

ΑΝΩΤΑΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟΥ
ΤΟΜΕΑ (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΕΣΩ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ»**

Σταματίου – Φρέρη Μαρία του Νικολάου
(Α.Μ. 42277)

Επιβλέποντες Καθηγητές:
Στεργίου Κωνσταντίνος
Τσολάκης Αντώνιος

Πειραιάς, Μάρτιος 2017

PIRAEUS UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
(T.E.I. OF PIRAEUS)
SCHOOL OF ENGINEERING
DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING

GRADUATION THESIS

**«KINEMATIC OPTIMIZATION OF STEERING
MECHANISM IN NUMERICAL COMPUTING
ENVIRONMENT»**

Stamatiou – Freri Maria
(R.N. 42277)

Advisors:
Stergiou Constantinos
Tsolakis Antonios

Piraeus, March 2017

ΔΕΛΤΙΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	
Ακαδ. έτος	2016-2017
Τίτλος Εργασίας	ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΕΣΩ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
Φοιτήτρια	Σταματίου – Φρέρη Μαρία του Νικολάου
Αριθμός Μητρώου	42277
Τμήμα	Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε.
Επιβλ. Καθ.	Στεργίου Κωνσταντίνος, Τσολάκης Αντώνιος
Ημερομηνία	30-03-2017
Λέξεις κλειδιά	Κινηματική, Σύστημα Διεύθυνσης, Βελτιστοποίηση, Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης
<p>Περίληψη : Στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται μοντελοποίηση συστήματος διεύθυνσης μοχλικού τύπου και βέλτιστη κινηματική σύνθεση αυτού με χρήση αλγορίθμων βελτιστοποίησης μαθηματικού λογισμικού MATLAB. Αρχικά, αναφέρονται βασικά στοιχεία θεωρίας οχημάτων, όπως τύποι συστημάτων διεύθυνσης και γεωμετρίας, αρχές κίνησης και η έννοια της παραμόρφωσης των ελαστικών των τροχών. Παρατίθεται η επικρατέστερη μεθοδολογία προσέγγισης κινηματικής μοντελοποίησης, βελτιστοποίησης και χρήσης σχετικών εργαλειοθηκών MATLAB. Στη συνέχεια, βάσει της μεθοδολογίας, δομούνται οι εξισώσεις κίνησης της κινηματικής αλυσίδας του μοχλικού συστήματος στο επίπεδο. Οι εξισώσεις διαμορφώνονται σε πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο επιλύεται με αλγόριθμο εντοπισμού ολικού ακροτάτου, μετά από σύνταξη προγράμματος στο MATLAB. Στόχος του προγράμματος είναι η επιλογή των ανεξάρτητων παραμέτρων του συστήματος που βελτιστοποιούν την κινηματική συμπεριφορά του οχήματος, βάσει ενός επιθυμητού κριτηρίου. Ως κριτήριο βελτιστοποίησης επιλέγεται η αρχή Ackermann. Επιπρόσθετα, παρουσιάζεται το αποτέλεσμα του προγράμματος για σύστημα διεύθυνσης προοριζόμενο για όχημα δεδομένων κατασκευαστικών χαρακτηριστικών και εύρους κίνησης και πραγματοποιείται μια σύντομη εποπτική ανάλυση των ανεξάρτητων παραμέτρων που επηρεάζουν την κίνησή του. Προκειμένου να παρέχεται η δυνατότητα σε ανεξάρτητο χρήστη να προσαρμόζει τα δεδομένα του προγράμματος στο εκάστοτε υπό σχεδιασμό όχημα, αναπτύχθηκε πλαίσιο διαλόγου απλουστευμένης μορφής μέσω MATLAB GUIDE. Επιπλέον, συντάχθηκε σύντομος κώδικας προσομοίωσης της κίνησης του μηχανισμού. Τέλος, σχολιάζονται τα αποτελέσματα και η εγκυρότητα της ανάλυσης και του προγράμματος, ενώ καταγράφονται ιδέες για μελλοντικές μελέτες.</p>	

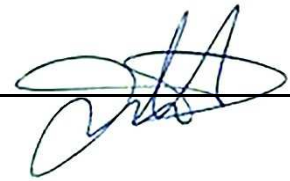
PROJECT INFORMATION SHEET	
<i>Academic year</i>	2016-2017
<i>Title</i>	KINEMATIC OPTIMIZATION OF STEERING MECHANISM IN NUMERICAL COMPUTING ENVIRONMENT
<i>Student</i>	Stamatiou – Freri Maria
<i>Ref. Number</i>	42277
<i>Department</i>	Mechanical Engineering
<i>Advisors</i>	Stergiou Constantinos, Tsolakis Antonios
<i>Date</i>	30-03-2017
<i>Keywords</i>	Kinematics, Steering System, Optimization, Optimization Algorithms
<p>Abstract: <i>The present thesis carries out the analysis of lever arm steering mechanism and its optimized kinematic synthesis via MATLAB's optimization algorithms. Firstly, basic elements of vehicle theory are introduced, such as different types of steering mechanisms and geometries, motion principles and the concept of lateral distortion of the tires. The commonly used methodology for kinematic analysis, optimization and use of MATLAB's toolboxes is cited. Subsequently, mathematic functions that describe the planar motion of the mechanism are produced, premised upon the given methodology. These functions are used to set an optimization problem, to be solved with algorithms providing a single global solution, after building a MATLAB program. The program's objective is the calculation of the system's independent parameters that optimize the kinematic performance of a vehicle based on a desired criterion. The Ackermann principle is the selected optimization criterion. In addition, the thesis presents the program's solution for a steering mechanism of a vehicle with fixed manufacturing characteristics and amplitude of motion, and carries out a brief graphical interpretation of how each independent parameter affects the mechanism's motion. In order for an independent user to be able to manipulate and customize the program, based on the vehicle under design, a simple user interface is developed in MATLAB GUIDE. Furthermore, a concise motion simulation code is written. In conclusion, the outcomes and the validity of the analysis and the program are discussed and insights for further work are given.</i></p>	

Δήλωση ακαδημαϊκής ακεραιότητας

(Declaration of academic integrity)

Η υπογράφουσα υπεύθυνα δηλώνει ότι η παρούσα εργασία με τίτλο «Βελτιστοποίηση κινηματικής συστήματος διεύθυνσης μέσω προγράμματος μαθηματικής προσομοίωσης» είναι προϊόν δικής της δουλειάς και ότι όλες οι πηγές που έχουν χρησιμοποιηθεί για τη σύνταξη της αναφέρονται πλήρως.

Μαρία Σταματίου – Φρέρη

A handwritten signature in blue ink, consisting of several overlapping loops and strokes, positioned above a horizontal line.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ πολύ τους επιβλέποντες καθηγητές για τη στήριξη και καθοδήγηση που μου παρείχαν, τα μέλη της ομάδας «Ποσειδών» του Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ. για την πολύτιμη συνεργασία τους όλα αυτά τα χρόνια, τις εμπειρίες, γνώσεις και ιδέες που έχουμε μοιραστεί, τους φίλους και την οικογένειά μου για την αγάπη και τη φροντίδα τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	Εισαγωγή.....	1
1.1	Σκοπός Και Στόχοι	2
1.2	Βασικές Έννοιες	2
1.2.1	Κινηματική	2
1.2.2	Σύστημα Διεύθυνσης	3
1.2.3	Βελτιστοποίηση	3
1.3	Σχεδιάγραμμα Εργασίας	3
2	Κινηματική, Συστήματα Διεύθυνσης & Τροχοί	4
2.1	Μηχανισμοί Συστημάτων Αυτοκίνησης	4
2.1.1	Συστήματα με πρόσθιο ολόσωμο άξονα	5
2.1.2	Συστήματα με πρόσθια ανεξάρτητη ανάρτηση	7
2.1.3	Συστήματα οχημάτων τύπου καρτ	8
2.2	Γεωμετρία Τροχών	9
2.2.1	Εγκάρσια Κλίση Πείρου (Γωνία KPI)	10
2.2.2	Διαμήκης Κλίση Πείρου (Γωνία Caster)	10
2.2.3	Σύγκλιση – Απόκλιση	11
2.3	Γωνία Ολίσθησης	11
2.4	Αρχές Κίνησης	13
2.4.1	Συνθήκη Ackermann	14
2.4.2	Άλλες Συνθήκες	15
3	Μεθοδολογία	17
3.1	Κινηματική Μοντελοποίηση	17
3.1.1	Μέθοδοι Κινηματικής Ανάλυσης	17
3.1.2	Βήματα Ανάλυσης	18
3.2	Βελτιστοποίηση	19
3.2.1	Μαθηματική Διατύπωση	20
3.2.2	Ολικά και Τοπικά Ακρότατα	20
3.2.3	Συνθήκες Βελτιστότητας	21
3.2.3.1	Αναγκαίες Συνθήκες Τοπικού Ακροτάτου	22
3.2.3.2	Ικανές Συνθήκες Τοπικού Ακροτάτου	22
3.2.4	Αλγόριθμοι	22
3.2.4.1	Τοπικές Μέθοδοι	23
3.2.4.2	Ολικές Μέθοδοι	24
3.2.4.3	Σύγκριση και Επιλογή Αλγορίθμου	26
3.3	Μαθηματικό Λογισμικό - MATLAB	27
3.3.1	Optimization Toolbox	28
3.3.1.1	Περιοχή Προσέλκυσης (Basin of Attraction)	28

3.3.1.2	Αλγόριθμοι fmincon	29
3.3.2	Global Optimization Toolbox	31
3.3.2.1	Διαθέσιμες Μέθοδοι	31
3.3.2.2	GlobalSearch	32
4	Εξισώσεις Κίνησης & Βελτιστοποίηση	37
4.1	Περιγραφή Προβλήματος	37
4.2	Μοχλικό Σύστημα	38
4.2.1	Περιγραφή	38
4.2.2	Μεταβλητές	41
4.2.3	Κίνηση Απλουστευμένης Γεωμετρίας στο Επίπεδο	43
4.2.4	Εξισώσεις	44
4.2.4.1	Πιθανές Διατάξεις Μηχανισμού	45
4.2.4.2	Σύγκλιση ή Απόκλιση Τροχών	46
4.2.5	Κίνηση στο Χώρο, Κίνηση Οχήματος	47
4.3	Βελτιστοποίηση Μοχλικού Συστήματος	50
4.3.1	Αντικειμενική Συνάρτηση & Μεταβλητές	50
4.3.2	Περιορισμοί	51
4.3.2.1	Χωροταξικοί Περιορισμοί	52
4.3.2.2	Οριακές Θέσεις	54
4.3.2.3	Νεκρές Θέσεις	54
4.3.3	Μαθηματική Έκφραση Προβλήματος	56
4.4	Προγραμματισμός	58
4.4.1	Παράμετροι Εισόδου	58
4.4.2	Ρύθμιση Επιλογών Αλγορίθμων	60
4.4.2.1	Τοπική Βελτιστοποίηση	60
4.4.2.2	Ολική Βελτιστοποίηση	63
4.4.3	Αποτέλεσμα – Έξοδος	64
5	Αποτελέσματα	66
5.1	Βέλτιστος Μηχανισμός	66
5.1.1	Επιθυμητό Εύρος Κίνησης	66
5.1.2	Γεωμετρία	68
5.2	Ανάλυση Παραμέτρων Κίνησης	72
5.2.1	Διαγράμματα Ανεξάρτητων Μεταβλητών	74
5.2.1.1	Γωνία Τοποθέτησης Αγκωνωτού Βραχίονα (ω)	75
5.2.1.2	Μήκος Αγκωνωτού Βραχίονα (α)	76
5.2.1.3	Βάση Τριγώνου Διευθύνσεως (x_i)	77
5.2.1.4	Ύψος Τριγώνου Διευθύνσεως (y_i)	78
5.2.1.5	Σύγκριση – Σχολιασμός	79
5.2.2	Ανάλυση Ευαισθησίας	79

5.3	Πλαίσιο Διαλόγου	81
5.4	Προσομοίωση	85
6	Συμπεράσματα	86
6.1	Συζητήσεις – Αξιολόγηση	86
6.1.1	Μοντελοποίηση Συστήματος	87
6.1.2	Επιλογή Κριτηρίου Βελτιστοποίησης	87
6.1.3	Αποτελέσματα Προγραμματισμού	88
6.2	Μελλοντικά Σχέδια – Προτάσεις	91
6.2.1	Ανάλυση	91
6.2.2	Εξέλιξη Προγράμματος	92
6.2.3	Αξιολόγηση – Εξέταση Συστήματος	92
7	Βιβλιογραφία	94
8	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποδείξεις Εξισώσεων Κίνησης	96
8.1	Αποδείξεις 4.2.4	96
8.1.1	Εξισώσεις b , θ_1 , d	96
8.1.2	Εξισώσεις θ_4 , φ_4	98
8.2	Αποδείξεις 4.3.2	101
8.2.1	Εξισώσεις θ_{2L} , θ_{4L}	101
8.2.2	Εξισώσεις θ_{2D} , θ_{4D}	102

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πλοήγηση κάθε οχήματος προϋποθέτει έναν κινηματικό μηχανισμό – σύστημα διεύθυνσης – ώστε να στρίβουν οι τροχοί. Αξιόπιστο σύστημα διεύθυνσης προσδίδει ακριβή έλεγχο της κίνησης και συνεπάγεται οδηγική ασφάλεια και σταθερότητα τόσο σε ευθεία πορεία οχήματος όσο και σε συνθήκες στροφής (Hillier και Coombs, 2004). Το είδος και τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος διεύθυνσης διαφέρουν, ανάλογα με τον τύπο και τη χρήση του οχήματος που εξυπηρετούν. Τα στοιχεία του συστήματος καθορίζουν τη μετάδοση της κίνησης από το τιμόνι – πηδάλιο στους τροχούς και τη σχέση μεταξύ των διευθυντήριων τροχών, προσδίδοντας επιθυμητά χαρακτηριστικά στο εκάστοτε όχημα, όπως π.χ. μειωμένη φθορά ελαστικών, μειωμένη κατανάλωση, κράτημα κ.α. Επομένως, η επίτευξη συγκεκριμένων χαρακτηριστικών έγκειται στον κατάλληλο σχεδιασμό του συστήματος. Κατά το σχεδιασμό, καθορίζονται τα στοιχεία του συστήματος με τρόπο ώστε το όχημα να πληρεί κάποια κριτήρια κίνησης. Ο καθορισμός συστήματος που η κίνησή του προσεγγίζει καλύτερα το επιθυμητό κριτήριο, αποτελεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Συμβατικοί τρόποι σχεδιασμού συστημάτων ώστε να πληρούν συγκεκριμένα κριτήρια περιλαμβάνουν συνήθως μεθόδους αντίστροφης μηχανικής (Keshwani και Kumar, 2012) ή μεθόδους δοκιμής-σφάλματος (Wadagbalkar και Somani, 2016). Με την εξέλιξη όμως των αλγορίθμων, οι υπολογιστικές μέθοδοι φαίνεται να επικρατούν για βελτιστοποίηση απλών μηχανισμών βραχιόνων, και πολλοί είναι αυτοί που τις εφαρμόζουν με χρήση μαθηματικού λογισμικού (Gebreslasie και Bazezew, 2001; Ion; Jianxia, 2015; Krašna κ.α., 2002). Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στη βελτιστοποίηση ενός μηχανισμού διεύθυνσης. Προσεγγίζει τη μελέτη του μηχανισμού με ίδια κριτήρια και παραδοχές με τις μελέτες των De-Juan κ.α. και Ettefagh και Javash, αλλά με κάπως διαφοροποιημένη ανάλυση και χρησιμοποιώντας διαφορετικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης.

Η ιδέα για αυτήν την ανάλυση προέκυψε από την ανάγκη ενός απλού αλλά ταυτόχρονα αξιόπιστου και λειτουργικού συστήματος διεύθυνσης για μονοθέσιο όχημα συμμετοχής στο διεθνή ενεργειακό διαγωνισμό Shell Eco-marathon¹. Παρόλο που θα ακολουθήσει εφαρμογή του προβλήματος για το σχεδιασμό του συστήματος του συγκεκριμένου μονοθεσίου, το τελικό προγραμματιστικό εργαλείο που θα παρουσιαστεί δύναται να έχει καθολική εφαρμογή σε οχήματα με σύστημα διεύθυνσης ίδιου τύπου.

¹ Διαγωνισμός μηχανοκίνητων οχημάτων, κατασκευασμένων από φοιτητικές ομάδες, με στόχο τη χαμηλότερη δυνατή κατανάλωση ενέργειας (<http://www.shell.com/energy-and-innovation/shell-ecomarathon.html>, <http://poseidonteam.com>)

1.1 ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ

Σκοπό, λοιπόν, της εργασίας αποτελεί η μοντελοποίηση ενός τύπου συστήματος διεύθυνσης και η εφαρμογή μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης για βελτιστοποίηση αυτού.

Επιμέρους στόχοι αποτελούν:

- Θεωρητική αναφορά στις αρχές κίνησης των οχημάτων, στα συστήματα διεύθυνσης και στα στοιχεία που επηρεάζουν την απόδοσή τους.
- Επισκόπηση των μεθόδων μοντελοποίησης, ανάλυσης και βελτιστοποίησης που θα χρησιμοποιηθούν.
- Αποτύπωση και ανάλυση των εξισώσεων κίνησης του συστήματος.
- Επίλογη μεθόδου βελτιστοποίησης και εφαρμογή της.
- Επίλυση του προβλήματος με χρήση σύγχρονου μαθηματικού λογισμικού.
- Εποπτεία επίδρασης των ανεξάρτητων παραμέτρων του συστήματος στις εξισώσεις κίνησης και σύντομη ανάλυση ευαισθησίας αυτών.
- Διαμόρφωση πλαισίου διαλόγου για τον έλεγχο των δεδομένων εισαγωγής του προβλήματος από ανεξάρτητο χρήστη.
- Προσομοίωση κινούμενου μηχανισμού.

1.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΈΝΝΟΙΕΣ

Πριν την αναφορά στη διάρθρωση των κεφαλαίων της εργασίας, θα ήταν σκόπιμο να αποδοθούν κάποιες βασικές έννοιες οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια.

1.2.1 Κινηματική

Σύμφωνα με τον Oleg Vinogradov, στο βιβλίο *Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms*, κινηματική (kinematics) είναι η μελέτη της κίνησης, χωρίς την ανάλυση της αιτίας που την προκάλεσε. Αναφέρεται σε άκαμπτα σώματα – μηχανισμούς, δεν συμπεριλαμβάνει παραμορφώσεις και δυνάμεις που δρουν στο σύστημα και συνήθως προηγείται της δυναμικής μελέτης κατά το σχεδιασμό (Breteler, 1987).

Η μελέτη της κίνησης διακρίνεται στην κινηματική σύνθεση και στην κινηματική ανάλυση. Κατά την κινηματική σύνθεση, υπολογίζονται οι παράμετροι του επιλεγθέντος μηχανισμού ώστε αυτός να επιτελεί συγκεκριμένη κίνηση, ενώ κατά την ανάλυση μελετάται η ακριβής κίνηση γνωστού μηχανισμού (Breteler, 1987; Vinogradov, 2000).

1.2.2 Σύστημα Διεύθυνσης

Σύστημα διεύθυνσης ή μηχανισμός διεύθυνσης (steering mechanism) είναι ο κινηματικός μηχανισμός που συνδέει το τιμόνι – πηδάλιο με τους διευθυντήριους τροχούς. Μεταβιβάζει την περιστροφική κίνηση στο τιμόνι με τρόπο ώστε να στρίβουν οι τροχοί και αποτελείται συνήθως από βραχίονες – ράβδους (links) προσαρμοσμένους σε κατάλληλη διάταξη μέσω συνδέσμων – αρθρώσεων (joints) (Gillespie, 1992; Hillier και Coombs, 2004).

1.2.3 Βελτιστοποίηση

Βελτιστοποίηση (optimization) είναι η διαδικασία εύρεσης βέλτιστης λύσης σε ένα πρόβλημα. Κατά τη βελτιστοποίηση, το πρόβλημα περιγράφεται με ένα μέγεθος – στόχο, η τιμή του οποίου εξαρτάται από μεταβλητές – αγνώστους. Οι τιμές των μεταβλητών που βελτιστοποιούν το μέγεθος – στόχο, αποτελούν τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Από μαθηματικής πλευράς, είναι η εύρεση της ελάχιστης ή μέγιστης ρίζας αντικειμενικής συνάρτησης², με την παρουσία τυχόν περιορισμών για την τιμή αυτής (Nocedal και Wright, 2006). Βελτιστοποίηση συστήματος διεύθυνσης είναι η κινηματική σύνθεση του συστήματος ώστε αυτό να λειτουργεί όσο το δυνατόν πλησιέστερα σε ένα επιθυμητό κριτήριο κίνησης (Jazar, 2009).

