ΑΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ Τ.Τ.
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Τ.Ε.

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εκμάθηση της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος (ΨΕΣ) με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Πέτρος Αμιράλης-Κατσαρός

Εισηγητής: Δρ Αναστασία Βελώνη, Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εκμάθηση του ΨΕΣ με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Πέτρος Αμιράλης-Κατσαρός
Α.Μ. 43351

Εισηγητής:

Δρ Αναστασία Βελώνη, Καθηγητής

Εξεταστική Επιτροπή:

Ημερομηνία εξέτασης

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Αμιράλης-Κατσαρός Πέτρος ,του Αμιράλη Αντώνη, με αριθμό μητρώου 43351 φοιτητής του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ Συστημάτων Τ.Ε. του Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ. πριν αναλάβω την εκπόνηση της Πτυχιακής Εργασίας μου, δηλώνω ότι ενημερώθηκα για τα παρακάτω:

«Η Πτυχιακή Εργασία (Π.Ε.) αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο του συγγραφέα, όσο και του Ιδρύματος και θα πρέπει να έχει μοναδικό χαρακτήρα και πρωτότυπο περιεχόμενο.

Απαγορεύεται αυστηρά οποιοδήποτε κομμάτι κειμένου της να εμφανίζεται αυτούσιο ή μεταφρασμένο από κάποια άλλη δημοσιευμένη πηγή. Κάθε τέτοια πράξη αποτελεί προϊόν λογοκλοπής και εγείρει θέμα Ηθικής Τάξης για τα πνευματικά δικαιώματα του άλλου συγγραφέα. Αποκλειστικός υπεύθυνος είναι ο συγγραφέας της Π.Ε., ο οποίος φέρει και την ευθύνη των συνεπειών, ποινικών και άλλων, αυτής της πράξης.

Πέραν των όποιων ποινικών ευθυνών του συγγραφέα σε περίπτωση που το Ίδρυμα του έχει απονείμει Πτυχίο, αυτό ανακαλείται με απόφαση της Συνέλευσης του Τμήματος. Η Συνέλευση του Τμήματος με νέα απόφασης της, μετά από αίτηση του ενδιαφερόμενου, του αναθέτει εκ νέου την εκπόνηση της Π.Ε. με άλλο θέμα και διαφορετικό επιβλέποντα καθηγητή. Η εκπόνηση της εν λόγω Π.Ε. πρέπει να ολοκληρωθεί εντός τουλάχιστον ενός ημερολογιακού 6μήνου από την ημερομηνία ανάθεσης της. Κατά τα λοιπά εφαρμόζονται τα προβλεπόμενα στο άρθρο 18, παρ. 5 του ισχύοντος Εσωτερικού Κανονισμού.»

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εκπονήθηκε από τον φοιτητή Αμιράλη-Κατσαρό Πέτρο του τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστικών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Πειραιά Τεχνολογικού Τομέα κατά το ακαδημαϊκό έτος 2017 υπό την επίβλεψη της καθηγήτριας Αναστασία Βελώνη.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά και να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην καθηγήτριά μου που με εμπιστεύθηκε με το συγκεκριμένο θέμα, την πολύτιμη βοήθεια της αλλά και τον χρόνο που διέθεσε για την διεκπεραίωση της πτυχιακής μου εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες στην οικογένειά μου και ιδιαίτερα στον πολυαγαπημένο μου θείο, οι οποίοι στήριξαν τις σπουδές μου με ποικίλους τρόπους, φροντίζοντας για την καλύτερη δυνατή μόρφωση μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει ως αντικείμενο την εκμάθηση του ΨΕΣ (Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος) με την βοήθεια ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής.
Οι ερωτήσεις περιλαμβάνουν ένα αρκετά μεγάλο μέρος της θεωρίας της επεξεργασίας σημάτων συμπεριλαμβανομένων μεταξύ άλλων, εφαρμογές συστημάτων διακριτού χρόνου, μετασχηματισμού-Ζ και μετασχηματισμού Fourier.

ABSTRACT

The present dissertation has a subject the leaning of digital signal processing with the help of multiple choice questions.
The exercises cover a significant part of the theory of signal processing including amongst other, implementation of discrete time systems, Z transform and Fourier transform.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων
ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: ψηφιακή επεξεργασία, μετασχηματισμοί

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α'

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η ψηφιακή επεξεργασία σήματος ασχολείται με την ψηφιακή αναπαράσταση των σημάτων και την ανάλυση, τροποποιήση και εξαγωγή πληροφοριών από αυτά, με τη βοήθεια ψηφιακών επεξεργαστών. Περιπτώσεις κατά τις οποίες θέλουμε να αφαιρέσουμε θόρυβο από ένα σήμα ή να βρούμε το μετασχηματισμό Fourier κάποιων δεδομένων ή να δώσουμε σ' ένα σήμα μορφή πιο κατάλληλη για επεξεργασία και ανάλυση της πληροφορίας που εμπεριέχει, αποτελούν παραδείγματα της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Αυτή χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο σε πολλές περιοχές εφαρμογών όπου παραδοσιακά χρησιμοποιούνταν αναλογικές μορφές επεξεργασίας, αλλά και σε νέες εφαρμογές στις οποίες οι αναλογικές μέθοδοι είναι δύσκολο ή και αδύνατον να χρησιμοποιηθούν. Το γεγονός αυτό οφείλεται στα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η ψηφιακή επεξεργασία σήματος.

Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους θα προτιμούσαμε την ψηφιακή επεξεργα- σία ενός σήματος έναντι της αναλογικής. Κατά πρώτιστο λόγο, ένα ψηφιακό προ- γραμματιζόμενο σύστημα παρουσιάζει μεγάλη ευελιξία στην τροποποίηση των πράξεων ψηφιακής επεξεργασίας με μια απλή μετατροπή του προγράμματος. Μια τέτοια τροποποίηση ενός αναλογικού συστήματος συνεπάγεται την επανασχεδίαση του κυκλώματος και συνεπακόλουθο έλεγχο και επιβεβαίωση (testing and verification) της ορθής λειτουργίας του.

Σε πολλές περιπτώσεις, η ψηφιακή επεξεργασία ενός σήματος έχει χαμηλότερο κόστος από την αντίστοιχη αναλογική. Αυτό μπορεί να οφείλεται είτε στο ότι το υλικό (hardware) σήμερα είναι φθηνότερο είτε στην ευελιξία που παρέχεται λόγω της ψηφιακής υλοποίησης. Αποτέλεσμα των πλεονεκτημάτων της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος είναι η διαρκώς αυξανόμενη χρήση της σε όλο και περισσότερους τομείς εφαρμογών, όπως στην επεξεργασία ομιλίας, στη μετάδοση σήματος σε τηλεφωνικά κανάλια, στη σεισμολογία, στη γεωφυσική, στην ιατρική, στην εξερεύνηση του διαστήματος, στη μετεωρολογία, κ.ά.

Αποτέλεσμα των πλεονεκτημάτων της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος είναι η διαρκώς αυξανόμενη χρήση της σε όλο και περισσότερους τομείς εφαρμογών, όπως στην επεξεργασία ομιλίας, στη μετάδοση σήματος σε τηλεφωνικά κανάλια, στη σεισμολογία, στη γεωφυσική, στην ιατρική, στην εξερεύνηση του διαστήματος, στη μετεωρολογία, κ.ά.

Φυσικά, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος έχει και τα όριά της, τα οποία οφείλονται στους περιορισμούς που τίθενται στην ταχύτητα λειτουργίας των μετατροπέων ανα- λογικού σήματος σε ψηφιακό, καθώς και στους ίδιους τους ψηφιακούς επεξεργαστές σήματος. Έτσι, σήματα με εξαιρετικά μεγάλο εύρος συχνοτήτων, για παράδειγμα, σήματα με εύρος συχνοτήτων της τάξεως των 100 MHz, υφίστανται επεξεργασία ακόμα και σήμερα με αναλογικές μεθόδους.

2. ΕΡΩΤΟΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

2.1 Εφαρμογή Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

Θεωρία:

Από αυστηρά μαθηματικής απόψεως, σαν **σύστημα διακριτού χρόνου** ορίζεται ένας οποιοσδήποτε μετασχηματισμός ή τελεστής (operator) ο οποίος δρα σε μία ακολουθία x[n], που συνήθως θεωρείται σαν ακολουθία εισόδου, και γεννά μία άλλη ακολουθία y[n], που συνήθως θεωρείται σαν ακολουθία εξόδου.

Ασκήσεις:

1. Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση y(n)=ay(n-1)+bx(n) είναι ένα αναδρομικό σύστημα.

   α) Σωστό
   β) Λάθος

   Απάντηση: **α**

   Επεξήγηση: Εφόσον η παρούσα έξοδος εξαρτάται από την τιμή της προηγούμενης, το σύστημα ονομάζεται αναδρομικό σύστημα.

2. Για να υλοποιηθεί το γραμμικά αμετάβλητου χρόνου αναδρομικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

   $$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_{ky(n-k)+} \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

   σε απευθείας μορφή –I, πόσα στοιχεία καθυστέρησης και πολλαπλασιαστές απαιτούνται αντίστοιχα;

   α) M+N+1, M+N
   β) M+N-1, M+N
   γ) M+N, M+N+1
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: **γ**

   Επεξήγηση: Από την δοθείσα εξίσωση υπάρχουν M+N καθυστερήσεις, άρα χρειάζονται M+N στοιχεία καθυστέρησης και πρέπει να εκτελεστούν M+N+1 πολλαπλασιασμοί. Άρα, ο αριθμός των πολλαπλασιαστών είναι M+N+1.

3. Ποια από τα παρακάτω γραμμικά αμετάβλητου χρόνου συστήματα είναι αναδρομικό σύστημα;

α) $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_{ky(n-k)+} \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$
β) $y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_{ky(n-k)+} \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$
γ) $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_{ky(n-k)-} \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$
δ) $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_{ky(n-k)+} b_0 x(n)$

<u>Απάντηση</u>: δ

<u>Επεξήγηση</u>: Εφόσον η έξοδος του συστήματος εξαρτάται μόνο από τις προηγούμενες τιμές εξόδου και από τις τωρινές τιμές τις εισόδου το σύστημα ονομάζεται «αναδρομικό σύστημα».

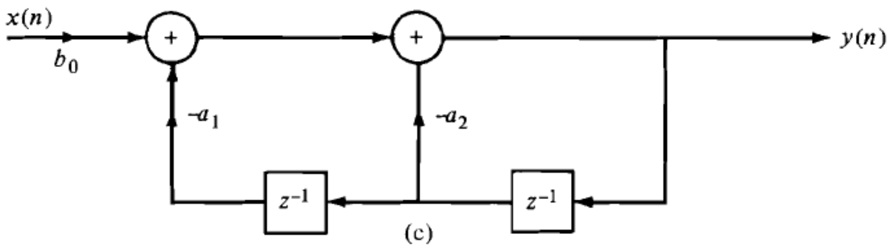
4. Ποια από τις παρακάτω είναι η εξίσωση διαφορών μιας ειδικής περίπτωσης FIR συστήματος;

α) $y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$
β) $y(n) = a_0 y(n) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$
γ) $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$
δ) Καμία από τις παραπάνω

<u>Απάντηση</u>: α

<u>Επεξήγηση</u>: Εάν οι συντελεστές των παρελθόντων τιμών της εξόδου στην εξίσωση διαφορών του συστήματος, τότε το σύστημα λέγεται ότι είναι FIR σύστημα.

5. Τι εκφράζει το παρακάτω σύστημα;

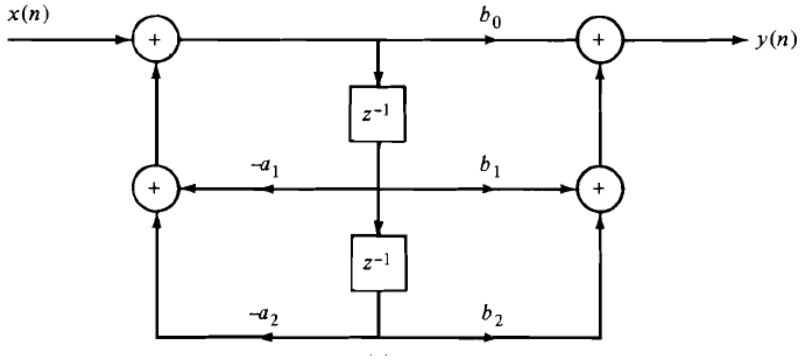


α) Σύστημα FIR
β) Καθαρά αναδρομικό σύστημα
γ) Γενικού δευτέρου βαθμού σύστημα
δ) Κανένα από τα παραπάνω

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Εφόσον η έξοδος του συστήματος εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή της εισόδου και τις παρελθούσες τιμές της εξόδου, το σύστημα είναι καθαρά αναδρομικό σύστημα.

6. Ποια είναι η έξοδος του συστήματος που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα;



α) y(n)= $-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)-b_0x(n)-b_1x(n-1)-b_2x(n-2)$
β) y(n)= $-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)+b_0x(n)$
γ) y(n)= $-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)+b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$
δ) y(n)= $a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$

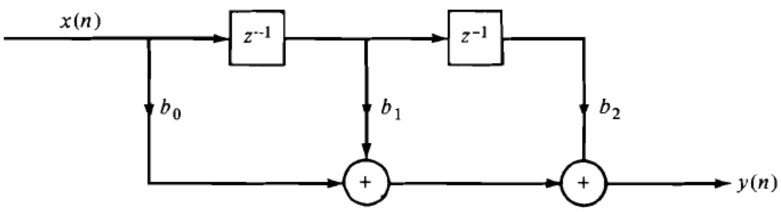
Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Η εξίσωση της εξίσωσης διαφοράς οποιουδήποτε συστήματος ορίζεται ως:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Στο δοθέν διάγραμμα, N=M=2. Άρα, αντικαθιστώντας τις τιμές των N και M στην παραπάνω εξίσωση λαμβάνουμε:
y(n)= $-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)+b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$

7. Τι εκφράζει το παρακάτω σύστημα;



α) Γενικό σύστημα δευτέρου βαθμού
β) Καθαρά αναδρομικό σύστημα
γ) Μερικώς αναδρομικό σύστημα
δ) Σύστημα FIR

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Η έξοδος του συστήματος σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα δίνεται από :
y(n)= $b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$

Εφόσον η έξοδος του συστήματος είναι καθαρά εξαρτώμενη από τις τιμές της εισόδου, το σύστημα ονομάζεται FIR.

8. Ένα FIR σύστημα ονομάζεται επίσης «αναδρομικό σύστημα».

α) Σωστό
β) Λάθος

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Για ένα σύστημα να είναι αναδρομικό, η έξοδος του συστήματος πρέπει να εξαρτάται μόνο από τις παρελθούσες τιμές της εξόδου. Σε ένα FIR σύστημα η έξοδος του συστήματος πρέπει να εξαρτάται μόνο από τις παρούσες και παρελθούσες τιμές της εισόδου. Άρα, ένα FIR σύστημα δεν είναι αναδρομικό σύστημα.

9. Ποια είναι η μορφή του FIR συστήματος για να υπολογιστεί ο κινητός μέσος όρος του σήματος x(n);

α) $y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k)$

β) $y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n+k)$

γ) $y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)$

δ) Κανένα από τα παραπάνω

<u>Απάντηση</u>: α

<u>Επεξήγηση</u>: Ένα κανονικό μη αναδρομικό FIR σύστημα με κρουστική απόκριση h(n)= 1/(M+1) είναι το σύστημα το οποίο χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί ο κινητός μέσος όρος του σήματος x(n).

10. Ποιές από τις παρακάτω εξισώσεις είναι η αναδρομική μορφή ενός μη αναδρομικού συστήματος:

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k)$$

α) y(n)=y(n-1)+ 1/(M +1)[x(n)+x(n-1-M)]
β) y(n)=y(n-1)+ 1/(M +1)[x(n)+x(n-1+M)]
γ) y(n)=y(n-1)+ 1/(M +1)[x(n)-x(n-1+M)]
δ) y(n)=y(n-1)+ 1/(M+1)[x(n)-x(n-1-M)]

<u>Απάντηση</u>: δ

<u>Επεξήγηση</u>: Η δοθείσα εξίσωση του συστήματος:

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k)$$

Μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-1-k) + \frac{1}{M+1}[x(n)-x(n-1-M] = y(n-1) + \frac{1}{M+1}[x(n)-x(n-1-M)]$$

11. Το σύστημα το οποίο εκφράζεται από την εξίσωση y(n)=ay(n+1)+b x(n) είναι ένα αναδρομικό σύστημα.

    α) Σωστό
    β) Λάθος

    Απάντηση: **β**

    Επεξήγηση: Εφ' όσον η παρούσα έξοδος εξαρτάται από την τιμή της μελλοντικής εξόδου, το σύστημα δεν λέγεται Αναδρομικό σύστημα.

2.1 Περιγραφή Συστημάτων Διακριτού Χρόνου με Εξισώσεις Διαφορών

Θεωρία:

Με τον όρο **περιγραφή** ενός συστήματος εννοούμε μία μαθηματική σχέση που συσχετίζει την είσοδο, το σύστημα και την έξοδο του συστήματος. Αυτή η μαθηματική σχέση αποτελεί και το λεγόμενο μαθηματικό μοντέλο ή πρότυπο του συστήματος.

Για το ίδιο σύστημα μπορούν να αναπτυχθούν πολλά διαφορετικά μαθηματικά πρότυπα αναλόγως του είδους των μαθηματικών εργαλείων που υιοθετούνται ή του βαθμού προσέγγισης της περιγραφής του συστήματος.

Ασκήσεις:

1. Εάν το σύστημα είναι αρχικά σε ηρεμία στον χρόνο n=0 και η μνήμη ισούται με μηδέν, τότε η απόκριση αυτής της κατάστασης ονομάζεται:

    α) Κατάσταση μηδενικής απόκρισης
    β) Απόκριση μηδενικής εισόδου
    γ) Απόκριση μηδενικής κατάστασης
    δ) Κανένα από τα παραπάνω

    Απάντηση: **β**

    Επεξήγηση: Η κατάσταση μηδενικής απόκρισης εξαρτάται από την φύση του συστήματος και από εισερχόμενο σήμα. Εφ' όσον αυτή η έξοδος είναι μία απόκριση εξαναγκασμένη πάνω σε αυτό από το εισερχόμενο σήμα, είναι επίσης γνωστή και σαν «εξαναγκασμένη απόκριση».

2. Η κατάσταση μηδενικής απόκρισης είναι επίσης γνωστή ως:

   α) Ελεύθερη απόκριση
   β) Εξαναγκασμένη απόκριση
   γ) Φυσική απόκριση
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: **β**

   Επεξήγηση: Η κατάσταση μηδενικής απόκρισης εξαρτάται από την φύση του συστήματος και από εισερχόμενο σήμα. Εφ' όσον αυτή η έξοδος είναι μία απόκριση εξαναγκασμένη πάνω σε αυτό από το εισερχόμενο σήμα, είναι επίσης γνωστή και σαν «εξαναγκασμένη απόκριση».

3. Η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι επίσης γνωστή σαν Φυσική ή Ελεύθερη απόκριση.

   α) Σωστό
   β) Λάθος

   Απάντηση: **α**

   Επεξήγηση: Για μια απόκριση μηδενικής εισόδου, η είσοδος είναι μηδέν και η έξοδος του συστήματος είναι ανεξάρτητη από την είσοδο του συστήματος. Άρα, η απόκριση ενός τέτοιου συστήματος είναι επίσης γνωστή σαν Φυσική η Ελεύθερη απόκριση.

4. Η λύση η οποία δίνεται θεωρώντας ότι η είσοδος x(n) του συστήματος είναι μηδέν:

   α) Γενική λύση
   β) Ιδιαίτερη λύση
   γ) Πλήρης λύση
   δ) Ομοιογενής λύση

   Απάντηση: **δ**

   Επεξήγηση: Θέτοντας την είσοδο x(n)=0 λαμβάνουμε μία ομοιογενή εξίσωση διαφορών και η λύση μιας τέτοιας εξίσωσης διαφορών είναι γνωστή σαν Ομοιογενής ή Συμπληρωματική λύση.

5. Ποια είναι η ομοιογενής λύση του συστήματος το οποίο περιγράφεται από την πρώτου βαθμού εξίσωση διαφοράς: y(n)+ay(n-1)=x(n);

   α) c$(a)^n$ (όπου "c" είναι μια σταθερά)
   β) c$(a)^{-n}$
   γ) c$(-a)^n$
   δ) c$(-a)^{-n}$

<u>Απάντηση</u>: γ

<u>Επεξήγηση</u>: Η θεωρούμενη λύση η οποία λαμβάνεται θέτοντας x(n)=0 είναι: $y_h(n) = \lambda^n$ => y(n)+ay(n-1)=0 => λ^n+a λ^{n-1} = 0 => λ^{n-1}(λ+α) = 0 => λ= -a => $y_h(n) = c\lambda^n = c(-a)^n$

6. Ποια είναι η μηδενικής απόκρισης είσοδος του συστήματος το οποίο περιγράφεται από την ομοιογενή δευτέρου βαθμού εξίσωση y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=0 εάν οι αρχικές συνθήκες είναι y(-1)=5 και y(-2)=0;

α) $(-1)^{n-1}$+$(4)^{n-2}$
β) $(-1)^{n+1}$+$(4)^{n+2}$
γ) $(-1)^{n+1}$+$(4)^{n-2}$
δ) Καμία από τις παραπάνω

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Η δοθείσα εξίσωση διαφοράς είναι y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=0 (1)
Θέτουμε y(n) = λn
Αντικαθιστώντας y(n) στην δοθείσα εξίσωση

$$=> \lambda^n - 3\,\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = 0$$

$$=> \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$

Οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης είναι λ=-1,4
Επομένως, η γενική μορφή της λύσης της ομοιογενούς εξίσωσης είναι:

$$y_h(n)=C_1{\lambda_1}^n + C_2{\lambda_2}^n$$
$$= C_1(-1)^n + C_2(4)^n$$

Η μηδενικής απόκρισης είσοδος του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί από την ομοιογενή λύση υπολογίζοντας τις σταθερές της εξίσωσης, δοθέντων των αρχικών συνθηκών y(-1) και y(-2).

- Από την δοθείσα εξίσωση (1)
- y(0)=3y(-1)+4y(-2)
- y(1)=3y(0)+4y(-1)

=13y(-1)+12y(-2)

- Από την εξίσωση (2)
- y(0)=C1+C2 και
- y(1)=C1(-1)+C2(4)=-C1+4C2

Εξισώνοντας αυτές τις δύο σχέσεις:

- C1+C2=3y(-1)+4y(-2)=15
- C1+4C2=13y(-1)+12y(-2)=65

Λύνοντας τις δύο πιο πάνω εξισώσεις λαμβάνουμε C1=-1 και C2=16
Επομένως η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι

$$y_{zi}(n) = (-1)^{n+1} + (4)^{n+2}$$

7. Ποια είναι η ιδιαίτερη λύση του πρώτου βαθμού εξίσωσης διαφορών: y(n)+ay(n-1)=x(n), όπου |a| < 1, όταν η είσοδος του συστήματος είναι x(n) = u(n);

   α) 1/(1+α) u(n)
   β) 1/(1-α) u(n)
   γ) 1/(1+α)
   δ) 1/(1-α)

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Η θεωρούμενη λύση της εξίσωσης διαφοράς της εξαναγκασμένης εξίσωσης x(n), η οποία ονομάζεται ιδιαίτερη λύση της εξίσωσης διαφοράς είναι:

   $y_p(n)=Kx(n)=Ku(n)$ (όπου K είναι ένας παράγοντας κλιμάκωσης)

   Αντικαθιστώντας την πιο πάνω εξίσωση στην δοθείσα εξίσωση

   Ku(n)+aKu(n-1)=u(n). Για να προσδιορίσουμε το K πρέπει να υπολογίσουμε την πιο πάνω εξίσωση για κάθε n >= 1, έτσι ώστε κανένας όρος να μην εξαφανίζεται.

   => K+aK=1

   =>K=1/(1+α)

   Επομένως η ιδιαίτερη λύση είναι: $y_p(n)$= 1/(1+α) u(n).

8. Ποια είναι η ιδιαίτερη λύση της εξίσωσης διαφοράς y(n)= 5/6y(n-1)- 1/6y(n-2)+x(n) όταν η εξαναγκασμένη συνάρτηση $x(n)=2^n$, n≥0 και μηδέν οπουδήποτε αλλού;

   α) (1/5) 2^n
   β) (5/8) 2n
   γ) (8/5) 2n
   δ) (5/8) 2-n

   Απάντηση: γ

   Επεξήγηση: Η θεωρούμενη λύση της εξίσωσης διαφοράς στην εξαναγκασμένη εξίσωση x(n), ονομαζόμενη η ιδιαίτερη λύση της εξίσωσης διαφοράς είναι:

   $y_p(n)=Kx(n)=K2^nu(n)$ (όπου K είναι ένας παράγοντας κλιμάκωσης)

   Αντικαθιστώντας $y_p(n)$ στην εξίσωση διαφοράς λαμβάνουμε:

   $K2^nu(n)=5/6K2^{n-1}u(n-1)-1/6\ K2^{n-2}u(n-2)+2^nu(n)$

   Για να μην καθορίσουμε το K πρέπει να υπολογίσουμε την παραπάνω εξίσωση για κάθε n>=2, έτσι κανένας όρος να μην εξαφανίζεται

   => 4K= 5/6(2K)-1/6 (K)+4

=> K= 8/5
=> $y_p(n)$= (8/5) 2^n

9. Η συνολική λύση της εξίσωσης διαφοράς είναι:

α) $y_p(n)$-$y_h(n)$
β) $y_p(n)$+$y_h(n)$
γ) $y_h(n)$-$y_p(n)$
δ) Καμία από τις παραπάνω

Απάντηση: **β**

Επεξήγηση: Η ιδιότητα της γραμμικότητας της εξίσωσης διαφοράς γραμμικού σταθερού συντελεστή μας επιτρέπει να προσθέτουμε την ομοιογενή και ιδιαίτερη λύση για να βρούμε την συνολική λύση.

