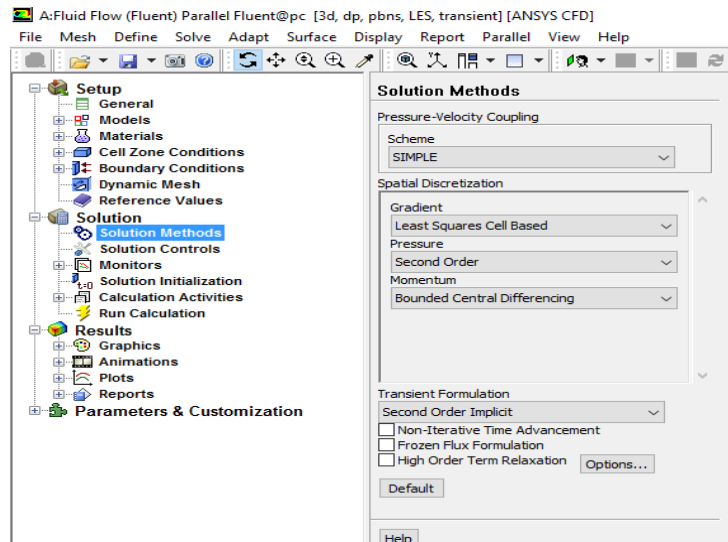
Ακόμα θέλουμε οι ιδιότητες να υπολογίζονται από την είσοδο του ρευστού μέσα στον αγωγό, ώστε να τις έχουμε έτοιμες για υπολογισμούς αργότερα. Πάμε:

Setup>Reference Values>Compute from>Inlet

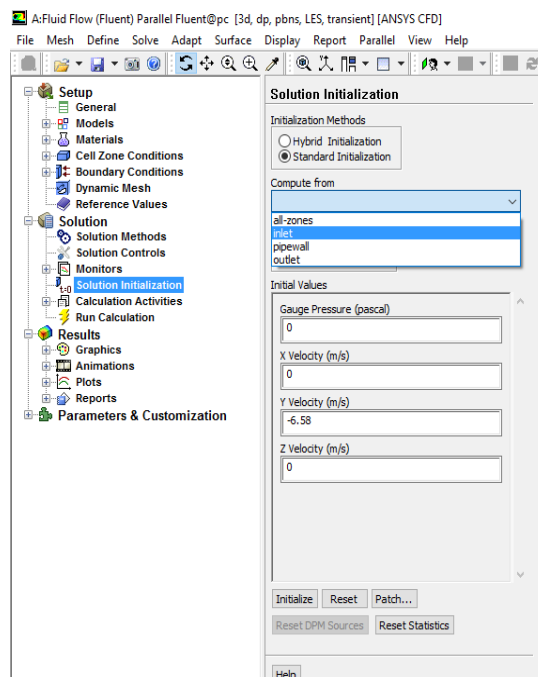


19. Αφού τελειώσαμε με τον ορισμό της φυσικής του προβλήματος, τώρα μας μένει να ορίσουμε την αριθμητική λύση του προβλήματος προτού ξεκινήσουμε να τρέχουμε το πρόγραμμα. Αρχικά πάμε στην ενότητα

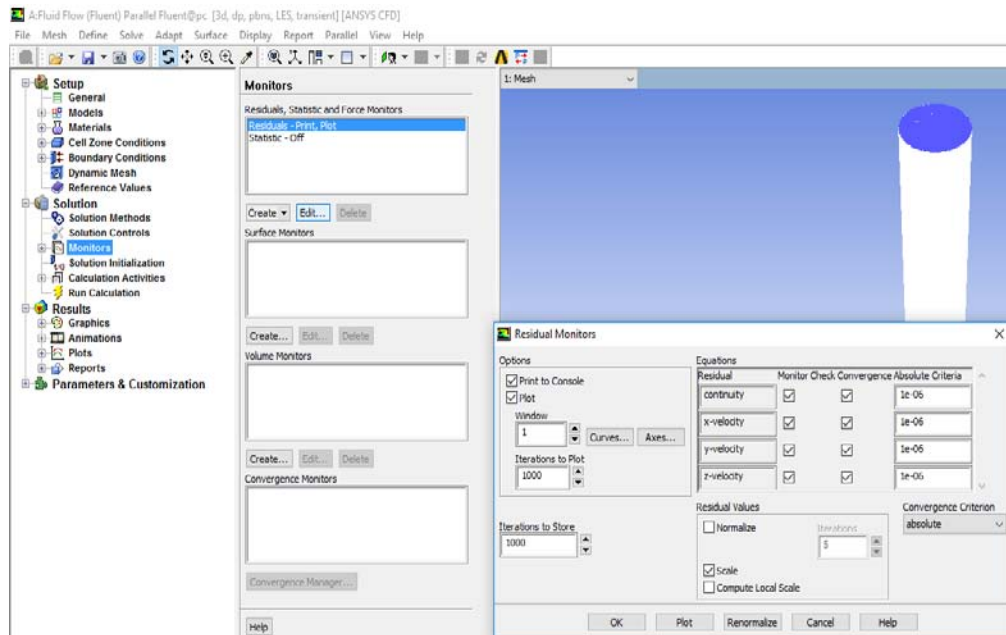
Solution Methods και στη παράμετρο **Momentum** επιλέγουμε **Bounded Central Differencing**. Επίσης, επιλέγουμε **Second Order** στο **Pressure** και **Second Order Implicit** στο **Transient Formulation**.



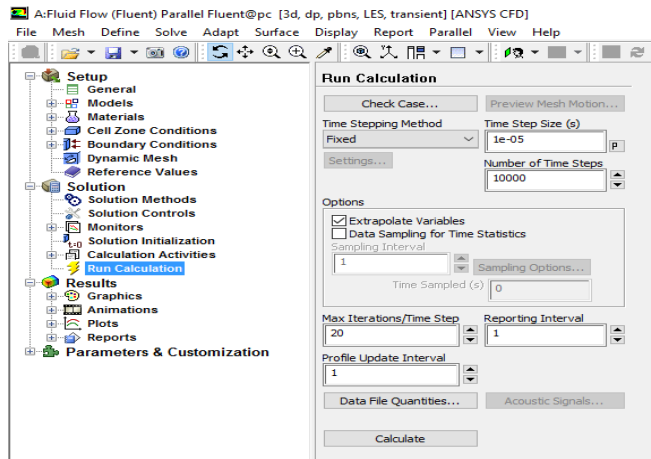
20. Στη συνέχεια πρέπει να ορίσουμε το πεδίο ροής να αρχίζει με αρχικές τιμές αυτές που ισχύουν στο **Inlet**. Για να το επιτύχουμε αυτό πάμε:
Solution Initialization > Compute from > Inlet
Και πατάμε **Initialize** για να οριστικοποιήσουμε την εντολή.



21. Επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε τα κριτήρια σύγκλισης. Το Fluent μας δίνει ένα υπόλοιπο για κάθε διέπουσα εξίσωση που λύνεται. Αυτό το υπόλοιπο είναι ένα μέτρο σύγκρισης που παρουσιάζει το πόσο καλά η τρέχων λύση ικανοποιεί τη διακριτοποίηση της κάθε διέπουσας εξίσωσης. Έτσι θα επαναλαμβάνουμε τη λύση μέχρις ότου αυτό το υπόλοιπο για την κάθε εξίσωση να είναι ίσο ή μικρότερο από 1×10^{-6} . Για να μπορέσουμε να το καθορίσουμε αυτό πάμε **Monitors>Residuals>Edit** και θέτουμε ως κριτήριο σύγκλισης ίσο με 1×10^{-6} σε όλα τα υπόλοιπα των εξισώσεων.