1.3 ΣΧΕΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η εργασία έχει δομηθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

- Στο κεφάλαιο 2 συλλέγεται το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο σχετικά με τον υπό σχεδιασμό μηχανισμό.
- Στο κεφάλαιο 3 παρατίθεται η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση, ανάλυση και βελτιστοποίηση του μηχανισμού.
- Στο κεφάλαιο 4 καταγράφεται η ανάλυση του μηχανισμού, τα βήματα που ακολουθούνται για τη βελτιστοποίηση αυτού και για τη σύνταξη του προγράμματος.
- Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης και η διεπιφάνεια του προγράμματος.
- Στο τελευταίο κεφάλαιο 6 αξιολογείται η επίτευξη των επιμέρους στόχων της εργασίας, γίνονται αναφορές σε άλλες μελέτες και προτείνονται μελλοντικά σχέδια για την εξέλιξη της μελέτης.

² Στην αντικειμενική συνάρτηση γίνεται συσχέτιση των μεταβλητών με τρόπο ώστε να καθορίσουν το τελικό μέγεθος – στόχο του προβλήματος.

2 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ, ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ & ΤΡΟΧΟΙ

Σε κάθε σύστημα διεύθυνσης η ενέργεια που καταβάλλεται από τον οδηγό στο τιμόνι μεταφέρεται από τα μέρη του συστήματος στους τροχούς, οι οποίοι στρίβουν, αλλάζοντας τον προσανατολισμό του οχήματος. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται μεταφορά αυτής της ενέργειας – κίνησης εξαρτάται από τον τύπο του συστήματος διεύθυνσης και τα επιμέρους εξαρτήματά του.

Κατά τον σχεδιασμό, το σύστημα διαμορφώνεται βάσει μιας επιθυμητής σχέσης μεταξύ των τροχών σε συνθήκες στροφής, βάσει, δηλαδή, κάποιας αρχής κίνησης. Παρόλο τον σχεδιασμό, η αρχή αυτή δεν τηρείται απόλυτα σε πραγματικές συνθήκες. Επηρεάζεται από πληθώρα παραγόντων όπως την τοποθέτηση – γεωμετρία των τροχών, την ταχύτητα, το φορτίο και την καθεαυτή φύση των ελαστικών. Η τελική πορεία, λοιπόν, του οχήματος διαμορφώνεται από όλα τα παραπάνω.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούν οι επικρατέστεροι μηχανισμοί διεύθυνσεως στα μηχανοκίνητα οχήματα, θα οριστούν γωνίες που αποτυπώνουν την τοποθέτηση των τροχών στο σύστημα και το φαινόμενο της ολίσθησης των ελαστικών. Τέλος, θα περιγραφούν οι βασικότερες αρχές κίνησης.

2.1 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΚΙΝΗΣΗΣ

Τα συστήματα διεύθυνσης στην αυτοκίνηση μπορούν να χωριστούν σε διάφορες κατηγορίες: ανάλογα με τη θέση των διεθυντήριων τροχών σε συστήματα με διεθυντήριους τροχούς τους εμπρόσθιους, τους οπίσθιους ή και τους τέσσερις και ανάλογα με την προέλευση της δύναμης για την περιστροφή του τιμονιού σε συστήματα με υποβοήθηση ή χωρίς.

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστούν οι κυριότεροι μηχανισμοί χωρίς υποβοήθηση, με διεθυντήριους τροχούς τους μπροστινούς. Ο όρος «χωρίς υποβοήθηση» χαρακτηρίζει τα συστήματα κατά τα οποία η δύναμη που ασκεί ο οδηγός στο τιμόνι πολλαπλασιάζεται με μηχανικό τρόπο από το σύστημα στους τροχούς, χωρίς κάποια πρόσθετη ηλεκτρική, υδραυλική ή πνευματική υποβοήθηση. Αν και η λειτουργία της διεύθυνσης είναι αλληλένδετη με αυτή των αναρτήσεων στο εμπρόσθιο σύστημα, δεν θα γίνει καθόλου αναφορά σε αυτές, καθώς ο τελικός στόχος είναι η επιλογή συστήματος για όχημα χωρίς αναρτήσεις (Βλ. 4.1).

Σκοπός όλων των μηχανισμών διεύθυνσης είναι η μετατροπή της περιστροφικής κίνησης στο τιμόνι σε γραμμική στην κινηματική αλυσίδα του μηχανισμού, ο πολλαπλασιασμός της ροπής στρέψης που εφαρμόζεται στο τιμόνι και η μείωση των στροφών που μεταδίδονται στους τροχούς. Η μείωση των στροφών καθορίζεται από τη σχέση μετάδοσης τιμονιού, δηλαδή τον λόγο της περιστροφής τιμονιού προς την περιστροφή των τροχών (Jazar, 2009).

Οι μηχανισμοί μπορούν να χωριστούν σε τρεις ευρείες κατηγορίες:

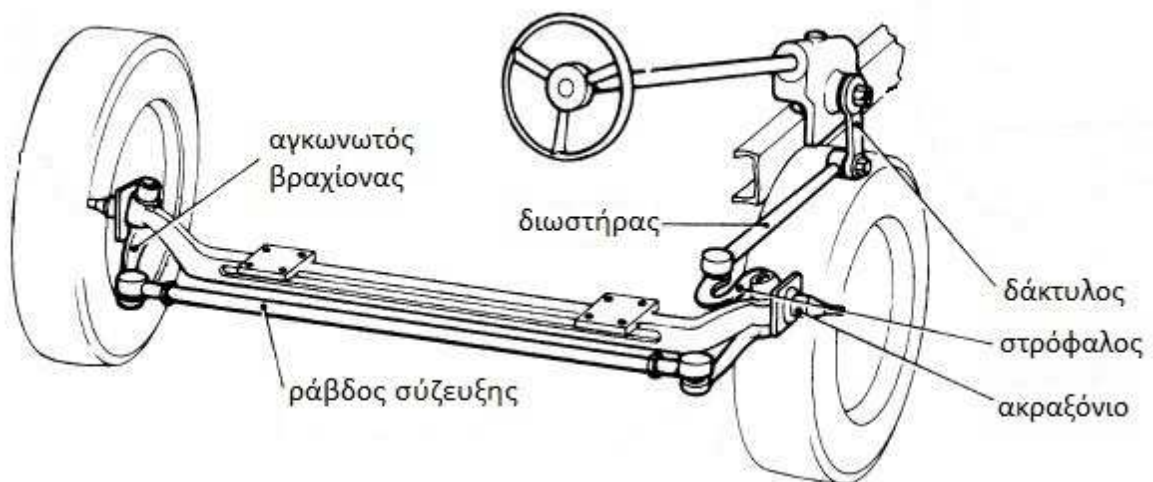
- Συστήματα με πρόσθιο ολόσωμο άξονα
- Συστήματα με πρόσθια ανεξάρτητη ανάρτηση και σε
- Συστήματα οχημάτων τύπου καρτ

2.1.1 Συστήματα με πρόσθιο ολόσωμο άξονα

Τα συστήματα αυτά χρησιμοποιούνται κυρίως σε βαριά οχήματα όπως φορτηγά ή λεωφορεία. Η χρήση τους στα επιβατικά αυτοκίνητα μειώθηκε με την εξέλιξη των συστημάτων ανεξάρτητης ανάρτησης (Hillier και Coombs, 2004; Jazar, 2009).

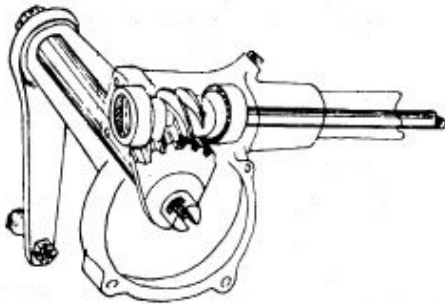
Αποτελούνται από τέσσερα βασικά μέρη: το τιμόνι, τον άξονα διεύθυνσης, την πυξίδα διεύθυνσης και την κινηματική αλυσίδα. Η κινηματική αλυσίδα αποτελείται από βραχίονες και συνδέει την πυξίδα με τους τροχούς.

Το τιμόνι συνδέεται με τον άξονα διεύθυνσης με πολύσφηνο και περικόχλιο. Το κάτω άκρο του άξονα εισέρχεται στο κιβώτιο της πυξίδας, όπου προσαρμόζεται ο μηχανισμός που μεταφέρει την κίνηση, με κάποια σχέση μετάδοσης, στον βραχίονα της πυξίδας. Ο βραχίονας της πυξίδας ή δάκτυλος συνδέεται με τον διωστήρα, έναν βραχίονα έλξης-ώθησης. Το άλλο άκρο του διωστήρα συνδέεται με τον βραχίονα οδήγησης ή στρόφαλο, ο οποίος καθορίζει την κίνηση ενός ακραζονίου, ενός δηλαδή τροχού. Με την περιστροφή του τροχού, η κίνηση μεταφέρεται στο πίσω μέρος του ακραζονίου, όπου είναι ενσωματωμένος ο αγκωνωτός βραχίονας διεύθυνσης. Αυτός, με την κίνησή του, παρασέρνει τη ράβδο σύζευξης, η οποία ακολουθώντας τον άλλο αγκωνωτό βραχίονα, περιστρέφοντας το άλλο σύστημα ακράζονιου – τροχού. Με αυτόν τον τρόπο, στρέφονται ταυτόχρονα οι δυο διευθυντήριοι τροχοί (Εικόνα 2-1) (Hillier και Coombs, 2004).

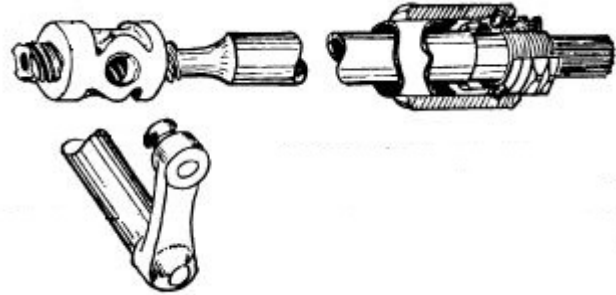


Εικόνα 2-1: Μέρη συστήματος με πρόσθιο ολόσωμο άξονα (Hillier και Coombs, 2004).

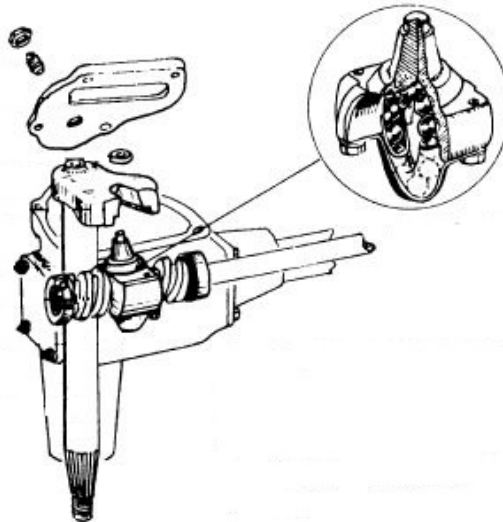
Υπάρχουν διάφοροι μηχανισμοί πυξίδας: πυξίδα με ατέρμονα κοχλία και οδοντωτό τομέα, με ατέρμονα κοχλία κίνησης και περικόχλιο, με ατέρμονα κοχλία και ανακυκλούμενα σφαιρίδια, με ατέρμονα κοχλία και πείρο, με ατέρμονα κοχλία και ράουλο (Εικόνα 2-2) (Hillier and Coombs, 2004).



ατέρμονας κοχλίας με οδοντωτό τομέα



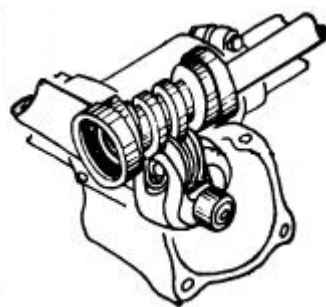
ατέρμονας κοχλίας κίνησης με περικόχλιο



ατέρμονας κοχλίας με ανακυκλούμενα σφαιρίδια



ατέρμονας κοχλίας με πείρο



ατέρμονας κοχλίας με ράουλο

Εικόνα 2-2: Μηχανισμοί πυξίδας (Hillier και Coombs, 2004).

Ανεξάρτητα από το είδος του μηχανισμού, ο ατέρμονας κοχλίας είναι πάντα ενσωματωμένος στον άξονα διεύθυνσης και η σύμπλεξή του (οδοντωτός τομέας,

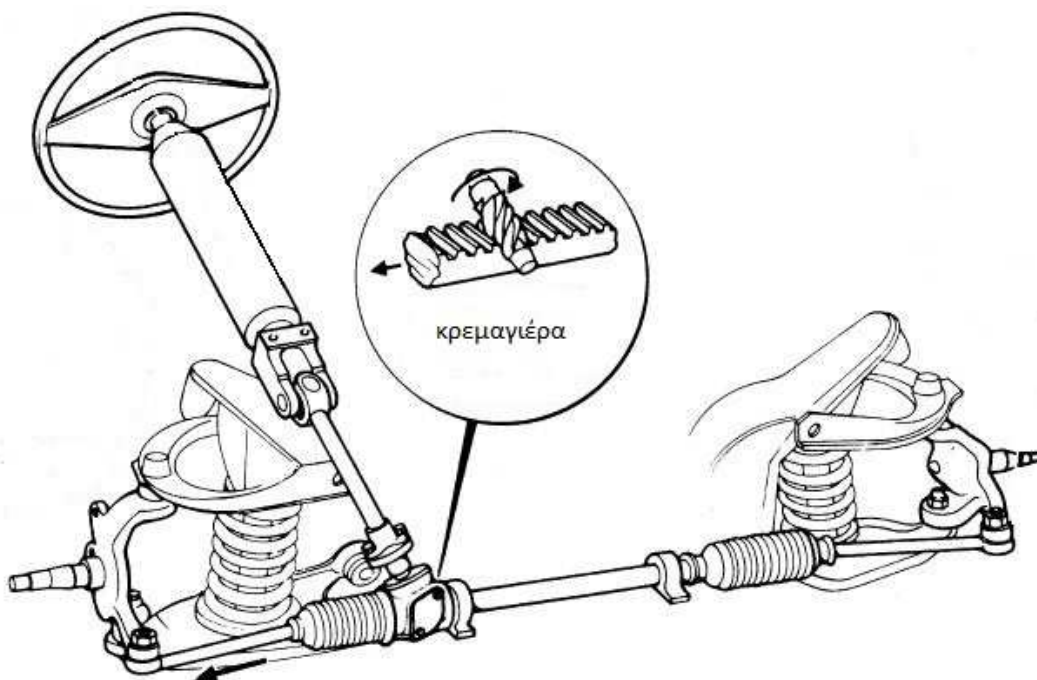
περικόχλιο, κτλ) είναι συνδεδεμένη με τον δάκτυλο. Κάθε μηχανισμός διαθέτει κατάλληλες ρυθμιστικές διατάξεις (ρυθμιστικούς κοχλίες, παχυμετρικά ελάσματα κ.α.) και συνήθως χρήζει λίπανσης.

2.1.2 Συστήματα με πρόσθια ανεξάρτητη ανάρτηση

Τα συστήματα αυτά είναι τα πλέον χρησιμοποιούμενα σε μοντέρνα επιβατικά αυτοκίνητα και αγωνιστικά οχήματα. Πρόκειται για σχετικά απλούστερες κατασκευές που προσφέρουν ένα αμεσότερο τρόπο μετάδοσης της κίνησης από το τιμόνι στους τροχούς, χωρίς να στερούνται ακρίβειας.

Τέτοια συστήματα δεν διαθέτουν ολόσωμο άξονα και τα ακραξόνια στηρίζονται απευθείας στο πλαίσιο ή στο αυτοφερόμενο αμάξωμα. Με την ανεξάρτητη ανάρτηση, οι τροχοί μπορούν να κινηθούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Η ράβδος σύζευξης χωρίζεται σε δύο ή τρία μέρη, ανάλογα με τον τύπο ανάρτησης που χρησιμοποιείται. Ο μηχανισμός διεύθυνσης τοποθετείται απευθείας επί της ράβδου σύζευξης, χωρίς να χρειάζεται διωστήρας και στρόφαλος (Hillier και Coombs, 2004).

Ο μηχανισμός αποτελείται από οδοντωτό τροχό και οδοντωτό κανόνα (κρεμαγιέρα). Η κίνηση από τον άξονα διεύθυνσης καταλήγει σε έναν οδοντωτό τροχό – πινιόν, ο οποίος εμπλέκεται με έναν οδοντωτό κανόνα. Ο οδοντωτός κανόνας συνδέεται με συνδετικές ράβδους – ημίμπαρα, τα άκρα των οποίων – ακρόμπαρα – συνδέονται με τους αγκωνωτούς βραχίονες των ακραξονίων των τροχών. Η μορφή του συστήματος παρουσιάζεται στην εικόνα 2-3 (Hillier και Coombs, 2004).

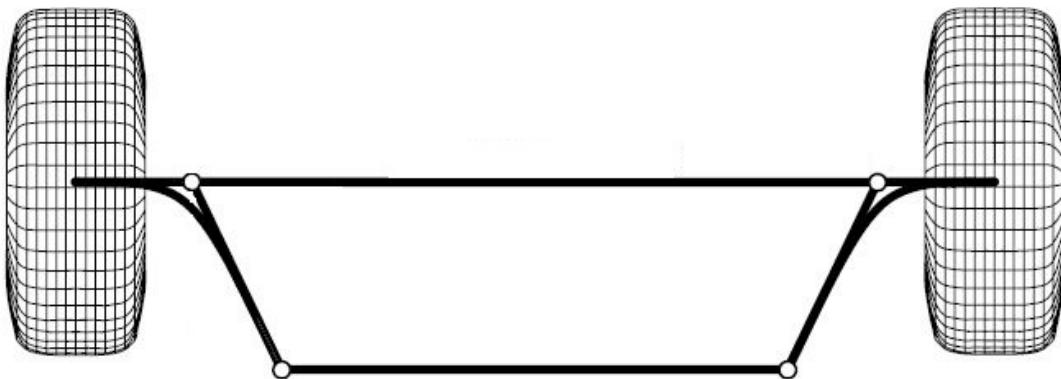


Εικόνα 2-3: Σύστημα με μηχανισμό κρεμαγιέρας (Hillier και Coombs, 2004).

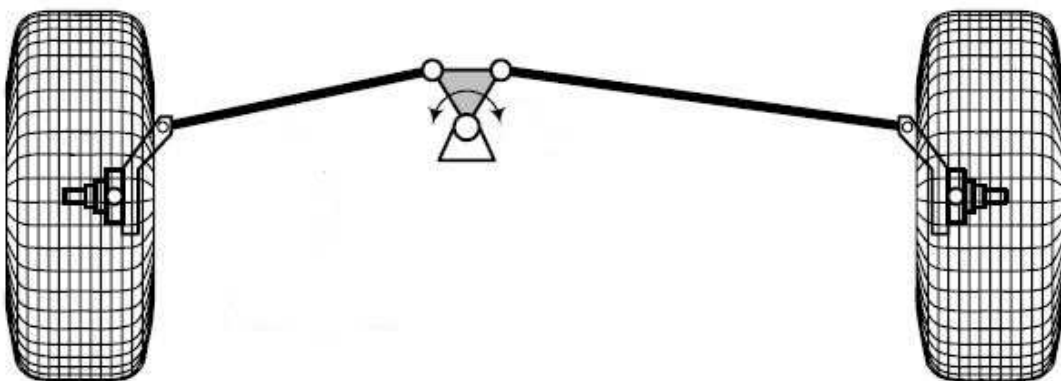
2.1.3 Συστήματα οχημάτων τύπου καρτ

Πρόκειται για απλοποιημένα συστήματα βραχιόνων που μετατρέπουν την περιστροφική κίνηση τιμονιού και κολώνας απευθείας σε γραμμική, χωρίς την παρεμβολή κάποιου ενδιάμεσου μηχανισμού. Η διάταξή τους μοιάζει με την κινηματική αλυσίδα του συμβατικού συστήματος με πρόσθιο ολόσωμο άξονα και μπορεί να χωριστεί σε δύο βασικές κατηγορίες: Στον

- Τραπεζοϊδή κινηματικό μηχανισμό (Εικόνα 2-4) και στον
- Μοχλικό μηχανισμό (Εικόνα 2-5)



Εικόνα 2-4: Σκαρίφημα τραπεζοϊδούς μηχανισμού (Jazar, 2009).