10. Ποια είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση διαφοράς δευτέρου βαθμού y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)+2x(n-1);,

α) [-1/5 $(-1)^n$-6/5 $(4)^n$]u(n)
β) [1/5 $(-1)^n$ – 6/5 $(4)^n$]u(n)
γ) [1/5 $(-1)^n$+ 6/5 $(4)^n$]u(n)
δ) [- 1/5 $(-1)^n$+ 6/5 $(4)^n$]u(n)

Απάντηση: **δ**

Επεξήγηση: Η ομοιογενής λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι:
$y_h(n)=C_1(-1)^n+C_2(4)^n$ (1)

Για να βρούμε την κρουστική απόκριση x(n) = δ(n)
για n=0 και n=1 λαμβάνουμε
y(0)=1 και y(1)=3+2=5

Από την εξίσωση (1) έχουμε

- $y(0)=C_1+C_2$ και
- $y(1)=-C_1+4C_2$

Λύνοντας τις δύο πιο πάνω εξισώσεις

C_1=- 1/5 and C_2= 6/5 => h(n)= [-1/5 $(-1)^n$ + 6/5 $(4)^n$]u(n)

2.3 Ανάλυση LTI Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

Θεωρία:

Η **σχηματική αναπαράσταση** της προσεταιριστικής ιδιότητας δείχνεται [x(n)*h1(n)]*h2(n) = x(n)*[h1(n)*h2(n)], όπου h(n)= h1(n)*h2(n).

Εύκολα μπορούμε να γενικεύσουμε την ιδιότητα της προ- σεταιριστικότας σε περισσότερα από δύο συστήματα, τα οποία διασυνδέονται διαδοχικά Έτσι η περίπτωση της διαδοχικής διασύνδεσης L συστημάτων LTI με κρουστικές αποκρίσεις h1(n), h2(n), …, hL(n) ισοδυναμεί με ένα LTI σύστημα, του οποίου η κρουστική απόκριση είναι h(n) και ισούται με h(n) = h1(n)*h2(n)* … *hL(n)

Η γενίκευση είναι πολύ χρήσιμη, όταν την δούμε ως αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή, ως *διαδικασία ανάλυσης ενός LTI συστήματος*.

Ασκήσεις:

1. Αναλύστε την συνάρτηση

X(n)={2,4,0,3}
↑
σε ένα άθροισμα σταθμισμένων κρουστικών συναρτήσεων.

α) 2δ(n)+4δ(n-1)+3δ(n-3)
β) 2δ(n+1)+4δ(n)+3δ(n-2)
γ) 2δ(n)+4δ(n-1)+3δ(n-2)
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: **β**

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι: x(n)δ(n-k)=x(k)δ(n-k)

- x(-1)=2=2δ(n+1)
- x(0)=4=4δ(n)
- x(2)=3=3δ(n-2)

Επομένως, x(n)= 2δ(n+1)+4δ(n)+3δ(n-2)

2. Ο τύπος:
y(n)= $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

ο οποίος δίνει την απόκριση y(n) του συστήματος LTI σαν συνάρτηση του εισερχομένου σήματος x(n) και της μοναδιαίας απόκρισης δείγματος h(n) είναι γνωστός ως:

α) Άθροισμα ανέλιξης
β) Γινόμενο ανέλιξης
γ) Διαφορά ανέλιξης
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: **α**

Επεξήγηση: Η είσοδος x(n) ανελίσσεται με την κρουστική απόκριση h(n) για να παράξει την έξοδο y(n). Όπως προσθέτουμε τις διάφορες τιμές, το ονομάζουμε άθροισμα ανέλιξης.

3. Ποια είναι η σειρά των τεσσάρων πράξεων στην h(k) για να ανελιχθεί η x(k) και η h(k);

   Βήμα -1: Αναδίπλωση
   Βήμα -2: Πολλαπλασιασμός με x(k)
   Βήμα -3: Μετατόπιση
   Βήμα -4: Άθροιση

   α) 1-2-3-4
   β) 1-2-4-3
   γ) 2-1-3-4
   δ) 1-3-2-4

   <u>Απάντηση</u>: δ

   <u>Επεξήγηση</u>: Πρώτα το σήμα αναδιπλώνεται για να λάβουμε h(-k). Μετά μετατοπίζεται κατά n για να λάβουμε h(n-k), μετά πολλαπλασιάζεται με x(k) και τέλος αθροίζεται από $-\infty$ μέχρι ∞.

4. Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος LTI είναι h(n)={1,1,1}. Ποια είναι η απόκριση του σήματος όταν η είσοδος είναι x(n)={1,2,3};

   α) {1,3,6,3,1}
   β) {1,2,3,2,1}
   γ) {1,3,6,5,3}
   δ) {1,1,1,0,0}

   <u>Απάντηση</u>: γ

   <u>Επεξήγηση</u>: Ας θέσουμε y(n)=x(n)*h(n) (το σύμβολο ‘*’ είναι το σύμβολο της ανέλιξης)
   Από τον τύπο της ανέλιξης λαμβάνουμε
   - y(0)=x(0)h(0)=1.1=1
   - y(1)=x(0)h(1)+x(1)h(0)=1.1+2.1=3
   - y(2)=x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)=1.1+2.1+3.1=6
   - y(3)=x(1)h(2)+x(2)h(1)=2.1+3.1=5
   - y(4)=x(2)h(2)=3.1=3

   Επομένως, y(n)=x(n)*h(n)={1,3,6,5,3}

5. Υπολογίστε την έξοδο y(n) ενός συστήματος LTI με κρουστική απόκριση $h(n)=a^n u(n), |a|<1$ με ακολουθία εισόδου x(n)=u(n).

   α) $(1-a^{(n+1)})/(1-α)$
   β) $(1-a^{(n-1)})/(1-α)$
   γ) $(1+a^{(n+1)})/(1+α)$
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   <u>Απάντηση</u>: α

Επεξήγηση: Αναδιπλώνουμε το σήμα x(n) και το μετατοπίζουμε κατά μία μονάδα την φορά και το αθροίζουμε όπως φαίνεται παρακάτω.
y(0)=x(0)h(0)=1
y(1)=h(0)x(1)+h(1)x(0)=1.1+a.1=1+a
y(2)=h(0)x(2)+h(1)x(1)+h(2)x(0)=1.1+a.1+a^2.1=1+a+a^2
Ομοίως, y(n)=1+a+a^2+….a^n= (1-$a^{(n+1)}$)/(1-α)

6. x(n)*(h1(n)*h2(n))=(x(n)*h1(n))*h2(n)

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Σύμφωνα με τις ιδιότητες της ανέλιξης, η ανέλιξη τριών σημάτων υπακούει στην προσεταιριστική ιδιότητα.

7. Υπολογίστε την κρουστική απόκριση της αλληλουχίας δύο συστημάτων LTI τα οποία έχουν κρουστικές αποκρίσεις h1(n)=$(1/2)^2$ u(n) και h2(n)= $(1/4)^2$ u(n).

α) $(1/2)^n[2-(1/2)^n]$, n<0
β) $(1/2)^n[2-(1/2)^n]$, n>0
γ) $(1/2)^n[2+(1/2)^n]$, n<0
δ) $(1/2)^n[2+(1/2)^n]$, n>0

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Μετακινούμε και αναδιπλώνουμε την $h_2(n)$
τότε

$h(k)=h_1(n)*h_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(n-k)$ k<0,

$h_1(n)= h_2(n)=0$ επειδή η μοναδιαία βαθμιδωτή συνάρτηση ορίζεται μόνο στην δεξιά πλευρά. Επομένως:

$$h(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \Rightarrow h(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} =$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} (2)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^n (2^{n+1}-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right], n>0$$

8. $x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Σύμφωνα με τις ιδιότητες της ανέλιξης, η ανέλιξη επιδεικνύει την επιμεριστική ιδιότητα.

9. Ένα σύστημα LTI λέγεται αιτιατό αν και μόνο αν

α) Η κρουστική απόκριση είναι μη-μηδενική για θετικές τιμές του n
β) Η κρουστική απόκριση είναι μηδέν για θετικές τιμές του n
γ) Η κρουστική απόκριση είναι μη-μηδενική για αρνητικές τιμές του n
δ) Η κρουστική απόκριση είναι μηδέν για αρνητικές τιμές του n.

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα LTI το οποίο έχει μία έξοδο στον χρόνο $n = n_0$ η οποία δίνεται από τον τύπο της ανέλιξης
$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$
Χωρίζουμε τον άθροισμα σε δύο όρους:

=> $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$

$=(h(0)x(n0)+h(1)x(n0-1)+h(2)x(n0-2)+\ldots)+(h(-1)x(n0+1)+h(-2)x(n0+2)+\ldots)$
Σύμφωνα με τον ορισμό της αιτιότητας, η έξοδος πρέπει να εξαρτάται μόνο από τις παρούσες και τις παρελθούσες τιμές της εισόδου. Άρα οι συντελεστές των όρων $x(n_0+1)$, $x(n_0+2)\ldots$ πρέπει να είναι μηδέν. Ήτοι, $h(n)=0$ για $n<0$.

10. $x(n)*\delta(n-n_0)=$;

α) $x(n+n_0)$
β) $x(n-n_0)$
γ) $x(-n-n_0)$
δ) $x(-n+n_0)$

Απάντηση: β

Επεξήγηση: $x(n) * \delta(n - n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k-n_0)$
$=x(k)_{|k=n-n_0}$
$=x(n-n_0)$

11. Είναι το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n)=2^n u(n-1)$ σταθερό ?

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Θεωρούμε :
$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(n-1) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2+4+8+\ldots = \infty$
Άρα το σύστημα δεν είναι σταθερό.

2.4 Σήματα Διακριτού Χρόνου

Θεωρία:

Τα σήματα που περιγράφονται στη συνέχεια θεωρούνται ως τα **βασικά** (στοιχειώδη) σήματα διακριτού χρόνου.

α) Μοναδιαίο δείγμα (unit sample) ή μοναδιαία κρουστική ακολουθία (unit impulse sequence): Είναι το πλέον βασικό σήμα διακριτού χρόνου το οποίο ορίζεται ως:

$$δ=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} n = 0 \\ n \neq 0 \end{matrix}$$

β) Μοναδιαία βηματική ακολουθία (unit step sequence): Ορίζεται ως:

$$δ=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} n \geq 0 \\ n < 0 \end{matrix}$$

γ) Σταθερή ακολουθία (constant sequence): Ορίζεται ως:

$$x(n) = A, \quad -\infty < n < \infty$$

δ) Γραμμική ακολουθία (linear sequence): Ορίζεται ως:

$$x(n) = An, \quad -\infty < n < \infty$$

ε) Εκθετική ακολουθία (exponential sequence): Ορίζεται ως:

$$x(n) = a^n$$

Ασκήσεις:

1. Εάν x(n) είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου, τότε η τιμή του x(n) για μη ακέραιη τιμή του ‘n’ είναι:

   α) Μηδέν
   β) Θετική
   γ) Αρνητική
   δ) Απροσδιόριστη

   Απάντηση: δ

   Επεξήγηση: Για ένα σήμα διακριτού χρόνου, η τιμή του x(n) υπάρχει μόνο για ακέραιες τιμές του n. Άρα, για μία μη-ακέραια τιμή του ‘n’ η τιμή του x(n) δεν υπάρχει.

2. Η συνάρτηση διακριτού χρόνου η οποία ορίζεται ως u(n)=n για n≥0;=0 για n<0 είναι:

   α) Σήμα μοναδιαίου δείγματος

β) Σήμα μοναδιαίου βήματος
γ) Σήμα μοναδιαίας ράμπας
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Όταν σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της δοθείσας συνάρτησης, λαμβάνουμε μια ευθεία γραμμή η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων με θετική μοναδιαία κλίση. Άρα η συνάρτηση ονομάζεται σήμα μοναδιαίας ράμπας.

3. Η συνάρτηση φάσης ενός σήματος διακριτού χρόνου $x(n)=a^n$, όπου $a=r.e^{j\theta}$ είναι:

α) tan(nθ)
β) nθ
γ) $\tan^{-1}(n\theta)$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Δοθέντος $x(n)=a^n=(r.e^{j\theta})^n = r^n.e^{jn\theta} \Rightarrow x(n)=r^n.(\cos n\theta+j\sin n\theta)$
Η συνάρτηση φάσης είναι $\tan^{-1}(\cos n\theta/\sin n\theta)=\tan^{-1}(\tan n\theta)=n\theta$

4. Το σήμα το οποίο δίνεται από την εξίσωση: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$ είναι γνωστό ως:

α) Σήμα ενέργειας
β) Σήμα ισχύος
γ) Work done σήμα
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Έχουμε χρησιμοποιήσει τις τιμές του μεγέθους στο τετράγωνο του x(n), έτσι ώστε ο ορισμός ισχύει για μιγαδικά και πραγματικά σήματα. Εάν η ενέργεια του σήματος είναι ορισμένη δηλ., $0<E<\infty$ τότε το δοθέν σήμα ονομάζεται σήμα Ενέργειας.

5. $x(n)*\delta(n-k)$=;

α) x(n)
β) x(k)
γ) $x(k)*\delta(n-k)$
δ) $x(k)*\delta(k)$

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Το δοθέν σήμα ορίζεται μόνο όταν n=k από τον ορισμό της συνάρτησης. Άρα, $x(n)*\delta(n-k)= x(k)*\delta(n-k)$.

6. Ένα σήμα x(n) πραγματικής τιμής ονομάζεται αντι-συμμετρικό εάν:

   α) x(n)=x(-n)
   β) x(n)=-x(-n)
   γ) x(n)=-x(n)
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: β

   Επεξήγηση: Σύμφωνα με τον ορισμό του αντι-συμμετρικού σήματος, το σήμα θα πρέπει αν είναι συμμετρικό ως προς το κέντρο. Άρα το σήμα x(n) για να είναι συμμετρικό, θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη x(n)=-x(-n)

7. Το περιττό τμήμα του σήματος x(t) είναι:

   α) x(t)+x(-t)
   β) x(t)-x(-t)
   γ) (1/2)*(x(t)+x(-t))
   δ) (1/2)*(x(t)-x(-t))

   Απάντηση: δ

   Επεξήγηση: Θέτουμε $x(t)=x_e(t)+x_o(t)$
   $=>x(-t)=x_e(-t)-x_o(-t)$
   Αφαιρώντας τις πιο πάνω εξισώσεις λαμβάνουμε: $x_o(t)=(1/2)*(x(t)-x(-t))$

8. Η πράξη της χρονικής κλιμάκωσης ονομάζεται:

   α) Δειγματοληψία προς τα κάτω
   β) Δειγματοληψία προς τα πάνω
   γ) Δειγματοληψία
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Εάν το σήμα x(n) έχει αποκτηθεί εξ΄αρχής από την δειγματοληψία του σήματος $x_a(t)$, τότε $x(n)=x_a(nT)$. Αλλά $y(n)=x(2n)=x_a(2nT)$. Άρα η πράξη της χρονικής κλιμάκωσης είναι ισοδύναμη με την αλλαγή του ρυθμού δειγματοληψίας από 1/T σε 1/2T, ήτοι η μείωση του ρυθμού με έναν παράγοντα 2. Άρα η χρονική κλιμάκωση λέγεται επίσης δειγματοληψία προς τα κάτω.

9. Ποια είναι η προϋπόθεση για ένα σήμα $x(n)=Br^n$ όπου $r=e^{\alpha T}$ να ονομάζεται φθίνον εκθετικό σήμα;

   α) $0<r<\infty$
   β) $0<r<1$
   γ) $r>1$

δ) r<0

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Όταν η τιμή του ‘r’ είναι μεταξύ 0 και 1, η τιμή του x(n) συνεχίζει να φθίνει εκθετικά, για αυξητικές τιμές του ‘n’. Άρα, το σήμα ονομάζεται φθίνον εκθετικό σήμα.

10. Η συνάρτηση η οποία δίνεται από την εξίσωση x(n)=1, για n=0;=0, για n≠0 είναι:

α) Κλιμακωτή συνάρτηση
β) Συνάρτηση ράμπας
γ) Τριγωνική συνάρτηση
δ) Κρουστική συνάρτηση

<u>Απάντηση</u>: δ

<u>Επεξήγηση</u>: Σύμφωνα με τον ορισμό της κρουστικής συνάρτησης, αυτή ορίζεται μόνο στο n=0 και δεν ορίζεται πουθενά αλλού το οποίο είναι σύμφωνα με το δοθέν σήμα.

<u>2.5 Συστήματα Διακριτού Χρόνου</u>

<u>Θεωρία:</u>

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου είναι εκείνο που δέχεται μία είσοδο διακριτού χρόνου x[n] και **παράγει μία έξοδο** επίσης διακριτού χρόνου y[n]. Τα συστήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό έχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά. Είναι *γραμμικά* (linear) και *χρονικά αμετάβλητα* (time-invariant). Θα αναφερόμαστε σ' αυτά με τον αγγλικό όρο LTI (Linear Time-Invariant).

Γραμμικό ονομάζεται ένα σύστημα στο οποίο ισχύει η **αρχή της υπέρθεσης**. Συγκεκριμένα, εάν η είσοδος του συστήματος, το οποίο αρχικά βρισκόταν σε ηρεμία[1], αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό σημάτων, τότε η έξοδος του συστήματος (απόκριση) θα ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων των επιμέρους σημάτων, σαν αυτά να είχαν εφαρμοσθεί το καθένα χωριστά.

Χρονικά αμετάβλητο ονομάζεται ένα σύστημα του οποίου η συμπεριφορά και οι ιδιότητες δεν αλλάζουν με το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι μια χρονική ολίσθηση της εισόδου θα αντιστοιχεί σε χρονική ολίσθηση της εξόδου. Με

[1] Αρχική ηρεμία σημαίνει ότι στο σύστημα δεν έχει εφαρμοστεί καμία διέγερση (είσοδος) πριν από τη χρονική στιγμή n = n0, κατά την οποία εφαρμόστηκε η είσοδος x(n)

άλλα λόγια, εάν y(n) είναι η έξοδος ενός χρονικά αμετάβλητου συστήματος για είσοδο x(n), τότε y(n–n_0) θα είναι η έξοδος αυτού για είσοδο x(n–n_0).

Ευσταθές ονομάζεται ένα σύστημαεάν και μόνο εάν κάθε φραγμένη είσοδος παράγει μια φραγμένη έξοδο (Bounded Input Bounded Output, BIBO). Με άλλα λόγια, ένα τέτοιο σύστημα μας εξασφαλίζει ότι όσο η είσοδος παραμένει φραγμένη (|x(n)| ≤ M_x < ∞), η έξοδος δε θα απειρίζεται (|y(n)| ≤ M_y< ∞) για όλα τα n, όπου M_x, Mу πεπερα- σμένοι αριθμοί. Σε διαφορετική περίπτωση το σύστημα ονομάζεται ασταθές (unstable).

Αιτιατό σύστημα είναι εκείνο του οποίου η έξοδος, σε κάθε χρονική στιγμή, εξαρτάται μόνο από τις τιμές του σήματος εισόδου στην τρέχουσα χρονική στιγμή και σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Με άλλα λόγια, οι μεταβολές στην έξοδο ενός τέτοιου συστήματος είναι αποτέλεσμα των μεταβολών της εισόδου.

<u>Ασκήσεις:</u>

1. Το σήμα εξόδου όταν ένα σήμα x(n)=(0,1,2,3) επεξεργάζεται διαμέσου ενός «πανομοιότυπου» συστήματος είναι:

α) (3,2,1,0)
β) (1,2,3,0)
γ) (0,1,2,3)
δ) Κανένα από τα παραπάνω

<u>Απάντηση</u>: γ

<u>Επεξήγηση</u>: Ένα πανομοιότυπο σύστημα, είναι ένα σύστημα του οποίου η έξοδος είναι η ίδια με την είσοδο, δηλαδή δεν εκτελεί καμία πράξη στην είσοδο και την διαβιβάζει.

2. Εάν ένα σήμα x(n) περάσει μέσα από ένα σύστημα και λάβουμε ένα σήμα εξόδου y(n)=x(n+1), τότε το σήμα λέγεται:

α) Αργοπορημένο
β) Προπορευόμενο
γ) Καμίας λειτουργίας
δ) Κανένα από τα παραπάνω

<u>Απάντηση</u>: δ

<u>Επεξήγηση</u>: Παράδειγμα, η τιμή της εξόδου στον χρόνο n=0 είναι y(0)=x(1), άρα το σύστημα είναι προπορευόμενο κατά μια μονάδα.

3. Εάν η έξοδος του συστήματος είναι: y(n)= $\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$
με είσοδο x(n) τότε το σύστημα λειτουργεί ως:

α) Συσσωρευτής

β) Αθροιστής
γ) Αφαιρέτης
δ) Πολλαπλασιαστής

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Από την δοθείσα εξίσωση, y(n)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)+…. . Αυτό το σύστημα υπολογίζει το τρέχον άθροισμα όλων των περασμένων τιμών μέχρι την παρούσα στιγμή. Άρα, συμπεριφέρεται σαν συσσωρευτής.

4. Ποια είναι η έξοδος y(n) όταν ένα σήμα x(n)=n*u(n) περνάει μέσα από έναν συσσωρευτή ο οποίος είναι αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας;

α) $(n^2+n+1)/2$
β) (n(n+1))/2
γ) $(n^2+n+2)/2$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Δεδομένου ότι το σύστημα είναι αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας, ήτοι y(-1)=0. Σύμφωνα με την εξίσωση του συσσωρευτή

$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(n)$
$= \sum_{k=-\infty}^{-1} x(n) + \sum_{k=0}^{n} x(n)$
$= y(-1) + \sum_{k=0}^{n} n * u(n)$
$= 0 + \sum_{k=0}^{n} n$ αφού u(n) = 1 από 0 μέχρι n

$= \frac{n(n+1)}{2}$

5. Το τμήμα το οποίο περιγράφεται παρακάτω ονομάζεται Z^{-1};

α) Τμήμα καθυστέρησης
β) Προπορευόμενο τμήμα
γ) Πολλαπλασιαστικό τμήμα
δ) Προσθετικό τμήμα

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Εάν η συνάρτηση σε αυτό το τμήμα είναι x(n) τότε η έξοδος από το τμήμα θα είναι x(n-1). Άρα το τμήμα λέγεται τμήμα καθυστέρησης ή στοιχείο καθυστέρησης.

6. Το σήμα εξόδου όταν ένα σήμα x(n)=(0,1,2,3) επεξεργαστεί μέσα από ένα σύστημα «καθυστέρησης» είναι:

α) (3,2,1,0)
β) (1,2,3,0)

γ) (0,1,2,3)
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Ένα σύστημα καθυστέρησης είναι το σύστημα του οποίου η έξοδος είναι η ίδια με την είσοδο, αλλά μετά από μία καθυστέρηση.

7. Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση εισόδου – εξόδου $y(n)=nx(n)+bx^3(n)$ είναι ένα:

α) Στατικό σύστημα
β) Δυναμικό σύστημα
γ) Εντελώς ίδιο σύστημα
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Εφ' όσον η έξοδος του συστήματος y(n) εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή της εισόδου x(n) και όχι από τις προηγούμενες ή επόμενες τιμές της εισόδου, το σύστημα ονομάζεται στατικό ή χωρίς μνήμη.

8. Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση εισόδου – εξόδου $y(n)=x(n)-x(n-1)$ είναι ένα σύστημα χρονικής εξάρτησης;

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Εάν η είσοδος έχει καθυστέρηση k μονάδων τότε η έξοδος θα είναι $y(n,k)=x(n-k)-x(n-k-1)$. Εάν η έξοδος έχει καθυστέρηση k μονάδων τότε $y(n-k)=x(n-k)-x((n-k)-1)$ =>$y(n,k)=y(n-k)$. Άρα το σύστημα είναι μη- χρονικής εξάρτησης.

9. Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση εισόδου – εξόδου $y(n)=x^2(n)$ είναι ένα μη-γραμμικό σύστημα.

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Η δοθείσα εξίσωση είναι $y(n)=x^2(n)$. Θέτουμε $y_1(n)=x_1^2(n)$ και $y_2(n)=x_2^2(n)$. $y_3(n)=y_1(n)+y_2(n)= x_1^2(n)+ x_2^2(n)\neq(x_1(n)+x_2(n))^2$. Άρα το σύστημα είναι μη-γραμμικό.

10. Εάν η έξοδος ενός συστήματος για κάθε ‘n’ εξαρτάται μόνο από της παρούσες ή τις παρελθούσες τιμές της εισόδου, το σύστημα αυτό λέγεται:

    α) Γραμμικό
    β) Μη-Γραμμικό
    γ) Αιτιατό
    δ) Μη-αιτιατό

    Απάντηση: γ

    Επεξήγηση: Ένα σύστημα λέγεται αιτιατό εάν η έξοδος του ορίζεται σαν μία συνάρτηση y(n)=F[x(n),x(n-1),x(n-2),…]. Άρα σύμφωνα με τις δοθείσες συνθήκες στην ερώτηση το σύστημα είναι αιτιατό.

11. Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση εισόδου – εξόδου y(n)=x(-n) είναι ένα αιτιατό σύστημα.

    α) Σωστό
    β) Λάθος

    Απάντηση: β

    Επεξήγηση: Για n=-1, y(-1)=x(1). Άρα, η έξοδος του συστήματος για n=-1 είναι εξαρτώμενη από την μελλοντική τιμή της εισόδου για n=1. Άρα το σύστημα είναι μη-αιτιατό.

2.6 Συσχέτιση Σημάτων Διακριτού χρόνου

Θεωρία:

Η **φυσική σημασία** του όρου συσχέτισης είναι η αναζήτηση του μέτρου της ομοιότητας σημάτων y(n) και x(n) επιτυγχάνεται μέσω της συσχέτισης r(n) των σημάτων. Η συσχέτιση είναι ένα σήμα του οποίου η τιμή μεγιστοποιείται εκεί όπου μεγιστοποιείται η πιθανότητα το y(n) να "ομοιάζει" προς το x(n).

Ο ορισμός της συσχέτισης δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$r(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l), \ -\infty < l < \infty$ όπου l: καθυστέρηση(lag)

Για να υπολογίσουμε την συσχέτιση πρέπει να υπολογίσουμε τη συνέλιξη των σημάτων χωρις όμως να κάνουμε αναδίπλωση του ενός σήματος όπως στη συνέλιξη

Συνέλιξη: y(n) = x(n) * h(n), όπου ***** το σύμβολο της συνέλιξης, δηλαδή, η έξοδος y(n) του συστήματος θα ισούται με τη συνέλιξη της εισόδου x(n) και της κρουστικής h(n) του συστήματος

Ασκήσεις:

1. Ποιες από τις παρακάτω παραμέτρους απαιτούνται για να υπολογιστεί η συσχέτιση μεταξύ των σημάτων x(n) και y(n);

α) Χρονοκαθυστέρηση
β) Συντελεστής εξασθένησης
γ) Σήμα θορύβου
δ) Όλα τα παραπάνω

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Ας υποθέσουμε ότι x(n) είναι το σήμα αναφοράς εισόδου και y(x) είναι το αντανακλώμενο σήμα. Η σχέση μεταξύ των δύο σημάτων είναι y(n)=αx(n-Δ)+w(n).

Όπου α, ο συντελεστής εξασθένησης ο οποίος αντιπροσωπεύει την απώλεια του σήματος x(n) στην μετ' επιστροφής μετάδοση, Δ η Χρονοκαθυστέρηση μεταξύ του χρόνου της προβολής και της επιστρεφόμενης αντανάκλασης του σήματος και w(n) το σήμα θορύβου το οποίο παράγεται στα ηλεκτρονικά τμήματα στο εμπρόσθιο μέρος του δέκτη.

2. Η διασυσχέτιση δύο πραγματικών με πεπερασμένη ενέργεια σημάτων x(n) και y(n) δίδεται από:

α) $r_{xy}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-1)$ όπου 1=0, $\pm$1, $\pm$2,….
β) $r_{xy}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)y(n-1)$ όπου 1=0, $\pm$1, $\pm$2,….
γ) $r_{xy}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-1)$ όπου $-\infty < 1 < \infty$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Εάν δύο οποιαδήποτε σήματα x(n) και y(n) είναι πραγματικά και με πεπερασμένη ενέργεια, τότε η συσχέτιση μεταξύ των δύο σημάτων είναι γνωστή σαν διασταυρούμενη συσχέτιση και η εξίσωσή τους δίνεται:

$r_{xy}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-1)$ όπου 1=0, $\pm$1, $\pm$2,….

3. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

α) $r_{xy}(l)= r_{xy}(-l)$
β) $r_{xy}(l)= r_{yx}(l)$
γ) $r_{xy}(l)= r_{yx}(-l)$
δ) Καμία από τις παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι η συσχέτιση δύο σημάτων x(n) και y(n) είναι: $r_{xy}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-1)$ Εάν αλλάξουμε τους ρόλους των x(n) και y(n) λαμβάνουμε:

$r_{xy}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-1)$

Αυτό είναι ισοδύναμο:

$r_{xy}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+1) \;\; => r_{xy}(-1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-1)$

Άρα λαμβάνουμε: $r_{xy}(1) = r_{xy}(-1)$.

4. Ποια είναι η ακολουθία της διασυσχέτισης των παρακάτω ακολουθιών;
x(n)={….0,0,2,-1,3,7,1,2,-3,0,0….}
y(n)={….0,0,1,-1,2,-2,4,1,-2,5,0,0….}

α) {10,9,19,36,-14,33,0,7,13,-18,16,7,5,-3}
β) {10,-9,19,36,-14,33,0,7,13,-18,16,-7,5,-3}
γ) {10,9,19,36,14,33,0,-7,13,-18,16,-7,5,-3}
δ) {10,-9,19,36,-14,33,0,-7,13,18,16,7,5,-3}

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Γνωρίζουμε ότι:

$r_{xy}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-1)$ όπου 1=0, $\pm$1, $\pm$2,….

- Για 1=0, $r_{xy}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n) = 7$
- Για 1>0, απλά μετατοπίζουμε την y(n) προς τα δεξιά σε σχέση με την x(n) κατά '1' μονάδα, υπολογίζουμε την ακολουθία του γινομένου και τέλος προσθέτουμε όλες τις τιμές της ακολουθίας γινομένου.

Λαμβάνουμε:

$r_{xy}(1) = 13, r_{xy}(2) = -18, r_{xy}(3) = 16, r_{xy}(4) = -7,$

$r_{xy}(5) = 5, r_{xy}(6) = -3, r_{xy}(1) = 0, \text{για } 1 \geq 7$

Ομοίως για 1<0, μετατοπίζουμε την y(n) προς τα αριστερά σχετικά με την x(n).
Λαμβάνουμε:

$r_{xy}(-1) = 0,$
$r_{xy}(-2) = 33,$
$r_{xy}(-3) = -14,$
$r_{xy}(-4) = 36,$
$r_{xy}(-5) = 19,$
$r_{xy}(-6) = -9,$
$r_{xy}(-7) = 10,$
$r_{xy}(1) = 0 \text{ για } 1 \leq -8$

Επομένως $r_{xy}(1) = \{10, -9, 19, 36, -14, 33, 0, 7, 13, -18, 16, -7, 5, -3\}$

5. Ποια από τα παρακάτω είναι αυτό-συσχέτιση της x(n);

α) r_{xy}(l)=x(l)*x(-l)
β) r_{xy}(l)=x(l)*x(l)
γ) r_{xy}(l)=x(l)+x(-l)
δ) Κανένα από τα παραπάνω

<u>Απάντηση</u>: α

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι η συσχέτιση των δύο σημάτων x(n) και y(n) είναι:

$$r_{xy}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-1)$$

Θέτουμε: x(n)=y(n)=>

$$r_{xy}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-1) \quad = x(1) * x(-1)$$

6. Ποια είναι η ενεργειακή ακολουθία του σήματος ax(n)+by(n-l) σε όρους διασυσχέτισης και αυτό-συσχέτισης;

α) $a^2r_{xx}(0)+b^2r_{yy}(0)+2abr_{xy}(0)$
β) $a^2r_{xx}(0)+b^2r_{yy}(0)-2abr_{xy}(0)$
γ) $a^2r_{xx}(0)+b^2r_{yy}(0)+2abr_{xy}(1)$
δ) $a^2r_{xx}(0)+b^2r_{yy}(0)-2abr_{xy}(1)$

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Το ενεργειακό σήμα του σήματος ax(n)+by(n-l) είναι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[ax(n) + by(n-1)]^2$$
$$= a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2\,(n) + b^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n-1)+2ab\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\,(n)y(n-1)$$
$$= a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2abr_{xy}(1)$$

7. Ποια είναι η σχέση μεταξύ διασταυρούμενης και αυτό-συσχέτισης;

α) $|r_{xy}(l)|=\sqrt{(r_{xx}(0).r_{yy}(0))}$
β) $|r_{xy}(l)|\geq\sqrt{(r_{xx(0)}.r_{yy}(0))}$
γ) $|r_{xy}(l)|\neq\sqrt{(r_{xx(0)}.r_{yy}(0))}$
δ) $|r_{xy}(l)|\leq\sqrt{(r_{xx(0)}.r_{yy}(0))}$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι $a^2r_{xx}(0)+b^2r_{yy}(0)+2abr_{xy}(l) \geq 0$

$=> (a/\beta)^2r_{xx}(0)+r_{yy}(0)+2(a/\beta)r_{xy}(l) \geq 0$

Αφού η δευτεροβάθμιος είναι μη αρνητική, συνάγεται ότι ο όρος της τετραγωνικής ρίζας της δευτεροβάθμιας πρέπει να είναι μη θετικός, άρα $4[r^2_{xy}(l)- r_{xx}(0)\ r_{yy}(0)] \leq 0 => |r_{xy}(l)|\leq\sqrt{(r_{xx}(0).r_{yy}(0))}$

8. Η ομαλοποιημένη αυτό-συσχέτιση $r_{xx}(l)$ ορίζεται ως:

α) $(r_{xx}\,(l))/(r_{xx}\,(0))$
β) $-(r_{xx}\,(l))/(r_{xx}\,(0))$
γ) $(r_{xx}\,(l))/(r_{xy}\,(0))$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Εάν το εμπλεκόμενο σήμα στην αυτό-συσχέτιση είναι κλιμακωτό, η μορφή της αυτό-συσχέτισης δεν αλλάζει, μόνο το μέγεθος της αυτό-συσχετιζόμενης ακολουθίας κλιμακώνεται ανάλογα. Αφού η κλιμάκωση δεν είναι σημαντική, είναι συχνά επιθυμητό, στην πράξη, να ομαλοποιήσουμε την αυτό-συσχετιζόμενη ακολουθία στο διάστημα από -1 έως 1.

Στην περίπτωση της αυτό-συσχετιζόμενης ακολουθίας, μπορούμε απλά να διαιρέσουμε με r_{xx} (0). Έτσι η ομαλοποιημένη αυτό-συσχετιζόμενη ακολουθία ορίζεται σαν r_{xx}(l)= (r_{xx} (l))/(r_{xx} (0)).

9. Η αυτό-συσχετιζόμενη ακολουθία είναι μία άρτια συνάρτηση.

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Ας θεωρήσουμε ένα σήμα x(n) του οποίου η αυτό-συσχέτιση ορίζεται σαν r_{xx} (l). Γνωρίζουμε ότι, για την αυτό-συσχετιζόμενη ακολουθία r_{xx} (l)=r_{xx} (-l). Άρα, η αυτό-συσχετιζόμενη ακολουθία είναι μία άρτια ακολουθία.

10. Ποιά είναι η αυτό-συσχέτιση της ακολουθίας x(n)=a^nu(n), 0<a<l;

α) 1/(1-a^2)a^l (l≥0)
β) 1/(1-a^2)a^{-l} (l<0)
γ) 1/(1-a^2)$a^{|l|}$(-∞<l<∞)
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: δ

Επεξήγηση:

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l)$$

$$\text{Για } l \geq 0, r_{xy}(l) = \sum_{n=l}^{\infty} x(n)x(n-l) = \sum_{n=l}^{\infty} a^n a^{n-l} = a^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} a^{2n} = \frac{1}{1-a^2} a^l$$

$$\text{Για } l < 0, r_{xy}(l) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)x(n-l) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n a^{n-l} = a^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = \frac{1}{1-a^2} a^{-l}$$

11. Ποια από παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

α) r_{yx}(l)=h(l)*r_{yy}(l)
β) r_{xy}(l)=h(l)*r_{xx}(l)
γ) r_{yx}(l)=h(l)*r_{xx}(l)
δ) Καμία από τις παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Θεωρούμε ότι το x(n) είναι το σήμα εισόδου και y(n) το σήμα εξόδου με κρουστική απόκριση h(n).
y(n)=x(n)*h(n)= $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

Η διασταυρούμενη συσχέτιση μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου είναι $r_{yx}(l)=y(l)*x(-l)=h(l)*[x(l)*x(-l)]= h(l)*r_{xx}(l)$.

12. Εάν x(n) είναι το σήμα εισόδου ενός συστήματος με κρουστική απόκριση h(n) και y(n) είναι το σήμα εξόδου, τότε η αυτό-συσχέτιση του σήματος y(n) είναι:

α) $r_{xx}(l)*r_{hh}(l)$
β) $r_{hh}(l)*r_{xx}(l)$
γ) $r_{xy}(l)*r_{hh}(l)$
δ) $r_{yx}(l)*r_{hh}(l)$

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: $r_{yy}(l)=y(l)*y(-l)$
$=[h(l)*x(l)]*[h(-l)*x(-l)]$
$=[h(l)*h(-l)]*[x(l)*x(-l)]$
$=r_{hh}(l)*r_{xx}(l)$

2.7 A/D και D/A Μετατροπείς

<u>Θεωρία:</u>

Για να επεξεργαστούμε αναλογικά σήματα με ψηφιακά μέσα, απαιτείται η μετατροπή αυτών σε ψηφιακή μορφή, δηλαδή η μετατροπή τους σε μία ακολουθία αριθμών πεπερασμένης ακρίβειας. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *μετατροπή* ***αναλογικού σε ψηφιακό*** (analog–to–digital conversion, A/D) και τα αντίστοιχα κυκλώματα ονομάζονται «μετατροπείς αναλογικού σε ψηφιακό» (analog to digital converters, ADCs).

Η αντίστροφη διαδικασία της μετατροπής ενός ψηφιακού σήματος σε αναλογικό είναι γνωστή ως μετατροπή ***ψηφιακού σε αναλογικό*** (digital to analog conversion, D/A) και γίνεται με τη βοήθεια κυκλωμάτων τα οποία ονομάζονται μετατροπείς «ψηφιακού σε αναλογικό» (digital–to–analog converters, DACs).

α) **Δειγματοληψία (sampling):** Αυτή είναι η διαδικασία μετατροπής ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε σήμα διακριτού χρόνου, παίρνοντας δείγματα του σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτές στιγμές του χρόνου. Έτσι, αν xα(t) είναι η είσοδος στο δειγματολήπτη, τότε η έξοδος αυτού είναι xα(nT)≡x(n), όπου T η περίοδος δειγματοληψίας.

β) **Κβάντιση (quantisation):** Πρόκειται για τη διαδικασία μετατροπής ενός σήματος διακριτού χρόνου συνεχών τιμών σε σήμα διακριτού χρόνου διακριτών τιμών (ψηφιακό). Το κάθε δείγμα του σήματος αντιπροσωπεύεται από μία τιμή η οποία επιλέγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο πιθανών τιμών. Η διαφορά μεταξύ του αρχικού μη κβαντισμένου δείγματος x(n) και της κβαντισμένης εξόδου xq(n) απο- τελεί το λεγόμενο σφάλμα κβάντισης.

γ) **Κωδικοποίηση (coding):** Κατά τη διαδικασία της κωδικοποίησης, κάθε διακριτή τιμή xq(n) αντιπροσωπεύεται από έναν αριθμό αποτελούμενο από b–bits.

Ασκήσεις:

1. Ποιο από τα παρακάτω πρέπει να γίνει έτσι ώστε να μετατραπεί ένα σήμα συνεχούς χρόνου σε ένα σήμα διακριτού χρόνου.

α) Δειγματοληψία
β) Διαφοροποίηση
γ) Ολοκλήρωση
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Η μέθοδος της μετατροπής ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε ένα σήμα διακριτού χρόνου παίρνοντας δείγματα ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτές χρονικές στιγμές είναι γνωστή σαν ‘δειγματοληψία’.

2. Η μέθοδος μετατροπής ενός σήματος διακριτού χρόνου συνεχομένων τιμών σε ένα σήμα διακριτού χρόνου διακριτών τιμών (ψηφιακό) είναι γνωστή ως:

α) Δειγματοληψία
β) Κβαντισμός
γ) Κωδικοποίηση
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Σε αυτή την μέθοδο, η τιμή του κάθε δείγματος του σήματος αντιπροσωπεύεται από μία τιμή επιλεγμένη από ένα πεπερασμένο σύνολο πιθανών τιμών. Επομένως αυτή η μέθοδος ονομάζεται κβαντισμός.

3. Η διαφορά μεταξύ του μη-κβαντισμένου x(n) και ενός κβαντισμένου xq(n) είναι γνωστό ως:

α) Συντελεστής κβαντισμού
β) Λόγος κβαντισμού
γ) Κβαντικός συντελεστής
δ) Κβαντικό λάθος

Απάντηση: δ

<u>Επεξήγηση</u>: Κβαντικό λάθος είναι η διαφορά στο σήμα το οποίο αποκτάται μετά την δειγματοληψία δηλαδή, x(n) και του σήματος το οποίο έχει αποκτηθεί μετά τον κβαντισμό δηλαδή, xq(n) σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

4. Ποία από τις παρακάτω είναι μια μετατροπή από ψηφιακή σε αναλογική διαδικασία;

   α) Βηματική προσέγγιση
   β) Γραμμική παρεμβολή
   γ) Δευτεροβάθμια παρεμβολή
   δ) Όλα τα παραπάνω

   <u>Απάντηση</u>: δ

   <u>Επεξήγηση</u>: Η διαδικασία της ένωσης από άποψη βημάτων είναι γνωστή σαν βηματική προσέγγιση, η διαδικασία ένωσης δύο δειγμάτων με μία ίσια γραμμή είναι γνωστή σαν γραμμική παρεμβολή, και η διαδικασία τριών δειγμάτων προσαρμόζοντας μία δευτεροβάθμια καμπύλη είναι γνωστή σαν δευτεροβάθμια παρεμβολή.

5. Η σχέση μεταξύ αναλογικής συχνότητας ‘F’ και ψηφιακής συχνότητας ‘f’ είναι:

   α) F=f*T (όπου T είναι η περίοδος δειγματοληψίας)
   β) f=F*T
   γ) Καμία σχέση
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   <u>Απάντηση</u>: β

   <u>Επεξήγηση</u>: Θεωρούμε ένα αναλογικό σήμα συχνότητας ‘F’το οποίο όταν δειγματοληφθεί περιοδικά με δείκτη Fs=1/T δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο δίνει μία συχνότητα f=F/Fs=>f=F*T.

6. Ποιο είναι το σήμα εξόδου όταν ένα σήμα x(t)=cos(2*pi*40*t) έχει δειγματοληφθεί με μια συχνότητα δειγματοληψίας των 20Hz;

   α) cos(pi*n)
   β) cos(2*pi*n)
   γ) cos(4*pi*n)
   δ) cos(8*pi*n)

   <u>Απάντηση</u>: γ

   <u>Επεξήγηση</u>: Από την ερώτηση, F=40Hz, Fs=20Hz
   =>f=F/Fs
   =>f=40/20
   =>f=2Hz
   =>x(n)=cos(4*pi*n)

7. Εάν ‘F’ είναι η συχνότητα ενός αναλογικού σήματος, τότε είναι ο ελάχιστος δειγματοληπτικός ρυθμός που απαιτείται για να αποφύγουμε την παραποίηση.

   α) F
   β) 2F
   γ) 3F
   δ) 4F

   <u>Απάντηση</u>: α

   <u>Επεξήγηση</u>: Σύμφωνα με τον ρυθμό του Nyquist, για να αποφύγουμε την παραποίηση δειγματοληπτικής συχνότητας πρέπει να είναι ίση με το διπλάσιο της αναλογικής συχνότητας.

8. Ποιος είναι ο ρυθμός του Nyquist, του σήματος:
   x(t)=3cos(50*pi*t)+10sin(300*pi*t)-cos(100*pi*t)

   α) 50Hz
   β) 100Hz
   γ) 200Hz
   δ) 300Hz

   <u>Απάντηση</u>: δ

   <u>Επεξήγηση</u>: Οι παρούσες συχνότητες στο δοθέν σήμα είναι F_1=25Hz, F_2=150Hz, F_3=50Hz. Άρα F_{max}=150Hz και από το θεώρημα δειγματοληψίας ο ρυθμός του Nyquist = 2*Fmax
   Άρα, F_s=2*150=300Hz.

9. Ποίο είναι το σήμα διακριτού χρόνου το οποίο λαμβάνουμε μετά από την δειγματοληψία του αναλογικού σήματος x(t)=cos(2000*pi*t)+sin(5000*pi*t) με ένα ρυθμό δειγματοληψίας 5000 δείγματα/ δευτερόλεπτο.

   α) cos(2.5*pi*n)+sin(pi*n)
   β) cos(0.4*pi*n)+sin(pi*n)
   γ) cos(2000*pi*n)+sin(5000*pi*n)
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   <u>Απάντηση</u>: β

   <u>Επεξήγηση</u>: Από το δοθέν αναλογικό σήμα F1=1000Hz F2=2500Hz και Fs=5000Hz
   =>f1=F1/Fs και f2=F2/Fs
   =>f1=0.2 και f2=0.5
   =>x(n)= cos(0.4*pi*n)+sin(pi*n)

10. Εάν ο ρυθμός δειγματοληψίας F_s ικανοποιεί το θεώρημα της δειγματοληψίας, τότε η σχέση μεταξύ κβαντικού λάθους ενός αναλογικού σήματος (e_q(t)) και ενός σήματος διακριτού χρόνου (e_q(n)) είναι:

α) eq(t)=eq(n)
β) eq(t)eq(n)
γ) Μη σχετιζόμενα

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Εάν υπακούει το θεώρημα της δειγματοληψίας, τότε το μοναδικό λάθος σε μια μετατροπή από αναλογικό σε ψηφιακό είναι το κβαντικό λάθος. Άρα το λάθος είναι το ίδιο και για το αναλογικό και για το διακριτού χρόνου σήμα.

11. Η ποιότητα ενός σήματος εξόδου από ένα μετατροπέα αναλογικού σε ψηφιακό σήμα μετριέται σε:

α) Κβαντικό λάθος
β) Λόγος κβαντισμού προς το σήμα θορύβου
γ) Λόγος του σήματος προς τον κβαντισμένο θόρυβο
δ) Μετατροπή σταθεράς

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Η ποιότητα μετριέται παίρνοντας τον λόγο των θορύβων ενός σήματος εισόδου και του κβαντικού σήματος, δηλαδή SQNR και μετριέται σε dB.

12. Ποιος κωδικοποιητής ψηφίων απαιτείται για να κωδικοποιήσει ένα σήμα με 16 επίπεδα;

α) 8 bit Ψηφία
β) 4 bit Ψηφία
γ) 2 bit Ψηφία
δ) 1 bit Ψηφία

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Για να κωδικοποιήσουμε ένα σήμα με L αριθμούς επιπέδων, χρειαζόμαστε ένα κωδικοποιητή με (log L/log 2) αριθμό ψηφίων. Επομένως, κωδικοποιητής log16/log2=4 ψηφίων απαιτείται.

2.8 Ταξινόμηση των Σημάτων

Θεωρία:

Η ταξινόμηση των σημάτων γίνεται ανάλογα με τον τύπο της ανεξάρτητης ή της εξαρτημένης μεταβλητής της συνάρτησης μπορούμε να κατατάξουμε τα σήματα στις παρακάτω κατηγορίες:

α) **Σήματα συνεχούς χρόνου ή αναλογικά σήματα** είναι τα σήματα των οποίων η ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβάλλεται σ’ ένα συνεχές διάστημα. Στα μονοδιάστατα σήματα το πεδίο ορισμού του σήματος είναι διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

β**) Σήματα διακριτού χρόνου** είναι τα σήματα των οποίων το πεδίο ορισμού είναι κάποιο διακριτό σύνολο, (π.χ. το σύνολο των ακεραίων αριθμών), ενώ η εξαρτημένη μεταβλητή είναι δυνατόν να λαμβάνει οποιαδήποτε τιμή.

γ) **Ψηφιακά σήματα** είναι τα σήματα στα οποία τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή, όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή μπορούν να λαμβάνουν μόνο διακριτές τιμές.

Ασκήσεις:

1. Ποιο από τα παρακάτω πρέπει να γίνει για να μετατραπεί ένα σήμα συνεχούς χρόνου σε ένα σήμα διακριτού χρόνου;

α) Διαμόρφωση
β) Δειγματοληψία
γ) Παραγώγιση
δ) Ολοκλήρωση

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να αποκτηθεί από ένα σήμα συνεχούς χρόνου αντικαθιστώντας t με nT, όπου T είναι το αντίστροφο του ρυθμού δειγματοληψίας ή του χρονικού διαστήματος μεταξύ παρακείμενων τιμών. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως δειγματοληψία.

2. Η τάση εκτροπής ενός παλμοσκοπίου είναι ένα ντετερμινιστικό σήμα;

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Η συμπεριφορά του σήματος είναι γνωστή και μπορεί να εκφραστεί από ένα κύμα πριονισμένης μορφής. Άρα το σήμα είναι ντετερμινιστικό.