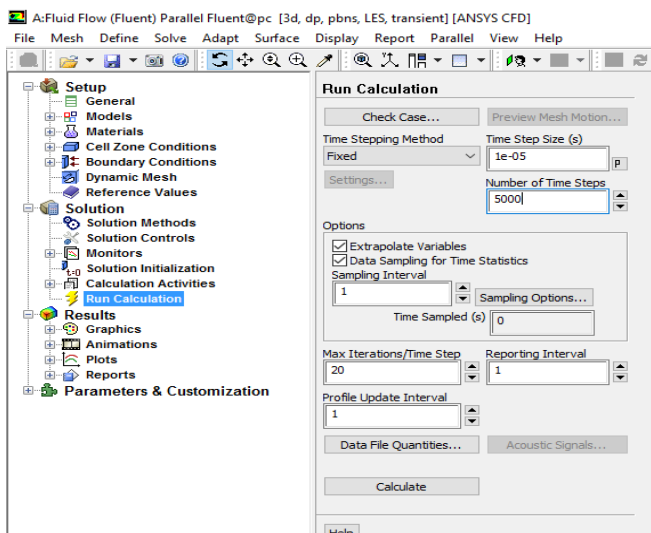


22. Τέλος μας έμεινε η αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Προτού όμως ξεκινήσουμε να μαζεύουμε τις πληροφορίες της ροής ώστε να κάνουμε στατιστικό έλεγχο παρακάτω, θα πρέπει πρώτα το πρόγραμμα να τρέξει για ένα χρονικό διάστημα, ώστε να σταθεροποιηθεί η ροή μας μέσα στον αγωγό. Πάμε **Run Calculation** και θέτουμε **Time Step Size (s)** ίσο με 1×10^{-5} και **Number of Time Steps** ίσο με **10000**, δηλαδή θα τρέξει για **0,1s**. Επίσης, στα **Options** επιλέγουμε **Extrapolate Variables** και ελέγχουμε αν η επιλογή **Max Iterations/Time Step** είναι ίση με **20**.



Αφού κάνουμε έναν πλήρη έλεγχο σε όλα τα παραπάνω βήματα, πατάμε **Calculate** και το πρόγραμμα θα ξεκινήσει να τρέχει μέχρι να ολοκληρώσει και τα **10000** χρονικά βήματα χωρίς να κάνει αποθήκευση δεδομένων για όλα, παρά μόνο για τον τελευταίο υπολογισμό κάθε φορά.

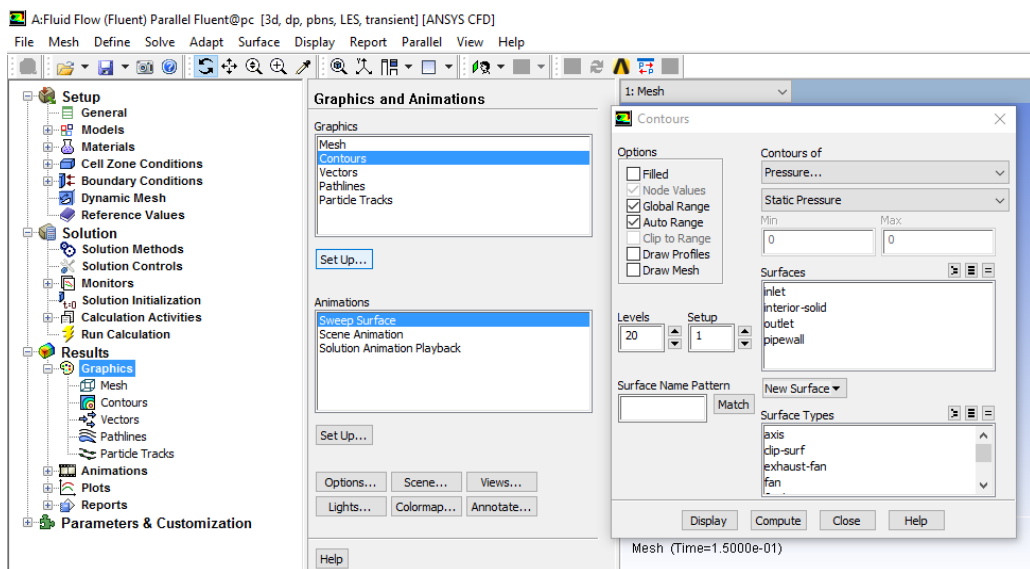
23. Αφού υπολογίσαμε τα πρώτα **10000** χρονικά βήματα, ήτοι **0,1s**, η ροή μας έχει γίνει σταθερή και μπορούμε να συλλέξουμε πληροφορίες για τον στατιστικό μας έλεγχο και για να μπορέσουμε να βγάλουμε συμπεράσματα γύρω απ' αυτή. Θα τρέξουμε το πρόγραμμα για το επόμενο **0,05s**, από το **0,1s** μέχρι το **0,15s**, αποθηκεύοντας πλέον όλα τα δεδομένα. Για να το επιτύχουμε αυτό, θα πάμε στην ενότητα **Run Calculation** και θα αλλάξουμε το **Number of Time Steps** να είναι ίσο με **5000**. Επίσης, στα **Options** θα επιλέξουμε την επιλογή **Data Sampling for Time Statistics**.



Πατάμε **Calculate** και μόλις το πρόγραμμα ολοκληρώσει και τα επόμενα **5000** χρονικά βήματα, έχουμε ολοκληρώσει τη διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος.

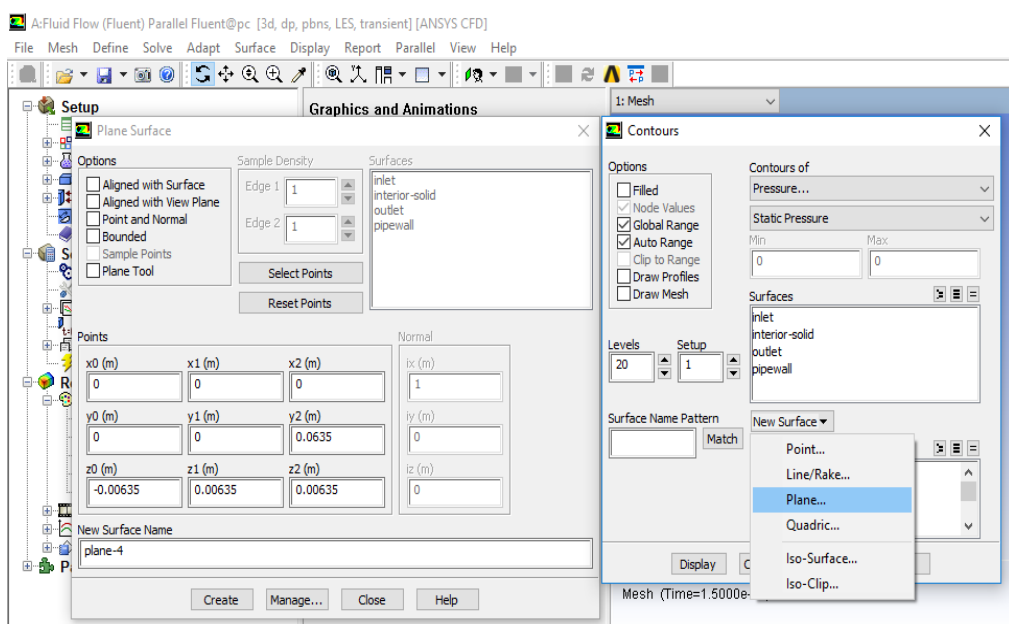
24. Αφού έχουμε συλλέξει τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε κατά την διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης, είμαστε έτοιμοι να δούμε με γραφική απεικόνιση τα αποτελέσματα των υπολογισμών. Η τεχνική LES υπολογίζει δύο είδη ταχυτήτων, τη στιγμιαία και τη μέση ταχύτητα, η οποία μέση υπολογίζεται από το μέσο όρο της στιγμιαίας με τα στατιστικά τα οποία έχουμε αποθηκεύσει από το προηγούμενο βήμα. Για να μπορέσουμε να δούμε τις ταχύτητες σε κάθε άξονα πρέπει να δημιουργήσουμε, ένα νέο ψευδο-επίπεδο στους άξονές μας. Πάμε:

Graphics and Animation > Contours > Set up

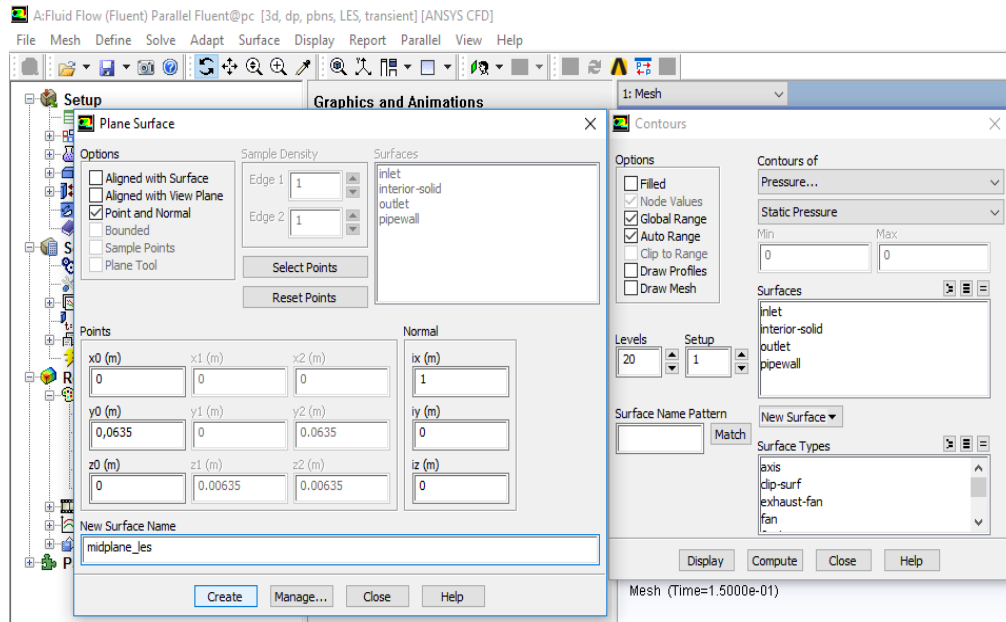


Μέσα στο παράθυρο των **Contours**, πατάμε:

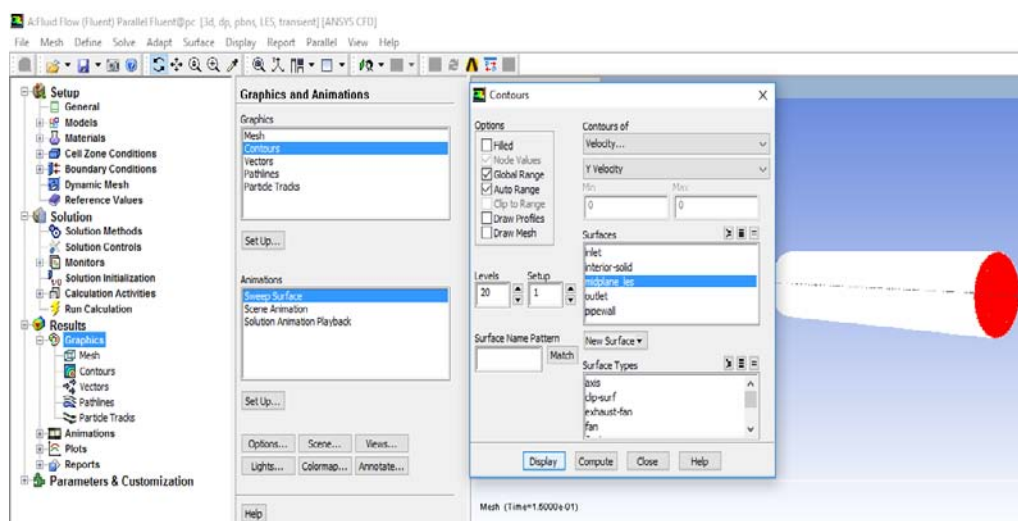
New Surface > Plane



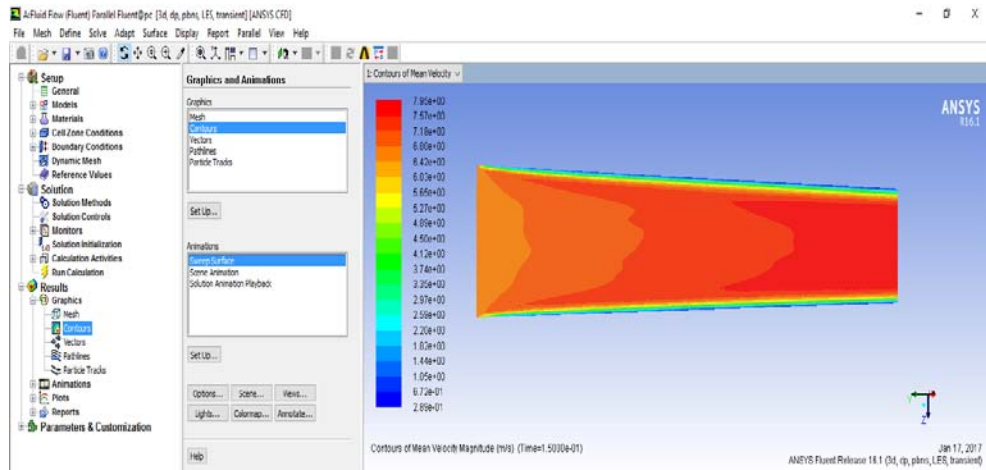
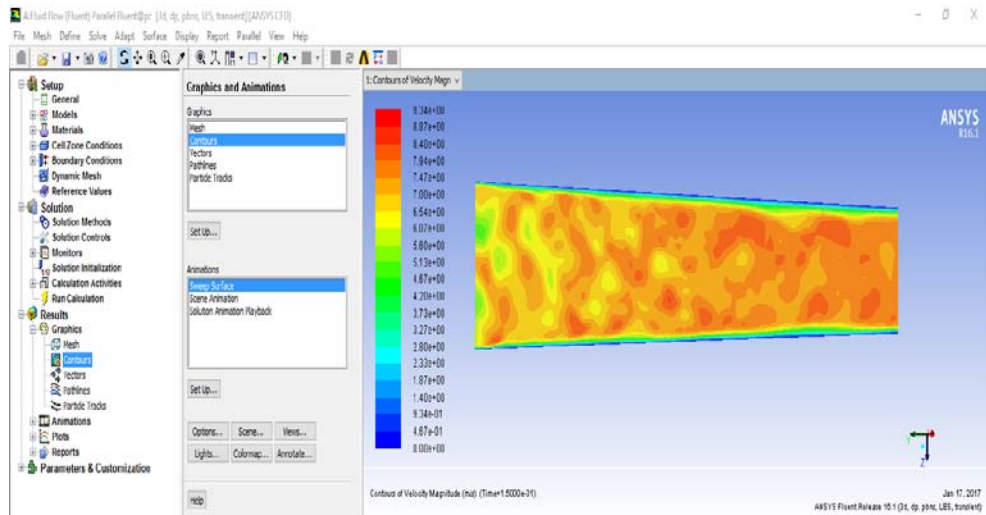
Στο παράθυρο **Plane Surface** επιλέγουμε **Point and Normal** κάτω από τα **Options**. Στα **Points** επιλέγουμε $(x_0(m), y_0(m), z_0(m)) = (0, 0.0635, 0)$, ενώ στο **Normal** επιλέγουμε $(i_x(m), i_y(m), i_z(m)) = (1, 0, 0)$. Κάτω από τη καρτέλα **New Surface Name** αλλάζουμε το όνομα του επιπέδου σε **midplane_les** και πατάμε **Create**. Το επίπεδο μπορούμε να το εμφανίσουμε πηγαίνοντας: **Graphics and Animation>Mesh>Setup**.



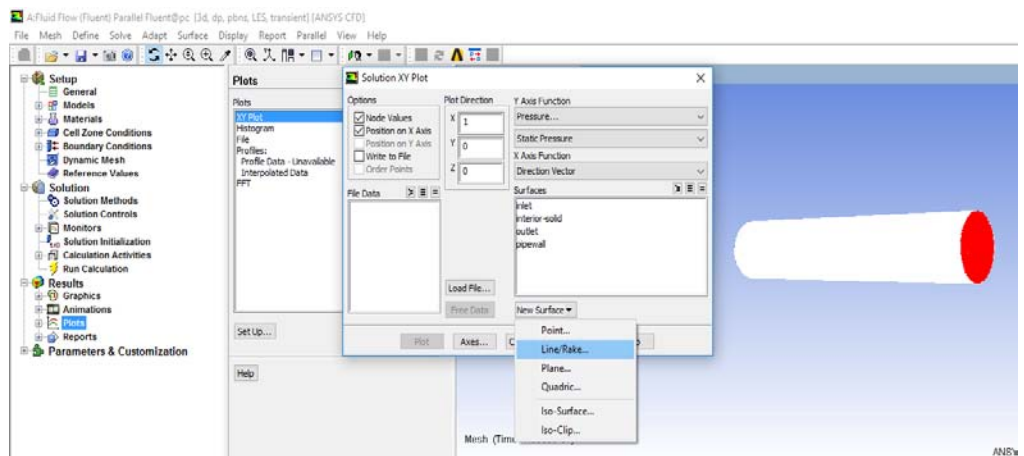
Επιστρέφουμε στο παράθυρο **Contours** και επιλέγουμε κάτω από το **Contours of**, **Velocity** και **Velocity Magnitude**, ενώ και κάτω από την επιλογή **Surfaces** επιλέγουμε το νέο επίπεδο που δημιουργήσαμε στο προηγούμενο βήμα, **midplane_les** και πατάμε **Display**.