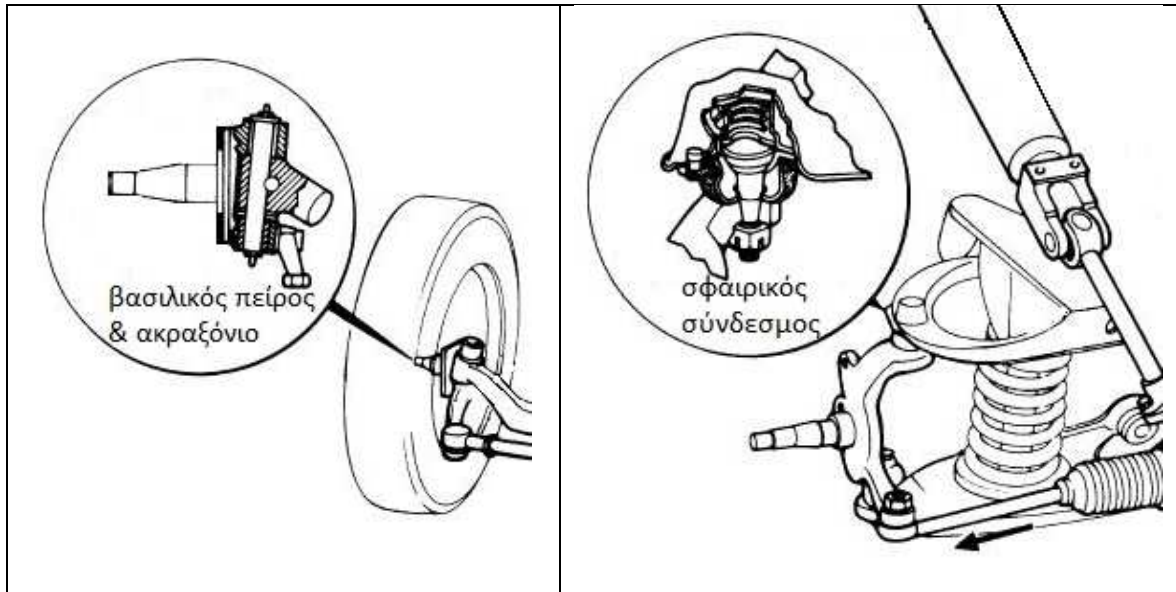
Εικόνα 2-5: Σκαρίφημα μοχλικού μηχανισμού (Jazar, 2009).

Η κολώνα τιμονιού συνδέεται σταθερά στο πλαίσιο του οχήματος και συνήθως μέσω μοχλού με το κέντρο της μικρής βάσης του τραπεζίου, εάν πρόκειται για τραπεζοϊδή μηχανισμό, ή με την κορυφή του τριγώνου διευθύνσεως, εάν πρόκειται για μοχλικό μηχανισμό.

Τα συστήματα αυτά χρησιμοποιούνται κυρίως σε οχήματα καρτ, αγωνιστικά και μη, και σε αυτοσχέδια οχήματα λόγω της απλής τους κατασκευής, ρύθμισης και τοποθέτησης. Συνήθως δεν συμπεριλαμβάνεται ανάρτηση σε αυτά, εκτός και αν προορίζονται για οδήγηση εκτός δρόμου.

2.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΡΟΧΩΝ

Ανεξαρτήτως τύπου συστήματος διεύθυνσης, κάθε διευθυντήριο τροχός διαθέτει ξεχωριστό κέντρο περιστροφής. Ο ολόσωμος πρόσθιος άξονας στα συμβατικά συστήματα με πυξίδα ή το πλαίσιο στα συστήματα καρτ, καταλήγουν σε γόμφους ή δίχαλα όπου μέσω ενός πείρου – βασιλικού πείρου – αρθρώνονται τα ακραζόνια που φέρουν τους τροχούς. Ο άξονας του βασιλικού πείρου αποτελεί τον άξονα περιστροφής του συστήματος τροχού που φέρει. Στα συστήματα κρεμαγιέρας, οι πείροι αντικαθίστανται από σφαιρικούς συνδέσμους (Εικόνα 2-6).



Εικόνα 2-6: Βασιλικός πείρος και σφαιρικός σύνδεσμος (Hillier και Coombs, 2004).

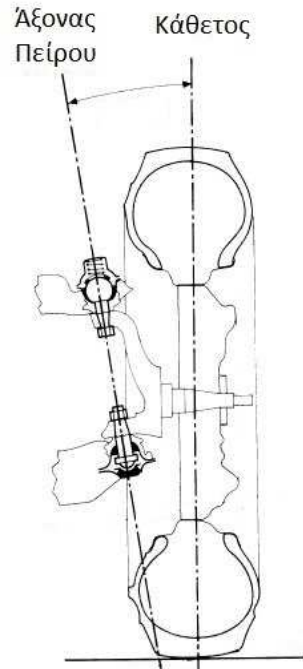
Στη συνέχεια της εργασίας, όταν γίνεται αναφορά σε «πείρο» θα εννοείται ο νοητός άξονας που ενώνει τα δύο σημεία στα οποία στηρίζεται η βάση του ακραζονίου, είτε πρόκειται για σύστημα με βασιλικό πείρο, είτε για σύστημα με σφαιρικούς συνδέσμους.

Υπάρχουν διάφορες γωνίες υπό τις οποίες μπορεί να γίνει συναρμογή των εξαρτημάτων – πείρου και ακραζονίου – ενός συστήματος τροχού και ο συνδυασμός αυτών θα καλείται γεωμετρία τροχών. Η χρήση κατάλληλης γεωμετρίας προσδίδει σταθερότητα στο σύστημα, δύναται να μειώσει την καταπόνηση των εξαρτημάτων, τη φθορά των ελαστικών και να βελτιώσει την κατευθυντικότητα και την τάση επαναφοράς των τροχών στην ευθύγραμμη πορεία (Hillier και Coombs, 2004; Milliken και Milliken, 1995).

Στη συνέχεια θα παρατεθούν οι ορισμοί των γωνιών που επηρεάζουν τη μαθηματική αποτύπωση του εξεταζόμενου συστήματος διεύθυνσης και των οποίων θα σχολιαστεί η επίδραση στην κινηματική του.

2.2.1 Εγκάρσια Κλίση Πείρου (Γωνία KPI)

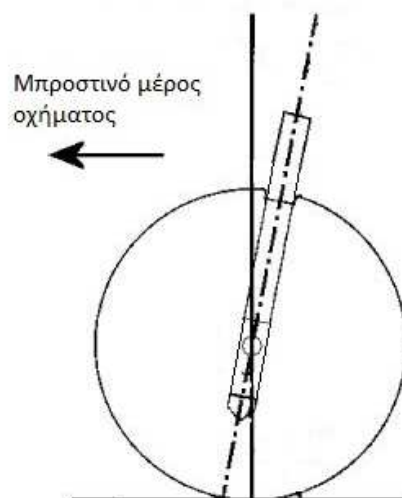
Εγκάρσια κλίση πείρου ή γωνία KPI (KingPin Inclination) ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα του πείρου και της καθέτου, παρατηρώντας το σύστημα από πρόσθια όψη (Εικόνα 2-7).



Εικόνα 2-7: Γωνία KPI (Hillier και Coombs, 2004).

2.2.2 Διαμήκης Κλίση Πείρου (Γωνία Caster)

Διαμήκης κλίση πείρου ή γωνία caster ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα του πείρου και της καθέτου, όπως φαίνονται σε πλάγια όψη (Εικόνα 2-8).

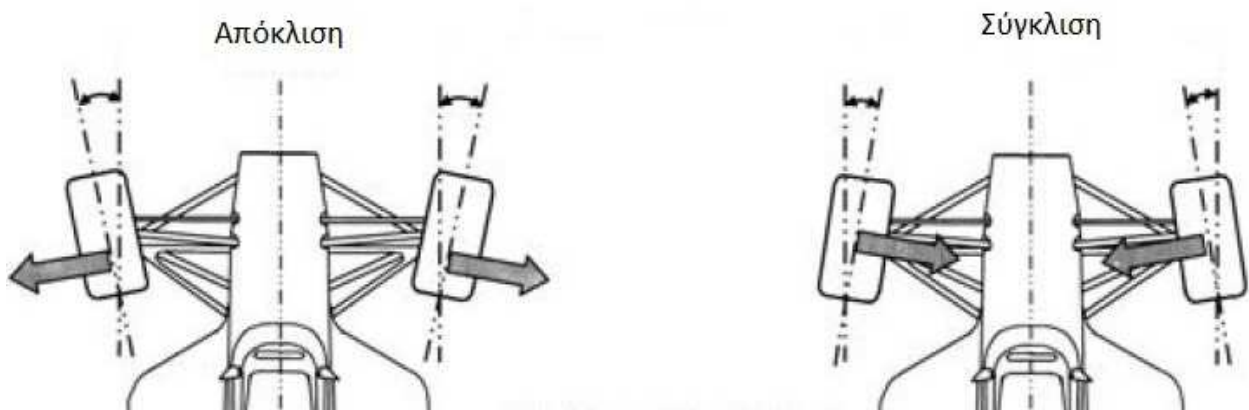


Εικόνα 2-8: Θετική γωνία caster (Hillier και Coombs, 2004).

Η γωνία caster αναφέρεται ως θετική όταν η νοητή προέκταση του άξονα του πείρου έρχεται σε επαφή με το οδόστρωμα μπροστά από το ίχνος της καθέτου στο οδόστρωμα. Αντίθετα, όταν η προέκταση του άξονα του πείρου έρχεται σε επαφή με το οδόστρωμα πίσω από το ίχνος της καθέτου, η γωνία caster αναφέρεται ως αρνητική (Hillier και Coombs, 2004).

2.2.3 Σύγκλιση – Απόκλιση

Η σύγκλιση ή η απόκλιση καθορίζουν το βαθμό που οι τροχοί είναι στραμμένοι προς το εσωτερικό ή το εξωτερικό μέρος του οχήματος για μηδενική γωνία τιμονιού σε στατικές συνθήκες. Όταν η απόσταση μεταξύ του μπροστινού μέρους των τροχών είναι μικρότερη από την απόσταση μεταξύ του πίσω μέρους αυτών, η διάταξη ονομάζεται «σύγκλιση». Αντίθετα, όταν η απόσταση του πίσω μέρους των τροχών είναι μικρότερη, η διάταξη ονομάζεται «απόκλιση» (Εικόνα 2-9) (Hillier και Coombs, 2004).

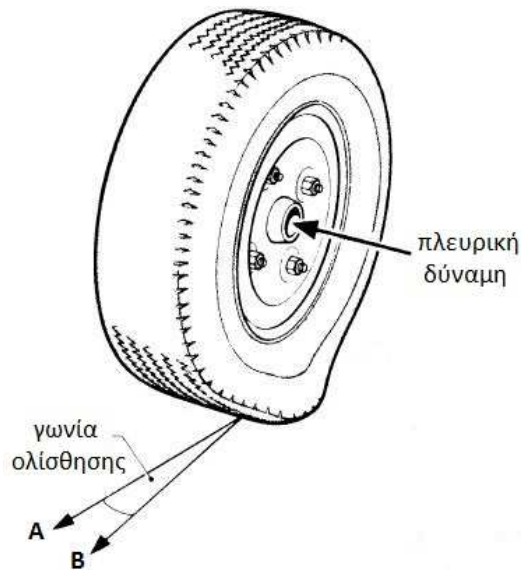


Εικόνα 2-9: Διάταξη απόκλισης και σύγκλισης (Thompson).

2.3 ΓΩΝΙΑ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ

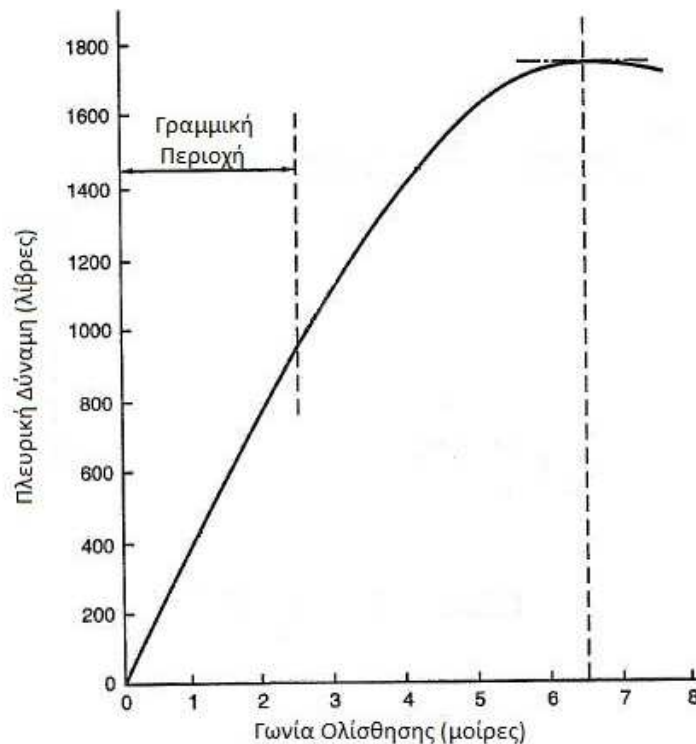
Όταν σε έναν τροχό ενεργεί πλευρική δύναμη το ελαστικό παραμορφώνεται, εκτρέποντας, τελικά, τον τροχό από την επιθυμητή – προδιαγεγραμμένη – πορεία. Η παραμόρφωση του ελαστικού αναγκάζει τον τροχό να ακολουθήσει μια κατεύθυνση B διαφορετική από την A, κατά την οποία είναι στραμμένος. Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της διεύθυνσης κατά την οποία είναι στραμμένος ο τροχός (A) και αυτή της πραγματικής του πορείας (B), ονομάζεται γωνία ολίσθησης (Εικόνα 2-10) (Hillier και Coombs, 2004).

Η γωνία ολίσθησης μπορεί να προσεγγίζεται ως αποτέλεσμα της πλευρικής δύναμης σε ένα τροχό ή το ανάποδο, η πλευρική δύναμη ως αποτέλεσμα της γωνίας ολίσθησης. Όταν οι διεθυντήριοι τροχοί στρίβουν μέσω του συστήματος διεύθυνσης, αναπτύσσονται γωνίες ολίσθησης που προκαλούν πλευρικές δυνάμεις. Οι δυνάμεις αυτές στρέφουν το όχημα και αντενεργούν τη φυγοκεντρική δύναμη που δέχεται (Santin κ.α., 2007; Milliken και Milliken, 1995).



Εικόνα 2-10: Σχηματική αναπαράσταση γωνίας ολίσθησης (Hillier και Coombs, 2004).

Η σχέση της γωνίας ολίσθησης συναρτήσει της πλευρικής δύναμης εξαρτάται από διάφορες παραμέτρους, συνήθως παρέχεται υπό τη μορφή διαγράμματος για συγκεκριμένο φορτίο³ και πρόκειται για αποτέλεσμα εργαστηριακών μετρήσεων του ελαστικού σε ειδικές διατάξεις (Εικόνα 2-11) (Milliken και Milliken, 1995).

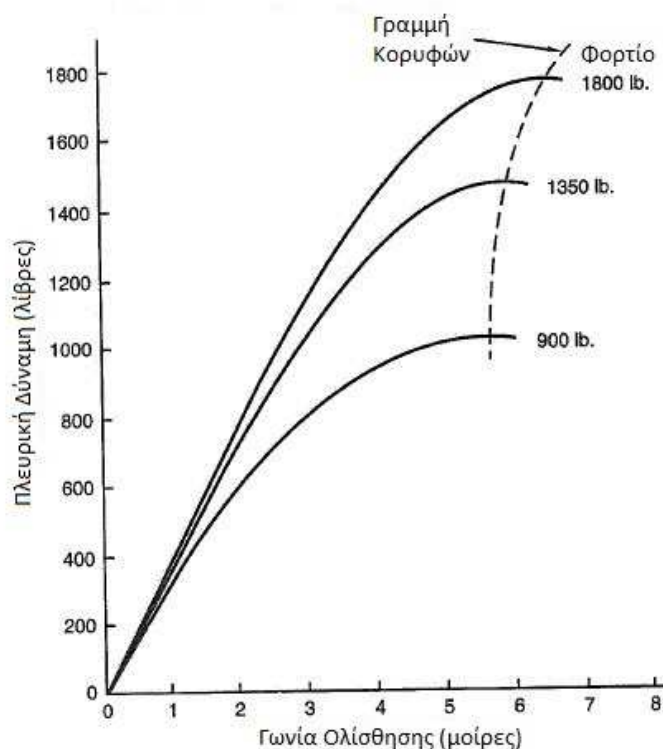


Εικόνα 2-11: Πλευρική δύναμη – Γωνία ολίσθησης, για ελαστικό αγώνων (Milliken και Milliken, 1995).

³ Ως φορτίο εννοείται η κάθετη δύναμη που ασκείται στον τροχό, συνισταμένη μέρους του βάρους του οχήματος και των δυναμικών επιδράσεων από την κίνηση του οχήματος.

Στη γραμμική περιοχή του διαγράμματος, η τιμή της γωνίας ολίσθησης του ελαστικού είναι ανάλογη της πλευρικής δύναμης. Από το σημείο της κορυφής της καμπύλης και μετά χάνεται η πρόσφυση και ο τροχός πλαγιολισθαίνει. Εκεί, η πλευρική δύναμη είναι αποτέλεσμα της τριβής μεταξύ ελαστικού και οδοστρώματος (Milliken και Milliken, 1995).

Στην εικόνα 2-12, παρουσιάζονται καμπύλες γωνίας ολίσθησης – πλευρικής δύναμης του ίδιου ελαστικού⁴ για διαφορετικά φορτία.



Εικόνα 2-12: Πλευρική δύναμη – Γωνία ολίσθησης, για διαφορετικά φορτία (Milliken και Milliken, 1995).

Για δεδομένο ελαστικό, η μορφή των καμπύλων επηρεάζεται από την πίεση, τη θερμοκρασία, την ταχύτητα που έχει αυτό κατά τη λειτουργία και την τοποθέτηση – κλίση του τροχού ως προς το κατακόρυφο επίπεδο – γωνία camber (Milliken και Milliken, 1995).

2.4 ΑΡΧΕΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Εφόσον οι τροχοί περιστρέφονται γύρω από διαφορετικά κέντρα, είναι δυνατό, υπό συγκεκριμένη γωνία τιμονιού, να στρίβουν κατά διαφορετική γωνία. Η επιθυμητή σχέση μεταξύ γωνίας εσωτερικού και εξωτερικού τροχού σε συνθήκες

⁴ P215/60 R15 Goodyear GT-S 31 psi.

στροφής εκφράζεται σε αρχές – συνθήκες κίνησης και εκπληρώνεται με κατάλληλη γεωμετρία της κινηματικής αλυσίδας.

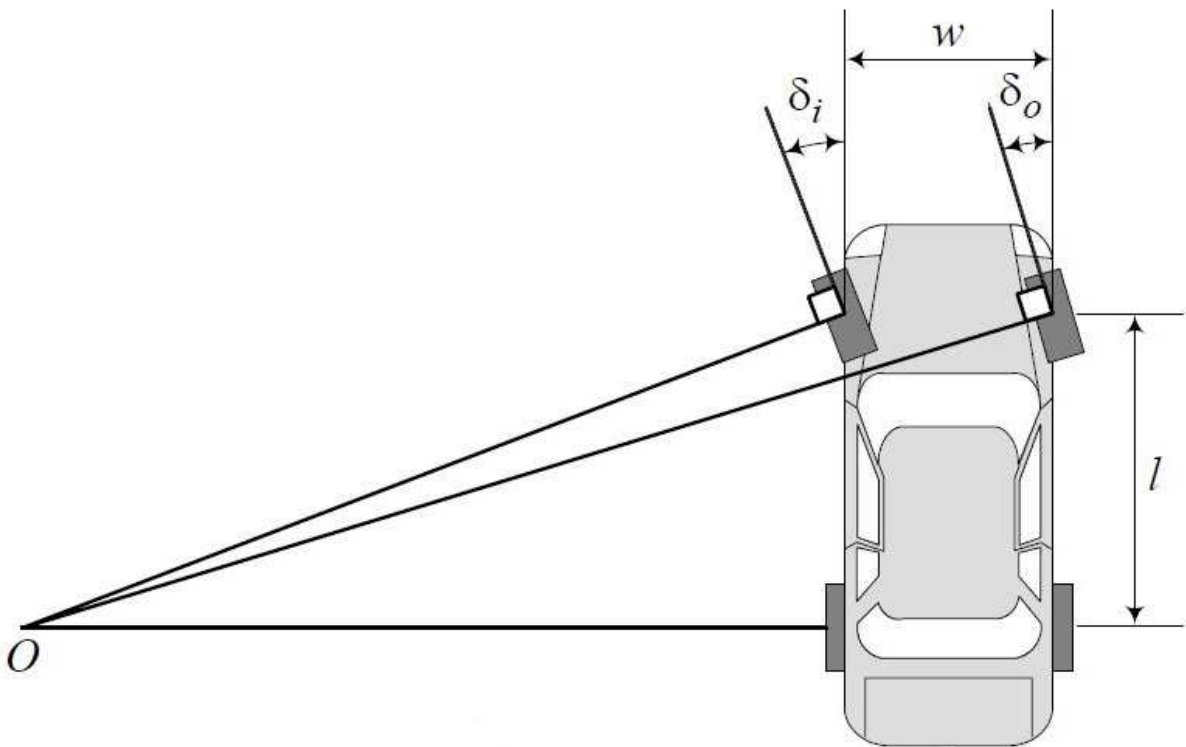
2.4.1 Συνθήκη Ackermann

Δημοφιλέστερη αρχή κίνησης είναι η συνθήκη Ackermann, που επιτρέπει στους τροχούς να στρίβουν χωρίς να ολισθαίνουν. Για να στρέφει και να κυλιέται ομαλά ένα όχημα, χωρίς να εμφανίζονται τριβές ολίσθησης στα σημεία επαφής των τροχών με το οδόστρωμα, θα πρέπει οι προεκτάσεις των αξόνων των τροχών να τέμνονται σε κοινό σημείο. Το σημείο αυτό αποτελεί το κέντρο περιστροφής του οχήματος (Jazar, 2009).

Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως:

$$\cot \delta_o - \cot \delta_i = \frac{w}{l}$$

Όπου δ_i είναι η γωνία στροφής του εσωτερικού τροχού, δ_o η γωνία στροφής του εξωτερικού τροχού, w το μετατρόχιο και l το μεταξόνιο του οχήματος (Εικόνα 2-13) (Jazar, 2009).



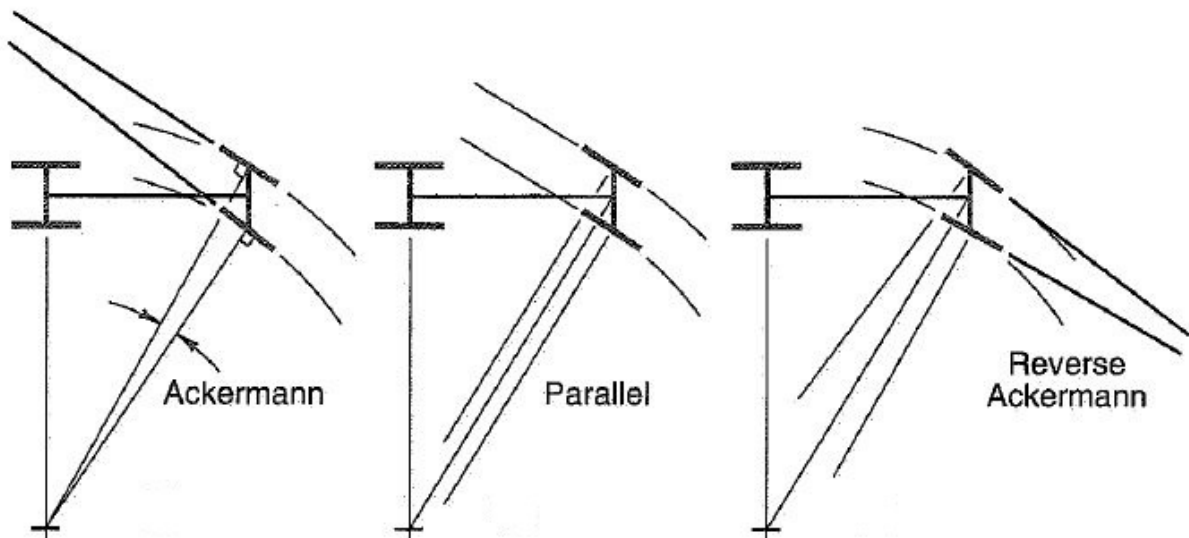
Εικόνα 2-13: Σχεδιαστική απεικόνιση γεωμετρίας Ackermann (Jazar, 2009).

Όπως φαίνεται στην εικόνα 2-13, ο εσωτερικός τροχός θα πρέπει να στρίβει περισσότερο από τον εξωτερικό και σύμφωνα με την παραπάνω σχέση συναφτομένων. Γωνίες που εκπληρώνουν απόλυτα τη συνθήκη παρατηρούνται σε μια συγκεκριμένη θέση σε δεξιά στροφή και σε μια αντίστοιχη σε αριστερή.

Η συνθήκη ισχύει για μικρές ταχύτητες όπου δεν αναπτύσσονται πλευρικές δυνάμεις. Σφάλματα και αποκλίσεις από τη συνθήκη Ackermann δύναται να έχουν σημαντική επιρροή στη φθορά των ελαστικών. Επιπλέον, παρόλο που τα σφάλματα δεν επιδρούν ιδιαίτερα στην απόκριση του οχήματος σε αλλαγές διεύθυνσης, επηρεάζουν την απαιτούμενη ροπή για στροφή και την αίσθηση που λαμβάνει ο οδηγός. Εφαρμόζεται συνήθως σε οχήματα μικρής πλευρικής επιτάχυνσης, όπως τα επιβατικά (Gillespie, 1992; Jazar, 2009; Milliken και Milliken, 1995).

2.4.2 Άλλες Συνθήκες

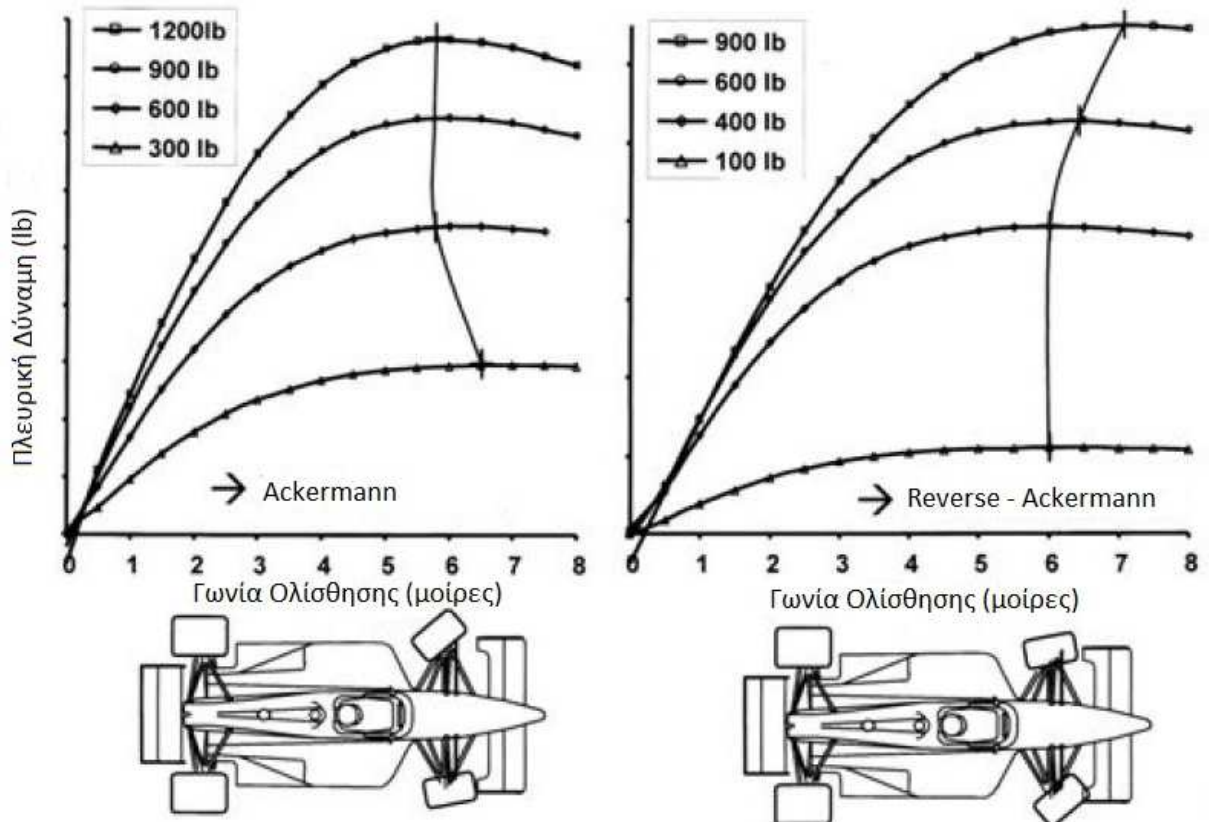
Σε περιπτώσεις μεγάλης πλευρικής επιτάχυνσης, τα ελαστικά λειτουργούν σε μη αμελητέες γωνίες ολίσθησης και η πλευρική μεταφορά βάρους έχει ως αποτέλεσμα το φορτίο στον εσωτερικό τροχό να είναι αρκετά μικρότερο από το φορτίο στον εξωτερικό τροχό. Σύμφωνα με την εικόνα 2-12 μικρότερες γωνίες ολίσθησης απαιτούνται σε χαμηλότερα φορτία για μέγιστη πλευρική δύναμη – κορυφή καμπύλης. Εάν η διεύθυνση του οχήματος είναι σχεδιασμένη σύμφωνα με την αρχή Ackermann, ο εσωτερικός τροχός οδηγείται σε υψηλότερη γωνία ολίσθησης από αυτήν που απαιτείται για μέγιστη πλευρική δύναμη. Έτσι, ο εσωτερικός τροχός υπερθερμαίνεται και επιβραδύνει το όχημα λόγω αυξημένων τριβών κατά τη στροφή, ενώ ενδέχεται να χάσει πρόσφυση. Για αυτόν το λόγο σε αγωνιστικά οχήματα υψηλών ταχυτήτων είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται Reverse-Ackermann – αλλιώς Anti-Ackermann – ή παράλληλη γεωμετρία διεύθυνσης (Εικόνα 2-14) (Milliken και Milliken, 1995; Thompson).



Εικόνα 2-14: Διαφορετικές αρχές κίνησης (Milliken και Milliken, 1995).

Είναι δυνατό να υπολογιστεί το επιθυμητό ποσοστό της Reverse-Ackermann γεωμετρίας για ένα όχημα εάν τα χαρακτηριστικά του ελαστικού και τα φορτία είναι γνωστά (Milliken και Milliken, 1995).

Σε κάθε περίπτωση, και σύμφωνα με τον Claude Rouelle⁵, η προτιμητέα γεωμετρία διεύθυνσης προκύπτει από τις καμπύλες του ελαστικού. Εάν στις καμπύλες του ελαστικού μέγιστη πλευρική δύναμη προκύπτει σε αυξημένη γωνία ολίσθησης εσωτερικού τροχού, όπου το φορτίο είναι μικρότερο, συνεπάγεται χρήση της γεωμετρίας Ackermann. Διαφορετικά, εάν στις καμπύλες μέγιστη πλευρική δύναμη προκύπτει σε χαμηλότερη γωνία ολίσθησης εσωτερικού τροχού, χρήση γεωμετρίας Reverse-Ackermann αναμένεται να είναι καλύτερη (Εικόνα 2-15) (Thompson).



Εικόνα 2-15: Επιλογή γεωμετρίας διεύθυνσης σύμφωνα με τη μορφή των καμπύλων γωνίας ολίσθησης ελαστικού (Thompson).

Κλείνοντας, η σωστή γωνία στροφής των τροχών προκύπτει συναρτήσει του στιγμιαίου φορτίου σε αυτούς, τις συνθήκες του οδοστρώματος, την ταχύτητα, τη γεωμετρία τους και τα χαρακτηριστικά των ελαστικών. Οχήματα υψηλών ταχυτήτων με Reverse-Ackermann ή παράλληλη γεωμετρία, πρέπει να μπορούν να στρίψουν και σε χαμηλές ταχύτητες υπό την αρχή Ackermann. Ως εκ τούτου, δεν υπάρχει ιδανική αρχή κίνησης ή γεωμετρία, εκτός από τον έλεγχο της γωνίας στροφής κάθε διεθυντήριου τροχού ανεξάρτητα, μέσω ενός έξυπνου συστήματος (Jazar, 2009; Milliken και Milliken, 1995).

⁵ Επικεφαλής OptimumG (www.optimumg.com) σε σεμινάρια Race Car Engineering.

3 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η βελτιστοποίηση της κινηματικής ενός μηχανισμού αποτελεί ένα σύνθετο πρόβλημα με διάφορες προσεγγίσεις. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για τη μαθηματική αποτύπωση του μηχανισμού, η μέθοδος βελτιστοποίησης και τα εργαλεία μαθηματικού λογισμικού που επιλέχθηκαν για την εξαγωγή αποτελέσματος.

3.1 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1, η βελτιστοποίηση κινηματικού μηχανισμού είναι στην ουσία ένα πρόβλημα κινηματικής σύνθεσης. Για τη λύση του προβλήματος είναι απαραίτητη η αποτύπωση των εξισώσεων κίνησης του μηχανισμού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με διάφορες μεθόδους.

3.1.1 Μέθοδοι Κινηματικής Ανάλυσης

Υπάρχουν διάφορες τεχνικές ανάλυσης για την αποτύπωση της κίνησης, λιγότερο ή περισσότερο ακριβείς, που βασίζονται στην απεικόνιση ή σε μαθηματικές σχέσεις. Μπορούν να συνοψιστούν στις ακόλουθες (Myszka, 2011):

- Παραδοσιακές σχεδιαστικές τεχνικές:

Για αρκετές δεκαετίες, η πιο συνηθισμένη μέθοδος προσεγγίζει γραφικά το μηχανισμό. Ο μηχανισμός απεικονίζεται υπό κλίμακα και προσανατολισμένος, με στόχο τη χάραξη διαγράμματος κίνησης. Έχουν το πλεονέκτημα της εύκολης εφαρμογής και απεικόνισης του μηχανισμού, αλλά στερούνται ακρίβειας.

- Συστήματα CAD⁶:

Η χρήση των παραδοσιακών τεχνικών υποχώρησε με τη γρήγορη ανάπτυξη προγραμμάτων σχεδίασης με τη βοήθεια υπολογιστή. Αποτελούν, όπως και οι προηγούμενες, γραφική προσέγγιση του μηχανισμού και χρησιμοποιούνται ευρέως στη βιομηχανία. Πλεονεκτούν στην απεικόνιση, στην ακρίβεια και αυτοματοποιούν γεωμετρικές συνθήκες π.χ. καθετότητας, παραλληλίας, με έτοιμες εντολές. Δημοφιλέστερα προγράμματα είναι, το AutoCAD για σχεδιασμό σε δύο διαστάσεις και τα Inventor, SolidWorks και ProEngineer, για τρισδιάστατο σχεδιασμό.

- Αναλυτικές τεχνικές:

Οι τεχνικές αυτές περιλαμβάνουν μαθηματικές σχέσεις και κυμαίνονται από απλές εφαρμογές γεωμετρίας, τριγωνομετρίας, θεωρίας διανυσμάτων (Jazar, 2009) έως εφαρμογές μιγαδικών αριθμών και

⁶ CAD – Computer Aided Design. Ως συστήματα CAD αναφέρονται τα συστήματα μοντελοποίησης με υπολογιστή και περιλαμβάνουν τη σχεδιομελέτη και παραγωγή ενός προϊόντος, μέσω της ανάπτυξης ψηφιακού μοντέλου (Μπιλάλης και Μαραβελάκης, 2009).

γραμμικών συστημάτων (Gebreslasie και Bazezew, 2001). Δίνουν ακριβή αποτελέσματα, χωρίς να είναι απαραίτητη η απεικόνιση του μηχανισμού, ωστόσο μπορεί να αποβούν ιδιαίτερα κοπιώδεις σε περίπτωση περίπλοκων μηχανισμών.

- Υπολογιστικές τεχνικές:

Σε περιπτώσεις που απαιτείται αυξημένη ακρίβεια αλλά οι αναλυτικές μαθηματικές σχέσεις είναι περίπλοκες και οι υπολογισμοί πολλοί, οι υπολογιστικές μέθοδοι με υπολογιστή είναι πλέον κατάλληλες. Πλεονεκτούν των υπολοίπων ειδικά όταν, για λόγους ανάλυσης, τα αποτελέσματα προσεγγίζονται με επαναληπτικές διαδικασίες. Συνήθως οι μέθοδοι περιλαμβάνουν τη χρήση υπολογιστικών φύλλων, εμπορικά διαθέσιμων προγραμμάτων δυναμικής ανάλυσης όπως ADAMS, Working Model, Dynamic Designer κ.α., μαθηματικού λογισμικού, όπως MATLAB και Mathematica, ή γλώσσας προγραμματισμού. Λόγω του χρόνου και της προσπάθειας που χρειάζονται για τη σύνταξη τέτοιων ειδικών προγραμμάτων – αλγόριθμων, χρησιμοποιούνται κυρίως για περίπλοκους, μη συνήθεις μηχανισμούς.

3.1.2 Βήματα Ανάλυσης

Για την ανάλυση κίνησης του παρόντος μηχανισμού δεν ακολουθήθηκε μόνο μια μέθοδος.

Αρχικά το σύστημα προσεγγίστηκε γραφικά με δισδιάστατη σχεδίαση διαγράμματος του μηχανισμού στο AutoCAD. Η απεικόνιση βοήθησε στην κατανόηση της κίνησης του μηχανισμού και στην εφαρμογή και απόδειξη γεωμετρικών σχέσεων και αναλυτικών τεχνικών για την απόδοση της κίνησης με μαθηματικές εξισώσεις. Οι μη γραμμικές⁷ μαθηματικές σχέσεις που προέκυψαν, οδήγησαν στη χρήση μαθηματικού λογισμικού MATLAB για λόγους ακρίβειας, ευκολίας και ταχύτητας στην έκβαση του αποτελέσματος.

Συνοπτικά, τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την ανάλυση και σύνταξη του προβλήματος είναι (Vinogradov, 2000):

- Διαγραμματική απεικόνιση του σκελετού του μηχανισμού.
- Εύρεση της τροχιάς κίνησης του μηχανισμού.
- Επιλογή συστήματος συντεταγμένων.
- Συμβολικός χαρακτηρισμός των συνδέσμων, του μήκους και γωνίας που περιγράφουν τα στοιχεία του μηχανισμού με γράμματα και αριθμούς.
- Εντοπισμός των δεδομένων εισαγωγής, των μεταβλητών και του αποτελέσματος του προβλήματος.

⁷ Ως μη γραμμικές ορίζονται οι εξισώσεις στις οποίες τουλάχιστον μια μεταβλητή έχει εκθέτη μεγαλύτερο της μονάδας ή/και περιλαμβάνεται το παράγωγο μέγεθος των μεταβλητών.

- Εφαρμογή και απόδειξη αναλυτικών εξισώσεων.
- Επίλυση εξισώσεων.

Τα βήματα αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά για το συγκεκριμένο πρόβλημα στο κεφάλαιο 4.

3.2 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Πρώτο βήμα κατά τη βελτιστοποίηση είναι η μοντελοποίηση του προβλήματος. Μοντελοποίηση είναι η διαδικασία προσδιορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης, των μεταβλητών και των περιορισμών που συνθέτουν και χαρακτηρίζουν το πρόβλημα. Σε κάποιες περιπτώσεις αποτελεί το σημαντικότερο βήμα. Εάν το μοντέλο είναι ιδιαίτερα απλουστευμένο, ενδέχεται να μη δώσει χρήσιμα αποτελέσματα για το πραγματικό σύστημα, ενώ εάν είναι περίπλοκο, μπορεί να δυσκολέψει τη διαδικασία επίλυσης. Επόμενο βήμα, αποτελεί η επιλογή της μεθόδου – αλγορίθμου βελτιστοποίησης (Nocedal και Wright, 2006).

Εφαρμογή της μεθόδου συνηθίζεται με χρήση υπολογιστή, λόγω πολυπλοκότητας του αλγορίθμου και του μοντέλου προς επίλυση. Δεν υπάρχει μια καθολική μέθοδος, αλλά διάφοροι αλγόριθμοι, ανάλογοι του είδους του προβλήματος. Η επιλογή του αλγορίθμου καθορίζει την ταχύτητα της επίλυσης και την αποτελεσματικότητα στον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης (Nocedal και Wright, 2006).