3. Το άρτιο μέρος του σήματος x(t) είναι:

α) x(t)+x(-t)
β) x(t)-x(-t)
γ) (1/2)*(x(t)+x(-t))
δ) (1/2)*(x(t)-x(-t))

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Θέτουμε $x(t)=x_e(t)+x_o(t)$
$=>x(-t)=x_e(-t)-x_o(-t)$
Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουμε:
$x_e(t)=(1/2)*(x(t)+x(-t))$

4. Ποιο από τα παρακάτω είναι το περιττό μέρος του σήματος $x(t)=e^{(jt)}$

α) cost
β) j*sint
γ) j*cost
δ) sint

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Θέτουμε $x(t)=e^{(jt)}$
Άρα, $x_o(t)=(1/2)*(x(t)-x(-t))$
$=(1/2)*(e^{(jt)} – e^{(-jt)})$
=(1/2)*(cost+jsint-cost+jsint)
=(1/2)*(2jsint)
=j*sint

5. Για ένα σήμα συνεχούς χρόνου x(t) να είναι περιοδικό με περίοδο T, τότε x(t+mT) πρέπει να είναι ίσο με:

α) x(-t)
β) x(mT)
γ) x(mt)
δ) x(t)

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Για ένα σήμα x(t) να λέγεται ότι είναι περιοδικό με περίοδο T, τότε x(t+mT)=x(t) για όλα τα t και για οποιοδήποτε ακέραιο m.

6. Θεωρούμε ότι $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι περιοδικά σήματα με κύριες περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα. Ποια από τα παρακάτω πρέπει να είναι ρητός αριθμός έτσι ώστε το $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ να είναι περιοδικό;

α) T_1+T_2
β) T_1-T_2
γ) T_1/T_2
δ) T_1*T_2

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Υποθέτουμε ότι T είναι η περίοδος του σήματος x(t).
$=>x(t+T)=x_1(t+mT_1)+x_2(t+nT_2)$
Άρα θα πρέπει να έχουμε $mT_1=nT_2=T$
$=>(T_1/T_2)=(k/m)=$ ένας ρητός αριθμός.

7. Υποθέτουμε ότι $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι περιοδικά σήματα με κύριες περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα. Τότε η κύρια περίοδος του $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ είναι:

   α) LCM του T_1 και T_2
   β) HCF του T_1 και T_2
   γ) Το γινόμενο του T_1 και T_2
   δ) Ο λόγος του T_1 προς T_2

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Για να είναι το άθροισμα του x1(t) και x2(t) περιοδικό, ο λόγος των περιόδων πρέπει να είναι ένας ρητός αριθμός, άρα η βασική περίοδος είναι το LCM του T_1 και του T_2.

8. Όλα τα ενεργειακά σήματα έχουν μία μέση τιμή ισχύος:

   α) Άπειρη
   β) Μηδέν
   γ) Θετική
   δ) Δεν μπορεί να υπολογιστεί

   Απάντηση: β

   Επεξήγηση: Για κάθε ενεργειακό σήμα, η μέση τιμή ισχύος πρέπει να ισούται με μηδέν, δηλαδή P=0.

9. x(t) ή x(n) ορίζεται σαν ένα ενεργειακό σήμα, αν και μόνο αν το συνολικό ενεργειακό περιεχόμενο του σήματος είναι:

   α) Πεπερασμένη ποσότητα
   β) Άπειρο
   γ) Μηδέν
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Το ενεργειακό σήμα πρέπει να έχει μία συνολική ενεργειακή τιμή η οποία βρίσκεται μεταξύ 0 και απείρου.

10. Ποια είναι η περίοδος του cos2t+sin3t;

   α) pi
   β) 2*pi
   γ) 3*pi
   δ) 4*pi

   Απάντηση: β

   Επεξήγηση: Η περίοδος του cos2t=(2*pi)/2=pi
   Η περίοδος του sin3t=(2*pi)/3 και το LCM του pi και (2*pi)/3 είναι 2*pi.

2.9 Σήματα, Συστήματα και Επεξεργασία Σημάτων

Θεωρία:

Ως **επεξεργασία σήματος** ορίζουμε την ανάλυση και τον χειρισμό σημάτων, όπου **σήμα** ορίζεται οποιαδήποτε συνάρτηση μεταξύ φυσικών ποσοτήτων.

Σήμα:ορίζουμε τις τιμές που λαμβάνει μια ποσότητα **y** και είναι γνωστή ως (εξαρτημένη μεταβλητή) η οποία μεταβάλλεται συναρτήσει μίας άλλης ποσότητας **x** (ανεξάρτητη μεταβλητή). Αν οι ποσότητες x και y λαμβάνουν συνεχείς τιμές (π.χ. από το κλειστό πραγματικό διάστημα [0,+100]) τότε το σήμα είναι μία συνάρτηση **y(x)** και χαρακτηρίζεται *αναλογικό.* Αν η ποσότητα y λαμβάνει συνεχείς τιμές αλλά η ποσότητα x μόνο διακριτές τιμές (π.χ. από το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών) τότε το σήμα λέγεται *διακριτού χρόνου* και πρόκειται για μία ακολουθία y[n], ενώ αν τα x και y λαμβάνουν διακριτές τιμές έχουμε πάλι ακολουθία y[n] και το σήμα λέγεται *ψηφιακό*.
Τα συστήματα χωρίζονται σε κατηγορίες με βάση διάφορα κριτήρια:

α)***Γραμμικά* συστήματα** και ***μη γραμμικά* συστήματα**, στα γραμμικά συστήματα η έξοδος ενός γραμμικού συνδυασμού επιμέρους εισόδων ισούται με τον γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων επιμέρους εξόδων (για σύστημα F ισχύει $F(k_1x_1(t)+k_2x_2(t)) = k_1F(x_1(t))+k_2F(x_2(t))$)

β) ***Χρονικά αμετάβλητα*** και ***χρονικά μεταβλητά***, όπου στα χρονικά αμετάβλητα η μόνη επίπτωση μίας ολίσθησης προς τα δεξιά της εισόδου είναι μία ίδια ολίσθηση της εξόδου (αν $F(x(t)) = y(t)$, τότε $F(x(t+s)) = y(t+s)$)

γ) ***Στατικά*** και ***δυναμικά*** (ή με μνήμη) ***συστήματα***, όπου στα στατικά η έξοδος σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου στο ίδιο σημείο, ενώ στα δυναμικά εξαρτάται και από άλλες τιμές της εισόδου.

- Τα δυναμικά συστήματα υποδιαιρούνται σε ***αιτιατά,*** όπου η έξοδος σε κάθε σημείο επηρεάζεται μόνο από την τρέχουσα και από προηγούμενες τιμές της εισόδου, και σε *μη αιτιατά*, όπου η έξοδος σε κάθε σημείο επηρεάζεται επιπλέον και από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

Ασκήσεις:

1. Ποια από τα παρακάτω είναι η κοινή ανεξάρτητη μεταβλητή για τα σήματα ομιλίας, EEG και ECG;

   α) Χρόνος
   β) Χωρικές συντεταγμένες
   γ) Πίεση
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Τα σήματα ομιλίας, EEG και ECG είναι παραδείγματα σημάτων τα οποία μεταφέρουν πληροφορία τα οποία εξελίσσονται σαν συνάρτηση μίας ανεξάρτητης μεταβλητής, του χρόνου.

2. Ποια από τα παρακάτω έχουν κάνει την ψηφιακή επεξεργασία σημάτων περισσότερο πλεονεκτική σε σχέση με την αναλογική επεξεργασία;

α) Ευελιξία
β) Ακρίβεια
γ) Αποθήκευση
δ) Όλα τα παραπάνω

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Τα ψηφιακά προγραμματιζόμενα συστήματα επιτρέπουν την ευελιξία στην επαναδιαμόρφωση των DSP λειτουργιών, απλά αλλάζοντας το πρόγραμμα, αφού τα ψηφιακά συστήματα είναι της μορφής 1 και 0 και άρα περισσότερο ακριβή και μπορούν να αποθηκευτούν σε μαγνητικές ταινίες.

3. Ποια ιδιότητα επιδεικνύει η σχέση y(t)=x(1-t);

α) Χρονική κλιμάκωση
β) Χρονική μετατόπιση
γ) Αντανάκλαση
δ) Χρονική μετατόπιση και αντανάκλαση

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Κατ' αρχάς το σήμα x(t) μετατοπίζεται κατά 1 για να λάβουμε x(1+t) και αντανακλάται για να λάβουμε x(1-t). Άρα επιδεικνύει χρονική και αντανακλαστική ιδιότητα.

4. Εάν x(n)=(0,1,2,3,3,0,0,0), τότε x(2n) είναι:

α) (0,2,4,6,6,0,0,0)
β) (0,1,2,3,3,0,0,0)
γ) (0,2,3,0,0,0,0,0)
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Αντικαθιστούμε n=0,1,2… στην x(2n) και λαμβάνουμε τις τιμές από την δοθείσα x(n).

5. Εάν x(n)=(0,0,1,2,3,4,0,0) τότε x(n-2) είναι:

   α) (0,0,2,4,6,8,0,0)
   β) (0,0,1,2,3,4,0,0)
   γ) (1,2,3,4,0,0,0,0)
   δ) (0,0,0,0,1,2,3,4)

   Απάντηση: δ

   Επεξήγηση: Το σήμα 2x(n) μετατοπίζεται δεξιά κατά 2.

6. Εάν x(n)=(0,0,1,1,1,1,1,0) τότε x(3n+1) είναι:

   α) (0,1,0,0,0,0,0,0)
   β) (0,0,1,1,1,1,0,0)
   γ) (1,1,0,0,0,0,0,0)
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Κατ' αρχάς μετατοπίζουμε το σήμα αριστερά κατά 1 και μετά το κλιμακώνουμε χρονικά το αποκτηθέν σήμα κατά 3.

7. Εάν ένα σήμα x(t) επεξεργαστεί μέσα από ένα σύστημα για να λάβουμε το σήμα ($x(t)^2$), τότε το σήμα λέμε ότι είναι:

   α) Γραμμικό
   β) Μη-γραμμικό
   γ) Εκθετικό
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: β

   Επεξήγηση: Ας υποθέσουμε ότι το σήμα εισόδου είναι 't'. Τότε το σήμα εξόδου αφού περάσει μέσα από το σύστημα είναι $y=t^2$ που είναι η εξίσωση παραβολής. Άρα το σύστημα είναι μη-γραμμικό.

8. Ποια είναι τα σημαντικά τμήματα τα οποία χρειάζονται για να επεξεργαστούμε ένα εισερχόμενο αναλογικό σήμα και να λάβουμε ένα εξερχόμενο αναλογικό σήμα;

   α) A/D μετατροπέα
   β) Ψηφιακό επεξεργαστή σημάτων
   γ) D/A μετατροπέα
   δ) Όλα τα παραπάνω

   Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Το εισερχόμενο αναλογικό σήμα μετατρέπεται σε ψηφιακό χρησιμοποιώντας τον μετατροπέα A/D, περνάει μέσα από τον DSP και μετά μετατρέπεται πάλι σε αναλογικό χρησιμοποιώντας τον μετατροπέα D/A.

9. Ποιά από τα παρακάτω τμήματα δεν χρειάζονται στην ψηφιακή επεξεργασία ενός σήματος RADAR;

α) Μετατροπέας A/D
β) Μετατροπέας D/A
γ) DSP
δ) Όλα τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Στην ψηφιακή επεξεργασία του σήματος του radar, η πληροφορία η οποία εξάγεται από το σήμα του radar, όπως η θέση και η ταχύτητα του αεροπλάνου, μπορεί απλά να εκτυπωθεί σε χαρτί. Άρα, δεν υπάρχει ανάγκη ενός D/A μετατροπέα σε αυτή την περίπτωση

10. Ποιο από τα πιο κάτω σήματα είναι γνωστό σαν σήμα διαμορφωμένο κατά πλάτος;

α) C.x(t) (όπου C είναι σταθερά)
β) x(t)+y(t)
γ) x(t).y(t)
δ) dx(t)/dt

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Η πολλαπλασιαστική λειτουργία συναντάται συχνά στην αναλογική επικοινωνία, όπου ένα ακουστικής συχνότητας σήμα πολλαπλασιάζεται με ένα υψηλής συχνότητας ημιτονοειδές γνωστό σαν φορέας.

11. Ποιά είναι η φυσική συσκευή η οποία εκτελεί μία λειτουργία στο σήμα;

α) Πηγή σήματος
β) Σύστημα
γ) Μέσον
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Ένα σύστημα είναι μία φυσική συσκευή η οποία εκτελεί μία λειτουργία στο σήμα και τροποποιεί το εισερχόμενο σήμα.

2.10 Μετασχηματισμός-Z

Θεωρία:

Ο **μετασχηματισμός-Z** παίζει σπουδαίο ρόλο στην **ανάλυση** σημάτων διακριτού χρόνου και LTI συστημάτων, **αντίστοιχο** με εκείνον του μετασχηματισμού Laplace για την ανάλυση σημάτων και LTI συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Ακόμη, ο μετασχηματισμός-Z μας παρέχει τη δυνατότητα χαρακτηρισμού ενός LTI συστήματος και υπολογισμού της απόκρισής του για διάφορα σήματα, με απλή τοποθέτηση των πόλων και μηδενικών του στο επίπεδο–z.

Ο **μετασχηματισμός-Z** (Z-transform) για τα σήματα διακριτού χρόνου είναι ό,τι και ο **μετασχηματισμός Laplace** για τα σήματα συνεχούς χρόνου (continuous–time).

Συμπερασματικά, ο μετασχηματισμός-Z είναι ένα πολύ ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη διακριτών σημάτων και συστημάτων.

Ασκήσεις:

1. Ο μετασχηματισμός-Z του X(z) ενός σήματος διακριτού χρόνου x(n) ορίζεται ως:

   α) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{n}$
   β) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$
   γ) $\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{n}$
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: β

   Επεξήγηση: Ο μετασχηματισμός-Z μιας ακολουθίας πραγματικού διακριτού χρόνου x(n) ορίζεται ως η δύναμη του ‘z’ στην οποία είναι ίση με:
   X(z)= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$,
   Όπου ‘z’ μια μιγαδική μεταβλητή.

2. Ποιο είναι το σύνολο όλων των τιμών του z για το οποίο το X(z) φτάνει μία πεπερασμένη τιμή;

   α) Ακτίνα σύγκλισης
   β) Ακτίνα απόκλισης
   γ) Εφικτή λύση
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: α

<u>Επεξήγηση</u>: Από την στιγμή που το X(z) είναι μια άπειρη δυναμοσειρά , είναι ορισμένο μόνο σε λίγες τιμές του z. Το σύνολο όλων των τιμών του z για το οποίο το X(z) συγκλίνει σε μια πεπερασμένη τιμή λέγεται Ακτίνα σύγκλισης (ROΓ)

3. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Z του σήματος πεπερασμένης διάρκειας;
   x(n)={2,4,5,7,0,1}?
   ↑

   α) $2+4z+5z^2+7z^3+z^4$
   β) $2+4z+5z^2+7z^3+z^5$
   γ) $2+4z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+z^{-5}$
   δ) $2z^2+4z+5+7z^{-1}+z^{-3}$

   <u>Απάντηση</u>: δ

   <u>Επεξήγηση</u>: Γνωρίζουμε ότι, για ένα δοθέν σήμα x(n) ο μετασχηματισμός-Z είναι ορισμένος ως $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$
   Αντικαθιστώντας τις τιμές του n από -2 σε 3 και τις αντίστοιχες τιμές του σήματος στον παραπάνω τύπο
   Λαμβάνουμε X(z)= $2z^2+4z+5+7z^{-1}+z^{-3}$

4. Ποιο είναι το ROC του σήματος x(n)=δ(n-k),k>0;

   α) z=0
   β) z=∞
   γ) Ολόκληρο το επίπεδο-z, εκτός από z=0
   δ) Ολόκληρο το επίπεδο-z, εκτός από z=∞

   <u>Απάντηση</u>: γ

   <u>Επεξήγηση</u>: Γνωρίζουμε ότι, ο μετασχηματισμός-Z του σήματος x(n) είναι

   X(z)=$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

   Δοθέντος x(n)= δ(n-k)=1 για n=k => $X(z)=z^{-k}$

   Από την παραπάνω εξίσωση , X(z) είναι ορισμένο σε όλες τις τιμές του z εκτός από z=0 για k>0. Επομένως το ROC είναι ορισμένο ως Ολόκληρο επίπεδο-z, εκτός από z=0

5. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Z του σήματος $x(n)=(0.5)^n u(n)$;

   α)$\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$, ROC: $|z|>0.5$

   β) $\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$, ROC: $|z|<0.5$

γ) $\frac{1}{1+0.5z^{-1}}$, ROC: $|z| > 0.5$

δ) $\frac{1}{1+0.5z^{-1}}$, ROC: $|z| < 0.5$

<u>Απάντηση</u>: α

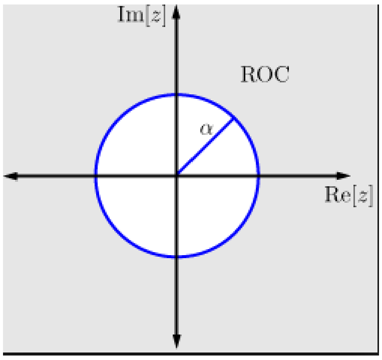
<u>Επεξήγηση</u>: Για ένα δοθέν σήμα x(n), ο μετασχηματισμός-Ζ είναι:

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

Δοθέντος $x(n)=(0.5)^n u(n)=(0.5)^n$ για $n\geq 0$

Επομένως $X(z)= \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(0.5z^{-1})^n$
Αυτό είναι ένα άπειρο GP του οποίου το άθροισμα δίνεται ως :
$X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$ κάτω από την προϋπόθεση ότι $|0.5z^{-1}| < 1$
$X(z)= \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$ και ROC είναι $|z| > 0.5$

6. Ποια από τις παρακάτω σειρές έχει ROC όπως αναφέρεται παρακάτω;



α) $\alpha^{-n}u(n)$
β) $\alpha^{n}u(n)$
γ) $\alpha^{-n}u(-n)$
δ) $\alpha^{n}u(n)$

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Θέτουμε $x(n)= \alpha^n u(n)$
Ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος x(n) δίνεται ως:

$X(z) =X(z)= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$

$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ και ROC είναι $|z| >$a το οποίο έχει δοθεί στην ερώτηση.

7. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος $x(n)= -\alpha^n u(-n-1)$;

α) $\frac{1}{1-az^{-1}}$,ROC $|z|<|a|$

β) $\frac{1}{1+az^{-1}}$,ROC |z|<|a|
γ) $\frac{1}{1-az^{-1}}$,ROC |z|>|a|
δ) $\frac{1}{1-az^{-1}}$,ROC |z|<|a|

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Δοθέντος $x(n) = -a^n u(-n-1) = 0$ για $n \geq 0$
$= -a^n$ για $n \leq -1$
Από τον ορισμό του μετασχηματισμού-Z ,έχουμε
$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-a^n)z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-a^1 z)^{-n} = -\frac{1}{1-az^{-1}}$ και $|a^{-1}z| <1 \Rightarrow |z|<|a|$

8. Ποιο είναι το ROC του μετασχηματισμού-Z του σήματος $x(n)= a^n u(n)+b^n u(-n-1)$;

α) |a|<|z|<|b|
β) |a|>|z|>|b|
γ) |a|>|z|<|b|
δ) |a|<|z|>|b|

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι,
- Το ROC του μετασχηματισμού-Z του u(n) είναι|z|>|a
- Το ROC του μετασχηματισμού-Z του u(-n-1) είναι |z|<|b|

Συνδυάζοντας και τα 2 ROC παίρνουμε το ROC του μετασχηματισμού του σήματος (x) : |a|<|z|<|b.

9. Ποιο είναι το ROC ενός μετασχηματισμού-Z μιας μη-αιτιατής πεπερασμένου μήκους ακολουθίας;

α) z=0
β) z=∞
γ) Ολόκληρο το επίπεδο-z, εκτός από z=0
δ) Ολόκληρο το επίπεδο-z, εκτός από z=∞

Απάντηση: δ

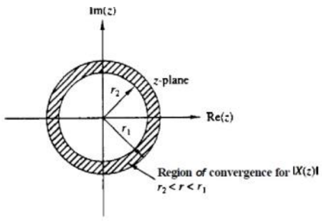
Επεξήγηση: Ας θεωρήσουμε ένα παράδειγμα μιας μη αιτιατής ακολουθίας στην οποία ο μετασχηματισμός-Z θα είναι της μορφής $X(z)=1+z+z^2$ που έχει πεπερασμένη τιμή για όλες τις τιμές του ‘z’ εκτός από z=∞. Επομένως , το ROC μιας μη αιτιατής ακολουθίας σε ολόκληρο επίπεδο-z, εκτός από z=∞.

10. Ποιο είναι το ROC ενός μετασχηματισμού-Z μιας δίπλευρης άπειρης ακολουθίας;

α) $|z|>r_1$
β) $|z|<r_1$
γ) $r_2<|z|<r_1$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Σχεδιάζουμε το γράφημα του μετασχηματισμού-Ζ οποιονδήποτε δίπλευρων ακολουθιών όπως φαίνεται παρακάτω



Από το παραπάνω γράφημα, μπορούμε να δηλώσουμε ότι το ROC μιας δίπλευρης ακολουθίας θα είναι της μορφής $r_2 < |z| < r_1$

11. Ο μετασχηματισμός-Ζ της ακολουθίας x(n) που δίνεται από:

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

Είναι γνωστή ως:

α) Μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ
β) Δίπλευρος μετασχηματισμός-Ζ
γ) Τρίπλευρος μετασχηματισμός-Ζ
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Η ολόκληρη χρονική ακολουθία είναι χωρισμένη σε 2 μέρη, n=0 σε ∞ και n=-∞ σε 0 Εφόσον ο μετασχηματισμός-Ζ του δοθέντος σήματος στην ερώτηση περιέχει και τα 2 μέρη, λέγεται Δίπλευρος μετασχηματισμός-Ζ.

12. Ποιο είναι το ROC μιας συνάρτησης συστήματος H(z) εάν το LTI σύστημα διακριτού χρόνου είναι κατά BIBO σταθερό;

α) Ολόκληρο το επίπεδο-z, εκτός από z=0
β) Ολόκληρο το επίπεδο-z, εκτός από z=∞
γ) Συμπεριλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου είναι κατά BIBO σταθερό, εάν και μόνο εάν η κρουστική του απόκριση h(n) είναι απολύτως αθροιστική. Δηλαδή:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Γνωρίζουμε ότι, H(z)= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$

θέτουμε z=$e^{j\omega}$ έτσι ώστε |z|=|$e^{j\omega}$| = 1
Άρα,
|H($e^{j\omega}$)|=|H(ω)|=| $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-j\omega n}$ | ≤ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-j\omega n}$ |= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$
Επομένως, βλέπουμε ότι εάν το σύστημα είναι σταθερό, τότε το H(z) συγκλίνει για z=$e^{j\omega e}$. Με άλλα λόγια, για ένα LTI σύστημα διακριτού χρόνου, το ROC του H(z) πρέπει να συμπεριλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο |z|=1.

13. Το ROC ενός μετασχηματισμού-Z οποιουδήποτε σήματος δεν μπορεί να περιλαμβάνει πόλους.

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Εφόσον η τιμή του μετασχηματισμού-Z τείνει στο άπειρο, το ROC ενός μετασχηματισμού-Z δεν περιλαμβάνει πόλους.

14. Είναι σταθερό κατά BIBO ένα LTI σύστημα διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση h(n)=a^n(n) (|a| < 1);

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Δοθέντος h(n)=(n) (|a|<1)
Ο μετασχηματισμός-Z του h(n) είναι H(z)=z/(z-a), το ROC είναι |z|>|a|
Εάν |a|<1, τότε το ROC συμπεριλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, Επομένως, το σύστημα είναι κατά BIBO σταθερό.

15. Ποιο είναι το ROC μιας αιτιατής απείρου μήκους ακολουθίας;

α) |z|<r_1
β) |z|>r_1
γ) r_2<|z|<r_1
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Το ROC μιας αιτιατής απείρου μήκους ακολουθίας είναι της μορφής |z|>r_1 όπου r_1 είναι το μεγαλύτερο μέγεθος των πόλων.

2.11 Ιδιότητες του μετασχηματισμού-Ζ

Θεωρία:

α) **Γραμμικότητα:**

Εάν

$x_1(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X_1(z)$ με Π.Σ. P_1

και

$x_2(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X_2(z)$ με Π.Σ. P_2

Τότε

$ax_1(n) + bx_2(n) \overset{z}{\leftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z)$ με Π.Σ. $P_{1\cap}P_2$

όπου a, b σταθερές και $P_{1\cap}P_2$ η τομή των περιοχών P1 και P2.