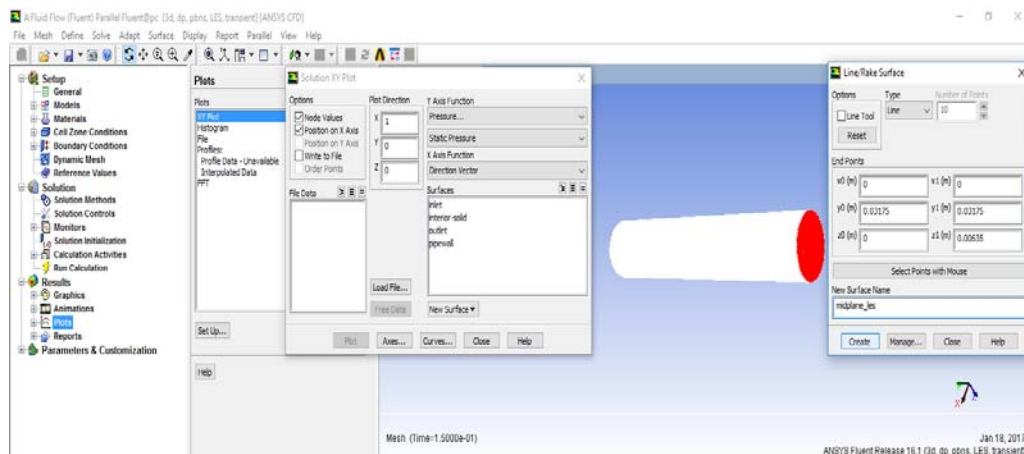
Στα παρακάτω γραφήματα εμφανίζονται τα περιγράμματα της στιγμιαίας και της μέσης ταχύτητας.



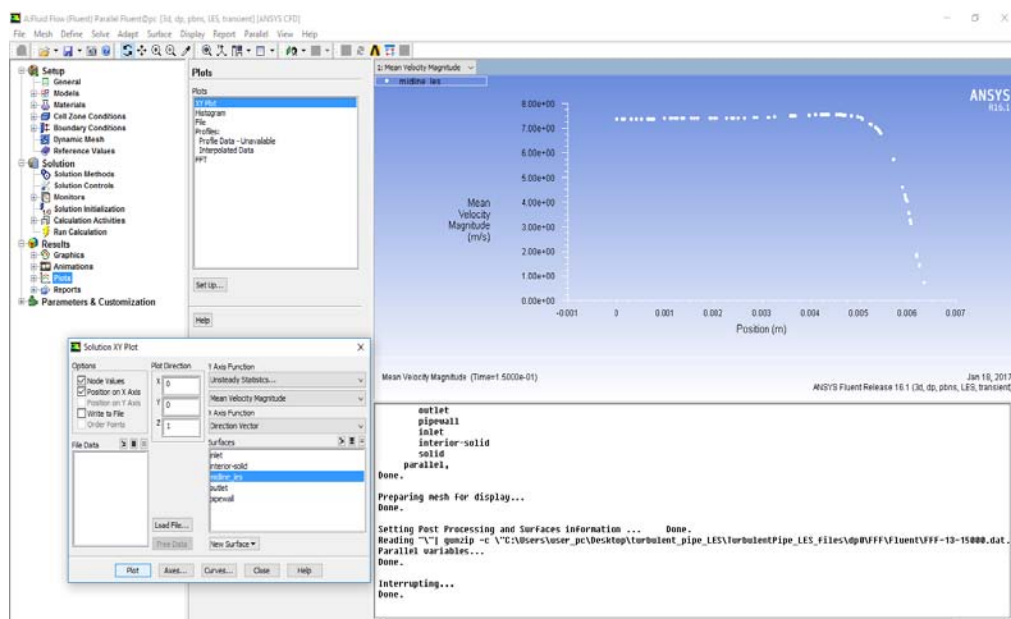
25. Επόμενο βήμα είναι να παρουσιάσουμε ένα γράφημα που να μας δείχνει τη μέση ταχύτητα κατά μήκος του αγωγού, στο κέντρο του και να το συγκρίνουμε με το αποτέλεσμα που θα μας δώσει η τεχνική $k - \epsilon$ αραγότερα. Πάμε: **Plots>XY Plot>Setup** και στο παράθυρο που ανοίγει (**Solution XY Plot**) πάμε στην επιλογή **New Surface** και επιλέγουμε **Line/Rake**.



Στο παράθυρο **Line/Rake Surface** πάμε κάτω από την επιλογή **End Points** και αλλάζουμε τις συντεταγμένες $(x_0 \text{ (m)}, y_0 \text{ (m)}, z_0 \text{ (m)}) = (0, 0.03175, 0)$ και $(x_1 \text{ (m)}, y_1 \text{ (m)}, z_1 \text{ (m)}) = (0, 0.03175, 0.00635)$, ενώ αλλάζουμε και το όνομα της γραμμής κάτω από την επιλογή **New Surface Name** σε **midline_les** και πατάμε **Create**.



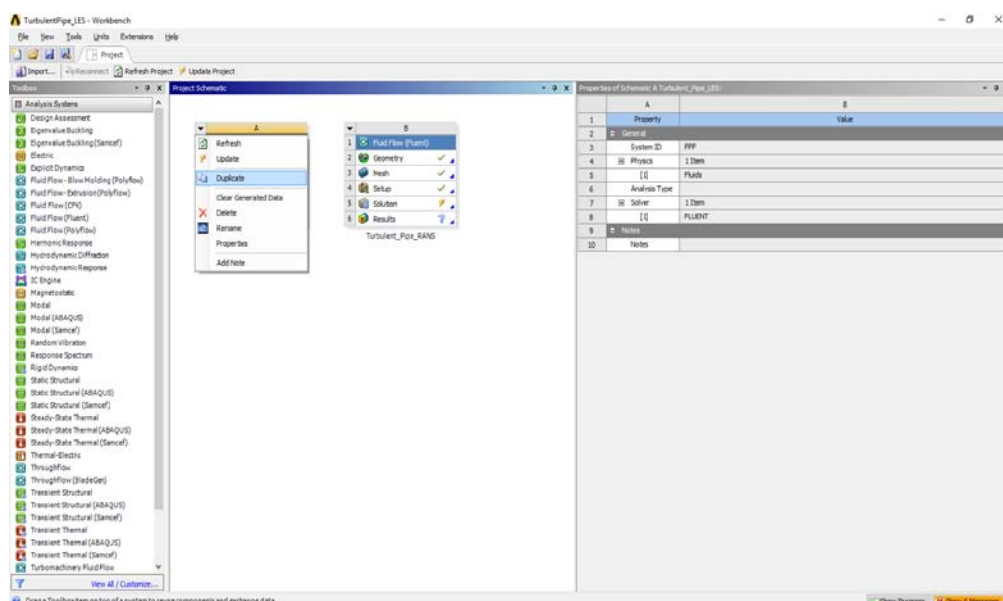
Πάμε πίσω στο παράθυρο **Solution XY Plot** και επιλέγουμε κάτω από την επιλογή **Y Axis Function**, **Unsteady Statistics** και **Mean Velocity Magnitude** και κάτω από το **Plot Direction**, $(X, Y, Z) = (0, 0, 1)$. Επιλέγουμε κάτω από την επιλογή **Surfaces** την γραμμή που δημιουργήσαμε προηγουμένως, **midline_les**, και πατάμε **Plot** για να μας εμφανιστεί το παρακάτω γράφημα που μας δείχνει το περίγραμμα της μέσης ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού, στο κέντρο του.



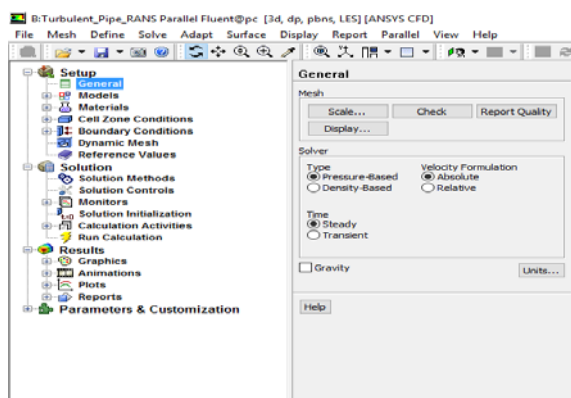
5.3 Διαδικασία επίλυσης τυρβώδους ροής σε αγωγό με χρήση της $k - \epsilon$ στο λογισμικό ANSYS Fluent

Σε αυτή τη παράγραφο παρατίθενται τα βήματα για να τρέξουμε την παραπάνω εφαρμογή με τη χρήση του μοντέλου $k - \epsilon$, αποφεύγοντας ωστόσο το σχεδιαστικό μέρος, χάρις τη δυνατότητα που μας παρέχει το πρόγραμμα ANSYS, του διπλασιασμού.