Όπως θα αναλυθεί στο κεφάλαιο 4, το πρόβλημα της παρούσας εργασίας είναι μη γραμμικό. Είναι πλήρως ορισμένο, οπότε η λύση του θα αναζητηθεί με αιτιοκρατικές μεθόδους. Η αντικειμενική εξίσωση είναι συνεχής⁸ στο σύνολο τιμών που θα μελετηθεί. Επιπλέον, θα θεωρηθεί ότι η γραφική της παράσταση είναι ομαλή γραμμή χωρίς γωνίες και ότι οι μεταβλητές της λαμβάνουν συνεχείς τιμές.

⁸ Μια συνάρτηση καλείται συνεχής όταν μια μικρή μεταβολή στο όρισμά της προκαλεί μικρή μόνο μεταβολή στην τιμή της.

3.2.1 Μαθηματική Διατύπωση

Μαθηματικά, η βελτιστοποίηση ορίζεται ως η εύρεση ελαχίστου ή μεγίστου αντικειμενικής συνάρτησης. Εάν οι μεταβλητές της υπόκεινται σε περιορισμούς, δηλαδή πρόκειται για πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς, μπορεί να διατυπωθεί ως (Nocedal και Wright, 2006):

$$\min_{x \in R^n} f(x) \quad \text{υπόκειται σε} \quad \begin{cases} h_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} \\ g_i(x) \geq 0, & i \in \mathcal{J} \end{cases}$$

όπου:

x :	μεταβλητή (άγνωστος ή παράμετρος), διανυσματικό μέγεθος που ανήκει σε υποσύνολο των πραγματικών αριθμών R^n , όπου ο εκθέτης n δηλώνει τις n -συνιστώσες του διανύσματος
f :	αντικειμενική συνάρτηση
h, g :	συναρτήσεις περιορισμών που η μεταβλητή x πρέπει να ικανοποιεί
\mathcal{E}, \mathcal{J} :	συνολά δεικτών των περιορισμών

Η περιοχή που δύναται να βρίσκεται η βέλτιστη λύση καλείται εφικτή περιοχή και προκύπτει από το σύνολο περιορισμών του προβλήματος.

Εάν S είναι η εφικτή περιοχή, τότε (Nocedal και Wright, 2006):

$$S = \{x \mid h_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \ ; \ g_i(x) \geq 0, \quad i \in \mathcal{J}\}$$

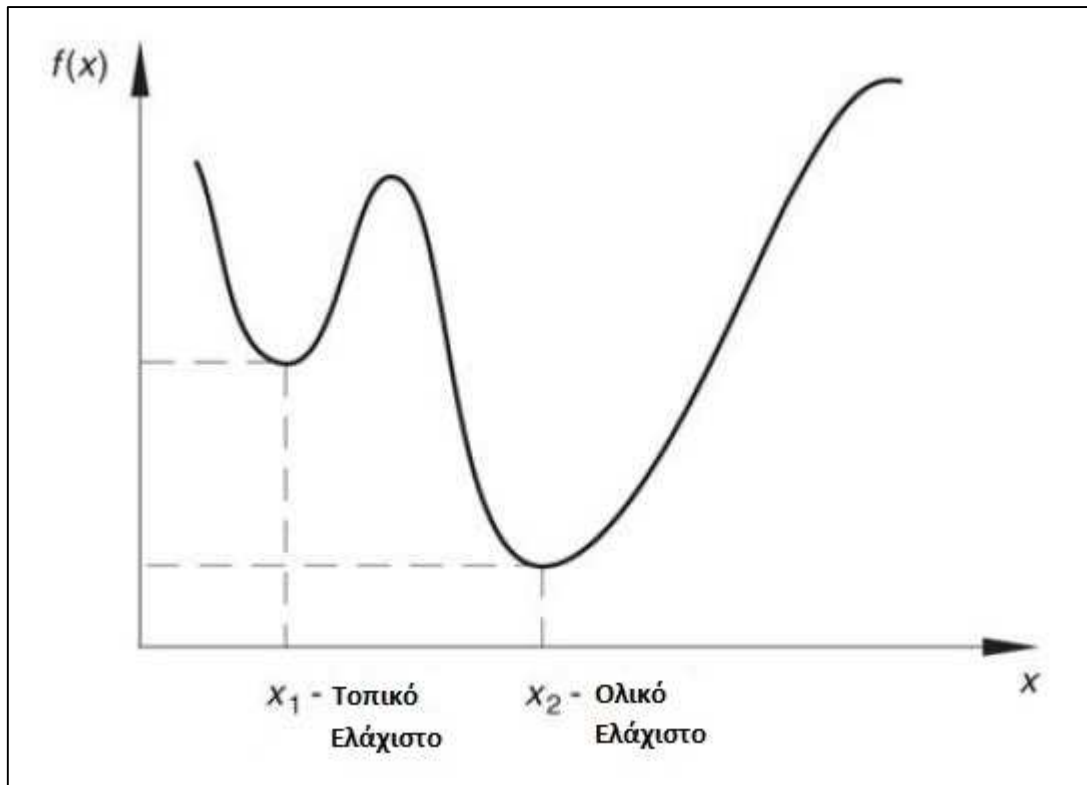
και η προηγούμενη σχέση μπορεί να εκφραστεί ως: $\min_{x \in S} f(x)$.

3.2.2 Ολικά και Τοπικά Ακρότατα

Έστω ότι υπάρχει ένα πρόβλημα εύρεσης ελαχίστου αντικειμενικής συνάρτησης και η εφικτή περιοχή λύσης είναι ένα σύνολο S .

Η συνάρτηση $f(x)$ λέγεται ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο, όπου $x_0 \in S$, εάν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in S$.

Η συνάρτηση $f(x)$ λέγεται ότι παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, όπου $x_0 \in S$, εάν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε x εντός μιας απειροελάχιστα μικρής απόστασης δ από το x_0 . Δηλαδή, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in S \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.



Εικόνα 3-1: Παράδειγμα τοπικού και ολικού ελαχίστου συνάρτησης (Messac, 2015).

Οι γρηγορότεροι αλγόριθμοι αναζητούν μόνο τοπικά ακρότατα. Εύρεση ολικού ακροτάτου είναι απαραίτητη, ή τουλάχιστον έντονα επιθυμητή, σε κάποιες εφαρμογές, αλλά είναι συνήθως δύσκολο να αναγνωριστεί και να εντοπιστεί η ολική λύση (Nocedal και Wright, 2006).

Μια ιδιαίτερη περίπτωση αποτελούν τα προβλήματα όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή⁹ εξίσωση. Σε αυτά τοπικό και ολικό ακρότατο ταυτίζονται. Τα προβλήματα γραμμικής βελτιστοποίησης επίμπτουν σε αυτήν την κατηγορία. Σε οποιαδήποτε άλλα προβλήματα τα τοπικά ακρότατα που εντοπίζονται δεν είναι απαραίτητα και ολικά (Nocedal και Wright, 2006).

3.2.3 Συνθήκες Βελτιστότητας

Μια λύση, x^* , της $f(x)$ είναι ακρότατο εάν ικανοποιεί κάποιες συνθήκες βελτιστότητας. Οι συνθήκες βελτιστότητας, δηλαδή, αποτελούν μέσα επαλήθευσης μιας λύσης ως βέλτιστης ή μη. Αυτές ελέγχουν εάν η λύση – σημείο x^* – έχει την χαμηλότερη τιμή $f(x)$ σε μια περιοχή γύρω από αυτήν, εάν δηλαδή πρόκειται για τοπικό ακρότατο, και είναι εκφράσεις της πρώτης και δεύτερης τάξης παραγώγου της f (Αποστολοπούλου, 2011).

⁹ Μια συνάρτηση λέγεται κυρτή (ή κοίλη) όταν η 1^η παράγωγός της είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της.

3.2.3.1 Αναγκαίες Συνθήκες Τοπικού Ακροτάτου

Έστω ότι η f είναι συνάρτηση μονής μεταβλητής και οι παράγωγοι $1^{\text{ης}}$ και $2^{\text{ης}}$ τάξης αυτής ορίζονται. Οι αναγκαίες συνθήκες ώστε το σημείο x^* να είναι τοπικό ελάχιστο σε ορισμένο διάστημα είναι (Messac, 2015):

- $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} = 0$
- $\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x^*} \geq 0$

Σε περίπτωση τοπικού μεγίστου η παράγωγος $2^{\text{ης}}$ τάξης είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός.

Είναι σημαντικό να διευκρινιστεί ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι αναγκαίες και όχι ικανές. Αυτό σημαίνει πως εάν δεν ισχύουν, το x^* δεν θα είναι τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο. Σε περίπτωση όμως που ισχύουν, το x^* δεν είναι απαραίτητα ακρότατο (Messac, 2015).

3.2.3.2 Ικανές Συνθήκες Τοπικού Ακροτάτου

Για ένα σημείο x^* της f , όπου η $1^{\text{η}}$ παράγωγος μηδενίζεται και η πρώτη διάφορη του μηδενός παράγωγος είναι n -οστής τάξης, ικανές συνθήκες που δηλώνουν την ύπαρξη ακροτάτου είναι (Messac, 2015):

Όταν ο n είναι ζυγός αριθμός,

- $\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x^*} > 0$, για τοπικό ελάχιστο.

Αντίστοιχα, η παραπάνω παράγωγος είναι αρνητική για τοπικό μέγιστο.

Σε περιπτώσεις συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, στη θέση της $1^{\text{ης}}$ και $2^{\text{ης}}$ τάξης παραγώγου, χρησιμοποιείται υπολογισμός μερικών παραγώγων και εσσιανής (Hessian), αντίστοιχα.

3.2.4 Αλγόριθμοι

Εκτός από ελάχιστες περιπτώσεις, λύσεις σε μη γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης εξασφαλίζονται με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης. Μέσω υπολογιστικού κώδικα, η αριθμητική ανάλυση μετατρέπεται σε υπολογιστικές τεχνικές. Οι μέθοδοι και τεχνικές για τον εντοπισμό λύσης σε προβλήματα βελτιστοποίησης είναι επαναληπτικές διαδικασίες. Αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται αρκετές δοκιμές πριν εντοπιστεί η βέλτιστη λύση. Αυτό επίσης συνεπάγεται ότι κάθε δοκιμή ή αναζήτηση εκτελείται με τον ίδιο τρόπο. Ο τρόπος ή η διαδικασία με την οποία διεξάγεται η αναζήτηση και ο εντοπισμός της λύσης ονομάζεται αλγόριθμος (Venkataraman, 2001).

Οι αλγόριθμοι χωρίζονται και κατηγοριοποιούνται με διάφορους τρόπους. Ο βασικότερος διαχωρισμός έχει να κάνει με τη λύση που αναζητούν. Εάν αναζητούν τοπικό ακρότατο καλούνται τοπικές μέθοδοι, ενώ εάν εντοπίζουν ολικό ακρότατο καλούνται ολικές.

3.2.4.1 Τοπικές Μέθοδοι

Εάν η αντικειμενική συνάρτηση και οι συναρτήσεις περιορισμών του προβλήματος είναι γραμμικές, τότε το πρόβλημα ονομάζεται γραμμικό. Διαφορετικά, εάν δηλαδή μια από τις προαναφερθείσες δεν είναι γραμμική, το πρόβλημα καλείται μη-γραμμικό (Nocedal και Wright, 2006).

Οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης, όπως προαναφέρθηκε, είναι επαναληπτικές μέθοδοι. Ξεκινούν με μια αρχική εκτίμηση για τη λύση και παράγουν διαδοχικές βελτιωμένες εκτιμήσεις μέχρι να εντοπίσουν τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Οι αλγόριθμοι χαρακτηρίζονται ανάλογα με τη στρατηγική που ακολουθείται από τη μια επανάληψη στην επόμενη. Οι περισσότερες στρατηγικές χρησιμοποιούν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης f , τους περιορισμούς h και g , αν υπάρχουν, πιθανά την πρώτη και δεύτερη τάξη παραγώγου αυτών των συναρτήσεων και εξετάζουν τις συνθήκες βελτιστότητας, ώστε να ορίσουν το επόμενο σημείο της επανάληψης. Μερικοί αλγόριθμοι συγκεντρώνουν και χρησιμοποιούν πληροφορίες από προηγούμενες επαναλήψεις, ενώ άλλοι μόνο τις πληροφορίες του παρόντος σημείου της επανάληψης. Συνήθως, η επαναληπτική διαδικασία τερματίζει όταν επαληθεύονται οι συνθήκες βελτιστότητας κατά προσέγγιση (Nocedal και Wright, 2006; Αποστολοπούλου, 2011).

Εφόσον στο παρόν πρόβλημα οι συναρτήσεις είναι μη γραμμικές και υπόκεινται σε περιορισμούς, θα γίνει αναφορά αρχικά στις βασικότερες μη γραμμικές μεθόδους με περιορισμούς για εύρεση τοπικής λύσης και μετά στις ολικές μεθόδους για την προσέγγιση ολικής λύσης του προβλήματος.

3.2.4.1.1 Μη Γραμμικές Μέθοδοι Με Περιορισμούς

Οι μη γραμμικές μέθοδοι με περιορισμούς χωρίζονται σε δυο ευρείες κατηγορίες επίλυσης: στις έμμεσες και στις άμεσες. Στις περισσότερες έμμεσες μεθόδους, η βέλτιστη λύση προσεγγίζεται με την επίλυση μιας σειράς προβλημάτων χωρίς περιορισμούς. Οι άμεσες μέθοδοι εντοπίζουν τη λύση χειρίζοντας τους περιορισμούς με συγκεκριμένες τεχνικές (Rao, 2009).

Εάν το πρόβλημα βελτιστοποίησης έχει μόνο περιορισμούς ισότητας, τότε μπορεί να ληθεί ως πρόβλημα χωρίς περιορισμούς, με τη μέθοδο απαλοιφής (elimination). Πρόκειται για έμμεση μέθοδο επίλυσης κατά την οποία πραγματοποιείται απαλοιφή μεταβλητών. Οι εξισώσεις των περιορισμών ισότητας επιλύονται με τρόπο ώστε η έκφραση των μεταβλητών στην αντικειμενική εξίσωση να αντικατασταθεί από μια απλούστερη, με μικρότερο αριθμό μεταβλητών. Το

πρόβλημα που προκύπτει λύνεται με μεθόδους βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς (Messac, 2015).

Οι μέθοδοι επιβάρυνσης (penalty) συνδυάζουν την αντικειμενική συνάρτηση με τις συναρτήσεις περιορισμών σε μια εξίσωση «επιβάρυνσης» και αντικαθιστούν το πρόβλημα με την επίλυση μιας σειράς υποπροβλημάτων χωρίς περιορισμούς, είναι έμμεσες μέθοδοι. Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στην ιδέα ότι οι λύσεις των υποπροβλημάτων θα συγκλίνουν στη λύση του αρχικού προβλήματος. Οι μέθοδοι επιβάρυνσης κατηγοριοποιούνται περαιτέρω σε εσωτερικού (interior) και εξωτερικού σημείου (exterior point), ανάλογα με τον τρόπο που ενσωματώνουν τους περιορισμούς ανισότητας (Messac, 2015; Nocedal και Wright, 2006).

Σε άλλες προσεγγίσεις, χρησιμοποιούνται η μέθοδος Lagrange ή οι Karush-Kuhn-Tucker (KKT) συνθήκες για την επικύρωση ακροτάτου συνάρτησης. Η εξίσωση Lagrange μετατρέπει το πρόβλημα με περιορισμούς ισότητας σε ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς. Στην περίπτωση που το πρόβλημα διαθέτει και περιορισμούς ανισότητας, χρησιμοποιούνται οι KKT συνθήκες, που αποτελούν επέκταση της μεθόδου Lagrange (Messac, 2015).

Σε κάποιες περιπτώσεις, τα προβλήματα μπορούν να μετατραπούν, κατά προσέγγιση, σε γραμμικά προβλήματα. Τα γραμμικά αυτά προβλήματα είναι εν μέρει ισοδύναμα με το αρχικό πρόβλημα και μόνο για μια συγκεκριμένη περιοχή τιμών των μεταβλητών, κοντά στο σημείο της επανάληψης. Σε αυτήν την περιοχή τιμών, το πρόβλημα λύνεται με γραμμικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί αναπτύσσονται σε σειρές Taylor. Η μέθοδος ονομάζεται διαδοχικός γραμμικός προγραμματισμός (Sequential Linear Programming – SLP) και είναι στην κατηγορία μεθόδων άμεσης επίλυσης (Messac, 2015; Rao, 2009).

Μια άλλη μέθοδος άμεσης επίλυσης είναι η μέθοδος διαδοχικού δευτεροβάθμιου προγραμματισμού (Sequential Quadratic Programming – SQP). Σε αυτή, η λύση προσεγγίζεται με την επίλυση μιας σειράς δευτεροβάθμιων υποπροβλημάτων (Messac, 2015; Rao, 2009).

3.2.4.2 Ολικές Μέθοδοι

Οι ολικές μέθοδοι πραγματοποιούν ολικές και τοπικές αναζητήσεις ακροτάτων, καλύπτοντας όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος από το πεδίο ορισμού των μεταβλητών. Έχουν τη δυνατότητα να «απεγκλωβίζονται» από τοπικά ακρότατα με διάφορους τρόπους, αλλά οι περισσότεροι αλγόριθμοι είναι πολύπλοκοι και απαιτούν μεγάλο υπολογιστικό χρόνο (Θέος, 2001).

Στις ολικές μεθόδους, το πεδίο αναζήτησης ακροτάτου είναι το πεδίο ορισμού των μεταβλητών του προβλήματος. Αυτό διαιρείται με συγκεκριμένες στρατηγικές σε μικρότερα υποσύνολα, τα οποία είτε διαιρούνται περαιτέρω, είτε απορρίπτονται ή εγκρίνονται για αναζήτηση λύσης. Επίσης, αυτές, διαθέτουν

τρόπους να προβλέπουν την κατεύθυνση της διερεύνησης λύσης και να απεγκλωβίζονται από τοπικά ακρότατα. Λόγω της υπολογιστικής τους πολυπλοκότητας διαθέτουν διάφορα κριτήρια τερματισμού του αλγορίθμου, όπως τερματισμό μετά το πέρας ορισμένου χρόνου εκτέλεσης, μετά από προκαθορισμένο αριθμό αποτιμήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης f ή όταν η ελάχιστη τιμή της f παραμένει σταθερή για κάποιο ορισμένο αριθμό βημάτων – επαναλήψεων του αλγορίθμου (Θέος, 2001).

Οι ολικές μέθοδοι διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τις αιτιοκρατικές και τις στοχαστικές. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι βρίσκουν εγγυημένα το ολικό ακρότατο, εφαρμόζοντας εξαντλητικές αναζητήσεις σε όλο το πεδίο ορισμού των μεταβλητών του προβλήματος, αλλά καταναλώνουν μεγάλο υπολογιστικό χρόνο μέχρι τον τερματισμό. Οι στοχαστικές μέθοδοι αποτελούν πιο διαδεδομένη κατηγορία. Σε αυτές η συνάρτηση εξετάζεται σε έναν τυχαίο αριθμό σημείων, κάποια εκ των οποίων επιλέγονται ως αρχικά σημεία για αλγορίθμους τοπικής βελτιστοποίησης, χωρίς όμως τα αποτελέσματά τους να είναι εγγυημένα (Θέος, 2001).

Με αύξηση του αριθμού των τυχαίων σημείων και εύρεση κατάλληλου κριτηρίου τερματισμού, η πιθανότητα εντοπισμού εγγυημένης λύσης με στοχαστικές μεθόδους πλησιάζει τη μονάδα. Αυτό, σε συνδυασμό με τη μεγάλη ακρίβεια των τοπικών αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται σε αυτές, τις καθιστά πιο ελκυστικές στη χρήση για το παρόν πρόβλημα, με στόχο την αποφυγή του αυξημένου χρόνου και της αυξημένης υπολογιστικής ισχύος που θα απαιτούσε κάποια αιτιοκρατική μέθοδος (Θέος, 2001).

3.2.4.2.1 Στοχαστικές Ολικές Μέθοδοι

Οι κυριότερες στοχαστικές μέθοδοι είναι οι: τυχαία αναζήτηση, πολλαπλή εκκίνηση, μέθοδοι ομαδοποίησης, simulated annealing και οι γενετικοί αλγόριθμοι.