β) **Ολίσθηση στο χρόνο**:

Εάν

$x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$ με Π.Σ. P

Τότε

$x(n-m) \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-m}X(z)$ με Π.Σ. P'

όπου P΄=P με ενδεχόμενο όμως την προσθήκη ή απόρριψη των τιμών 0 και ∞, λόγω του παράγοντα z^{-m}

γ) **Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου:**

Εάν

$x_1(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X_1(z)$ με Π.Σ. P_1

και

$x_2(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X_2(z)$ με Π.Σ. P_2

Τότε

$x_1(n) * x_2(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X_1(z)X_2(z)$ με Π.Σ. $P_{1\cap}P_2$

Ασκήσεις:

1. Ποιο από τα παρακάτω αιτιολογεί την γραμμική ιδιότητα Ζ; [x(n)↔X(z)]

α) $x(n)+y(n) \leftrightarrow X(z)Y(z)$
β) $x(n)+y(n) \leftrightarrow X(z)+Y(z)$
γ) $x(n)y(n) \leftrightarrow X(z)+Y(z)$
δ) $x(n)y(n) \leftrightarrow X(z)Y(z)$

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Σύμφωνα με την γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού-Ζ, εάν X(z) και Y(z) είναι οι μετασχηματισμοί z του x(n) και του y(n) αντίστοιχα τότε, ο μετασχηματισμός-Ζ του x(n)+y(n) είναι X(z)+Y(z)

2. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος $x(n)=[3(2^n)-4(3^n)]u(n)$;

α) $3/(1-2z^{-1})-4/(1-3z^{-1})$
β) $3/(1+2z^{-1})-4/(1+3z^{-1})$
γ) $3/(1-2z)-4/(1-3z)$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Ας διαχωρίσουμε το δοθέν σήμα x(n) σε $x_1(n)= 3(2^n)u(n)$, $x_2(n)= 4(3^n)u(n)$ και $x(n)=x_1(n)-x_2(n)$

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού-Ζ $X_1(z)= 3/(1-2z^{-1})$ και $X_2(z)= 4/(1-3z^{-1})$

Οπότε, από την γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμου-Ζ:
$X(z)=X_1(z)-X_2(z)$
$\Rightarrow X(z)= 3/(1-2z^{-1})-4/(1-3z^{-1})$

3. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος $x(n)=\sin(j\omega_0 n)u(n)$?

α) $\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1+2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$
β) $\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0-z^{-2}}$
γ) $\frac{z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$
δ) $\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Από την ταυτότητα του Euler, το δοθέν σήμα x(n) μπορεί να γραφτεί ως:
$x(n) = \sin(j(\omega_0 n))u(n)=\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 n}u(n) -e^{-j\omega_0 n}\, u(n)]$
Άρα $X(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right]$
Απαλείφοντας, παίρνουμε $X(z)= \frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$

4. Σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης του μετασχηματισμού-Z , εάν X(z) είναι ο μετασχηματισμός-Z του x(n) τότε ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Z του x(n-k);

α) $z^{k}X(z)$
β) $z^{-k}X(z)$
γ) X(z-k)
δ) X(z+k)

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Σύμφωνα με τον ορισμό του μετασχηματισμού-Z
$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ => $Z\{x(n-k)\} = X^1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)z^{-n}$
Θέτουμε n-k=1
Οπότε, $X^1(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)z^{-l-k} = z^{-k}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)z^{-1} = z^{-k}X(z)$.

5. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Z του σήματος που ορίζεται ως x(n)=u(n)-u(n-N);

α) $\frac{1+z^{N}}{1+z^{-1}}$
β) $\frac{1-z^{N}}{1+z^{-1}}$
γ) $\frac{1+z^{-N}}{1+z^{-1}}$
δ) $\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι: $Z\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$
Και από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης, έχουμε $Z\{x(n-k)\} = z^{-k}.Z\{x(n)\}$
$Z\{u(n-N)\} = z^{-N}\ \frac{1}{1-z^{-1}}$
$Z\{u(n)-u(n-N)\} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

6. Εάν X(z) είναι ο μετασχηματισμός-Z του σήματος x(n), τότε ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Z του σήματος $a^{n}x(n)$;

α) X(az)
β) $X(az^{-1})$
γ) $X(a^{-1}z)$
δ) κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι από τον ορισμό του μετασχηματισμού-Z
$Z\{a^{n}x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n}x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$.

7. Εάν το ROC του X(z) είναι $r_1<|z|<r_2$, τότε ποιο είναι το ROC του $X(a^{-1}z)$;

α) $|a|r_1<|z|<|a|r_2$
β) $|a|r_1>|z|>|a|r_2$
γ) $|a|r_1<|z|>|a|r_2$
δ) $|a|r_1>|z|<|a|r_2$

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Το δοθέν ROC του X(z) είναι $r_1<|z|<r_2$
Το ROC του $X(a^{-1}z)$ θα είναι $r_1<|a^{-1}z|<r_2=|a|r_1<|z|<|a|r_2$

8. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Z του σήματος $x(n)=a^n(\sin\omega_0 n)u(n)$;

α) $\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1+2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$

β) $\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0-a^2z^{-2}}$

γ) $\frac{(az)^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$

δ) $\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι από την γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού-Z του $\sin(\omega_0 n)$u(n) είναι:

$$X(z)=\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$$

Τώρα κλιμακώνοντας την ιδιότητα στο πεδίο z , έχουμε μετασχηματισμό-Z του $a^n(\sin(\omega_0 n))u(n)$:

$$X(az)=\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$$

9. Εάν X(z) είναι ο μετασχηματισμός-Z του σήματος x(n), τότε ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Z του σήματος x(-n);

α) X(-z)
β) $X(z^{-1})$
γ) $X^{-1}(z)$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού-Z, έχουμε

Z{ x(-n) } = $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)(z^{-1})^{-n} = X(z^{-1})$

10. Εάν X(z) είναι ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος x(n), τότε ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος nx(n)

α) -z(dX(z))/dz
β) zdX(z)/dz
γ) $-z^{-1}$dX(z)/dz
δ) z^{-1}(dX(z))/dz

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού-Ζ, έχουμε
X(z)= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$
Παραγωγίζοντας τις 2 πλευρές, έχουμε:
$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n)x(n)z^{-n-1} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = -z^{-1}Z\{nx(n)\}$
Επομένως, λαμβάνουμε: -z $\frac{dX(z)}{dz}$ = Z{ nx(n) }.

11. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος x(n)=na^{n}u(n);

α) $\frac{(az)^{-1}}{(1-(az)^{-1})^2}$
β) $\frac{az^{-1}}{(1-(az)^{-1})^2}$
γ) $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
δ) $\frac{az^{-1}}{(1+az^{-1})^2}$

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι Z$\{a^n u(n)\} = \frac{1}{1-az^{-1}} = X(z)$
Τώρα ο μετασχηματισμός του n$a^n u(n) = -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$

2.12 Μετατροπή του Ρυθμού Δειγματοληψίας με ένα ρητό Παράγοντα

Θεωρία:

Έστω, ότι το αναλογικό σήμα x_a(t) τροφοδοτείται στην είσοδο ενός ιδανικού δειγματολήπτη. Η έξοδος αυτού θα είναι η ακολουθία x(n), τα στοιχεία της οποίας αντιστοιχούν στις μετρήσεις του πλάτους της x_a(t) ανά χρονικά διαστήματα T δευτερολέπτων.

$$x(n)= x_a(nT)$$

Η παράμετρος T αποτελεί την περίοδο δειγματοληψίας και το αντίστροφο αυτής τη συχνότητα ή το ρυθμό δειγματοληψίας (Fs = 1/T), δηλαδή, το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνονται στη μονάδα του χρόνου.

Ασκήσεις:

1. Από ποια σύνδεση της παρεμβολής και του υποδειγματολήπτη επιτυγχάνεται ο ρυθμός μετατροπής δειγματοληψίας από τον ρητό παράγοντα;

   α) Παράλληλη
   β) Σύμπτυξη
   γ) Ανέλιξη
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: β

   Επεξήγηση: Ο ρυθμός μετατροπής δειγματοληψίας από τον ρητό παράγοντα I/D επιτυγχάνεται από την σύμπτυξη της παρεμβολής με την υποδειγματοληψία.

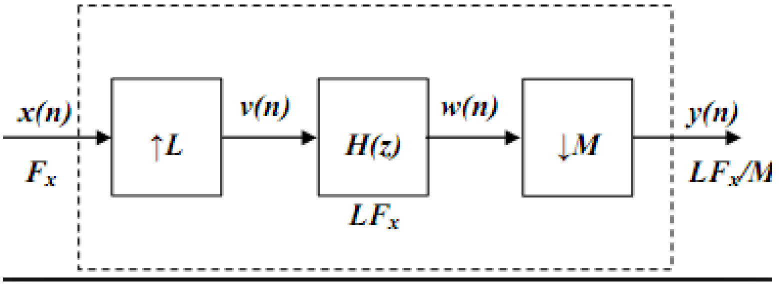
2. Ποιο από τις παρακάτω πρέπει να εκτελεστεί στο ρυθμό μετατροπής δειγματοληψίας από ρητό συντελεστή;

   α) Παρεμβολή
   β) Υποδειγματοληψία
   γ) Είτε Παρεμβολή είτε υποδειγματοληψία
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Τονίζουμε ότι το σημαντικό της εκτέλεσης της παρεμβολής πρώτα και έπειτα της υποδειγματοληψίας, είναι για να διατηρήσουμε τα επιθυμητά φασματικά χαρακτηριστικά της x(n).

3. Ποια από τις παρακάτω διαδικασίες εκτελείται από τα τμήματα που δίνονται στο παρακάτω σχήμα;



α) Ρυθμός μετατροπής δειγματοληψίας με παράγοντα I
β) Ρυθμός μετατροπής δειγματοληψίας με παράγοντα D
γ) Ρυθμός μετατροπής δειγματοληψίας με παράγοντα D/I
δ) Ρυθμός μετατροπής δειγματοληψίας με παράγοντα I/D

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Στο δοθέν διάγραμμα, η παρεμβολή συμπτύσσεται συμπίπτει με ένα υποδειγματολήπτη οι οποίοι μαζί εκτελούν τον ρυθμός μετατροπής δειγματοληψίας από έναν παράγοντα I/D.

4. Η N^{th} ρίζα της μοναδιαίας W_N είναι:

α) $e^{j2\pi N}$
β) e-j2πN
γ) $e^{-j2\pi/N}$
δ) $e^{j2\pi/N}$

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(n) είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N{}^{kn}$$

Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε την N^{th} ρίζα της μοναδιαίας

$W_N = e^{-j2\pi/N}$

5. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό σύμφωνα με τον αριθμό των υπολογισμών που χρειάζονται για να υπολογίσουμε ένα N-σημείων DFT;

α) N^2 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς και N(N-1) μιγαδικές προσθέσεις
β) N^2 μιγαδικές προσθέσεις και N(N-1) μιγαδικούς πολλαπλασιασμός
γ) N^2 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς και N(N+1) μιγαδικές προσθέσεις
δ) N^2 μιγαδικές προσθέσεις και N(N+1) μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Ο τύπος για να υπολογίσουμε το N σημείο DFT είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

Από τον δοθέν τύπο σε κάθε βήμα του υπολογισμού εκτελούμε N μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς και N-1 μιγαδικές προσθέσεις. Επομένως, συνολικά για να εκτελέσουμε N-point DFT εκτελούμε N^2 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς και N(N-1) μιγαδικές προσθέσεις.

6. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

α) $W_N^{*} = \frac{1}{N} W_N^{-1}$
β) $W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^{*}$
γ) $W_N^{-1} = W_N^{*}$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Εάν το X_N εκφράζει το N σημείο του DFT της ακολουθίας x_N σε μορφή πίνακα, τότε γνωρίζουμε ότι

$$X_N = W_N . x_N$$

Προ-πολλαπλασιάζοντας και τις 2 πλευρές με W_N^{-1}, παίρνουμε
$x_N = W_N^{-1} . X_N$
Αλλά γνωρίζουμε ότι ο αντίστροφος DFT του X_N είναι ορισμένος ως
$x_N = \frac{1}{N} W_N^{*} X_N$
Άρα συγκρίνοντας τις 2 παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε
$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^{*}$$

7. Ποιος είναι ο DFT της ακολουθίας τεσσάρων σημείων x(n)={0,1,2,3};

α) {6,-2+2j-2,-2-2j}
β) {6,-2-2j,2,-2+2j}
γ) {6,-2+2j,-2,-2-2j}
δ) {6,-2-2j,-2,-2+2j}

<u>Απάντηση</u>: γ

<u>Επεξήγηση</u>: Το 1ο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τον πίνακα W_4. Εκμεταλλευόμενοι την περιοδική ιδιότητα του W_4 και την συμμετρική ιδιότητα

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^{k}$$

Ο πίνακας W_4 μπορεί να εκφραστεί ως

$$W_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Έπειτα, $X_4 = W_4 . x_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \; +2j \\ -2 \\ -2 \; -2j \end{bmatrix}$

8. Εάν X(k) είναι το N σημείο DFT μιας ακολουθίας της οποίας η σειρά συντελεστών Fourier δίνεται από το c_k,τότε ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

   α) $X(k)=Nc_k$
   β) $X(k)=c_k/N$
   γ) $X(k)=N/c_k$
   δ) Κανένα από τα παρακάτω

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Η σειρά συντελεστών Fourier δίνεται από την έκφραση:
   $$C_K = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}X(k) => X(k) = Nc_K$$

9. Ποιο είναι το DFT της ακολουθίας 4 σημείων x(n)={0,1,2,3};

   α) {6,-2+2j-2,-2-2j}
   β) {6,-2-2j,2,-2+2j}
   γ) {6,-2-2j,-2,-2+2j}
   δ){6,-2+2j,-2,-2-2j}

   Απάντηση: δ

   Επεξήγηση: Έχοντας x(n)={0,1,2,3}
   Ξέρουμε ότι το 4-σημείων DFT της παραπάνω ακολουθίας δίνεται από την έκφραση

   $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

   Σε αυτή την περίπτωση N=4
   =>X(0)=6,X(1)=-2+2j,X(2)=-2,X(3)=-2-2j

10. Εάν $W_4^{100}=W_x^{200}$, τότε ποια είναι η τιμή του x;

   α) 2
   β) 4
   γ) 8
   δ) 16

   Απάντηση: γ

   Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι σύμφωνα με την περιοδική και συμμετρική ιδιότητα, 100/4=200/x=>x=8

2.13 Ρητός Μετασχηματισμός-Ζ

Θεωρία:

Ο **Μετασχηματισμός-Ζ** σε πολλες περιπτώσεις μπορεί να εκφραστει ως ρητή συνάρτηση του z, δηλαδή

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Όπου:

- Ρίζες αριθμητή: μηδενικά (ο στο μιγαδικό επίπεδο)
- Ρίζες παρονομαστή: πόλοι (x στο μιγαδικό επίπεδο)
- Όπως και για το Μετασχηματισμό Laplace,η περιοχή σύγκλισης εξαρτάται από τη θέση των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο
- Όλες οι ακολουθίες διακριτού χρόνου που μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός πραγματικών ή μιγαδικών εκθετικών έχουν ρητούς συνδυασμός πραγματικών ή μιγαδικών εκθετικών έχουν ρητούς Μετασχηματισμούς Ζ

Ασκήσεις:

1. Ποιες είναι οι τιμές του z για το οποίο η τιμή του X(z)=0;
   α) Πόλοι
   β) Μηδενικά
   γ) Λύσεις
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: β

   Επεξήγηση: Για ένα ρητό μετασχηματισμό-Ζ X(z) να ισούται με το μηδέν, ο αριθμητής του X(z) είναι μηδέν και οι λύσεις του αριθμητή ονομάζονται ‘μηδενικά’ του X(z).

2. Ποιες είναι οι τιμές του z για του οποίου η τιμή του X(z)=∞;

   α) Πόλοι
   β) Μηδενικά
   γ) Λύσεις
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Για ένα ρητό μετασχηματισμό-Ζ X(z) να είναι άπειρος, ο παρανομαστής του X(z) είναι μηδέν και οι λύσεις του παρανομαστή ονομάζονται ‘πόλοι’ του X(z).

3. Εάν X(z) έχει M πεπερασμένα μηδενικά και N πεπερασμένους πόλους, τότε ποια από τις παρακάτω συνθήκες είναι σωστή.

α) |N-M|πόλους στην αρχή των αξόνων (εάν N > M)
β) |N+M|μηδενικά στην αρχή των αξόνων (εάν N > M)
γ) |N+M|πόλους στην αρχή των αξόνων (εάν N >M)
δ) |N-M|μηδενικά στην αρχή των αξόνων (εάν N >M)

<u>Απάντηση</u>: δ

<u>Επεξήγηση</u>: Εάν X(z) έχει M πεπερασμένα μηδενικά και N πεπερασμένους πόλους, τότε X(z) μπορεί να ξαναγραφτεί σαν $X(z)=z^{-M+N}.X'(z)$
Οπότε, εάν N>M τότε το z έχει θετικό εκθέτη. Άρα, έχει|N-M|μηδενικά στην αρχή των αξόνων.

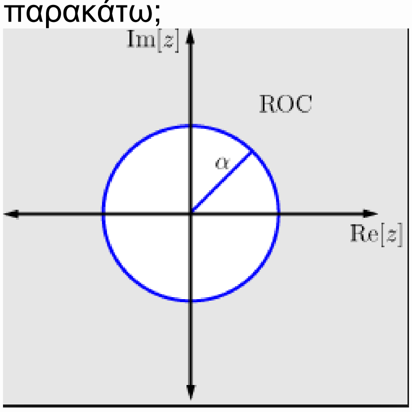
4. Εάν X(z) έχει M πεπερασμένα μηδενικά και N πεπερασμένους πόλους, τότε ποια από τις παρακάτω συνθήκες είναι σωστή.

α) |N-M|πόλους στην αρχή των αξόνων (εάν N < M)
β) |N+M|μηδενικά στην αρχή των αξόνων (εάν N < M)
γ) |N+M|πόλους στην αρχή των αξόνων (εάν N < M)
δ) |N-M|μηδενικά στην αρχή των αξόνων (εάν N < M)

<u>Απάντηση</u>: α

<u>Επεξήγηση</u>: Εάν X(z) έχει M πεπερασμένα μηδενικά και N πεπερασμένους πόλους, τότε X(z) μπορεί να ξαναγραφτεί σαν $X(z)=z^{-M+N}.X'(z)$
Οπότε, εάν N<M τότε το z έχει αρνητικό εκθέτη. Άρα, έχει |N-M|πόλους στην αρχή των αξόνων.

5. Ποιο από τα παρακάτω σήματα έχει γράφημα μηδενικού πόλου όπως φαίνεται παρακάτω;



α) a.u(n)
β) u(an)
γ) $a^n u(n)$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Από το γράφημα μηδενικού πόλου, ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος έχει ένα μηδενικό στο z=0 και ένα πόλο στο z=a
Οπότε, παίρνουμε X(z)=z/(z-α)
Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο του μετασχηματισμού-Ζ για το X(z), παίρνουμε $x(n)= a^n u(n)$

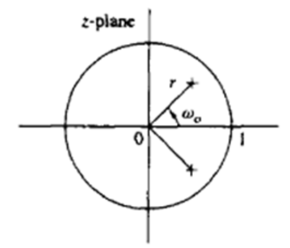
6. Ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος $x(n)=a^n u(n)$ έχει:

α) Ένα πόλο στο z=0 και ένα μηδενικό στο z=a
β) Ένα πόλο στο z=0 και ένα μηδενικό στο z=0
γ) Ένα πόλο στο z=a και ένα μηδενικό στο z=a
δ) Ένα πόλο στο z=a και ένα μηδενικό στο z=0

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Ο μετασχηματισμός-Ζ του δοθέντος σήματος είναι X(z)= z/(z-α)
Οπότε, έχει ένα πόλο στο z=a και ένα μηδενικό στο z=0

7. Ποια είναι η φύση του σήματος στου οποίου το γράφημα του μηδενικού πόλου φαίνεται παρακάτω :



α) Αύξον σήμα
β) Σταθερό σήμα
γ) Φθίνον σήμα
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Από το γράφημα του μηδενικού πόλου, φαίνεται ότι r < 1, οπότε το σήμα είναι ένα φθίνον σήμα.

8. Ποιες είναι οι τιμές του z για το οποίο η τιμή του X(z)=0;

α) Πόλοι
β) Μηδενικά
γ) Λύσεις
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

<u>Επεξήγηση</u>: Για ένα ρητό μετασχηματισμό-Z X(z) να είναι μηδενικός, ο αριθμητής του X(z) είναι μηδέν και οι λύσεις του αριθμητή ονομάζονται ‘μηδενικά’ του X(z).

9. Εάν Y(z) είναι ο μετασχηματισμός-Z της συνάρτησης εξόδου, X(z) είναι ο μετασχηματισμός-Z της συνάρτησης εισόδου και H(z) είναι ο μετασχηματισμός-Z της συνάρτησης συστήματος του συστήματος LTI , τότε H(z)=;

α) (Y(z))/(X(z))
β) (X(z))/(Y(z))
γ) Y(z).X(z)
δ) Κανένα από τα παραπάνω

<u>Απάντηση</u>: α

<u>Επεξήγηση</u>: Ξέρουμε ότι για ένα σύστημα LTI, y(n)=h(n)*x(n)
Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό z και στις 2 πλευρές παίρνουμε,
Y(z)=H(z).X(z)=>H(z)=(Y(z))/(X(z))

10. Ποια είναι η συνάρτηση συστήματος του συστήματος το οποίο περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση y(n)=0.5y(n-1)+2x(n);

α) $\frac{2}{1+0.5z^{-1}}$
β) $\frac{0.5}{1+2z^{-1}}$
γ) $\frac{0.5}{1-2z^{-1}}$
δ) $\frac{2}{1-0.5z^{-1}}$

<u>Απάντηση</u>: δ

<u>Επεξήγηση</u>: Η δοθείσα διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι y(n)=0.5y(n-1)+2x(n)

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό z και στις 2 πλευρές παίρνουμε, $Y(z)=0.5z^{-1}Y(z)+2X(z)$

$$=> \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1-0.5z^{-1}} = H(z)$$

11. Ποια είναι η μοναδιαία απόκρισης δειγματοληψίας του συστήματος το οποίο περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση y(n)=0.5y(n-1)+2x(n);

α) $0.5(2)^n u(n)$
β) $2(0.5)^n u(n)$
γ) $0.5(2)^n u(-n)$
δ) $2(0.5)^n u(-n)$

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό z και στις 2 πλευρές στην δοθείσα διαφορική εξίσωση και έπειτα εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό z έχουμε $h(n)= 2(0.5)^n u(n)$.

2.14 Αντίστροφος μετασχηματισμός-Ζ

Θεωρία:

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός-Ζ μας βοηθά να **υπολογίσουμε** το σήμα διακριτού χρόνου x(n) όταν γνωρίζουμε το μετασχηματισμό-Ζ αυτού, X(z). Συμβολικά γράφουμε: $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$.

Αποδεικνύεται ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός-Ζ της X(z) δίνεται από τη σχέση:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

όπου c μια αριστερόστροφη κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσηςγύρω από την αρχή των αξόνων και εντός της Π.Σ. της X(z). Για δεδομένη Π.Σ. ο αντίστροφος μετασχηματισμός-Ζ είναι μοναδικά ορισμένος.

Ασκήσεις:

1. Ποια από τις παρακάτω μεθόδους χρησιμοποιείται για να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός-Ζ ενός σήματος;

α) Μετρητής ολοκλήρωσης
β) Ανάπτυξη σε μια σειρά όρων
γ) Επέκταση με μερικά κλάσμα
δ) Όλα τα παραπάνω

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Όλες οι παραπάνω μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουν τον αντίστροφο μετασχηματισμό-Ζ του δοθέντος σήματος.

2. Ποιος είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός-Ζ του $X(z)=1/(1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2})$ εάν το ROC είναι |z|>1.

α) {1,3/2,7/4,15/8,31/16,….}
β) {1,2/3,4/7,8/15,16/31,….}
γ) {1/2,3/4,7/8,15/16,31/32,….}
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Εφόσον το ROC είναι ο εξωτερικός κύκλος, περιμένουμε το x(n) να είναι αιτιατό σήμα. Έτσι αναζητάμε μια δυναμοσειρά σε αρνητικές δυνάμεις του ‘z’. Διαιρώντας τον αριθμητή του X(z) με τον παρανομαστή του, παίρνουμε την δυναμοσειρά:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \frac{31}{16}z^{-4} + \cdots$$

Οπότε, παίρνουμε
x(n)= {1,3/2,7/4,15/8,31/16,….}.

3. Ποιος είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός-Z του $X(z)=1/(1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2})$ εάν το ROC είναι|z| < 0.5;

α) {….62,30,14,6,2}
β) {…..62,30,14,6,2,0,0}
γ) {0,0,2,6,14,30,62…..}
δ) {2,6,14,30,62…..}

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Σε αυτήν την περίπτωση το ROC είναι το εσωτερικό ενός κύκλου. Επομένως, το σήμα x(n) είναι αντι-αιτιατό. Για να αποκτήσουμε μια δυναμοσειρά με θετικές δυνάμεις του ‘z’, κάνουμε τη διαίρεση με τον παρακάτω τρόπο

$$\frac{2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \cdots}{(\frac{1}{3}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1)1}$$

$$\frac{1 - 3z + 2z^2}{3z - 2z^2}$$

$$\frac{3z - 9z^2 + 6z^3}{7z^2 - 6z^3}$$

$$\frac{7z^2 - 21z^3 + 14z^4}{15z^3 - 14z^4}$$

$$\frac{15z^3 - 45z^4 + 30z^5}{31z^4 - 30z^5}$$

Άρα :

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \cdots$$

Σε αυτήν την περίπτωση x(n)=0 για n≥0. Οπότε παίρνουμε
x(n)= {…..62,30,14,6,2,0,0}

4. Ποιος είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός-Z του X(z)=log(1+az^{-1}) |z|>|a|;

   α) $x(n) = (-1)^{n+1}\frac{a^{-n}}{n}, n \geq 1$
   $= 0, n \leq 0$
   β) $x(n) = (-1)^{n-1}\frac{a^{-n}}{n}, n \geq 1$
   $= 0, n \leq 0$
   γ) $x(n) = (-1)^{n+1}\frac{a^{n}}{n}, n \geq 1$
   $= 0, n \leq 0$
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: γ

   Επεξήγηση: Χρησιμοποιώντας την δυναμοσειρά για log(1+x), με |x|<1,
   $X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}$
   Άρα,
   $x(n) = (-1)^{n+1}\frac{a^{n}}{n}, n \geq 1$
   $=0, n \leq 0$

5. Ποιο είναι το γνήσιο κλάσμα και η πολυωνυμική μορφή καταχρηστικού ρητού μετασχηματισμού;

   α) 1+2z -1+(1/6 z^{-1})/(1+5/6 z^{-1}+1/6 z^{-2})
   β) 1-2z -1+(1/6 z^{-1})/(1+5/6 z^{-1}+1/6 z^{-2})
   γ) 1+2z -1+(1/3 z^{-1})/(1+5/6 z^{-1}+1/6 z^{-2})
   δ) 1+2z -1-(1/6 z^{-1})/(1+5/6 z^{-1}+1/6 z^{-2})

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Αρχικά, σημειώνουμε ότι θα έπρεπε να μειώσουμε τον αριθμητή έτσι ώστε οι όροι z-2 και z -3 να απαλειφθούν.