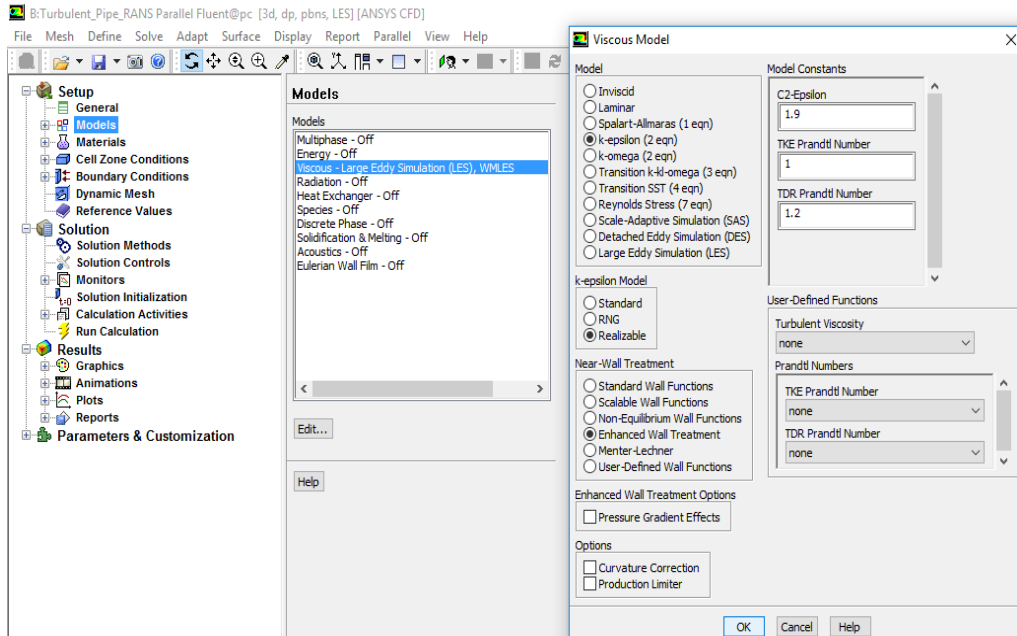
1. Αφού αποθηκεύσουμε στο Fluent τα προηγούμενα αποτελέσματα, το κλείνουμε και επιστρέφουμε πίσω στη **Workbench Project Page** του ANSYS. Πατάμε αριστερό κλικ στο βελάκι που βρίσκεται στο πάνω αριστερό μέρος του **Turbulent_Pipe_LESproject** και πατάμε **Duplicate**, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Το δεύτερο project που θα εμφανιστεί δίπλα το ονομάζουμε **Turbulent_Pipe_RANS** και με αυτό θα τρέξουμε το μοντέλο $k - \epsilon$ στο Fluent.



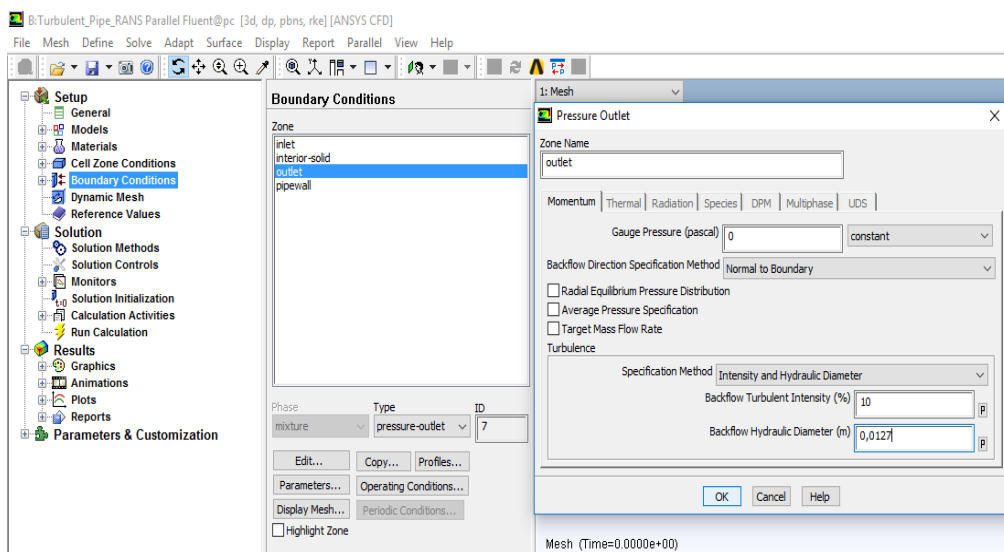
2. Πατάμε διπλό κλικ στο Solution για να ανοίξει το Fluent και στη καρτέλα **General** επιλέγουμε για το **Time** την επιλογή **Steady**.



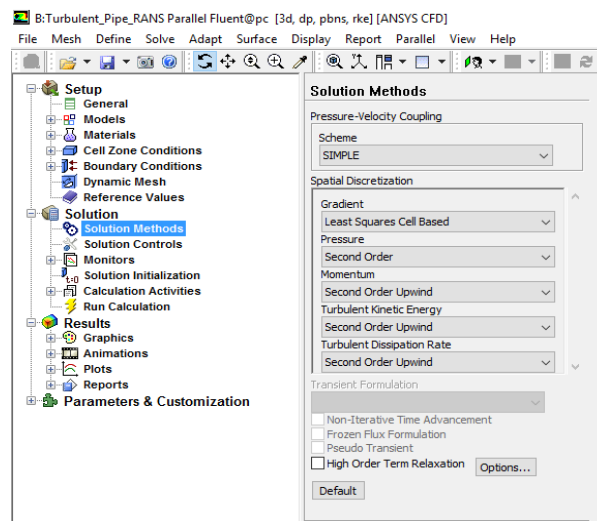
- Μετά πάμε στη καρτέλα **Models>Viscous** και πατάμε στο **Edit**. Στο παράθυρο **Viscous Model** επιλέγουμε **k-epsilon (2 eqn)** κάτω από την επιλογή **Model**, **Realizable** κάτω από τη επιλογή **k-epsilon Model** και **Enhanced Wall Treatment** κάτω από την επιλογή **Near-Wall Treatment**.



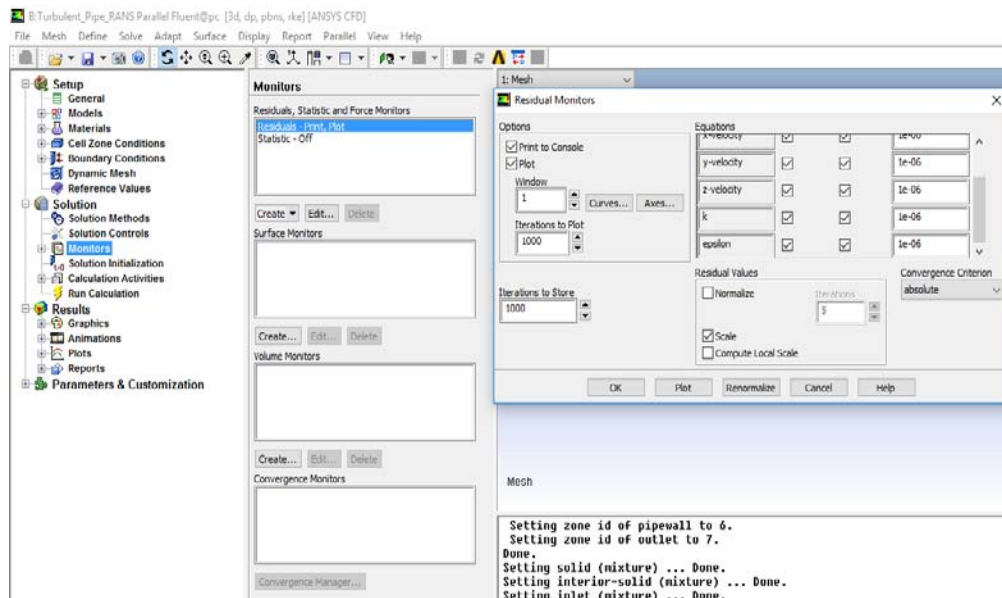
- Επόμενο βήμα είναι να πάμε στη καρτέλα **Boundary Conditions**, επιλέγουμε το **outlet** και πατάμε **Edit**. Στο παράθυρο που άνοιξε (**Pressure Outlet**) μεταβάλλουμε το **Turbulence Specification Method** σε **Intensity and Hydraulic Diameter**, ενώ στις επιλογές από κάτω θέτουμε **Backflow Turbulent Intensity** σε **10%** και **Back flow Hydraulic Diameter** σε **0,0127**.