Η τυχαία αναζήτηση (random search) είναι η πιο απλή εκ των μεθόδων. Σε αυτήν λαμβάνεται ένα αρχικό πλήθος σημείων στα οποία εξετάζεται η αντικειμενική συνάρτηση. Τα σημεία παρουσιάζουν συνήθως ομοιόμορφη κατανομή και όσο αυξάνονται τόσο αυξάνεται και η πιθανότητα εντοπισμού ολικού ακροτάτου. Είναι αρκετά χρονοβόρα μέθοδος και είναι περισσότερο αποτελεσματική σε προβλήματα που παρουσιάζουν λίγα τοπικά ακρότατα. Περισσότερο ενδιαφέρον και ευρύτερη εφαρμογή παρουσιάζουν παραλλαγές της μεθόδου, όπως η ελεγχόμενη τυχαία αναζήτηση (controlled random search) και ο αλγόριθμος του Price (Θέος, 2001).

Η πολλαπλή εκκίνηση (multistart) λαμβάνει, όπως και η προηγούμενη μέθοδος, ένα πλήθος αρχικών σημείων, σε όλα ή μερικά από τα οποία εφαρμόζει μεθόδους τοπικής βελτιστοποίησης. Ως ολικό ακρότατο επιλέγεται το μικρότερο – εάν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης – ή το μεγαλύτερο – εάν πρόκειται

για πρόβλημα μεγιστοποίησης – εκ των τοπικών ακροτάτων. Η τοπική μέθοδος που χρησιμοποιείται, επιλέγεται βάσει της φύσης του προβλήματος (Θέος, 2001).

Οι μέθοδοι ομαδοποίησης (clustering) είναι πιο αποδοτικές από τις προηγούμενες σε περιπτώσεις συναρτήσεων χωρίς πολλά τοπικά ακρότατα. Ξεκινούν από ένα πλήθος ομοιόμορφα κατανεμημένων σημείων, τα ομαδοποιούν ανά περιοχή προσέλκυσης¹⁰ (basin of attraction) και εφαρμόζουν τοπικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης σε κάθε τέτοια περιοχή. Η διαδικασία της ομαδοποίησης διαφέρει ανά μέθοδο (Θέος, 2001).

Η μέθοδος simulated annealing έχει λάβει το όνομά της από τη θερμική μεταλλουργική διαδικασία της ανόπτησης¹¹ και λύνει προβλήματα και διακριτής βελτιστοποίησης. Σε αυτή πραγματοποιούνται διαδοχικές συγκρίσεις της f μεταξύ γειτονικών σημείων x . Εάν η τιμή της συνάρτησης στο γειτονικό σημείο του x , x' είναι μικρότερη, τότε ως νέο σημείο προς σύγκριση λαμβάνεται το x' και ούτω καθεξής. Γειτονικά σημεία με υψηλότερη τιμή συνάρτησης γίνονται αποδεκτά μερικές φορές βάσει πιθανοτήτων (Venkataraman, 2001; Θέος, 2001).

Οι γενετικοί αλγόριθμοι (genetic algorithms) είναι επηρεασμένοι από την εξελικτική δαρβινική θεωρία και την έννοια της φυσικής επιλογής. Είναι εξαιρετικά χρήσιμοι σε περιπτώσεις προβλημάτων με ασυνεχείς ή μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις και σε προβλήματα διακριτής βελτιστοποίησης. Σε αυτές επιλέγεται ένας αρχικός πληθυσμός λύσεων x – χρωμοσωμάτων – για τον οποίο εξετάζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Μέσω των αποτελεσμάτων για την f και συγκεκριμένων τεχνικών, εμπνευσμένων της βιολογικής εξέλιξης, παράγονται καλύτερες προσεγγίσεις λύσεων – καινούργιες γενεές (Venkataraman, 2001; Θέος, 2001).

3.2.4.3 Σύγκριση και Επιλογή Αλγορίθμου

Για το παρόν πρόβλημα, επιθυμητή είναι η εύρεση ολικού ακροτάτου, άρα η χρήση ολικών μεθόδων βελτιστοποίησης.

Οι δυο τελευταίες ολικές μέθοδοι είναι σε μεγάλο βαθμό ευρετικές, συνήθως περιλαμβάνουν πολλούς υπολογισμούς και κάποιο στατιστικό συλλογισμό. Αυτό σημαίνει ότι η πορεία τους προς ένα τελικό αποδεκτό αποτέλεσμα στηρίζεται σε μια σειρά προσεγγιστικών αποτελεσμάτων. Για το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα χρειάζεται κατάλληλη ρύθμιση των παραμέτρων της μεθόδου βελτιστοποίησης και

¹⁰ Ορισμός της περιοχής προσέλκυσης στο υποκεφάλαιο 3.3.1.1.

¹¹ Ανόπτηση είναι θερμική κατεργασία κατά την οποία ένα υλικό εκτίθεται παρατεταμένα σε υψηλή θερμοκρασία και μετά ψύχεται με χαμηλούς ρυθμούς, με στόχο την αποκατάσταση τάσεων, αύξησης της δυσθραυστότητας και/ή την επίτευξη συγκεκριμένης κρυσταλλικής δομής, για την απόκτηση καταστάσεων χαμηλής ενέργειας.

σε κάποιες περιπτώσεις καθορισμό κριτηρίου τερματισμού, γεγονός που απαιτεί εμπειρία (Venkataraman, 2001).

Για την αποφυγή, λοιπόν, μη ικανοποιητικής, προσεγγιστικής λύσης – που ενδέχεται να προκύψει από άστοχη παραμετροποίηση ή κριτήριο τερματισμού – το πρόβλημα θα λυθεί με μια εκ των υπολοίπων μεθόδων: τυχαίας αναζήτησης, πολλαπλής εκκίνησης ή μεθόδου ομαδοποίησης. Αυτές οι μέθοδοι προβαίνουν και σε τοπικές αναζητήσεις, οπότε θα χρησιμοποιηθούν και τοπικές μέθοδοι. Θα χρησιμοποιηθούν μη γραμμικές τοπικές μέθοδοι με περιορισμούς, για τους λόγους που αναφέρθηκαν στο υποκεφάλαιο 3.2.3.1.

Η εφαρμογή συγκεκριμένων αλγορίθμων θα προκύψει βάσει της διαθεσιμότητάς τους στο λογισμικό συμβολικού προγραμματισμού που θα χρησιμοποιηθεί.

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους αλγορίθμους βελτιστοποίησης και τους μαθηματικούς τύπους που τους περιγράφουν περιλαμβάνονται στη χρησιμοποιηθείσα βιβλιογραφία, κεφάλαιο 7.

3.3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ - MATLAB

Οι παραπάνω μέθοδοι είναι αδύνατο να λυθούν χωρίς τη χρήση υπολογιστή. Λόγω της ιδιαιτερότητας του μηχανισμού και του οχήματος δεν θα χρησιμοποιηθούν έτοιμα προγράμματα δυναμικής ανάλυσης, αλλά θα αναπτυχθεί κώδικας σε μαθηματικό λογισμικό. Τα προγράμματα δυναμικής ανάλυσης, είναι προγράμματα CAD τα οποία αναλύουν την κίνηση δοθείσας, σχεδιασμένης γεωμετρίας. Δεν προβαίνουν, δηλαδή, σε κινηματική σύνθεση βάσει επιθυμητής κίνησης ή κριτηρίων.

Από τα διαθέσιμα μαθηματικά λογισμικά, όπως MATLAB, Mathematica, Maple και MathCAD, θα επιλεγθεί το MATLAB κυρίως λόγω προγενέστερης εξοικείωσης από σχετικό μάθημα της σχολής και απλότητας στη χρήση. Το MATLAB συνδυάζει υπολογισμούς, προγραμματισμό και απεικόνιση σε μια εύκολη στη χρήση διεπιφάνεια. Στο περιβάλλον σύνταξης, τα προβλήματα και οι λύσεις εκφράζονται με οικεία μαθηματικά σύμβολα και υποστηρίζονται από διάφορες «μαθηματικές εργαλειοθήκες» (toolboxes). Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για απλές μαθηματικές πράξεις, αριθμητική ανάλυση, ανάπτυξη αλγορίθμων, μοντελοποίηση, προσομοίωση, ανάλυση δεδομένων, γραφικές απεικονίσεις, ανάπτυξη εφαρμογών, δημιουργία διεπιφάνειας χρήστη και άλλα. Εμπλουτίζεται ετησίως με καινούργιες δυνατότητες και επεκτάσεις (Venkataraman, 2001).

Για την επίλυση του παρόντος προβλήματος θα χρησιμοποιηθούν τα Optimization Toolbox και Global Optimization Toolbox, που παρέχουν έτοιμους προς χρήση τοπικούς και ολικούς αλγορίθμους βελτιστοποίησης. Το μόνο που χρειάζεται για την εφαρμογή τους είναι η δημιουργία των εξισώσεων προς επίλυση

(αντικειμενικής συνάρτησης, περιορισμών) και η ρύθμιση των παραμέτρων – διαθέσιμων επιλογών επίλυσης – των επιλεχθέντων αλγορίθμων.

3.3.1 Optimization Toolbox

Το Optimization Toolbox διαθέτει τεχνικές και αλγορίθμους για τοπική ελαχιστοποίηση (minimizers), πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση (multiobjective minimizers), επίλυση εξισώσεων, συστημάτων (equation solvers) και εφαρμογή καμπύλων (curve-fitting solvers).

Οι αλγόριθμοι αυτοί εκτελούν αιτιοκρατικές επαναλήψεις ξεκινώντας από ένα αρχικό σημείο που ορίζει ο χρήστης. Βρίσκουν το τοπικό ακρότατο διερευνώντας μια περιοχή προσέλκυσης, αυτή του αρχικού, δοθέντος σημείου (Mathworks - MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

3.3.1.1 Περιοχή Προσέλκυσης (Basin of Attraction)

Περιοχή ή λεκάνη προσέλκυσης ονομάζεται ένα σύνολο σημείων των μεταβλητών που συγκλίνουν στην ίδια τοπική λύση.

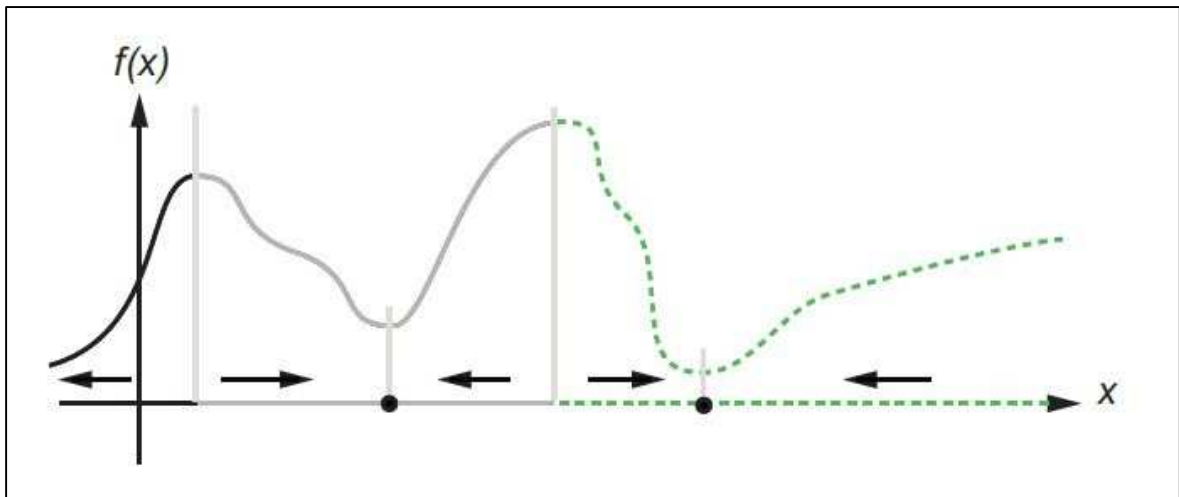
Σε περίπτωση ελαχιστοποίησης, εάν η αντικειμενική συνάρτηση $f(x)$ είναι ομαλή, το διάνυσμα $-\nabla f(x)$ ¹² υποδεικνύει την κατεύθυνση όπου η $f(x)$ μειώνεται γρηγορότερα. Η εξίσωση της απότομης καθόδου – αρνητικός ρυθμός μεταβολής,

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\nabla f(x(t))$$

παράγει μια διαδρομή $x(t)$ που καταλήγει στο τοπικό ελάχιστο όσο ο χρόνος t αυξάνεται (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

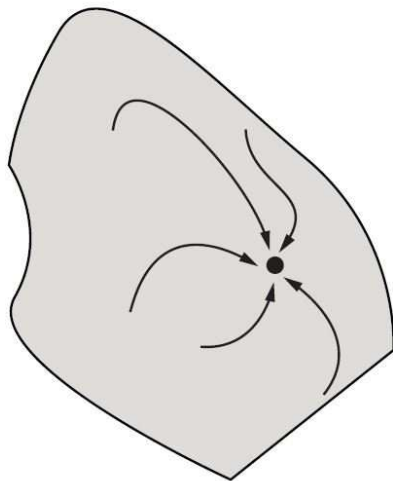
Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζονται δύο τοπικά ελάχιστα συνάρτησης μιας μεταβλητής. Οι περιοχές προσέλκυσης αποδίδονται με διαφορετική διαγράμμιση. Τα βέλη δείχνουν την κατεύθυνση της μείωσης και οι μαύρες τελείες αντιπροσωπεύουν τα τοπικά ελάχιστα. Κάθε διαδρομή καθόδου $x(t)$ που ξεκινά από ένα σημείο $x(0)$, φτάνει στο ελάχιστο – μαύρη τελεία – της περιοχής προσέλκυσης στην οποία ανήκει το $x(0)$.

¹² Το σύμβολο ∇ ανάδελτα είναι διανυσματικός διαφορικός τελεστής των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης.



Εικόνα 3-2: Περιοχές προσέλκυσης σε συνάρτηση μιας μεταβλητής (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Σε περιπτώσεις συναρτήσεων με περισσότερες μεταβλητές, η μορφή της περιοχής προσέλκυσης και η κατεύθυνση καθόδου είναι πολύπλοκότερες (Εικόνα 3-3).



Εικόνα 3-3 Περιοχή προσέλκυσης πολύπλοκης μορφής (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).



Εικόνα 3-4: Διάφορες περιοχές προσέλκυσης (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Οι συναρτήσεις περιορισμών ενδέχεται να τμήσουν μια περιοχή προσέλκυσης της $f(x)$ σε μικρότερες.

3.3.1.2 Αλγόριθμοι `fmincon`

Οι τοπικοί αλγόριθμοι ελαχιστοποίησης που διαθέτει το Optimization Toolbox για μη γραμμικά προβλήματα με περιορισμούς και ομαλή αντικειμενική συνάρτηση είναι, μέσω της εντολής 'fmincon', οι (Mathworks - MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, 2016):

- ‘interior-point’
- ‘trust-region-reflective’
- ‘sqp’
- ‘active-set’

Ο προεπιλεγμένος αλγόριθμος για την `fmincon` είναι ο ‘interior-point’. Σύμφωνα με τις οδηγίες χρήσης του toolbox, αυτός ο αλγόριθμος θα πρέπει και να χρησιμοποιείται πρώτος. Για ταχύτερες λύσεις σε μικρά και μεσαίου μεγέθους προβλήματα μπορούν να γίνουν δοκιμές πρώτα με τον ‘sqp’ και μετά με τον ‘active-set’ αλγόριθμο. Ο ‘trust-region-reflective’ αλγόριθμος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το συγκεκριμένο πρόβλημα καθώς εφαρμόζεται σε περιπτώσεις που υπάρχουν μόνο περιορισμοί ισότητας ή μόνο όρια τιμών στις μεταβλητές, όχι και τα δύο, και κατά την εισαγωγή δεδομένων πρέπει να συμπεριλαμβάνεται και η παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης (οι περιορισμοί του προβλήματος αναλύονται στο υποκεφάλαιο 4.3.2).

3.3.1.2.1 Interior-Point

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος μπορεί να διαχειριστεί μεγάλα, διάσπαρτα και μικρά, πυκνά προβλήματα. Κάθε επανάληψη λαμβάνει χώρα εντός των ορίων της εφικτής περιοχής λύσης. Μπορεί να «απεγκλωβιστεί» από επαναλήψεις όπου το αποτέλεσμα τους – δηλαδή της αντικειμενικής συνάρτησης – είναι άπειρο (Inf) ή δεν ορίζεται (NaN). Είναι αλγόριθμος μεγάλης κλίμακας¹³. Χρησιμοποιεί μέθοδο επιβάρυνσης εσωτερικού σημείου με λογαριθμική εξίσωση επιβάρυνσης.

3.3.1.2.2 SQP

Ο ‘sqp’ αλγόριθμος δημιουργεί επαναλήψεις εντός της εφικτής περιοχής και μπορεί να «απεγκλωβιστεί» από αποτελέσματα Inf και NaN. Είναι αλγόριθμος μεσαίας κλίμακας. Βασίζεται στη θεωρία του διαδοχικού δευτεροβάθμιου προγραμματισμού.

3.3.1.2.3 Active-Set

Ο αλγόριθμος ‘active-set’ μπορεί να κάνει επαναλήψεις μεγάλου βήματος, αυξάνοντας την ταχύτητα εξαγωγής αποτελέσματος. Ενδέχεται να είναι αποδοτικός και σε προβλήματα όπου οι περιορισμοί είναι μη ομαλές εξισώσεις. Είναι αλγόριθμος μεσαίας κλίμακας. Λύση προκύπτει με την επίλυση των ΚΚΤ εξισώσεων.

¹³ Ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης καλείται μεγάλης κλίμακας (large scale) όταν χρησιμοποιεί γραμμική άλγεβρα που δεν χρειάζεται να αποθηκεύσει ή να λειτουργήσει με πυκνούς πίνακες. Αντίθετα, ένας αλγόριθμος καλείται μεσαίας κλίμακας (medium scale) όταν χρησιμοποιεί γραμμική άλγεβρα πυκνών πινάκων. Εάν ένα πρόβλημα είναι αρκετά μεγάλο, οι πυκνοί πίνακες καταναλώνουν μεγάλο μέρος της μνήμης και ενδέχεται να απαιτούν μεγαλύτερο χρόνο επίλυσης (Mathworks - MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

3.3.2 Global Optimization Toolbox

Το Global Optimization Toolbox παρέχει μεθόδους αναζήτησης ολικού ακροτάτου σε προβλήματα με πολλαπλά ακρότατα. Περιλαμβάνει τις μεθόδους (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016):

- ‘GlobalSearch’
- ‘MultiStart’
- ‘patternsearch’
- ‘genetic algorithm (ga)’
- ‘simulannealbnd’

Οι μέθοδοι αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης όπου η αντικειμενική συνάρτηση ή η συνάρτηση περιορισμών είναι συνεχής, ασυνεχής, στοχαστική, δεν παραγωγίζεται ή περιλαμβάνει προσομοιώσεις ή εξισώσεις και παραμέτρους που δεν είναι πλήρως ορισμένες.

Κάνουν επαναλαμβανόμενες προσπάθειες εντοπισμού του ολικού ακροτάτου σε περισσότερες από μια περιοχές προσέλευσης, αλλά η τελική λύση δεν είναι εγγυημένα και η ολική.

3.3.2.1 Διαθέσιμες Μέθοδοι

Για την εύρεση μονής ολικής λύσης σε πρόβλημα με ομαλή αντικειμενική συνάρτηση και ομαλές συναρτήσεις περιορισμών δύναται να χρησιμοποιηθούν όλες οι παραπάνω μέθοδοι. Για τους λόγους που αναφέρθηκαν στο 3.2.4.3, την ανάγκη, δηλαδή, παραμετροποίησης των ‘ga’ και ‘simulannealbnd’ (simulated annealing), θα χρησιμοποιηθεί μια εκ των υπολοίπων μεθόδων: ‘GlobalSearch’, ‘MultiStart’ ή ‘patternsearch’.