   Άρα θα πρέπει να εκτελέσουμε την διαίρεση αυτών των δύο πολυωνύμων γράφοντας τα με αντίστροφη σειρά. Σταματάμε την διαίρεση όταν ο βαθμός του υπολείπου γίνεται z-1. Μετά παίρνουμε:

   X(z)= 1+2z -1+(1/6 z^{-1})/(1+5/6 z^{-1}+1/6 z^{-2})

6. Ποια είναι η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα της γνήσιας εξίσωσης X(z)= 1/(1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2});

   α) 2z/(z-1)-z/(z+0.5)
   β) 2z/(z-1)+z/(z-0.5)
   γ) 2z/(z-1)+z/(z+0.5)
   δ) 2z/(z-1)-z/(z-0.5)

   Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Αρχικά απαλείφουμε τις αρνητικές δυνάμεις του z, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με z^2
Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε X(z)= $z^2/(z^2-1.5z+0.5)$

Οι πόλοι του X(z) είναι p1=1 και p2=0.5. Επομένως, η ανάπτυξη θα είναι:

(X(z))/z = z/((z-1)(z-0.5)) = 2/((z-1)) – 1/((z-0.5)) (εφαρμόζοντας ανάπτυξη με μερικά κλάσματα)

=>X(z)= 2z/(z-1)-z/(z-0.5)

7. Ποια είναι η ανάπτυξη με μερικά κλάσματα του X(z)= $(1+z^{-1})/(1-z^{-1}+0.5z^{-2})$

α) (z(0.5-1.5j))/(z-0.5-0.5j) – (z(0.5+1.5j))/(z-0.5+0.5j)
β) (z(0.5-1.5j))/(z-0.5-0.5j) + (z(0.5+1.5j))/(z-0.5+0.5j)
γ) (z(0.5+1.5j))/(z-0.5-0.5j) – (z(0.5-1.5j))/(z-0.5+0.5j)
δ) (z(0.5+1.5j))/(z-0.5-0.5j) + (z(0.5-1.5j))/(z-0.5+0.5j)

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Για να απαλείψουμε τις αρνητικές δυνάμεις του z, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με z^2. Με αυτόν τον τρόπο, X(z)=(z(z+1))/(z-2-z+0.5)

Οι πόλοι του X(z) είναι μιγαδικοί συζυγείς p1=0.5+0.5j και p2=0.5-0.5j

Εν συνεχεία η ανάπτυξη θα είναι:
X(z)= (z(0.5-1.5j))/(z-0.5-0.5j) + (z(0.5+1.5j))/(z-0.5+0.5j)

8. Ποια είναι η ανάπτυξη με μερικά κλάσματα του X(z)=$1/((1+z^{-1})(1-z^{-1})^2)$;

α) $z/(4(z+1)) + 3z/(4(z-1)) + z/(2[(z+1)]^2)$
β) $z/(4(z+1)) + 3z/(4(z-1)) – z/(2[(z+1)]^2)$
γ) $z/(4(z+1)) + 3z/(4(z-1)) + z/(2[(z-1)]^2)$
δ) $z/(4(z+1)) + z/(4(z-1)) + z/(2[(z+1)]^2)$

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Αρχικά εκφράζουμε το X(z) με όρους θετικών δυνάμεων του z , στη μορφή X(z)=$z^3/((z+1)[(z-1)]^2)$
Το X(z) έχει ένα μοναδικό πόλο στο z=-1 και ένα διπλό στο z=1. Σε μια τέτοια περίπτωση η προσεγγιστική ανάπτυξη σε μερικώς διογκωμένο κλάσμα είναι:

(X(z))/z = $z^2/((z+1)[(z-1)]^2) = A/(z+1) + B/(z-1) + C/[(z-1)]^2$

Επομένως, παίρνουμε X(z)= $z/(4(z+1)) + 3z/(4(z-1)) + z/(2[(z-1)]^2)$.

9. Ποιος είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός-Ζ του X(z)= $1/(1-1.5z^{-1}+0.5z^2-2)$ εάν το ROC είναι |z|>1?

α) $(2-0.5^n)u(n)$

β) $(2+0.5^n)u(n)$
γ) $(2^n-0.5^n)u(n)$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα του δοθέντος X(z) είναι

$X(z)= 2z/(z-1)-z/(z-0.5)$

Στην περίπτωση που το ROC είναι $|z|>1$, το σήμα x(n) είναι αιτιατό και οι δύο όροι της παραπάνω εξίσωσης είναι αιτιατοί όροι. Άρα, όταν εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό-Ζ στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε $x(n)=2(1)^n u(n)-(0.5)^n u(n)=(2-0.5^n)u(n)$

10. Ποιος είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός-Ζ του $X(z)= 1/(1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2})$ εάν το ROC είναι $|z|<0.5$;

α) $[-2-0.5^n]u(n)$
β) $[-2+0.5^n]u(n)$
γ) $[-2+0.5^n]u(-n-1)$
δ) $[-2-0.5^n]u(-n-1)$

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα του δοθέντος X(z) είναι:
$X(z)= 2z/(z-1)-z/(z-0.5)$

Στην περίπτωση που το ROC είναι $|z|<0.5$, το σήμα αντι-αιτιατό. Οπότε και οι όροι της παραπάνω εξίσωσης είναι αντι- αιτιατοί. Άρα, εάν εφαρμόσουμε τον αντίστροφο του μετασχηματισμού-Ζ στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε
$x(n)= [-2+0.5^n]u(-n-1)$

11. Ποιος είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός-Ζ του $X(z)= 1/(1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2})$ εάν το ROC είναι $0.5<|z|<1$;

α) $-2u(-n-1)+(0.5)^n u(n)$
β) $-2u(-n-1)-(0.5)^n u(n)$
γ) $-2u(-n-1)+(0.5)^n u(-n-1)$
δ) $2u(n)+(0.5)^n u(-n-1)$

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα του δοθέντος X(z) είναι:

$X(z)= 2z/(z-1)-z/(z-0.5)$

Σε αυτήν την περίπτωση το ROC είναι $0.5<|z|<1$ είναι ένας δακτύλιος, το οποίο σημαίνει ότι το σήμα είναι 2πλεύρο. Άρα, ένα από τα σήματα αντιστοιχεί σε αιτιατό σήμα και το άλλο αντιστοιχεί σε αντι-αιτιατό.

Προφανώς, το δοθέν ROC είναι η αλληλοεπικάλυψη των περιοχών |z|>0.5 and |z|<1. Ως εκ τούτου, ο πόλος p2=0.5 παρέχει το αιτιατό μέρος και ο πόλος p1=1 παρέχει το αντι-αιτιατό μέρος. Επομένως , εάν εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z, παίρνουμε: $x(n)= -2u(-n-1)-(0.5)^n u(n)$

12. Ποιο είναι το αιτιατό σήμα x(n) έχοντας μετασχηματισμό z $X(z)= 1/((1+z^{-1}) [(1-z^{-1})]^2)$;

α) $[1/4(-1)^n+3/4-n/2]u(n)$
β) $[1/4(-1)^n+3/4-n/2]u(-n-1)$
γ) $[1/4+3/4(-1)^n-n/2]u(n)$
δ) $[1/4(-1)^n+3/4+n/2]u(n)$

<u>Απάντηση</u>: δ

<u>Επεξήγηση</u>: Η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα του X(z) είναι:
$X(z)= z/(4(z+1)) + 3z/(4(z-1)) + z/(2[(z-1)]^2)$

Όταν εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z της παραπάνω εξίσωσης, παίρνουμε: $x(n)=[1/4(-1)^n+3/4+n/2]u(n)$

2.15 Μονόπλευρος Μετασχηματισμός-Z

<u>Θεωρία:</u>

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Z (one–sided or unilateral Z-transform), ο οποίος είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για την **ανάλυση διακριτών συστημάτων** τα οποία αρχικά δεν βρίσκονται σε <u>ηρεμία</u>. Αυτά τα συστήματα περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Με άλλα λόγια, ένα τέτοιο σύστημα αρχικά δεν βρίσκεται σε ηρεμία, λόγω διεγέρσεων που εφαρμόστηκαν σ' αυτό πριν ακόμα εφαρμοστεί η είσοδος x(n) κατά τη χρονική στιγμή n = 0. Οι αρχικές τιμές y(–1), y(–2),…,y(–N) της εξόδου του συστήματος, οι οποίες οφείλονται στις προηγούμενες διεγέρσεις, αποτελούν τις αρχικές συνθήκες αυτού.

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Z της ακολουθίας ορίζεται ως

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

και γράφουμε συνήθως:

$$x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = Z\{x(n)\}$$

Ασκήσεις:

1. Ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος x(n) του οποίου ο ορισμός δίνεται από:
$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$
Και είναι γνωστός ως:

α) μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ
β) αμφίπλευρος μετασχηματισμός-Ζ
γ) ρητός μετασχηματισμός-Ζ
δ) κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Ο μετασχηματισμός-Ζ του σήματος x(n) του οποίου ο ορισμός υπάρχει στο διάστημα από n=-∞ σε +∞ είναι γνωστός σαν αμφίπλευρος μετασχηματισμός z. Αλλά στη δοθείσα ερώτηση η τιμή του n=0 έως +∞. Οπότε, ένας τέτοιος μετασχηματισμός-Ζ είναι γνωστός σαν μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ.

2. Για ποια είδη σήματος ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ είναι μοναδικός;

α) Όλα τα σήματα
β) Αντι-αιτιατά σήματα
γ) Αιτιατά σήματα
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ είναι μοναδικός για τα αιτιατά σήματα, γιατί μόνο αυτά τα σήματα είναι μηδενικά για n<0.

3. Ποιος είναι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ X(z) του σήματος x(n)={1,2,5,7,0,1};

α) $z^2+2z+5+7z^{-1}+z^{-3}$
β) $5+7z+z^3$
γ) $z^{-2}+2z^{-1}+5+7z+z^3$
δ) $5+7z^{-1}+z^{-3}$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Εφόσον ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ είναι έγκυρος μόνο για n>=0, ο μετασχηματισμός-Ζ του δοθέντος σήματος θα είναι:
$X(z)= 5+7z^{-1}+z^{-3}$.

4. Ποιος είναι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ του x(n)=δ(n-k);

α) z^{-k}

β) z^k
γ) 0
δ) 1
<u>Απάντηση</u>: α

<u>Επεξήγηση</u>: Εφόσον το σήμα x(n)= δ(n-k) είναι ένα αιτιατό σήμα, δηλαδή είναι ορισμένο για n>0 και x(n)=1 στο z= k. Άρα , από τον ορισμό του μονόπλευρου μετασχηματισμού-Ζ είναι $X(z)=z^{-k}$.

5. Ποιος είναι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ του x(n)=δ(n+k);

α) z^{-k}
β) 0
γ) z^k
δ) 1

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Εφόσον το σήμα x(n)= δ(n+k) είναι ένα αντι-αιτιατό σήμα, δηλαδή είναι ορισμένο για n<0 και x(n)=1 στο z= -k. Αφού ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ είναι ορισμένος μόνο για αιτιατά σήματα, σε αυτήν την περίπτωση X(z)=0.

6. Εάν X(z) είναι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός του x(n), τότε ποιος είναι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ του x(n-k);

α) $z^{-k}X^{+}(z)$

β) $z^{k}X^{+}(z^{-1})$

γ) $z^{-k}[X^{+}(z)+\sum_{n=1}^{k}x(-n)z^{n}];k>0$

δ) $z^{-k}[X^{+}(z)+\sum_{n=0}^{k}x(-n)z^{n}];k>0$

<u>Απάντηση</u>: γ

<u>Επεξήγηση</u>: Από τον ορισμό του μονόπλευρου μετασχηματισμού-Ζ έχουμε,

$z^{-k}[\sum_{l=-1}^{-k}x(l)z^{-l}+X^{+}(z)]$

Αλλά αλλάζοντας τον δείκτη από 1 σε n = -1, παίρνουμε

$$Z\{x(n-k)\} = z^{-k}[X(z)+\sum_{n=1}^{k}x(-n)z^{n}]\,;k>0$$

7. Εάν x(n) = a^n , τότε ποιος είναι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ του x(n-2);

α) $\frac{z^{-2}}{1-az^{-1}}+a^{-1}z^{-1}+a^{-2}$

β) $\frac{z^{-2}}{1-az^{-1}} - a^{-1}z^{-1} + a^{-2}$

γ) $\frac{z^{-2}}{1-az^{-1}} + a^{-1}z^{-1} - a^{-2}$

δ) $\frac{z^{-2}}{1+az^{-1}} + a^{-1}z^{-1} + a^{-2}$

Απάντηση: α

Επεξήγηση: $x(n) = a^n \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

Θα εφαρμόσουμε την ιδιότητα της μετατόπισης για k=2. Πράγματι έχουμε,
$Z\{x(n-2)\} = z^{-2}[X(z) + x(-1)z + x(-2)z^2]$

$= z^{-2}X(z) + x(-1)z^{-1} + x(-2)$

Αφού $x(-1) = a^{-1}$ και $x(-2) = a^{-2}$, παίρνουμε:
$X_1(z) = \frac{z^{-2}}{1-az^{-1}} + a^{-1}z^{-1} + a^{-2}$

8. Εάν x(n)=a^n , τότε ποιος είναι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ του x(n+2);

α) $\frac{z^{-2}}{1-az^{-1}} + a^{-1}z^{-1} + a^{-2}$

β) $\frac{z^{-2}}{1-az^{-1}} - a^{-1}z^{-1} + a^{-2}$

γ) $\frac{z^{2}}{1-az^{-1}} + az + z^2$

δ) $\frac{z^{2}}{1+az^{-1}} - z^2 - az$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα της προώθησης χρονισμού με τιμή k=2.
Παίρνουμε, $Z\{x(n+2)\} = z^2X(z) - x(0)z^2 - x(1)z$

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{z^2}{1+az^{-1}} - z^2 - az$$

9. Εάν X(z) είναι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-Ζ του σήματος x(n),τότε $\lim_{n\to\infty}$x(n)= $\lim_{z\to 1}$(z-1) X(z) ονομάζεται θεώρημα τελικής τιμής.

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Στο παραπάνω θεώρημα, υπολογίζουμε την τιμή του x(n) στο άπειρο, οπότε λέγεται θεώρημα τελικής τιμής.

10. Η κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος σε κατάσταση ηρεμίας είναι $h(n)=a^n u(n), |a|<1$. Ποια είναι η τιμή της βηματικής απόκρισης του συστήματος όταν $n\to\infty$;

α) 1/(1+α)
β) 1/(1-α)
γ) a/(1+α)
δ) a/(1-α)

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Η βηματική απόκριση του συστήματος είναι y(n)=x(n)*h(n) όπου x(n)=u(n)

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό-Z και στις 2 πλευρές, παίρνουμε:

$$Y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)}\ \text{ROC } |z| > |a|$$

Τώρα,

$$(z-1)Y(z) = \frac{z^2}{(z-a)}\text{ROC } |z| > |a|$$

Εφόσον |a|<1 το ROC του (z-1)Y(z) συμπεριλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Επομένως εφαρμόζοντας το θεώρημα τελικής τιμής

$$\lim_{n\to\infty} y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z^2}{z-a} = \frac{1}{1-a}$$

11. Ποια είναι η βηματική απόκριση του συστήματος y(n)=ay(n-1)+x(n) -1<a<1, όταν η αρχική συνθήκη είναι y(-1)=1;

α) $\frac{1}{1-a}(1+a^{n+2})u(n)$

β) $\frac{1}{1+a}(1+a^{n+2})u(n)$

γ) $\frac{1}{1-a}(1-a^{n+2})u(n)$

δ) $\frac{1}{1-a}(1-a^{n+2})u(n)$

<u>Απάντηση</u>: γ

<u>Επεξήγηση</u>: Παίρνοντας το μονόπλευρο μετασχηματισμό-Z της δοθείσας εξίσωσης,

Παίρνουμε: $Y(Z) = a[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + X(z)$

Μετά από την αντικαταστάση για $y(-1)$ και $X(z)$ και λύνοντας για $Y(z)$, παίρνουμε το αποτέλεσμα $Y(z) = \frac{a}{1-az^{-1}} + \frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}$

Εκτελώντας την ανάπτυξη των μερικών κλασμάτων και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό του αποτελέσματος, έχουμε: $y(n) = \frac{1}{1-a}(1-a^{n+2})u(n)$

2.16 Ανάλυση των Συστημάτων LTI στο πεδίο-Z

Θεωρία:

Η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος στο βηματικό σήμα u(t) ορίζεται ως βηματική απόκριση s(t) και αποτελεί επίσης πλήρη περιγραφή εισόδου περιγραφή εισόδου /εξόδου του συστήματος και ορίζεται ως

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

- Για αιτιατά συστήματα $s(t) = \int_0^t h(\tau)\,d\tau$

Ασκήσεις:

1. Ποια είναι η μοναδιαία βηματική απόκριση του συστήματος που έχει περιγραφεί από την εξίσωση διαφορών y(n)=0.9y(n-1)-0.81y(n-2)+x(n) κάτω από τις αρχικές συνθήκες y(-1)=y(-2)=0;

   α) $[1.099+1.088(0.9)^n.\cos(\pi n/3+5.2^o)]u(n)$
   β) $[1.099+1.088(0.9)^n.\cos(\pi n/3-5.2^o)]u(n)$
   γ) $[1.099+1.088(0.9)^n.\cos(\pi n/3-5.2^o)]$
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: β

   Επεξήγηση: Η συνάρτηση συστήματος είναι $H(z)=1/(1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2})$

   Το σύστημα έχει 2 συζυγούς μιγαδικούς πόλους στο $p1=0.9e^{j\pi/3}$ και $p2=0.9e^{-j\pi/3}$

   Ο μετασχηματισμός-Z της μοναδιαίας βηματικής απόκρισης είναι $X(z)=1/(1-z^{-1})$

   Επομένως,

   $Y_{zs}(z) = 1/((1-0.9e\text{^}(j\pi/3)\, z^{-1})(1-0.9e^{-j\pi/3}\, z^{-1})(1-z^{-1}))$

   $= (0.542-j0.049)/((1-0.9e^{j\pi/3}\, z^{-1})) + (0.542-j0.049)/((1-0.9e\text{^}(j\pi/3)\, z^{-1})) + 1.099/(1-z^{-1})$

   Και ως εκ τούτου η μηδενική κατάσταση απόκρισης είναι:
   $y_{zs}(n)= [1.099+1.088(0.9)^n.\cos(\pi n/3-5.2^o)]u(n)$
   Επειδή σε αυτήν την περίπτωση οι αρχικές συνθήκες είναι 0, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $y(n)= y_{zs}(n$

2. Εάν όλοι οι πόλοι της H(z) είναι εξωτερικά από το μοναδιαίο κύκλο, τότε το σύστημα είναι:

   α) Μόνο αιτιατό

β) Μόνο κατά BIBO σταθερό
γ) Κατά BIBO σταθερό και αιτιατό
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Εάν όλοι οι πόλοι της H(z) είναι εξωτερικά από το μοναδιαίο κύκλο, αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν είναι ούτε αιτιατό αλλά ούτε BIBO σταθερό.

3. Εάν p_k, k=1,2,…N είναι οι πόλοι του συστήματος και $|p_k| < 1$ για όλα τα k, τότε η φυσική απόκριση ενός τέτοιου συστήματος λέγεται παροδική απόκριση.

α) Σωστός
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Εάν $|p_k| < 1$ για όλα τα k, τότε το $y_{nr}(n)$ φθίνει προς το 0, όταν το n προσεγγίζει το άπειρο. Σε μια τέτοια περίπτωση αναφερόμαστε στη φυσική απόκριση του συστήματος σαν παροδική απόκριση.

4. Εάν όλοι οι πόλοι έχουν μικρό μέγεθος, τότε ο ρυθμός που φθίνει το σήμα είναι:

α) Αργός
β) Σταθερός
γ) Γρήγορος
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: **γ**

Επεξήγηση: Εάν το μέγεθος των πόλων της απόκρισης οποιουδήποτε συστήματος είναι πολύ μικρός, δηλαδή σχεδόν ίσος με το 0, τότε το σύστημα φθίνει πολύ γρήγορα.

5. Εάν ένας η περισσότεροι πόλοι είναι κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, τότε ο ρυθμός που φθίνει το σήμα είναι:

α) Αργός
β) Σταθερός
γ) Γρήγορος
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Εάν το μέγεθος των πόλων της απόκρισης οποιουδήποτε συστήματος είναι σχεδόν ίσος με το 1, τότε το σύστημα φθίνει πολύ αργά ή η παροδικότητα θα παραμείνει για σχετικά μεγάλο διάστημα.

6. Ποια είναι η παροδική απόκριση του συστήματος το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών y(n)=0.5y(n-1)+x(n) όταν το σήμα εισόδου είναι x(n)= 10cos(πn/4)u(n) και το σύστημα είναι αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας.

   α) $(0.5)^n u(n)$
   β) $0.5(6.3)^n u(n)$
   γ) $6.3(0.5)^n$
   δ) $6.3(0.5)^n u(n)$

   <u>Απάντηση</u>: δ

   <u>Επεξήγηση</u>: Η συνάρτηση συστήματος για το σύστημα είναι: $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$

   Και επομένως το σύστημα έχει ένα πόλο στο z=0.5. Ο μετασχηματισμός-Z της εισόδου είναι:

$$X(z) = \frac{10(1-(\frac{1}{\sqrt{2}})z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

   Συνεπώς,

$$Y(z) = X(z)H(z) =>$$

$$= \frac{10(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})(1-e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1})(1-e^{\frac{-j\pi}{4}}z^{-1})}$$

$$= \frac{6.3}{1-0.5z^{-1}} + \frac{6.78e^{-j28.7}}{(1-e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1})} + \frac{6.78e^{j28.7}}{(1-e^{-\frac{j\pi}{4}}z^{-1})}$$

   Η φυσική ή η παροδική απόκριση είναι: $y_{nr}(n)= 6.3(0.5)^n u(n)$

7. Ποια είναι η σταθερή κατάσταση της απόκρισης του συστήματος το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών y(n)=0.5y(n-1)+x(n), όταν το σήμα εισόδου είναι x(n)= 10cos(πn/4)u(n) και το σύστημα είναι αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας.

   α) $13.56\cos(\pi n/4 - 28.7^o)$
   β) $13.56\cos(\pi n/4 + 28.7^o)u(n)$
   γ) $13.56\cos(\pi n/4 - 28.7^o)u(n)$
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   <u>Απάντηση</u>: γ

   <u>Επεξήγηση</u>: Η συνάρτηση συστήματος για το σύστημα είναι: $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$

   Και επομένως το σύστημα έχει ένα πόλο στο z=0.5. Ο μετασχηματισμός-Z της εισόδου είναι: $X(z) = \frac{10(1-(\frac{1}{\sqrt{2}})z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$

   Συνεπώς, $Y(z) = X(z)H(z)$

$$= \frac{10\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z^{-1}\right)}{(1-0.5z^{-1})\left(1-e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-e^{\frac{-j\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{6.3}{1-0.5z^{-1}} + \frac{6.78e^{-j28.7}}{\left(1-e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1}\right)} + \frac{6.78e^{j28.7}}{\left(1-e^{-\frac{j\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

Η εξαναγκασμένη απόκριση ή η απόκριση σταθερής κατάστασης είναι: $y_{fr}(n) = 13.56\cos\left(\frac{\pi n}{4} - 28.7^{o}\right)u(n)$

8. Εάν το ROC της συνάρτησης συστήματος είναι εξωτερικά ενός κύκλου με ακτίνα r < ∞, συμπεριλαμβανομένου του σημείου z = ∞, τότε το σύστημα είναι:

   α) Σταθερό
   β) Αιτιατό
   γ) Αντι-αιτιατό
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: β

   Επεξήγηση: Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα λέγεται αιτιατό εάν και μόνο εάν το ROC της συνάρτησης του συστήματος είναι εξωτερικά ενός κύκλου με ακτίνα r < ∞, συμπεριλαμβανομένου του σημείου z = ∞.

9. Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα λέγεται BIBO σταθερό αν και μόνο αν το ROC της συνάρτησης συστήματος.

   α) Περιλαμβάνει μοναδιαίο κύκλο
   β) Δεν περιλαμβάνει μοναδιαίο κύκλο
   γ) Είναι ένας μοναδιαίος κύκλος
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Για ένα LTI σύστημα, εάν το ROC της συνάρτησης συστήματος περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, τότε το σύστημα είναι κατά BIBO σταθερό.

10. Εάν όλοι οι πόλοι του H(z) είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, τότε το σύστημα είναι:

   α) Μόνο αιτιατό
   β) Μόνο κατά BIBO σταθερό
   γ) Σταθερό κατά BIBO και αιτιατό
   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Εάν όλοι οι πόλοι του H(z) είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, τότε έπεται η προϋπόθεση ότι $|z|>r<1$, το οποίο σημαίνει ότι το σύστημα είναι BIBO σταθερό και αιτιατό.

11. Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση συστήματος $H(z)=1/(1-0.5z^{-1})+2/(1-3z^{-1})$. Ποια είναι η h(n) εάν το σύστημα είναι σταθερό;

α) $(0.5)^n u(n)-2(3)^n u(n)$
β) $(0.5)^n u(-n-1)-2(3)^n u(-n-1)$
γ) $(0.5)^n u(-n-1)-2(3)^n u(n)$
δ) $(0.5)^n u(n)-2(3)^n u(-n-1)$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Το σύστημα έχει πόλους στο z=0.5 και στο z=3.

Εφόσον το σύστημα είναι σταθερό, το ROC πρέπει να περιέχει μοναδιαίο κύκλο και επομένως είναι $0.5<|z|<3$. Συνεπάγεται ότι, η h(n) είναι μη αιτιατή και δίνεται ως $h(n)= (0.5)^n u(n)-2(3)^n u(-n-1)$

12. Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση συστήματος $H(z)=1/(1-0.5z^{-1})+2/(1-3z^{-1})$.Ποιο είναι το ROC του H(z) εάν το σύστημα είναι αιτιατό

α) $|z|<3$
β) $|z|>3$
γ) $|z|<0.5$
δ) $|z|>0.5$

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Το σύστημα έχει πόλους στο z=0.5 και στο z=3.
Εφόσον το σύστημα είναι αιτιατό, το ROC του είναι $|z|>0.5$ και $|z|>3$. Η κοινή περιοχή είναι $|z|>3$. Επομένως, το ROC του δοθέντος H(z) είναι $|z|>3$.

13. Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση συστήματος $H(z)=1/(1- 0.5z^{-1})+2/(1-3z^{-1})$. Ποια είναι η h(n) εάν το σύστημα είναι αντι-αιτιατό;

α) $(0.5)^n u(n)+2(3)^n u(n)$
β) $(0.5)^n u(-n-1)-2(3)^n u(-n-1)$
γ) $-[(0.5)^n+2(3)^n]u(-n-1)$
δ) $(0.5)^n u(n)-2(3)^n u(-n-1)$

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Το σύστημα έχει πόλους στο z=0.5 και στο z=3
Εάν το σύστημα είναι αντι-αιτιατό , τότε το ROC είναι$|z|<0.5$.

Επομένως: $h(n) = -[(0.5)^n + 2(3)^n]u(-n-1)$

2.17 Ανάλυση της συχνότητας Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία:

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου x(n) είναι η συνεχής συνάρτηση $X(e^{j\omega})$. Η συνάρτηση αυτή δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί με τη χρήση ενός ψηφιακού επεξεργαστή σήματος, ο οποίος είναι συνήθως ένας γενικού σκοπού υπολογιστής ή ένα ειδικά σχεδιασμένο ψηφιακό κύκλωμα. Εκείνο που είναι εύκολο να υπολογιστεί, είναι δείγματα του φάσματος $X(e^{j\omega})$.

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της πεπερασμένου μήκους N ακολουθίας x(n), δηλαδή x(n) = 0 για n < 0 και n ≥ N, ισούται με

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}, \quad 0 \le \omega \le 2\pi$$

Ασκήσεις:

1. Η έκφραση της σειράς Fourier οποιουδήποτε σήματος x(t), ορίζεται ως:

   α) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$

   β) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$

   γ) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j2\pi k F_0 t}$

   δ) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{j2\pi k F_0 t}$

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Εάν το δοθέν σήμα είναι x(t) και F_0 είναι το αντίστροφο της χρονικής περιόδου του σήματος και c_k είναι ο συντελεστής του Fourier, τότε η έκφραση της σειράς Fourier του x(t) , δίνεται ως:

   $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

2. Ποιο από τα παρακάτω είναι η εξίσωση του συντελεστή της σειράς Fourier;

   α) $\frac{1}{T_p}\int_{0}^{t_0+T_p} x(t)\, e^{-j2\pi k F_0 t} dt$

   β) $\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi k F_0 t} dt$

γ) $\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\, e^{-j2\pi kF_0 t} dt$

δ) $\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\, e^{j2\pi kF_0 t} dt$

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Όταν εφαρμόζουμε ολοκλήρωση στον ορισμό της έκφρασης της σειράς Fourier, παίρνουμε

$$c_k T_p = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\, e^{-j2\pi kF_0 t} dt$$

$$=> c_k = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\, e^{-j2\pi kF_0 t} dt$$

3. Ποιο από τα παρακάτω είναι γνωστό σαν όρος του Dirichlet όσον αφορά το σήμα x(t);

α) Το x(t) έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών σε οποιαδήποτε περίοδο
β) Έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων κατά τη διάρκεια οποιαδήποτε περιόδου
γ) Είναι απόλυτα ολοκληρωμένο σε οποιαδήποτε περίοδο
δ) Όλα τα παραπάνω

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Για οποιοδήποτε σήμα να εκφραστεί σαν σειρά Fourier, πρέπει να ικανοποιεί τους όρους του Dirichlet, κατά τους οποίους το x(t) έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών σε οποιαδήποτε περίοδο.
Το x(t) έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε περιόδου και το x(t) είναι απόλυτα ολοκληρωμένο σε οποιαδήποτε περίοδο.

4. Η εξίσωση: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t}$
Είναι γνωστή ως εξίσωση ανάλυσης

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Από τη στιγμή που συνθέτουμε την σειρά Fourier του σήματος x(t), το ονομάζουμε σύνθετική εξίσωση, ενώ η εξίσωση που δίνει τον ορισμό των συντελεστών της σειράς Fourier είναι γνωστή σαν εξίσωση ανάλυσης.

5. Ποιο από τα παρακάτω είναι η έκφραση της σειράς Fourier του σήματος x(t);

α) $c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\sin(2\pi kF_0 t + \theta_k)$
β) $c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\cos(2\pi kF_0 t + \theta_k)$
γ) $c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\tan(2\pi kF_0 t + \theta_k)$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Γενικά, οι συντελεστές Fourier έχουν μιγαδικές τιμές. Επιπλέον, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι εάν το περιοδικό σήμα είναι πραγματικό , ck και c-k είναι μιγαδικές συζυγείς. Σαν αποτέλεσμα, $c_k=|c_k|e^{j\theta k}$and $c_k=|c_k|e^{-j\theta k}$

Συνεπώς, αποκτούμε την σειρά Fourier:

$$x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\cos(2\pi kF_0 t + \theta_k)$$

6. Η εξίσωση: $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 2\pi kF_0 t - b_k \sin 2\pi kF_0 t)$
Είναι η έκφραση της σειράς Fourier.

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: $\cos(2\pi kF_0\, t+\theta_k)= \cos 2\pi kF_0\, t.\cos\theta_k-\sin 2\pi kF_0\, t.\sin\theta_k$

(θ_k είναι μια σταθερά για ένα δοθέν σήμα)

Άρα, η έκφραση μιας άλλης μορφής της σειράς Fourier του σήματος είναι $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 2\pi kF_0 t - b_k \sin 2\pi kF_0 t)$

7. Η εξίσωση μέσης ισχύος ενός περιοδικού σήματος x(t) δίνεται ως:

α) $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2$

β) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|$

γ) $\sum_{k=-\infty}^{0}|c_k|^2$

δ) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Η μέση ισχύς ενός περιοδικού σήματος x(t) δίνεται ως: $\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p}|x(t)|^2\,dt$

$$= \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p}x(t).x^*(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t). \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{-j2\pi k F_0 t}\, dt$$

Αντιμεταθέτοντας τις θέσεις του ολοκληρώματος και του αθροίσματος και εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

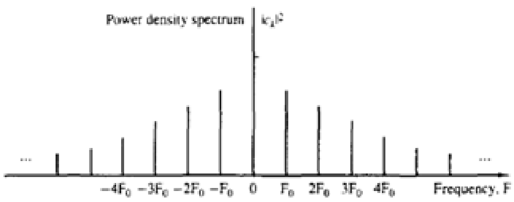
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

8. Ποίο είναι το φάσμα που αποκτάται όταν απεικονίζουμε $|c_k|^2$ σαν συνάρτηση συχνοτήτων kF_0, $k=0,\pm1,\pm2$..

α) Μέση ισχύς φάσματος
β) Ενέργεια φάσματος
γ) Ενέργεια πυκνότητας φάσματος
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Όταν απεικονίζουμε ένα γράφημα του $|c_k|^2$ ως συνάρτηση συχνοτήτων kF_0, $k=0,\pm1,\pm2\ldots$, το παρακάτω φάσμα που αποκτάται είναι γνωσό σαν ενέργεια πυκνότητας φάσματος.



9. Ποίο είναι το φάσμα που αποκτάται όταν απεικονίζουμε το |ck| σαν συνάρτηση συχνοτήτων;

α) Μέγεθος τάσης του φάσματος
β) Φάση φάσματος
γ) Ισχύς φάσματος
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι , οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι μιγαδικοί, οπότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε το ck με τον ακόλουθο τρόπο $c_k=|c_k|e^{j\theta k}$

Όταν απεικονίσουμε $|c_k|$ ως συνάρτηση συχνοτήτων, το φάσμα που αποκτάται ονομάζεται μέγεθος τάσης του φάσματος.

10. Ποια είναι η εξίσωση της σειράς Fourier με συντελεστή c_k ενός μη περιοδικού σήματος;

α) $\frac{1}{T_p}\int_{0}^{t_0+T_p} x(t)\, e^{-j2\pi kF_0 t}dt$

β) $\frac{1}{T_p}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi kF_0 t}dt$

γ) $\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\, e^{-j2\pi kF_0 t}dt$

δ) $\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\, e^{j2\pi kF_0 t}dt$

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Γνωρίζουμε ότι, για ένα περιοδικό σήμα, ο συντελεστής της σειράς Fourier είναι:

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi kF_0 t}dt$$

Εάν θεωρήσουμε ένα σήμα μη-περιοδικό, είναι αλήθεια ότι x(t)=0 για |t|>Tp/2. Επομένως, τα όρια του ολοκληρώματος στην παραπάνω εξίσωση μπορούν να
αντικαθισταθούν από -∞ εώς ∞. Επομένως: $c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi kF_0 t}dt$

11. Ποια παρακάτω σχέση είναι σωστή ανάμεσα στον μετασχηματισμό Fourier X(F) και τους συντελεστές c_k στην σειρά Fourier

α) $c_k=X(F_0/k)$
β) $c_k= 1/T_P\,(X(F_0/k))$
γ) $c_k= 1/T_P(X(kF_0))$
δ) Κανένα από τα παραπάνω

<u>Απάντηση:</u> γ

<u>Επεξήγηση</u>: Ας θεωρήσουμε ένα σήμα x(t) του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier X(F) δίνεται ως:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi kF_0 t}dt$$

Και ο συντελεστής της σειράς Fourier δίνεται όπως:

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi kF_0 t}dt$$

Συγκρίνοντας τις 2 παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε: $c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0)$

12. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Parseval για μη περιοδικά σήματα: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt =$

α) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dt$

β) $\int_{-\infty}^{\infty} |X^*(F)|^2 dt$

γ) $\int_{-\infty}^{\infty} X(F).X^*(F)dt$

δ) Όλα τα παραπάνω

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Ας θεωρήσουμε x(t) σαν ένα σήμα με πεπερασμένη ενέργεια με μετασχηματισμό Fourier X(F). Η ενέργεια του είναι: $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$
Το οποίο με την σειρά του, μπορεί να εκφραστεί σε όρους του X(F) όπως παρακάτω:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t).x(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)e^{-j2\pi F_0 t}dt] = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)dt[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi F_0 t}dt]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X^*(F)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(F).X^*(F)dt$$

2.18 Ανάλυση Συχνότητας Σημάτων Διακριτού Χρόνου – 1

Θεωρία:

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFS) ενός σήματος διακριτού χρόνου x(n) είναι η **αναπαράσταση του σήματος** αυτού ως συνδυασμού μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών της μορφής $\{e^{-j\omega n}\}$ που ω μεταβλητή, γνωστή και ως (κυκλική) συχνότητα. Ο DTFS μίας ακολουθίας, εάν υπάρχει, είναι μοναδικός. Η αρχική ακολουθία μπορεί να υπολογιστεί, όταν μας δίνεται ο DTFS αυτής, με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Ο DTFS της ακολουθίας x(n) ορίζεται ως

$$X(e^{j\omega}) \equiv F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (1)$$

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$x(n) \equiv F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν το λεγόμενο ζεύγος μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου. Η σχέση (1) ονομάζεται και εξίσωση ανάλυσης, ενώ η (2) εξίσωση σύνθεσης. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι μία ακολουθία μπορεί να εκφραστεί ως <u>γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών</u>.

Ασκήσεις:

1. Ποια είναι έκφραση της σειράς Fourier ενός σήματος x(n) με περίοδο N;

α) $\sum_{k=0}^{N+1} c_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$

β) $\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$

γ) $\sum_{k=0}^{N} c_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$

δ) $\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Εδώ, η συχνότητα F_0 ενός σήματος συνεχούς χρόνου είναι χωρισμένο σε 2π/N διαστήματα. Άρα, η έκφραση της σειράς Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου με περίοδο N δίνεται ως: $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$
Όπου το c_k είναι ο συντελεστής της σειράς Fourier.

2. Ποια είναι η έκφραση της σταθεράς c_k της σειράς Fourier σε όρους του διακριτού σήματος x(n);

α) $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$

β) $N\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

γ) $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N+1} x(n) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

δ) $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι, η έκφραση της σειράς Fourier ενός διακριτού σήματος x(n) δίνεται ως: $\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$
Πολλαπλασιάζουμε και τις 2 πλευρές με το εκθετικό $e^{-\frac{j2\pi ln}{N}}$ και αθροίζουμε το αποτέλεσμα από n=0 σε n=N-1.
Συνεπώς:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-\frac{j2\pi ln}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{j2\pi(k-l)n}{N}}$$

Εάν αθροίσουμε για n, πρώτα το δεξιό μέρος της παραπάνω εξίσωσης, παίρνουμε:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi(k-l)n}{N}} \begin{array}{l} = N, \text{για } k-1 = 0, \pm N, \pm 2N \ldots \\ = 0, \text{οπουδήποτε αλλού} \end{array}$$

Έτσι, το δεξί μέρος μειώνεται σε Nc_k

Οπότε: $c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

3. Ποιο από τα παρακάτω εκφράζει την φάση η οποία συνδέεται με την συνιστώσα της συχνότητας μιας σειράς Fourier διακριτού χρόνου (DTFS);

α) $e^{j2\pi kn/N}$

β) $e^{-j2\pi kn/N}$

γ) $e^{j2\pi knN}$

δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι: $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$

Στην παραπάνω εξίσωση, το c_k εκφράζει το εύρος και το $e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$ εκφράζει την φάση συνδεδεμένη με την συχνότητα των στοιχείων του DTFS.

4. Η σειρά Fourier για το σήμα x(n)=cos$\sqrt{2}$πn υπάρχει.

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Για $\omega_0=\sqrt{2}$, έχουμε $f_0=1/\sqrt{2}$. Εφόσον f_0 δεν είναι ρητός αριθμός, το σήμα δεν είναι περιοδικό. Επομένως, αυτό το σήμα δεν μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier.

5. Ποιοι είναι οι συντελεστές Fourier για το σήμα x(n)=cosπn/3;

α) c1=c2=c3=c4=0,c1=c5=1/2
β) c0=c1=c2=c3=c4=c5=0
γ) c0=c1=c2=c3=c4=c5=1/2
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Σε αυτήν την περίπτωση , $f_0=1/6$.Συνεπώς το x(n) είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο N=6.

Το δοθέν σήμα είναι: x(n)= cosπn/3=cos2πn/6=1/2 $e^{j2\pi n/6}$+1/2 $e^{-j2\pi n/6}$

Γνωρίζουμε ότι -2π/6=2π-2π/6=10π/6=5(2π/6)

Επομένως, $x(n) = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{j2\pi(5)n/6}$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με: $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$

Οπότε, παίρνουμε c1=c2=c3=c4=0 and c1=c5=1/2

6. Ποια είναι η έκφραση της σειράς Fourier ενός σήματος x(n) που έχει περίοδο N;

α) $\sum_{k=0}^{N+1} c_k \, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$

β) $\sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$

γ) $\sum_{k=0}^{N} c_k \, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$

δ) $\sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Η συχνότητα F_0 ενός σήματος συνεχούς χρόνου είναι χωρισμένη σε 2π/N διαστήματα. Άρα, η έκφραση μιας σειράς Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου με περίοδο N δίνεται:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

όπου το c_k είναι ο συντελεστής της σειράς Fourier.

7. Ποια είναι η μέση ισχύς περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου x(n) με περίοδο N;

α) $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} |x(n)|$

β) $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|$

γ) $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} |x(n)|^2$

δ) $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Ας θεωρήσουμε ένα περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου x(n) με περίοδο N.
Η μέση ισχύς του σήματος δίνεται από: $P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$

8. Ποια είναι η εξίσωση της μέσης ισχύος ενός περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου x(n) με περίοδο N σε όρους συντελεστών c_k της σειράς Fourier;

α) $\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|$

β) $\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$

γ) $\sum_{k=0}^{N} |c_k|^2$

δ) $\sum_{k=0}^{N} |c_k|$

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι: $P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n).x^*(n)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* e^{-j2\pi kn/N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

9. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός πεπερασμένου ενεργειακού σήματος διακριτού χρόνου;

α) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

β) $\sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

γ) $\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$

δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Ας θεωρήσουμε ένα σήμα το οποίο είναι διακριτό και έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος δίνεται ως: $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

10. Ποια είναι η περίοδος του μετασχηματισμού Fourier X(ω) του σήματος x(n);

α) π
β) 1
γ) Μη-περιοδική
δ) 2π

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Θέτουμε X(ω) ως τον μετασχηματισμό Fourier ενός διακριτού σήματος x(n) το οποίο έχει δοθεί ως:

$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$

Άρα, ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου με πεπερασμένη ενέργεια είναι περιοδικός με περίοδο 2π.

11. Τι είναι η συνθετική εξίσωση του σήματος διακριτού χρόνου x(n), του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι X(ω);

α) $2\pi \int_0^{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega$

β) $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega$

γ) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega$

δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος διακριτού χρόνου x(n) είναι:

$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της παραπάνω εξίσωσης, παίρνουμε: $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega$
Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή σαν συνθετική εξίσωση ή εξίσωση αντίστροφου μετασχηματισμού.

12. Ποια είναι η τιμή του σήματος διακριτού χρόνου x(n) στο n=0 του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier φαίνεται παρακάτω;

α) $\omega_c\pi$
β) $-\omega_c/\pi$
γ) ω_c/π
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι ,

$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1.\, e^{j\omega n}\, d\omega$

- Για n=0

$$x(n) = x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1\, d\omega = \frac{1}{2\pi}(2\,\omega_c) = \frac{\omega_c}{\pi}$$

Επομένως, η τιμή του σήματος x(n) για n=0 είναι ω_c/π.

13. Ποια είναι η τιμή του σήματος διακριτού χρόνου x(n) στο n≠0 του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier φαίνεται παρακάτω;

α) $\frac{\omega_c}{\pi}\ \frac{\sin(\omega_c.n)}{\omega_c.n}$

β) $\frac{-\omega_c}{\pi}\ \frac{\sin(\omega_c.n)}{\omega_c.n}$

γ) $\omega_c.\pi\frac{\sin(\omega_c.n)}{\omega_c.n}$

δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι: $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\, d\omega$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1.\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi}\ \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}$

14. Η ταλαντευόμενη συμπεριφορά της προσέγγισης του X_N(ω) της συνάρτησης X(ω) σε ένα σημείο ασυνέχειας του X(ω) είναι γνωστό ως το φαινόμενο του Gibbs.

α) Σωστό
β) Λάθος

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Σημειώνουμε ότι υπάρχει μια σημαντική ταλάντωση υπέρβασης στο ω=ω_c, ανεξάρτητα από την τιμή του N. Όσο το N αυξάνεται, οι ταλαντώσεις γίνονται πιο γρήγορες, αλλά το μέγεθος του κυματισμού παραμένει ίδιο. Μπορεί να δειχθεί ότι όσο N→∞ , οι ταλαντώσεις συγκλίνουν στο σημείο ασυνέχειας στο ω=ω_c.

Η ταλαντευόμενη συμπεριφορά της προσέγγισης του X_N(ω) της συνάρτησης X(ω) στο σημείο ασυνέχειας του X(ω) είναι γνωστό ως το φαινόμενο του Gibbs.

15. Ποια είναι η ενέργεια του σήματος διακριτού χρόνου σε όρους X(ω);

α) $2\pi\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2\, d\omega$

β) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2\, d\omega$

γ) $\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} |X(\omega)|^2\, d\omega$

δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).x^*\ (n)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) e^{-j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

2.19 Ανάλυση Συχνότητας Σημάτων Διακριτού Χρόνου - 2

Ασκήσεις:

1. Για το σήμα x(n) να παρουσιάζει ζυγή συμμετρία, θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη | X(-ω)|=| X(ω)|.

   α) Σωστό
   β) Λάθος

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι, εάν το σήμα x(n) είναι πραγματικό, οπότε X*(ω)=X(-ω)
   Εάν το σήμα είναι ζυγά συμμετρικό, τότε το μέγεθος και στις 2 πλευρές πρέπει να είναι ίσο. Οπότε, |X*(ω)|=|X(-ω)| =>| X(-ω)|=| X(ω)|.

2. Ποια είναι η ενεργειακή πυκνότητα φάσματος S_{xx}(ω) του σήματος x(n)=a^n u(n), |a|<1;

   α)1/(1+2acosω+a^2)
   β)1/(1+2asinω+a^2)
   γ)1/(1-2asinω+a^2)
   δ)1/(1-2acosω+a^2)

   Απάντηση: δ

   Επεξήγηση: Εφόσον|a|<1 , η ακολουθία είναι απόλυτα αθροιστική όπως μπορεί να εξακριβωθεί εφαρμόζοντας τον γεωμετρικό αθροιστικό τύπο:

   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

   Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει και δίδεται ως:

   $$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

   Καθώς $|ae^{-j\omega}| = |a| < 1$, η χρήση γεωμετρικού αθροιστικού τύπου δίδει

   $$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

   Η ενεργειακή πυκνότητα φάσματος δίνεται από:

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = X(\omega).X^*(\omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{j\omega})} = \frac{1}{1 - 2acos\omega + a^2}$$

3. Ποια από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύει έτσι ώστε ο μετασχηματισμός Fourier μιας ακολουθίας για να είναι ίση με το μετασχηματισμό-Z της ίδιας ακολουθίας.

   α) |z|=1
   β) |z|<1
   γ) |z|>1
   δ) Δεν μπορεί ποτέ να είναι ίση

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Ας θεωρήσουμε ότι το σήμα είναι x(n)

   $Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ and $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

   Τώρα, ας απεικονίσουμε το ‘z’ σε πολική μορφή

   $=> \mathrm{z} = \mathrm{r}.\mathrm{e}^{j\omega}$

   $=> \mathrm{Z}\{\mathrm{x}(\mathrm{n})\} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x}(\mathrm{n})\mathrm{r}^{-\mathrm{n}}\mathrm{e}^{-j\omega\mathrm{n}}$

   Τώρα $\mathrm{Z}\{\mathrm{x}(\mathrm{n})\} = \mathrm{X}(\omega)$ μόνο όταν $\mathrm{r} = 1 => |\mathrm{z}| = 1$.

4. Η ακολουθία: $\mathrm{x}(\mathrm{n}) = \frac{\sin\omega_c \mathrm{n}}{\pi \mathrm{n}}$
   δεν έχει μετασχηματισμό z ούτε και Fourier.

   α) Σωστό
   β) Λάθος

   Απάντηση: β

   Επεξήγηση: Η δοθείσα x(n) δεν έχει μετασχηματισμό z. Αλλά η ακολουθία έχει πεπερασμένη ενέργεια. Έτσι, η δοθείσα έκφραση έχει μετασχηματισμό Fourier.