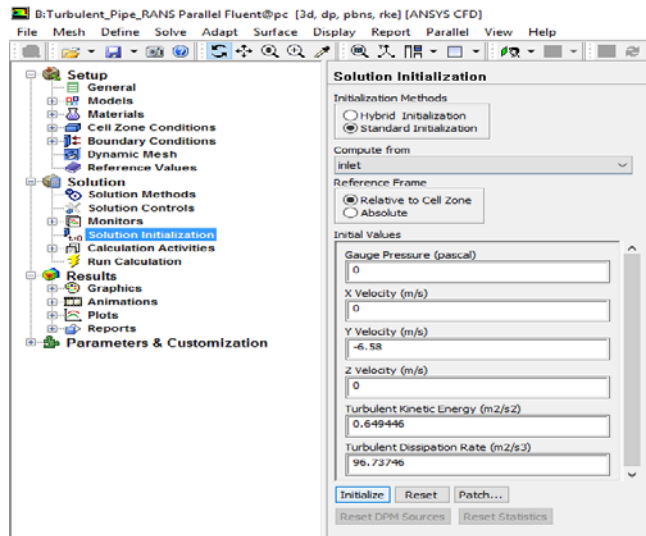
5. Στη συνέχεια πάμε στη καρτέλα **Solution Methods** και επιλέγουμε **Second Order Upwind** κάτω από τις επιλογές **Turbulent Kinetic Energy** και **Turbulent Dissipation Rate**.



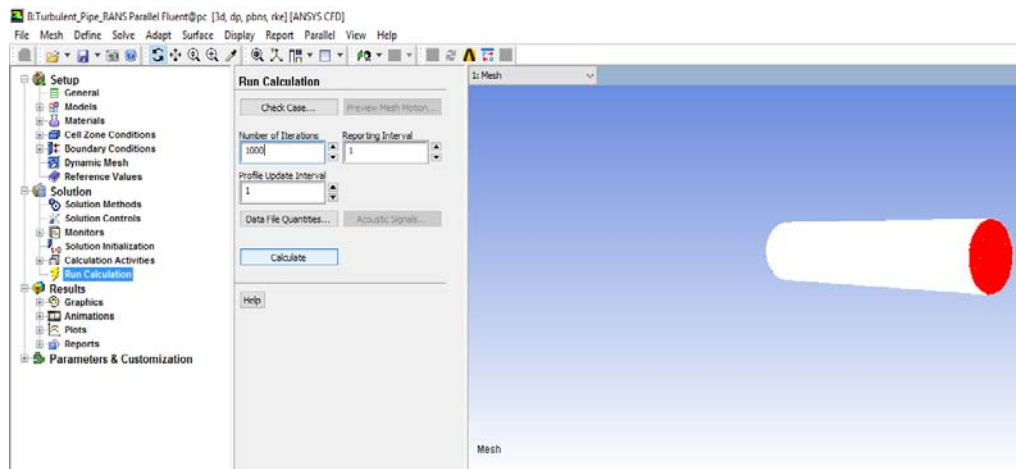
6. Αφού ορίσαμε τη μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων για το **k** και το **ε**, πάμε στη καρτέλα **Monitors>Residual** και πατάμε στο **Edit**. Στο παράθυρο που ανοίγει θέτουμε 1×10^{-6} (**1e - 06**) για τα **k** και **ε** και 1×10^{-5} (**1e - 05**) για το **continuity**.



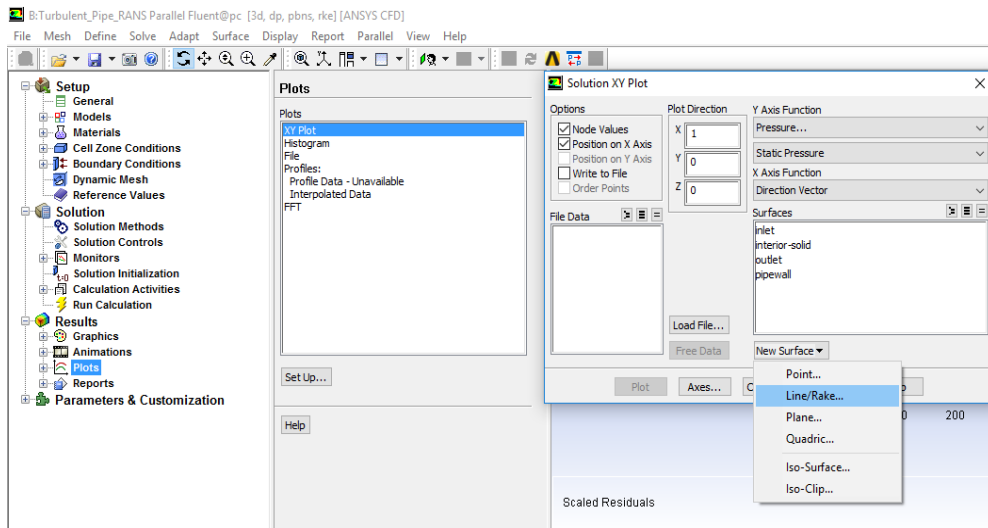
7. Στο επόμενο βήμα πάμε στη καρτέλα **Solution Initialization** και στην επιλογή **Compute from** επιλέγουμε το **inlet** και πατάμε **Initialize**.



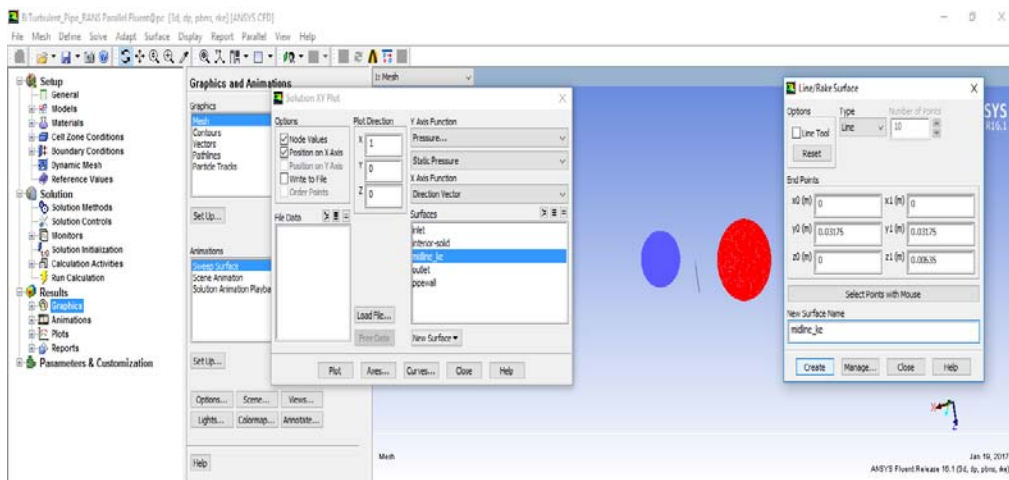
8. Τέλος πάμε στην καρτέλα **Run Calculation**, θέτουμε το **Number of Iterations** σε **1000** και πατά με **Calculate**.