Σύμφωνα με το User’s Guide, για μονή ολική λύση, προτείνεται πρώτα η εφαρμογή της μεθόδου ‘GlobalSearch’, καθώς είναι πιο συγκροτημένη στην εύρεση μιας ολικής λύσης και εμπεριέχει τον αποδοτικό τοπικό αλγόριθμο ‘fmincon’. Η μέθοδος ‘MultiStart’ προτείνεται ως δεύτερη επιλογή, διαθέτει και αυτή τοπικούς αλγορίθμους και μπορεί να αναζητήσει ακρότατο από μεγάλο εύρος αρχικών σημείων. Ως τρίτη επιλογή, παρουσιάζεται η ‘patternsearch’ διότι, παρά τα έγκυρα αποτελέσματά της, είναι λιγότερο αποδοτική (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Η ‘patternsearch’ είναι πιο αργή μέθοδος, συγκριτικά με τις άλλες δύο, και δεν θα προτιμηθεί. Αυτό έγκειται στην απουσία πληροφορίας για τις παραγώγους των χρησιμοποιούμενων συναρτήσεων. Η μέθοδος ψάχνει, σε ένα σύνολο σημείων γύρω από το παρόν σημείο της επανάληψης, αναζητώντας ένα, όπου η τιμή της $f(x)$ είναι χαμηλότερη από την αντίστοιχη του παρόντος σημείου της επανάληψης. Εάν βρει τέτοιο σημείο, ξεκινά καινούργια επανάληψη με αυτό (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Οι 'GlobalSearch' και 'MultiStart' προσεγγίζουν με παρόμοιο τρόπο το ολικό ακρότατο. Και οι δύο εφαρμόζουν τοπικό αλγόριθμο σε διάφορα αρχικά σημεία. Με την επιλογή διάφορων, διάσπαρτων αρχικών σημείων, εξετάζονται και διαφορετικές περιοχές προσέλευσης. Οι δύο μέθοδοι διαφέρουν στο μηχανισμό επιλογής αρχικών σημείων. Η 'GlobalSearch' αναλύει τα αρχικά σημεία απορρίπτοντας αυτά με αμελητέα πιθανότητα να βελτιώσουν το μικρότερο τοπικό ελάχιστο που έχει εντοπιστεί μέχρι στιγμής. Η 'MultiStart' εξετάζει όλα τα αρχικά σημεία. Η 'GlobalSearch' χρησιμοποιεί μόνο τον τοπικό αλγόριθμο 'fmincon', ενώ η 'MultiStart' μπορεί να επιλέξει μεταξύ διάφορων τοπικών αλγορίθμων. Τέλος, η 'MultiStart' μπορεί να «τρέξει» παράλληλα σε περισσότερους από έναν επεξεργαστές (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Με βάση το User's Guide η 'GlobalSearch' είναι πιο αποδοτική για εύρεση μονής ολικής λύσης σε περίπτωση χρήσης ενός επεξεργαστή. Επιπλέον, λόγω της φύσης του προβλήματος, η αποκλειστική χρήση της 'fmincon' για τοπική βελτιστοποίηση δεν είναι περιοριστικός παράγοντας. Σε περίπτωση που τα αποτελέσματά της 'GlobalSearch' δεν είναι ικανοποιητικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η 'MultiStart' για διεξοδικότερη αναζήτηση (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

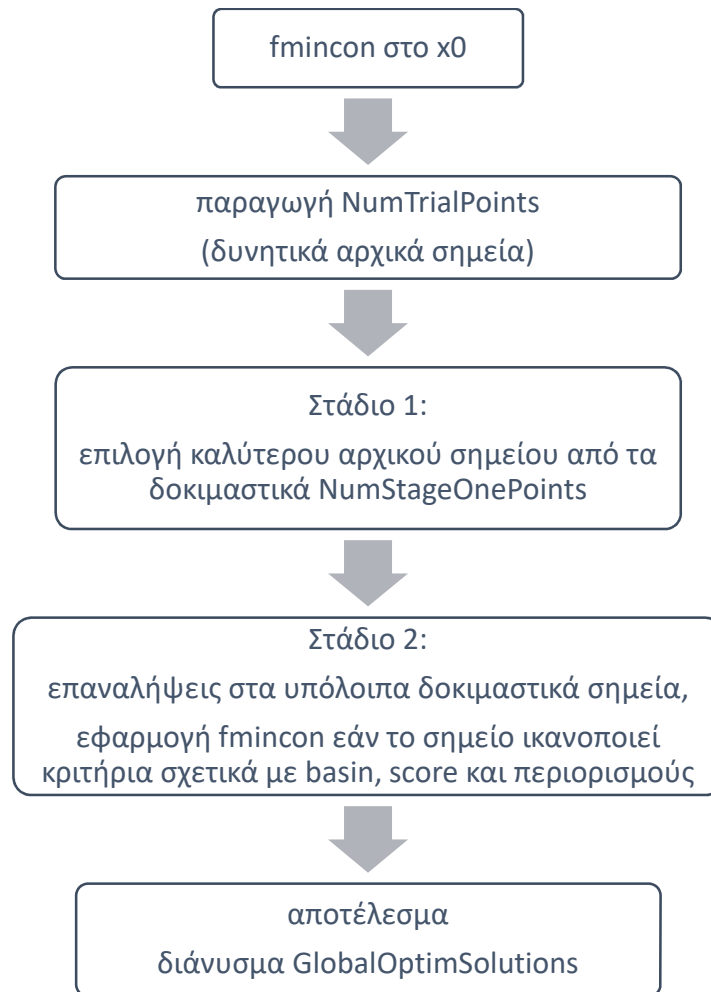
3.3.2.2 GlobalSearch

Η μέθοδος συγκλίνει ταχύτατα σε τοπικά ακρότατα σε προβλήματα ομαλών συναρτήσεων. Πραγματοποιεί αιτιοκρατικές επαναλήψεις, βασίζεται σε υπολογισμούς παραγώγων, επιλέγει αυτόματα, με στοχαστικό τρόπο, αρχικά σημεία και απορρίπτει πολλά από αυτά ευρετικά.

Συνοπτικά, τα βήματα που ακολουθεί για τον εντοπισμό λύσης (πιθανό ολικό ακρότατο) παρουσιάζονται στο ακόλουθο διάγραμμα (Εικόνα 3-5).

Fmincon στο x_0 : Ο τοπικός αλγόριθμος fmincon εφαρμόζεται για το αρχικό σημείο x_0 , που παρέχει ο χρήστης κατά την σύνταξη του προβλήματος. Εάν συγκλίνει σε τοπικό ελάχιστο, η GlobalSearch καταγράφει το αρχικό σημείο x_0 και το τελικό – τοπική λύση – για μια αρχική εκτίμηση της ακτίνας της περιοχής προσέλευσης. Επιπλέον, καταγράφει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ στο τελικό σημείο, την οποία χρησιμοποιεί σε μια συνάρτηση 'score'.

Η συνάρτηση score είναι το άθροισμα της τιμής της $f(x)$ ενός σημείου και ενός πολλαπλασίου του αθροίσματος των παραβάσεων των περιορισμών στο σημείο αυτό. Με αυτόν τον τρόπο, ένα σημείο που ανήκει στην εφικτή περιοχή λύσης έχει τιμή συνάρτησης score ίση με αυτήν της $f(x)$ σε αυτό.



Εικόνα 3-5: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου GlobalSearch (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Παραγωγή Δοκιμαστικών Σημείων: Με χρήση του αλγορίθμου ‘scatter search’¹⁴ δημιουργείται ένα σύνολο από δοκιμαστικά σημεία (NumTrialPoints). Τα δοκιμαστικά σημεία αποτελούν ενδεχόμενα αρχικά σημεία. Τα NumTrialPoints είναι εντός των ανώτατων και κατώτατων ορίων τιμών, όπως ορίζονται από τον χρήστη στο πρόβλημα. Εάν δεν τεθούν όρια τιμών στο πρόβλημα, η GlobalSearch δημιουργεί τεχνητά.

Στάδιο 1: Σε αυτό το στάδιο NumStageOnePoints δοκιμαστικά σημεία αξιολογούνται μέσω της συνάρτησης score. Από αυτά, στο σημείο με την χαμηλότερη τιμή score εφαρμόζεται ο αλγόριθμος fmincon. Στη συνέχεια, τα υπόλοιπα NumStageOnePoints αφαιρούνται από την λίστα των σημείων προς αξιολόγηση (NumTrialPoints).

¹⁴ Πρόκειται για αλγόριθμο που δομεί διανύσματα λύσεων συνδυάζοντας άλλα με στρατηγικές αρχικά σχεδιασμένες για συνδυασμό κανόνων λήψης αποφάσεων και περιορισμών ενός προβλήματος (Glover, 1997).

Μέχρι στιγμής τα σημεία λύσεων προκύπτουν από την εφαρμογή `fmincon` στο αρχικό σημείο `x0` και σε ένα σημείο από τα `NumStageOnePoints`. Ως `localSolverThreshold` ορίζεται η μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης από αυτά τα δύο σημεία λύσεων.

Ο ευρετικός χαρακτηρισμός της `GlobalSearch` έγκειται στην υπόθεση ότι η περιοχή προσέλευσης έχει σφαιρική μορφή. Η αρχική εκτίμηση για τις περιοχές προσέλευσης των δύο σημείων λύσεων – δύο λύσεις της `fmincon` μέχρι στιγμής –, είναι ότι πρόκειται για σφαίρες με κέντρο τα σημεία λύσεων. Η ακτίνα κάθε σφαίρας είναι η απόσταση μεταξύ του αρχικού σημείου – στο οποίο εφαρμόζεται η `fmincon` – και του σημείου λύσης. Οι περιοχές προσέλευσης μπορούν να επικαλύπτονται.

Υπάρχουν δύο μετρητές σχετικοί με τον αλγόριθμο `GlobalSearch`. Κάθε μετρητής εκφράζει τον αριθμό διαδοχικών δοκιμαστικών σημείων που:

- Βρίσκονται εντός μίας περιοχής προσέλευσης (μετρητής `basin`). Υπάρχει ένας μετρητής για κάθε περιοχή.
- Έχουν τιμή συνάρτησης `score` μεγαλύτερη από την τιμή του `localSolverThreshold` (μετρητής `threshold`).

Όλοι οι μετρητές είναι αρχικά μηδενισμένοι.

Στάδιο 2: Η `GlobalSearch` αξιολογεί επανειλημμένα τα υπόλοιπα δοκιμαστικά σημεία της λίστας (`NumTrialPoints`) ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα. Καθ'όλη τη διάρκεια μετράει το χρόνο εκτέλεσης και σταματά την αναζήτηση καλύτερης λύσης εάν ο χρόνος υπερβεί το μέγιστο χρόνο εκτέλεσης (`MaxTime`) που έχει ορίσει ο χρήστης.

Αξιολόγηση δοκιμαστικών σημείων:

Έστω ότι η `GlobalSearch` εξετάζει το δοκιμαστικό σημείο `p`. Εάν ισχύουν τα παρακάτω, ο `fmincon` εφαρμόζεται στο `p`:

- Το σημείο `p` δεν ανοίκει σε κάποια από τις υπάρχουσες περιοχές προσέλευσης.

Αυτό εξετάζεται για κάθε περιοχή προσέλευσης i μέσω του κριτηρίου:

$$|p - center(i)| > DistanceThresholdFactor \times radius(i)$$

Δηλαδή, το σημείο `p`, δεν ανοίκει στην περιοχή προσέλευσης i εάν η απόστασή του από το κέντρο της είναι μεγαλύτερη από ένα ποσοστό (`DistanceThresholdFactor`) της ακτίνας της.

Η προκαθορισμένη τιμή για το `DistanceThresholdFactor` είναι 0,75. Μπορεί να επιλεγεί άλλη τιμή από τον χρήστη.

- Η τιμή της συνάρτησης `score` για το `p` είναι μικρότερη από το `localSolverThreshold`.

$$score(p) < localSolverThreshold$$

- Το `p` βρίσκεται εντός των ορίων τιμών που έχουν τεθεί και υπακούει στους περιορισμούς (προαιρετική προϋπόθεση, επιλέγεται από τον χρήστη).

Όταν εφαρμόζεται ο fmincon:

1. Οι μετρητές μηδενίζονται.
2. Ενημερώνεται το σύνολο των λύσεων.

Εάν ο fmincon από το σημείο p συγκλίνει σε λύση, η GlobalSearch ενημερώνει το διάνυσμα GlobalOptimSolution¹⁵.

Έστω ότι το σημείο λύσης είναι το xp με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης fp . Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Για κάθε άλλο σημείο λύσης xq με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης fq , όπου
 $|xq - xp| > XTolerance \times \max(1, |xp|)$
ή
 $|fq - fp| > FunctionTolerance \times \max(1, |fp|)$
η GlobalSearch δημιουργεί καινούργιο στοιχείο στο διάνυσμα GlobalOptimSolution.
- Για κάποιο άλλο σημείο λύσης xq με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης fq , όπου
 $|xq - xp| \leq XTolerance \times \max(1, |xp|)$
και
 $|fq - fp| \leq FunctionTolerance \times \max(1, |fp|)$
η GlobalSearch θεωρεί τις λύσεις xp και xq ισοδύναμες. Τότε τροποποιεί το GlobalOptimSolution της λύσης xq , προσθέτοντας το σημείο p στα αρχικά σημεία που συγκλίνουν στη λύση xq . Σε αυτό το σημείο, ενδέχεται να υπάρξει κάποια τροποποίηση, ανάλογα με την ποιότητα (exit flag) των δύο λύσεων. Εάν για τη xq ισχύει $exitflag > 1$ και για τη xp ισχύει $exitflag = 1$, τότε η λύση xp αντικαθιστά τη xq .

3. Ενημερώνονται η ακτίνα της περιοχής προσέλκυσης και η τιμή του localSolverThreshold.

Εάν ο fmincon συγκλίνει σε λύση:

- Το localSolverThreshold λαβαίνει την τιμή της συνάρτησης score για το αρχικό σημείο p .
- Η ακτίνα της περιοχής προσέλκυσης της λύσης xp ισούται με την μέγιστη υπάρχουσα ακτίνα (εάν υπάρχει) και την απόσταση μεταξύ των p και xp .

¹⁵ Το διάνυσμα αυτό περιέχει πληροφορίες για κάθε τοπικό ακρότατο, συμπεριλαμβανομένων τοποθεσίας, τιμής αντικειμενικής συνάρτησης, αρχικού σημείου και σημείων που συγκλίνουν σε αυτό.

4. Γίνεται αναφορά στην απεικόνιση των επαναλήψεων.
Εάν η επιλογή GlobalSearchDisplay είναι ρυθμισμένη στο 'iter', για κάθε σημείο που εφαρμόζεται ο fmincon δημιουργείται μια σειρά στην απεικόνιση των επαναλήψεων.

Όταν δεν εφαρμόζεται ο fmincon:

1. Ενημερώνονται οι μετρητές.
Ο μετρητής κάθε περιοχής προσέλκυσης στην οποία ανήκει το p , αυξάνεται.
Οι μετρητές κάθε άλλης περιοχής προσέλκυσης μηδενίζονται.
Αυξάνεται ο μετρητής threshold, εφόσον $score(p) \geq localSolverThreshold$, διαφορετικά μηδενίζεται.
2. Αντίδραση σε αυξημένες τιμές μετρητών.
Για κάθε περιοχή προσέλκυσης με μετρητή basin ίσο με MaxWaitCycle, η ακτίνα της περιοχής πολλαπλασιάζεται με $(1 - BasinRadiusFactor)$. Ο μετρητής basin μηδενίζεται.
Τα μεγέθη MaxWaitCycle και BasinRadiusFactor έχουν προκαθορισμένες τιμές, αλλά μπορούν να τεθούν άλλες από το χρήστη.
Εάν ο μετρητής threshold φτάσει την τιμή MaxWaitCycle, η τιμή του threshold αυξάνεται σε:
 $new\ threshold = threshold + PenaltyThresholdFactor \times (1 + |threshold|)$.
Ο μετρητής threshold μηδενίζεται.
Επίσης η παράμετρος PenaltyThresholdFactor έχει προκαθορισμένη τιμή, αλλά δύναται να τροποποιηθεί.
3. Γίνεται αναφορά στην απεικόνιση των επαναλήψεων.
Για κάθε αξιολόγηση 200 δοκιμαστικών σημείων, δημιουργείται μια σειρά στην απεικόνιση των επαναλήψεων.

Αποτέλεσμα – διάνυσμα GlobalOptimSolutions: Μετά το πέρας MaxTime δευτερολέπτων ή της αξιολόγησης όλων των δοκιμαστικών σημείων, η GlobalSearch δημιουργεί το διάνυσμα GlobalOptimSolution στοιχείων. Το διάνυσμα αποδίδεται βάσει των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης, από τη μικρότερη τιμή – καλύτερη λύση – στη μεγαλύτερη – χειρότερη λύση. Με αυτό ολοκληρώνεται ο αλγόριθμος.

4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Στο κεφάλαιο 4, θα γίνει εφαρμογή της μεθοδολογίας για το σύστημα του προβλήματος. Αρχικά θα επιλεγεί τύπος συστήματος διεύθυνσης και ένα επιθυμητό κριτήριο κίνησης, το οποίο και θα αποτελεί στόχο της κινηματικής σύνθεσης. Στη συνέχεια, το σύστημα θα αποτυπωθεί γραφικά σε απλουστευμένη μορφή και θα αναλυθεί σε εξισώσεις. Με τις εξισώσεις αυτές θα διαμορφωθεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης. Στο τελευταίο υποκεφάλαιο, θα συνταχθεί πρόγραμμα βελτιστοποίησης στο MATLAB, θα συγκριθούν πιθανοί αλγόριθμοι και θα επιλεγούν οι καλύτεροι για τις παρούσες συνθήκες.

4.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Αφορμή αυτής της μελέτης αποτελεί ο σχεδιασμός συστήματος διεύθυνσης μονοθεσίου οχήματος, συμμετοχής στον διαγωνισμό Shell Eco-marathon. Στόχος στον διαγωνισμό αυτό είναι η ανάπτυξη και κατασκευή οχήματος που σε αγωνιστικές συνθήκες καταναλώνει τη λιγότερη δυνατή ενέργεια, ανεξαρτήτως κατηγορίας καυσίμου. Στο διαγωνιστικό μέρος τα οχήματα καλούνται να διανύσουν περίπου 16 με 19km, ανάλογα την εκάστοτε τοποθεσία και πίστα, με μια μέση ταχύτητα ± 25 km/h.

Το όχημα διαγωνίζεται στην κατηγορία προτοτύπων (prototypes), διαθέτοντας τρεις τροχούς, για λόγους οικονομίας καυσίμου, με τους δύο τροχούς στον μπροστινό άξονα και τον ένα στον πίσω, για λόγους καλής αεροδυναμικής, εργονομίας και σταθερότητας σε συνθήκες στροφής. Από το 2015, στους επίσημους κανονισμούς επιτρέπονται μόνο τα εμπρόσθια συστήματα διεύθυνσης. Οπότε, βάσει κανονισμών, το όχημα θα διαθέτει δύο διεθυντήριους τροχούς, τους μπροστινούς. Οι τρεις τροχοί δεν απαιτούν την παρουσία ανάρτησης και δεδομένου ότι δεν επιβάλλεται από τους κανονισμούς, δεν θα τοποθετηθεί στο μονοθέσιο καθώς θα προσέθετε επιπλέον βάρος (Santin κ.α., 2007; Λαμπρόπουλος και Ιατρού, 2014).

Η κατανάλωση εξαρτάται από τρεις βασικούς παράγοντες: το μέτρο των δυνάμεων αντίστασης στην κίνηση, την απόδοση του συστήματος μετάδοσης κίνησης και την στρατηγική οδήγησης. Όσον αφορά τις δυνάμεις αντίστασης και τις παραμέτρους που τις επηρεάζουν, σύμφωνα με την ανάλυση ευαισθησίας από το ETH Zurich στο βιβλίο «The World's Most Fuel Efficient Vehicle – Design and Development of PAC Car II», η μείωση του βάρους του οχήματος μπορεί να συντελέσει στη μεγαλύτερη μείωση του συνόλου αυτών των δυνάμεων, ανεξαρτήτως συνθηκών οδήγησης (ευθεία πορεία, επιτάχυνση, οδήγηση σε ανηφόρα κτλ). Με κατευθυντήρια γραμμή, λοιπόν, τη μείωση του βάρους, θα επιλεγούν απλά και ελαφριά συστήματα διεύθυνσης που αποτελούνται από συνδυασμούς βραχιόνων, όπως ο τραπεζοϊδής κινηματικός μηχανισμός και ο μοχλικός μηχανισμός τύπου κάρτ (Santin κ.α., 2007).

Με την εκτίμηση ότι, τηρώντας σε κάθε γωνία στροφής των τροχών τη γεωμετρία Ackermann οι αντιστάσεις και οι τριβές στους μπροστινούς τροχούς θα είναι μειωμένες, ως κριτήριο κίνησης, επιλέγεται η αρχή Ackermann.

Δεν υπάρχει κινηματικός μηχανισμός τεσσάρων βραχιόνων (four-bar linkage) που να εκπληρώνει απόλυτα τη συνθήκη Ackermann. Παρόλα αυτά, κατάλληλα σχεδιασμένοι μηχανισμοί πολλαπλών βραχιόνων (multi-bar linkages) δύναται να λειτουργούν σε μικρές αποκλίσεις επί της συνθήκης και να την εκπληρώνουν απόλυτα σε μερικές συγκεκριμένες γωνίες στροφής. Για αυτό το λόγο θα προτιμηθεί η χρήση του μοχλικού μηχανισμού (μηχανισμός πολλαπλών βραχιόνων) έναντι του τραπεζοειδούς μηχανισμού (μηχανισμός τεσσάρων βραχιόνων) (Jazar, 2009).