5. Εάν x(n) είναι μια σταθερή ακολουθία ούτως ώστε το X(z) συγκλίνει σε ένα μοναδιαίο κύκλο, τότε το σήμα σύνθετου σάφματος[2] είναι:

   α) X($\ln$X(z))

[2] **σάφμα** : Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού Fourier του λογαρίθμου ενός φάσματος. Σχηματίζεται από αναγραμματισμό της λέξης φάσμα (όπως η λέξη cepstrum από την spectrum)

β) $\ln$X(z)
γ) $X^{-1}(\ln X(z))$
δ)Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία x(n) η οποία έχει μετασχηματισμό z X(z). Υποθέτουμε ότι η x(n) είναι σταθερή ακολουθία οπότε το X(z) συγκλίνει στο μοναδιαίο κύκλο.

Το σύνθετο σάφμα του σήματος x(n) είναι ορισμένο σαν την ακολουθία $c_x(n)$, η οποία είναι το αντίστροφο του z-transform του, $C_x(n)$ (z), όπου C_x (z)= $\ln$X(z)

=> c_x (z)= $X^{-1}(\ln X(z))$

6. Εάν $c_x(n)$ είναι μια ακολουθία σύνθετου σάφματος η οποία έχει αποκτηθεί από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του lnX(ω), τότε ποια είναι η έκφραση του (n);

α)$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\theta(\omega)e^{j\omega n}d\omega$

β) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(\omega)e^{-j\omega n}d\omega$

γ) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\theta(\omega)e^{j\omega n}d\omega$

δ) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(\omega)e^{j\omega n}d\omega$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Ξέρουμε ότι ,

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(X(\omega))e^{j\omega n}d\omega$$

Εάν εκφράσουμε το $X(\omega)$ σε όρους μεγέθους και φάσης, σαν $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$

Τότε $\ln X(\omega) = \ln|X(\omega)| + j\theta(\omega)$

$$=> c_x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\ln|X(\omega)|+j\theta(\omega)]e^{j\omega n}d\omega => c_x(n) = c_m(n) + jc_\theta(n)$$

$$=> c_\theta(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

7. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(n)=u(n);

α)$\frac{1}{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{j(\omega+\pi)}$

β) $\frac{1}{2\sin(\frac{\omega}{2})}e^{j(\omega-\pi)}$

γ) $\frac{1}{2\sin(\frac{\omega}{2})}e^{j(\omega+\pi)/2}$

δ) $\frac{1}{2\sin(\frac{\omega}{2})}e^{j(\omega-\pi)/2}$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Έχοντας x(n)=u(n)
Ξέρουμε ότι ο μετασχηματισμός-Ζ του δοθέντος σήματος είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ ROC:}|z|>1$$

Το X(z) έχει ένα πόλο p=1 στο μοναδιαίο κύκλο, αλλά συγκλίνει για |z|>1
Εάν υπολογίσουμε το X(z) στο μοναδιαίο κύκλο εκτός στο z=1, παίρνουμε

$$X(\omega) = \frac{e^{j\omega/2}}{2j\sin(\frac{\omega}{2})} = \frac{1}{2\sin(\frac{\omega}{2})}e^{j(\omega-\pi)/2}$$

8. Εάν ένα σήμα ισχύος έχει την ισχύ πυκνότητας φάσματος συγκεντρωμένη στη μηδενική συχνότητα, το σήμα είναι γνωστό σαν:

α) Χαμηλής συχνότητας σήματος
β) Μεσαίας συχνότητας σήματος
γ) Υψηλής συχνότητας σήματος
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Γνωρίζουμε ότι, για ένα χαμηλής συχνότητας σήμα, το σήμα ισχύος έχει την ισχύ πυκνότητας φάσματος συγκεντρωμένη στη μηδενική συχνότητα.

9. Ποια είναι τα κύρια χαρακτηριστικά του αντιπαραποιητικού φίλτρου;

α) Εξασφαλίζει ότι το εύρος ζώνης του σήματος για δειγματοληψία είναι περιορισμένο σε εύρος συχνότητας
β) Περιορισμός του προσθετικού θορύβου φάσματος και άλλων παρεμβολών, το οποίο αλλοιώνει το σήμα
γ)Το α και το β μαζί
δ) Κανένα

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Το αντιπαραποιητικό φίλτρο είναι ένα αναλογικό φίλτρο το οποίο έχει διπλό σκοπό. Αρχικά, εξασφαλίζει ότι το εύρος ζώνης του σήματος για δειγματοληψία είναι περιορισμένο στο επιθυμητό εύρος συχνότητας.

Χρησιμοποιώντας ένα αντιπαραποιητικό φίλτρο είναι για να περιορίσει τον προσθετικό θόρυβο φάσματος και άλλων παρεμβολών, το οποίο συχνά αλλοιώνει το σήμα. Συνήθως, ο προσθετικός θόρυβος είναι ευρυζωνικός και υπερβαίνει το εύρος ζώνης του επιθυμητού σήματος.

10. Γενικά, ένας σχεδιαστής ψηφιακού συστήματος έχει καλύτερο έλεγχο της ανεκτικότητας σε ένα σύστημα ψηφιακής επεξεργασίας σήματος από ότι έναν σχεδιαστή αναλογικού συστήματος το οποίο σχεδιάζει ένα αντίστοιχο αναλογικό σύστημα.

α) Σωστό
β) Λάθος

<u>Απάντηση</u>: α

<u>Επεξήγηση</u>: Οι λειτουργίες της επεξεργασίας αναλογικού σήματος δεν μπορεί να είναι ακριβείς, διότι τα ηλεκτρονικά στοιχεία στα αναλογικά συστήματα έχουν ανεκτικότητα και εισάγουν θόρυβο κατά την λειτουργία.

Γενικά, ένας σχεδιαστής ψηφιακού συστήματος έχει καλύτερο έλεγχο της ανεκτικότητας ενός συστήματος επεξεργασίας ψηφιακών σημάτων από ότι έναν σχεδιαστή αναλογικού συστήματος το οποίο σχεδιάζει αντίστοιχο αναλογικό σύστημα.

11. Ο όρος ‘εύρος ζώνης’ αντιπροσωπεύει την ποσοτική μέτρηση ενός σήματος.

α) Σωστό
β) Λάθος

<u>Απάντηση</u>: α

<u>Επεξήγηση</u>: Επιπροσθέτως του σχετικά ευρέως φάσματος του τομέα της ταξινόμησης των σημάτων, είναι συχνά επιθυμητό να εκφράζεται ποσοτικά το εύρος συχνοτήτων επί των οποίων η φασματική πυκνότητα της ισχύος ή της ενέργειας είναι συγκεντρωμένη. Αυτή η ποσοτική μέτρηση λέγεται ‘ευρός ζώνης’ ενός σήματος.

12. Εάν F_1 και F_2 είναι το ελάχιστο και το μέγιστο όριο συχνοτήτων ενός μεσοπερατού σήματος, τότε ποια προϋπόθεση πρέπει να ικανοποιείται έτσι ώστε να ονομάζεται ένα τέτοιο μεσοπερατό σήμα σε περιορισμένο μεσοπερατό σήμα .

α) $(F_1 - F_2) > \frac{F_1+F_2}{2}$ (συντελεστής 3 ή λιγότερων)

β) $(F_1 - F_2) >>> \frac{F_1+F_2}{2}$ (συντελεστής 10 ή περισσότερων)

γ) $(F_1 - F_2) < \frac{F_1+F_2}{2}$ (συντελεστής 3 ή λιγότερων)

δ) $(F_1 - F_2) <<< \frac{F_1+F_2}{2}$ (συντελεστής 10 ή περισσότερων)

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Εάν η διαφορά του ορίου των συχνοτήτων είναι πολύ μικρότερη από την μέση συχνότητα, τότε αυτό το μεσοπερατό σήμα είναι γνωστό σαν περιορισμένο μεσοπερατό.

13. Ποιο είναι το εύρος συχνότητας ενός ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος;

α) 10-40
β) 1000-2000
γ) 0-100
δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: γ

Επεξήγηση: Το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα είναι ένα σήμα με εύρος συχνότητας από 0-100 Hz.

14. Ποιο από τα παρακάτω ηλεκτρομαγνητικά σήματα έχει εύρος συχνοτήτων 30kHz-3MHz;

α) Σήμα ραδιοφώνου
β) Βραχέα σήματα
γ) Ραντάρ
δ) Υπέρυθρο σήμα

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Το σήμα ραδιοφώνου είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό σήμα το οποίο έχει συχνότητα εύρους 30kHz-3MHz.

2.20 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier για Σήματα Διακριτού Χρόνου

Θεωρία:

Ο DFT παρουσιάζει ορισμένες σημαντικές ιδιότητες τις οποίες μπορούμε να αξιο- ποιήσουμε στις διάφορες εφαρμογές μας. Μερικές από τις ιδιότητες του DFT είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες του DTFT. Άλλες είναι διαφορετικές, γεγονός που οφεί- λεται στο πεπερασμένο μήκος των ακολουθιών και του DFT αυτών.

α) **Γραμμικότητα:**

Εάν

$$x_1(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} X_1(k)$$

και

$$x_2(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} X_2(k)$$

Τότε

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$$

όπου a_1, a_2 πραγματικές ή μιγαδικές σταθερές. Η ιδιότητα της γραμμικότητας αποδεικνύεται πολύ εύκολα από τον ορισμό του DFT.

β) **Κυκλική ολίσθηση στο χρόνο:**

Εάν

$$x(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} X(\kappa)$$

Τότε

$$x(< n - n_0 >_N) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} W_N^{kn_0} X(k)$$

Η σχέση αυτή μας δείχνει ότι ο DFT της κυκλικά ολισθημένης ακολουθίας έχει το ίδιο μέτρο με την αρχική, αλλά διαφορετική φάση.

γ) **Κυκλική ολίσθηση στη συχνότητα**:

Εάν

$$x(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} X(\kappa)$$

Τότε

$$W_N^{-nk_0} x(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} X(< k - k_0 >_N)$$

Με άλλα λόγια, ο πολλαπλασιασμός της ακολουθίας x(n) με την εκθετική ακολουθία $e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$, ισοδυναμεί με την κυκλική ολίσθηση στη συχνότητα, κατά k0 μονάδες, του DFT αυτής.

δ) **Κυκλική συνέλιξη:**

Εάν

$$x_1(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} X_1(k)$$

και

$$x_2(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} X_2(k)$$

τότε

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} X_1(k) \cdot X_2(k)$$

Η κυκλική συνέλιξη δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου, ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων DFT αυτών.

ε) **Πολλαπλασιασμός δύο ακολουθιών:**

Εάν

$$x_1(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} X_1(k)$$

και

$$x_2(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} X_2(k)$$

τότε

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \overset{DFT_n}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

Πρόκειται ουσιαστικά για τη διττή έκφραση της προηγούμενης ιδιότητας, και επαληθεύεται έτσι το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί στην κυκλική συνέλιξη των DFT αυτών.

στ) **Θεώρημα του Parseval:**

Εάν

$$\mathrm{x(n)} \overset{\mathrm{DFT_n}}{\longleftrightarrow} \mathrm{X(\kappa)}$$

τότε

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Το θεώρημα του Parseval εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Με άλλα λόγια, το άθροισμα των τετραγώνων των τιμών των δειγμάτων ισούται με τη μέση τιμή των τετραγώνων των φασματικών γραμμών. Η αναπαράσταση των $|X(k)|^2$ ονομάζεται φάσμα ισχύος της x(n). Παρατηρούμε ότι το φάσμα ισχύος εξαρτάται μόνο από το μέτρο του φάσματος και όχι από τη φάση του.

Ασκήσεις:

1. Εάν x(n)=x_R(n)+jx_I(n) είναι μια μιγαδική ακολουθία της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier είναι X(ω)= X_R (ω)+jX_I (ω), τότε ποια είναι η τιμή του X_R(ω);

   α) $\sum_{n=0}^{\infty} x_R(n)\cos\omega n - x_I(n)\sin\omega n$
   β)$\sum_{n=0}^{\infty} x_R(n)\cos\omega n + x_I(n)\sin\omega n$
   γ)$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_R(n)\cos\omega n + x_I(n)\sin\omega n$
   δ)$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_R(n)\cos\omega n - x_I(n)\sin\omega n$

   Απάντηση: γ

   Επεξήγηση: Ξέρουμε ότι ,

   $$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

   Αντικαθιστώντας $e^{-j\omega}$ = cosω – jsinω στην παραπάνω εξίσωση και διαχωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος, παίρνουμε

   $$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_R(n)\cos\omega n + x_I(n)\sin\omega n$$

2. Εάν x(n)=x_R(n)+jx_I(n) είναι μια μιγαδική εξίσωση της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier είναι X(ω)=X_R(ω)+jX_I(ω), τότε ποια είναι η τιμή του x_I(n);

   α) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[X_R(\omega)\sin\omega n + X_I(\omega)\cos\omega n]\,d\omega$

   β)$\int_0^{2\pi}[X_R(\omega)\sin\omega n + X_I(\omega)\cos\omega n]\,d\omega$

   γ) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[X_R(\omega)\sin\omega n - X_I(\omega)\cos\omega n]\,d\omega$

   δ) Κανένα από τα παραπάνω

   Απάντηση: α

   Επεξήγηση: Ξέρουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός ή η συνθετική εξίσωση του σήματος x(n) δίδεται ως:

   $$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$$

   Αντικαθιστώντας $e^{j\omega}$= cosω + jsinω στην παραπάνω εξίσωση και διαχωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος, παίρνουμε

   $$x_I(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[X_R(\omega)\sin\omega n + X_I\cos\omega n]\,d\omega$$

3. Εάν η x(n) είναι πραγματική ακολουθία, τότε ποια είναι η τιμή του $X_I(\omega)$;

   α) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin(\omega n)$

   β) $-\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin(\omega n)$

   γ) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos(\omega n)$

   δ) $-\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos(\omega n)$

   <u>Απάντηση</u>: β

   <u>Επεξήγηση</u>: Εάν το σήμα x(n) είναι πραγματικό , τότε $x_I(n)=0$
   Ξέρουμε ότι

   $$X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_R(n)\sin\omega n - x_I(n)\cos\omega n$$

   Τώρα αντικαθιστούμε το $x_I(n)=0$ στην παραπάνω εξίσωση =>x_R (n)=x(n)

   $$=> X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin(\omega n)$$

4. Ποιά από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή εάν το x(n) είναι πραγματικό;

   α) X(ω)=X(-ω)
   β) X(ω)= -X(-ω)
   γ) X*(ω)=X(ω)
   δ) X*(ω)=X(-ω)

   <u>Απάντηση</u>: δ

   <u>Επεξήγηση</u>: Γνωρίζουμε ότι, εάν x(n) είναι πραγματική ακολουθία,

   $$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos(\omega n) => X_R(-\omega) = X_R(\omega)$$

   $$X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin(\omega n) => X_I(-\omega) = -X_I(\omega)$$

   Εάν συνδυάσουμε τις 2 παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε:

   X*(ω)=X(-ω)

5. Εάν το x(n) είναι πραγματικό σήμα, τότε:

   $$x(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [X_R(\omega)\cos(\omega n) - X_I(\omega)\sin(\omega n)]\, d\omega$$

   α) Σωστό
   β) Λάθος

   <u>Απάντηση</u>: α

<u>Επεξήγηση</u>: Ξέρουμε ότι εάν x(n) είναι πραγματικό σήμα, τότε x_I(n)=0 και x_R(n)=x(n)

Επίσης Ξέρουμε ότι ,

$$x_R(\mathrm{n}) = \mathrm{x}(\mathrm{n}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [X_R(\omega)\cos(\omega n) - X_I(\omega)\sin(\omega n)]\, d\omega$$

Εφόσον και X_R (ω) $\cos(\omega n)$ και X_I (ω) $\sin(\omega n)$ είναι άρτια, x(n) επίσης είναι άρτιο.

$$=> \mathrm{x}(\mathrm{n}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [X_R(\omega)\cos(\omega n) - X_I(\omega)\sin(\omega n)]\, d\omega$$

6. Εάν x(n) είναι πραγματική και περιττή ακολουθία, τότε ποια είναι η έκφραση του x(n);

α)$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[X_I(\omega)\sin(\omega n)]\, d\omega$

β) $-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[X_I(\omega)\sin(\omega n)]\, d\omega$

γ) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[X_I(\omega)\cos(\omega n)]\, d\omega$

δ) $-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[X_I(\omega)\cos(\omega n)]\, d\omega$

<u>Απάντηση</u>: β

<u>Επεξήγηση</u>: Εάν x(n) είναι πραγματική και περιττή, τότε x(n)$\cos(\omega n)$ είναι περιττό και το x(n)$\sin(\omega n)$ άρτιο. Επομένως:

X_R (ω)=0

$$X_I(\omega) = -2\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\sin(\omega n)$$

$$=> \mathrm{x}(n) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [X_I(\omega)\sin(\omega n)\, d\omega$$

7. Ποια είναι η τιμή του X_R(ω) δοθέντος X(ω)=1/(1-ae$^{-jω}$) ,|a|<1;

α) asinω/(1-2acosω+a^2)
β) (1+acosω)/(1-2acosω+a^2)
γ) (1-acosω)/(1-2acosω+a^2)
δ) (-asinω)/(1-2acosω+a^2)

<u>Απάντηση</u>: γ

<u>Επεξήγηση</u>: Δοθέντος, X(ω)= 1/(1-ae-jω) ,|a|<1. Πολλαπλασιάζοντας και τον αριθμητή και τον παρανομαστή της παραπάνω εξίσωσης με τον μιγαδικό συζυγή του παρανομαστή, παίρνουμε :

X(ω)= (1-a$e^{j\omega}$)/((1-a$e^{-j\omega}$))(1-a$e^{j\omega}$)) = (1-acosω-jasinω)/(1-2acosω+ a^2).

Αυτή η έκφραση μπορεί να υποδιαιρεθεί σε πραγματικά και φανταστικά μέρη, έτσι λαμβάνουμε X_R(ω)= (1-acosω)/(1-2acosω+a^2)

8. Ποια είναι η τιμή του X_I(ω) δοθέντος X(ω)=1/(1-a$e^{-j\omega}$) ,|a|<1;

α) asinω /(1-2acosω+a^2)
β) (1+acosω)/(1-2acosω+a^2)
γ) (1-acosω)/(1-2acosω+a^2)
δ) (-asinω)/(1-2acosω+a^2)

<u>Απάντηση</u> : δ

<u>Επεξήγηση</u>: Δοθέντος X(ω)= 1/(1-a$e^{-j\omega}$) ,|a|<1 Πολλαπλασιάζοντας και τον αριθμητή και τον παρανομαστή της παραπάνω εξίσωσης με τον συζυγή μιγαδικό του παρανομαστή, παίρνουμε X(ω)=(1-a$e^{j\omega}$)/((1-a$e^{-j\omega}$))(1-a$e^{j\omega}$)). Αυτή η έκφραση μπορεί να υποδιαιρεθεί σε πραγματικά και φανταστικά μέρη, έτσι λαμβάνουμε X_I(ω)= (-asinω)/(1-2acosω+a^2)

9. Ποια είναι η τιμή του |X(ω)| δοθέντος X(ω)=1/(1-a$e^{-j\omega}$) ,|a|<1;

α) 1/$\sqrt{(1-2acos\omega+a^2)}$

β) 1/$\sqrt{(1+2acos\omega+a^2)}$

γ) 1/(1-2acosω+a^2)

δ) 1/(1+2acosω+a^2)

<u>Απάντηση</u>: α

<u>Επεξήγηση</u>: Από το δοθέν X(ω)=1/(1-a$e^{-j\omega}$) ,|a|<1, παίρνουμε

- X_I(ω)= (-asinω)/(1-2acosω+a^2)
- X_R(ω)= (1-acosω)/(1-2acosω+a^2)

Γνωρίζοντας ότι |X(ω)|= $\sqrt{([X_R\ (\omega)]^2 + [X_I(\omega)]^2}$

Έτσι υπολογίζοντας, παίρνουμε

|X(ω)|= 1/$\sqrt{(1-2acos\omega+a^2)}$

10. Ποιος είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(n)=$a^{|n|}$, |a|<1;

α) (1+a^2)/(1-2acosω+a^2)

β) $(1-a^2)/(1-2a\cos\omega+a^2)$

γ) $2a/(1-2a\cos\omega+a^2)$

δ) Κανένα από τα παραπάνω

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Πρώτα παρατηρούμε ότι το x(n) μπορεί να διατυπωθεί ως:
$x(n)= x_1(n)+ x_2(n)$
Όπου,

- $x_1(n)= a^n,\ n>0$
  $=0$, οπουδήποτε αλλού
- $x_2(n)=a^{-n},\ n<0$
  $=0$, οπουδήποτε αλλού

Τώρα εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier των 2 παραπάνω σημάτων, λαμβάνουμε

- $X_1(\omega)= 1/(1-ae^{-j\omega})$
- $X_2(\omega)= (ae^{j\omega})/(1-ae^{j\omega})$

Τώρα, $X(\omega)= X_1(\omega)+ X_2(\omega)= 1/(1- ae^{-j\omega})+(ae^{j\omega})/(1-ae^{j\omega})$
- ⇨ $X(\omega) = (1-a^2)/(1-2a\cos\omega+a^2)$

11. Εάν X(ω) είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(n), τότε ποιος είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(n-k);

α) $e^{j\omega k}. X(-\omega)$
β) $e^{j\omega k}. X(\omega)$
γ) $e^{-j\omega k}. X(-\omega)$
δ) $e^{-j\omega k}. X(\omega)$

Απάντηση: δ

Επεξήγηση: Δοθέντος, $F\{x(n)\} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

$=> F\{x(n-k)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega k}.\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)e^{-j\omega(n-k)}$

$=> F\{x(n-k)\} = e^{-j\omega k}.X(\omega)$

12. Ποια είναι η συνέλιξη των ακολουθιών του $x_1(n)= x_2(n)=\{1,1,1\}$;

α) {1,2,3,2,1}

β) {1,2,3,2,1}

γ) {1,1,1,1,1}

δ) {1,1,1,1,1}

Απάντηση: α

Επεξήγηση: Δοθέντος x_1(n)= x_2(n)={1,1,1}

Υπολογίζοντας το μετασχηματισμό Fourier των 2 παραπάνω σημάτων, παίρνουμε:

X_1 (ω) = X_2 (ω) =1+ $e^{j\omega}$ + $e^{-j\omega}$= 1+2cosω
Από την συνέλιξη του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

X(ω)= X_1 (ω). X_2 (ω)=(1+2cosω)2=3+4cosω+2cos2ω

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του παραπάνω σήματος, παίρνουμε: x1(n)*x2(n)={1,2,3,2,1

13. Ποια είναι η ενεργειακή πυκνότητα του φάσματος του σήματος: x(n)=a^nu(n), |a|<1;

α) 1/(1+2acosω+a^2)
β) 1/(1-2acosω+a^2)
γ) 1/(1-2acosω-a^2)
δ) 1/(1+2acosω-a^2)

Απάντηση: β

Επεξήγηση: Το δοθέν x(n)= a^nu(n), |a|<1 .
Η αυτοσυσχέτιση του παραπάνω σήματος είναι: r_{xx} (l)=1/(1-a^2) $a^{|l|}$, -∞< l <∞
Σύμφωνα με το Θεώρημα του Wiener-Khintchine,
S_{xx}(ω)=F{ r_{xx}(l)}= [1/(1-a^2)].F{$a^{|l|}$} = 1/(1-2acosω+a^2)

ΜΕΡΟΣ Β’

2 ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

A/D (Analog to Digital) – Αναλογικό προς Ψηφιακό

BIBO (Bounded Input – Bounded Output) – Φραγμένη Είσοδος – Φραγμένη Έξοδος

D (Decimation) – Υποδειγματοληψία (Αποδεκατισμός)

D/A (Digital to Analog) – Ψηφιακό προς Αναλογικό

DFT (Discrete Fourier Transform) – Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

DTS(Discrete Time Signal) – Σήμα Διακριτού Χρόνου

DSP (Digital Signal Processing) – Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

DTFS (Discrete Time Fourier Transform) – Διακριτός Χρονικός Μετασχηματισμός Fourier

FIR (Finite Impulse Response) – Πεπερασμένη Κρουστική Απόκριση

HCF (Highest Common Factor) – Μεγαλύτερος Κοινός Παράγοντας

I (Interpolation) – Παρεμβολή

LCM (Least Common Multiple) – Μικρότερο Κοινό Πολλαπλάσιο

LTI (Linear Time Invariant) – Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο

ROC (Region of Convergence) – Περιοχή Σύγκλισης

SQNR (Signal to Quantization Noise Ratio) – Λόγος Σήματος προς Κβαντικό Θόρυβο

ΜΕΡΟΣ Γ’

3 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. http://www.sanfoundry.com/digital-signal-processing-questions-answers
2. Σήματα και Συστήματα με MATLAB, Α. Βελώνη, Α. Παλαμίδης, Σύγχρονη εκδοτική, Αθήνα 2008
3. https://www.tutorialspoint.com/signals_and_systems
4. http://www.eng.ucy.ac.cy/gmitsis/ece429/lectures/ECE429_Lecture2_2012.pdf
5. http://www.eln.teilam.gr/sites/default/files/Digital_signal_proccessing_EAP_Skodras.pdf
6. http://cgi.di.uoa.gr/~k14/sig_sys1.pdf
7. https://el.wikipedia.org/wiki/Επεξεργασία_σήματος
8. http://www.samos.aegean.gr/actuar/dlekkas/forecasting%20and%20sim/DSP-Chapter3(29xii00).pdf
9. http://www.eng.ucy.ac.cy/gmitsis/ece429/lectures/ECE429_Lecture7_2012.pdf