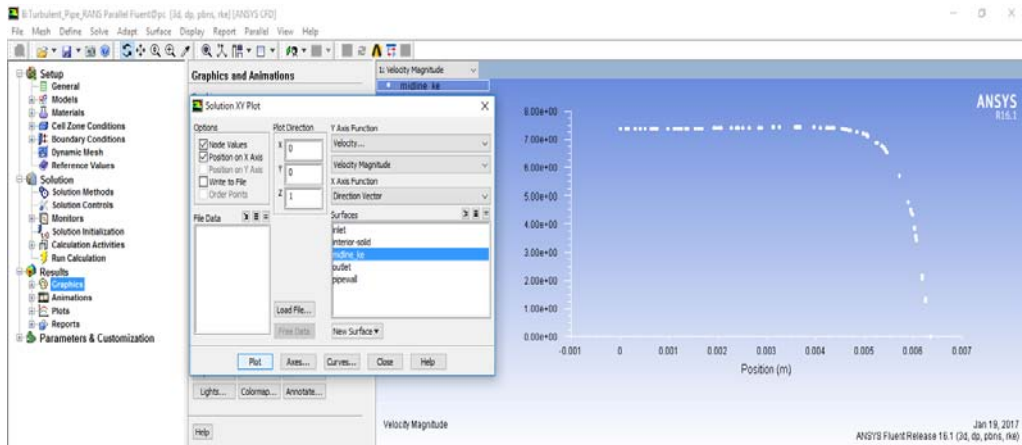
9. Αφού ολοκληρωθούν και οι 1000 επαναλήψεις, θα δημιουργήσουμε όπως και πριν μία γραμμή στη μέση του αγωγού, για να μπορέσουμε να παρουσιάσουμε ένα γράφημα που να μας δείχνει τη μέση ταχύτητα, κατά μήκος του αγωγού, στο κέντρο του. Αυτό θα το καταφέρουμε πηγαίνοντας **Plots>XY Plot>Setup>New Surface>Line/Rake**.



Μόλις ανοίξει το παράθυρο **Line/Rake Surface**, θα πρέπει να επιλέξουμε τις συντεταγμένες για τα δύο σημεία που θα καθορίζουν την γραμμή, όπως και πριν. Θέτουμε $(x_0 \text{ (m)}, y_0 \text{ (m)}, z_0 \text{ (m)}) = (0, 0.03175, 0)$ και $(x_1 \text{ (m)}, y_1 \text{ (m)}, z_1 \text{ (m)}) = (0, 0.03175, 0.00635)$, ενώ αλλάζουμε και ονομασία στη νέα γραμμή σε **midline_ke**. Πατάμε **Create** και κλείνουμε το παράθυρο.



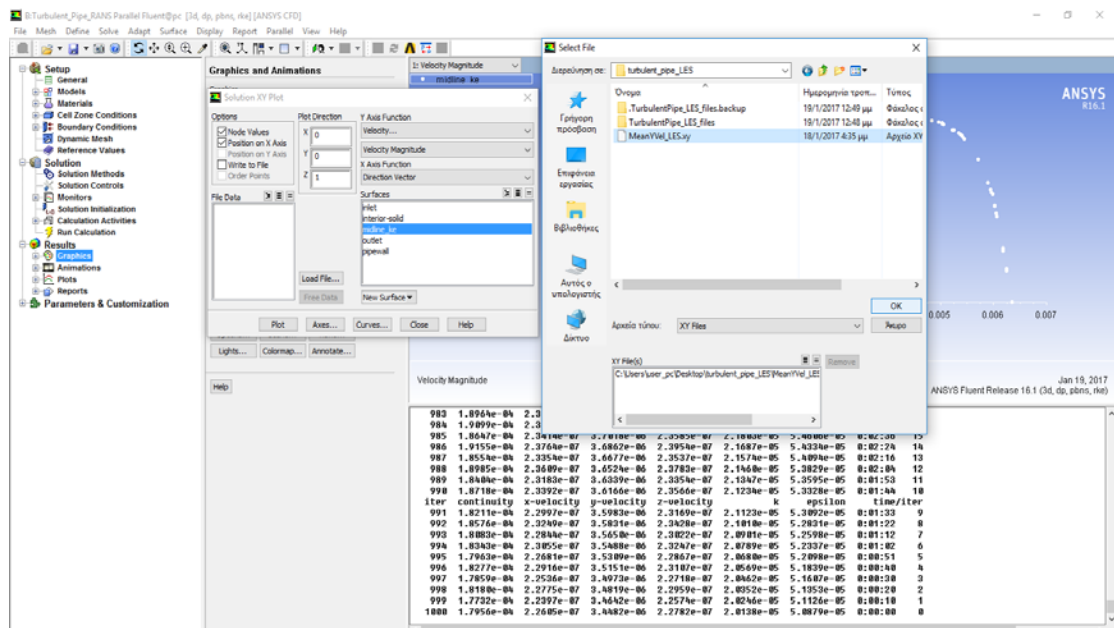
Πάμε πίσω στο παράθυρο **Solution XY Plot** και κάτω από την επιλογή **Y Axis Function** επιλέγουμε **Velocity** και **Velocity Magnitude**, κάτω από το **Plot Direction** θέτουμε $(X, Y, Z) = (0, 0, 1)$, ενώ κάτω από το **Surfaces** επιλέγουμε την γραμμή που δημιουργήσαμε προηγουμένως, **midline_les** και πατάμε **Plot**, ώστε να εμφανιστεί το διάγραμμα της μέσης ταχύτητας.

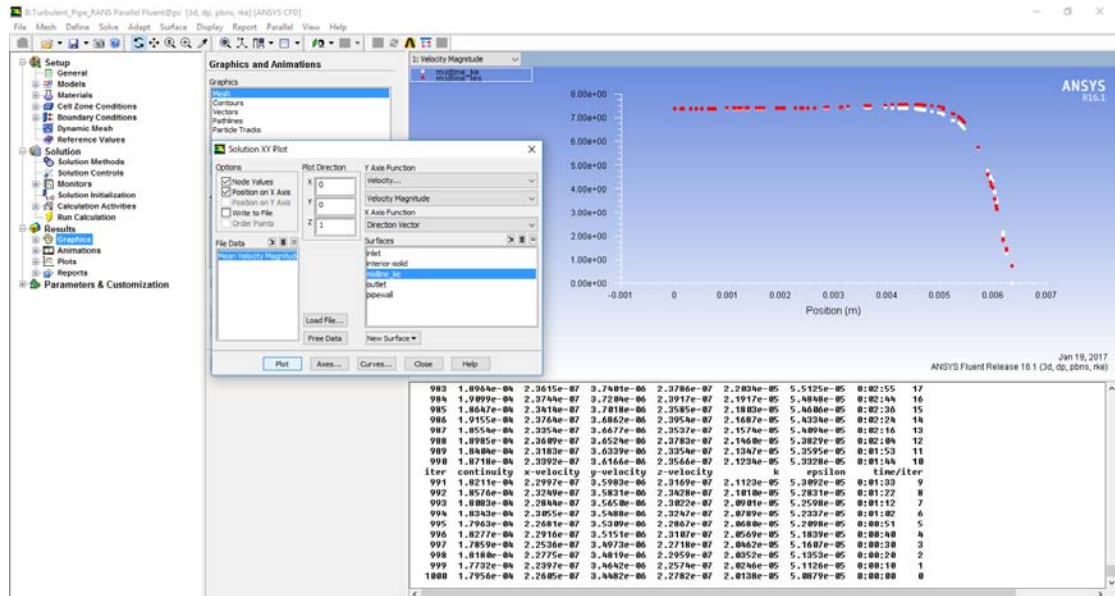


5.4 Σύγκριση επίλυσης τυρβώδους ροής σε αγωγό με χρήση των τεχνικών LES και $k - \epsilon$ στο λογισμικό ANSYS Fluent

Αφού ολοκληρώσαμε την επίλυση της ροής με χρήση της Προσομοίωσης Μεγάλων Δινών (LES), αλλά και του μοντέλου προσομοίωσης των μέσων κατά Reynolds εξισώσεων (RANS), realizable $k - \epsilon$, μπορούμε πλέον να κάνουμε σύγκριση των αποτελεσμάτων και των δύο τεχνικών, για την μέση ταχύτητα που δημιουργείται κατά μήκος του αγωγού στο κέντρο του, μέσω των γραφημάτων που δημιουργήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους.

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα γραφήματα της προσομοίωσης LES και του μοντέλου realizable $k - \epsilon$, πάμε στο παράθυρο **Solution XY Plot** και πάμε στην επιλογή **Load File**. Εκεί επιλέγουμε να φορτώσουμε το αποθηκευμένο έγγραφο από τη προηγούμενη παράγραφο, **MeanYVel_LES.xy**, που περιέχει και το αντίστοιχο διάγραμμα. Αφού φορτωθεί πατάμε **Plot** και εμφανίζονται και τα δύο διαγράμματα στους ίδιους άξονες.





Από το παραπάνω γράφημα, παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα και από τις δύο τεχνικές είναι πολύ κοντά. Άρα για μία τόσο απλή γεωμετρία, όπως ένας κυκλικός αγωγός, η χρήση της τεχνικής LES κρίνεται άσκοπη, διότι ο χρόνος που χρειάστηκε η το πρόγραμμα να τρέξει με χρήση της Προσομοίωσης Μεγάλων Δινών ήταν περίπου 800 ώρες, ενώ με χρήση του μοντέλου realizable $k - \epsilon$ χρειάστηκε μόλις 5 ώρες. Αυτό διότι όπως αναφέραμε παραπάνω, οι πληροφορίες για τη ροή που επεξεργάζεται και αποθηκεύει η LES, είναι πολύ περισσότερες σε σχέση με ένα μοντέλο προσομοίωσης όπως το $k - \epsilon$.

Κεφάλαιο 6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία ασχοληθήκαμε με τη μελέτη τυρβώδους ροής σε κυκλικό αγωγό, με χρήση συγκεκριμένης υπολογιστικής μεθόδου, καθώς επίσης και σύγκριση των αποτελεσμάτων της με άλλη μέθοδο, οι οποίες απαιτούσαν χρήση υπολογιστή. Η μελέτη αυτή επιτεύχθηκε μέσω του λογισμικού πακέτου ANSYS, που μας προσφέρει γραφικό περιβάλλον για τη σχεδίαση του προβλήματος (Design Modeler), έτοιμα πλέγματα αναλόγως τη μέθοδο που θα χρησιμοποιήσουμε (ANSYS Meshing), καθώς επίσης και το λογισμικό Fluent, με το οποίο μπορούμε να προσομοιώσουμε ροές ρευστών. Χρησιμοποιώντας το γραφικό περιβάλλον, αλλά και τα έτοιμα πλέγματα, του ANSYS σχεδιάσαμε και εισάγαμε πλέγμα στον αγωγό μας, ενώ με το λογισμικό Fluent, προσομοιώσαμε σε αυτόν τρισδιάστατη τυρβώδη ροή ρευστού, με συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες ροής, όπως ο αριθμός Reynolds, η πυκνότητα του ρευστού, κλπ. Όπως παρατηρούμε από τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα γραφήματα της μέσης και της στιγμιαίας ταχύτητας, παρατηρούμε ότι η ταχύτητα κοντά στα τοιχώματα τείνει στο 0, ενώ στο κέντρο του αγωγού μεγιστοποιείται. Επίσης από το διάγραμμα που μας δείχνει την μέση ταχύτητα που δημιουργείται κατά μήκος του αγωγού στο κέντρο του, το οποίο πραγματοποιήθηκε, εκτός της τεχνικής LES, και με το μοντέλο τύρβης RANS, $k - \epsilon$, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι λύσεις των δύο διαγραμμάτων είναι πολύ κοντά. Συνεπώς για τυρβώδη ροή ρευστού σε κυκλικό αγωγό, με απλή γεωμετρία (χωρίς καμπύλες, γωνίες, κ.ο.κ.), η χρήση μιας προσομοίωσης όπως είναι η LES, η οποία απαιτεί υψηλό υπολογιστικό κόστος και μεγάλη μνήμη, είναι περιττή, διότι μπορούμε να πετύχουμε ανάλογα συμπεράσματα για τη ροή με χρήση ενός μοντέλου προσομοίωσης, όπως το $k - \epsilon$.

Επιπλέον, ασχοληθήκαμε με την τυρβώδη ροή ρευστού σε κυκλικό αγωγό, συγκεκριμένων διαστάσεων, χωρίς τραχύτητα, με γνωστό ρευστό, του οποίου γνωρίζαμε την πυκνότητα, χρησιμοποιώντας την τεχνική LES. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω θα μπορούσαμε σε μια μελλοντική εργασία να εργαστούμε ως εξής:

- ❖ Κάνοντας παραμετρική μελέτη του αγωγού, δηλαδή, να αλλάξουμε για παράδειγμα τη διάμετρο και/ή το μήκος του αγωγού και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της LES, σε σχέση με την $k - \epsilon$, για να δούμε αν θα υπάρξει ανάλογη ή όχι μεταβολή στην μέση ταχύτητα που δημιουργείται κατά μήκος του αγωγού στο κέντρο του.
- ❖ Αλλάζοντας τη μέθοδο διακριτοποίησης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντί για τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων (και συνεπώς αδόμητο πλέγμα), τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ή φασματικές μεθόδους.

- ❖ Αλλάζοντας τη τραχύτητα του αγωγού στα τοιχώματα
- ❖ Αλλάζοντας τη γεωμετρία του αγωγού, από κυκλικός να γίνει τετραγωνικού σχήματος, οπότε η συμπεριφορά του ρευστού στις γωνίες, οι οποίες είναι σημεία συγκέντρωσης εσωτερικών τάσεων, θα έχει αισθητή διαφορά. Εδώ θα μπορούσαμε ίσως να αλλάζαμε και το μοντέλο σύγκρισης της LES, σε $k - \omega$, αφού έχει σαφώς καλύτερα αποτελέσματα στις περιοχές κοντά στο τοίχωμα από το $k - \varepsilon$.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Επιλεγμένη Ελληνική Βιβλιογραφία:

- i. Κορωνάκης Περικλής <<Μηχανική Ρευστών>>, Τρίτη Έκδοση, Εκδόσεις ΙΩΝ
- ii. Streeter/Wylie/Bedford <<Μηχανική Ρευστών>>, Εκδόσεις Φούντας
- iii. Daugherty/Franzini/Finnemore <<Μηχανική Ρευστών με Τεχνικές Εφαρμογές>>, Εκδόσεις Φούντας
- iv. Παπαϊωάννου Άγγελος <<Μηχανική των Ρευστών, Τόμος Ι>>, Δεύτερη Έκδοση, Εκδόσεις Κοράλι
- v. Παπαϊωάννου Άγγελος <<Μηχανική των Ρευστών, Τόμος ΙΙ>>, Δεύτερη Έκδοση, Εκδόσεις Κοράλι
- vi. Κορωνάκης Περικλής <<Εφαρμοσμένη Ρευστομηχανική>>, Δεύτερη Έκδοση, Εκδόσεις ΙΩΝ
- vii. Νικολόπουλος Νικόλαος/Νίκας Κων/νος-Στέφανος/Μουστρής Κωνσταντίνος <<Εφαρμοσμένη Ρευστομηχανική>>, Αθήνα 2011
- viii. Ferziger/Peric <<Υπολογιστική Ρευστοδυναμική>>, Τρίτη Έκδοση, Εκδόσεις Φούντας
- ix. Zikanon <<Εισαγωγή στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική>>, Εκδόσεις Φούντας
- x. Versteeg/Malalasekera <<Εισαγωγή στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική, Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Όγκων>>, Δεύτερη Έκδοση, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ
- xi. Μπεργελές Γεώργιος <<Υπολογιστική Ρευστομηχανική>>, Πέμπτη Έκδοση, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ
- xii. Μαυρίδης Κωνσταντίνος <<Υπολογιστική Ρευστομηχανική>>, Εκδόσεις ΙΩΝ
- xiii. Παπαϊωάννου Άγγελος <<Ανύσματα και Τανυστές>>, Εκδόσεις Κοράλι

Επιλεγμένη Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

- i. Y. Cengel/J. Cimbala <<Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications>>, McGraw-Hill Publications
- ii. F. White <<Fluid Mechanics>> Fourth Edition, McGraw-Hill Publications
- iii. D. Wilcox <<Turbulence Modeling for CFD>>, Third Edition, DCW Industries
- iv. J. Blazek <<Computational Fluid Dynamics, Principles and Applications>>, Elsevier Science
- v. B. Andersson/R. Andersson/Hakansson/Mortensen/Sudiyo/van Wachem <<Computational Fluid Dynamics for Engineers>>, Cambridge University Press
- vi. F. Grinstein/L. Margolin/W. Rider <<Implicit Large Eddy Simulation, Computing Turbulent Fluid Dynamics>>, Cambridge University Press
- vii. S. Hickel <<Implicit Turbulence Modeling for Large Eddy Simulation>>, under Latex Project Public License

Papers:

- i. J. Fröhlich/D. von Terzi <<Hybrid LES/RANS Methods for the Simulation of Turbulent Flows>>, 16 May 2008, Technische Universität Dresden
- ii. O. Vasilyev <<Adaptive LES Methodology for Turbulent Flow Simulations>>, University of Colorado