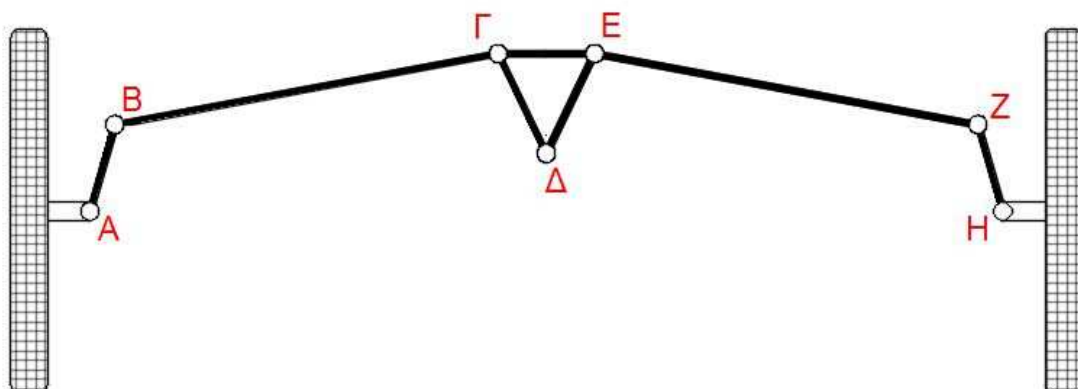
4.2 ΜΟΧΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Για να αναλυθεί το επιλεχθέν σύστημα, πρέπει πρώτα να παρουσιαστούν τα μέρη του, να αποδοθούν με συμβολικούς χαρακτήρες και να επιλεγεί σύστημα συντεταγμένων. Στη συνέχεια, πρέπει να καθοριστούν οι μεταβλητές και τα εξαρτημένα μεγέθη.

Οι εξισώσεις θα αποτυπώνουν την κίνηση του μηχανισμού στο επίπεδο με μια παραδοχή για κάποια δομικά του χαρακτηριστικά. Τέλος, θα σχολιασθεί μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση της κίνησης του μηχανισμού στο χώρο και η πραγματική κίνηση – στροφή που εκτελεί τελικά το όχημα.

4.2.1 Περιγραφή

Το μοχλικό σύστημα (lever arm system) αποτελείται από βραχίονες και περιστροφικές αρθρώσεις (Εικόνα 4-1).



Εικόνα 4-1: Σχηματική αναπαράσταση κάτοψης συστήματος.

Είναι μηχανισμός 6 συνδέσμων (AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ) (6-link mechanism), αποτελούμενος από τα εξής μέρη – εξαρτήματα:

Πίνακας 4-1: Εξαρτήματα Συστήματος.

ΑΒ, ΖΗ:	Αγκωνωτοί Βραχίονες (Steering Arms)
ΒΓ, ΕΖ:	Ημίμπαρα (Drag Links)
ΓΔΕ:	Τρίγωνο Διευθύνσεως (Triangle)

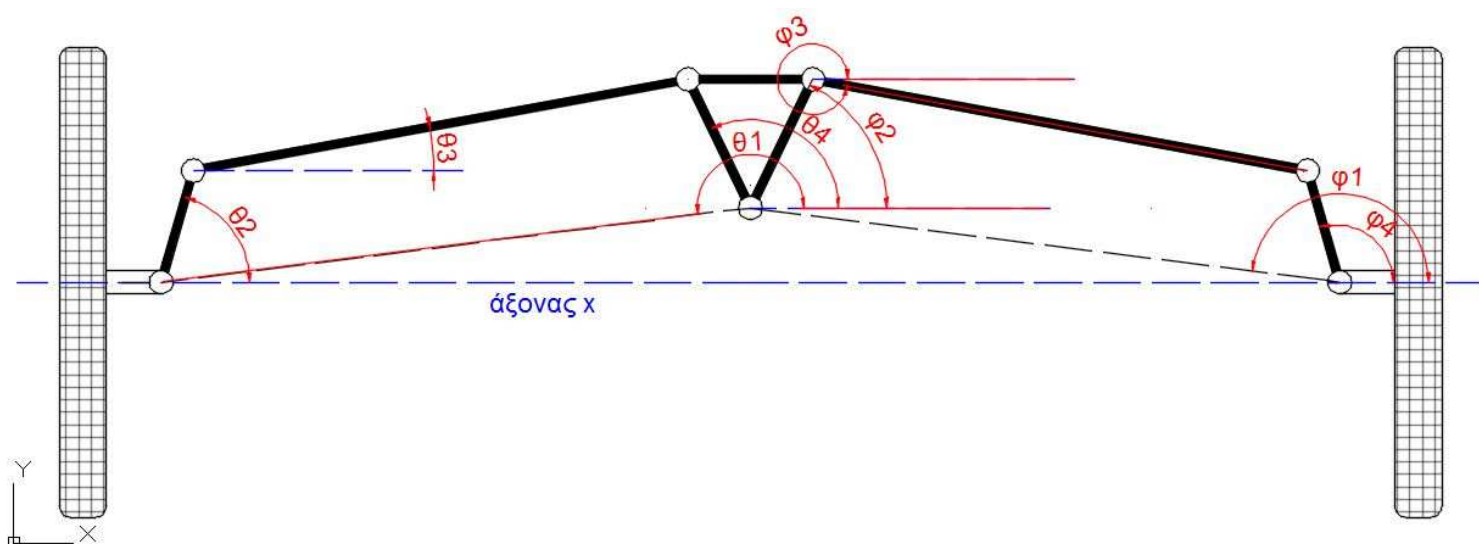
Για τη μελέτη και βελτιστοποίηση αυτού, δύναται να μελετηθεί σε δύο μηχανισμούς τεσσάρων βραχιόνων: ΑΒΓΔ και ΔΕΖΗ (Jazar, 2009).

Κάθε μηχανισμός τεσσάρων βραχιόνων αποτελείται από τους συνδέσμους:

- εισόδου – της κίνησης – (input link)
- σύζευξης (coupler link)
- εξόδου (output link)
- αναφοράς (ground ή reference link)

Στην περίπτωση του ΑΒΓΔ – ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί ως μηχανισμός εισόδου –, σύνδεσμος εισόδου είναι ο βραχίονας ΑΒ που καθορίζεται βάσει της γωνίας στροφής του τροχού. Σύνδεσμος εξόδου είναι η πλευρά ΓΔ του τριγώνου. Σύνδεσμος σύζευξης ο ΒΓ, που συνδέει τους βραχίονες ΑΒ και ΓΔ. Σύνδεσμος αναφοράς είναι η νοητή ευθεία που περνάει από τα σημεία Α και Δ (ΑΔ) και συνήθως αποτελεί αναφορά για τον υπολογισμό της θέσης των υπόλοιπων βραχιόνων.

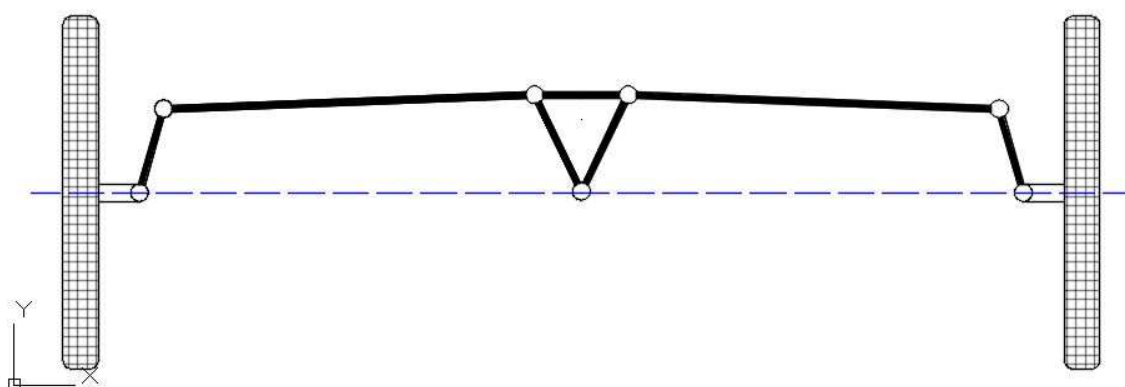
Αντίστοιχα, στο ΔΕΖΗ – που θα χρησιμοποιηθεί ως μηχανισμός εξόδου –, είσοδος είναι η πλευρά ΔΕ, εφόσον μέσω του τριγώνου συνδέεται σταθερά στην ΓΔ (σύνδεσμος εξόδου του ΑΒΓΔ) και η θέση της καθορίζεται βάση της ΓΔ. Έξοδος είναι ο βραχίονας ΖΗ, ο οποίος θα καθορίζει τη γωνία στροφής του άλλου τροχού. Σύνδεσμος σύζευξης είναι ο ΕΖ και αναφοράς η νοητή ευθεία που περνάει από τα σημεία Δ και Η (ΔΗ).



Εικόνα 4-2: Θέση – Γωνίες Βραχιόνων.

Οι βραχίονες ορίζονται πλήρως, στο επίπεδο, εάν είναι γνωστά η θέση και το μήκος τους. Στην ανάλυση θα χρησιμοποιηθεί τοπικό σύστημα συντεταγμένων όπου ο άξονας x θα είναι παράλληλος προς το οδόστρωμα και θα διέρχεται από τους βασιλικούς πείρους των τροχών, όπως φαίνεται στην εικόνα 4-2. Για τον χαρακτηρισμό της θέσης ενός βραχίονα αρκεί η κλίση του – γωνία – ως προς τον οριζόντιο άξονα x . Ως θετική φορά θεωρείται η αντιωρολογιακή.

Επειδή το σύστημα είναι συμμετρικό, δηλαδή το όχημα στρίβει εξίσου αριστερά και δεξιά, οι αγκωνωτοί βραχίονες έχουν το ίδιο μήκος, τα ημίμπαρα επίσης και το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Η υπολογιστική διαδικασία θα απλοστεί αρκετά εάν οι σύνδεσμοι αναφοράς ήταν παράλληλοι με τον άξονα x , εάν δηλαδή $\theta_1 = \phi_1 = 180^\circ$ (Εικόνα 4-3). Κάτι τέτοιο ενδέχεται να μην ισχύει στο υπό σχεδιασμό σύστημα για αυτό και οι γωνίες θ_1 και ϕ_1 θα πρέπει να συμπεριληφθούν στις εξισώσεις.



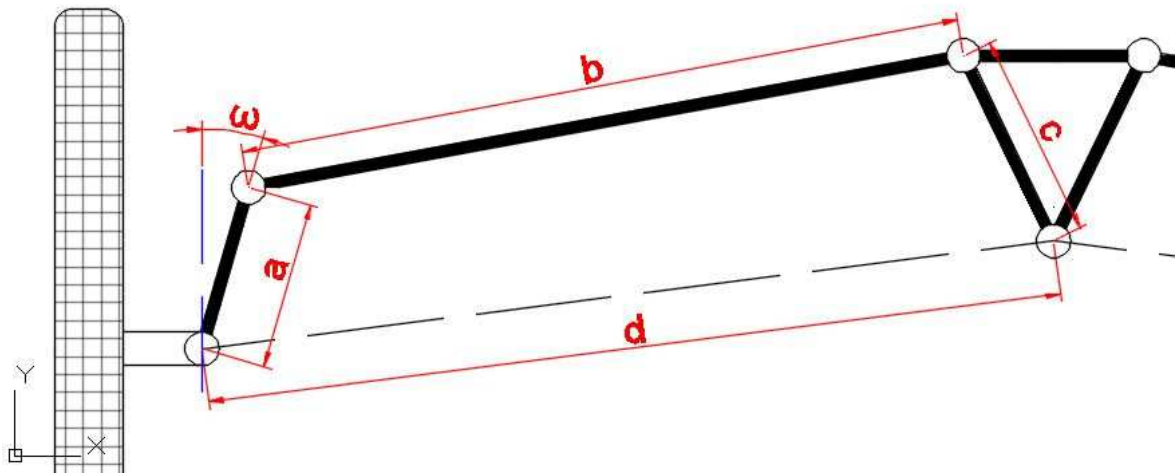
Εικόνα 4-3: Θέση βραχιόνων συστήματος, όπου $\theta_1 = \phi_1 = 180^\circ$.

Συνοψίζοντας, οι βραχίονες του συστήματος θα χαρακτηρίζονται ακολούθως (Εικόνα 4-4):

Πίνακας 4-2: Συμβολισμοί Βραχιόνων

Βραχίονας	Χαρακτηρισμός Συνδέσμου	Μήκος	Θέση
AB	Εισόδου	a	θ_2
BΓ	Σύζευξης	b	θ_3
ΓΔ	Εξόδου	c	θ_4
AΔ	Αναφοράς	d	θ_1
ΔΕ	Εισόδου	c	φ_2
EΖ	Σύζευξης	b	φ_3
ZΗ	Εξόδου	a	φ_4
ΔΗ	Αναφοράς	d	φ_1

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι τα μήκη a, b, c και d των βραχιόνων δεν είναι το πραγματικό τους μήκος, αλλά η ορθή προβολή τους στο επίπεδο x-y. Το πραγματικό μήκος τους μπορεί να υπολογιστεί ως έκφραση συνημιτόνου της σχετικής γωνίας τοποθέτησης αυτών ως προς το επίπεδο x-y.

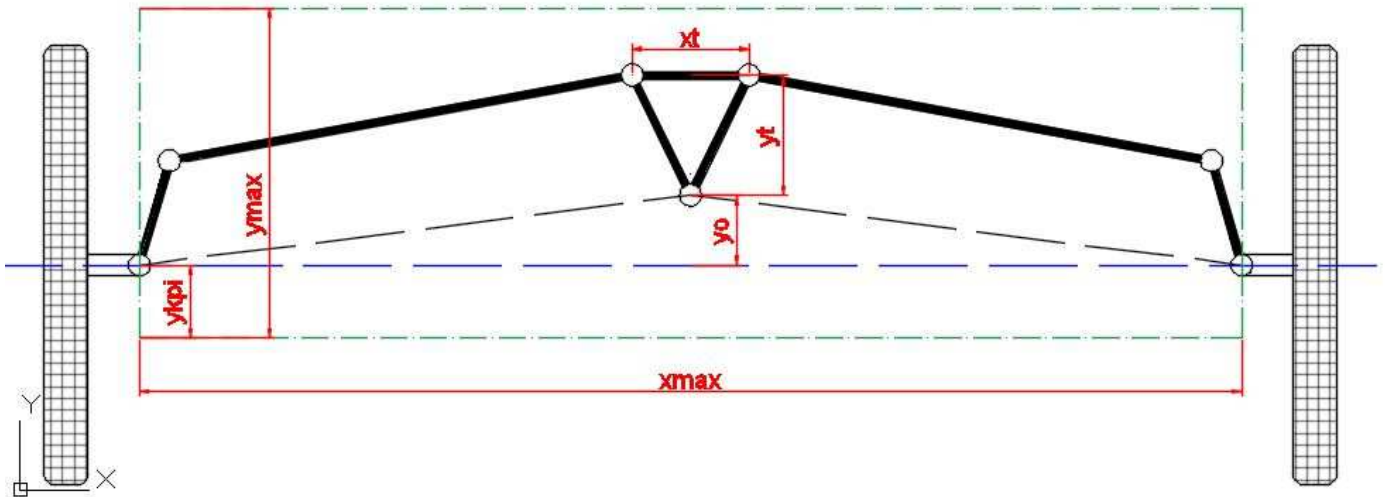


Εικόνα 4-4: Κάτοψη συστήματος (επίπεδο x-y).

4.2.2 Μεταβλητές

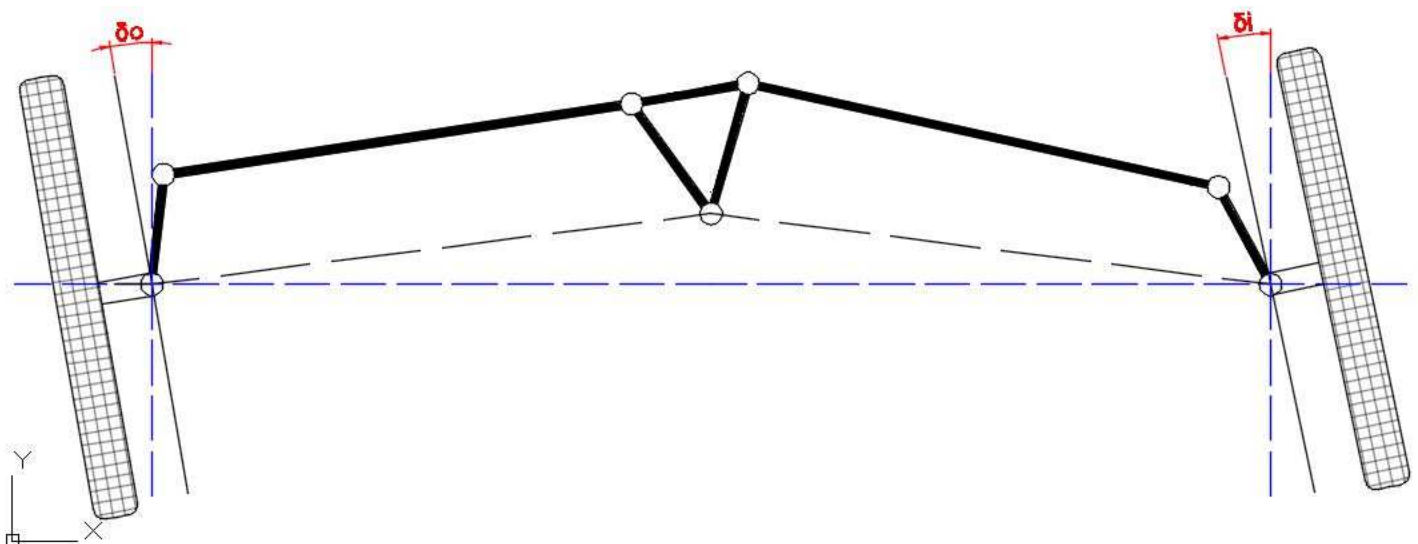
Η γωνία ω – γωνία αγκωνωτού βραχίονα – είναι η γωνία που σχηματίζει ο βραχίονας AB (ή ZH) με τον κάθετο άξονα y. Πρόκειται για την γωνία τοποθέτησης των αγκωνωτών βραχιόνων, η οποία είναι σταθερή ως προς το ακραζόνιο του τροχού, και αποτελεί την 1^η ανεξάρτητη μεταβλητή του συστήματος. Οι επόμενες δυο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι το ύψος y_t και η βάση του τριγώνου x_t . Άλλη μια ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος a των αγκωνωτών βραχιόνων (Εικόνα 4-4).

Με την υπόθεση ότι ο διατιθέμενος χώρος για το υποσύστημα μπορεί να εκφραστεί στο επίπεδο ως ορθογώνιο διαστάσεων x_{max} , y_{max} , η τιμή του μήκους a ή του y_t , ενδέχεται να περιορίζεται από το y_{max} . Ανάλογα με τη θέση του τριγώνου¹⁶, τα μήκη αυτά ενδέχεται να επηρεάζονται και από την κάθετη απόσταση του κέντρου τροχού με την κορυφή του τριγώνου, μήκος y_o , ή την κάθετη απόσταση του κέντρου τροχού από τα όρια του διατιθέμενου χώρου, μήκος y_{kpi} . (Εικόνα 4-5).



Εικόνα 4-5: Κάτοψη συστήματος (επίπεδο x-y). Με πράσινη διακεκομμένη γραμμή οριοθετείται ο διαθέσιμος χώρος για το υποσύστημα.

Για συγκεκριμένες τιμές ω , x_t , y_t , a και συγκεκριμένη γωνία στροφής ενός τροχού, μπορούν να υπολογιστούν όλα τα μεγέθη – μήκη και γωνίες – που περιγράφουν πλήρως την κίνηση του συστήματος καθώς και η γωνία στροφής του άλλου τροχού. Με αναφορά, λοιπόν, τις γωνίες στροφής του ενός τροχού, έστω του εξωτερικού δ_o , θα εκφραστούν οι βραχίονες του μηχανισμού και ακολούθως η γωνία



Εικόνα 4-6: Γωνίες Τροχών (δ_o, δ_i).

¹⁶ Τοποθέτηση της κορυφής του «μπροστά» ή «πίσω» των βασιλικών πείρων σε μπροστά όψη οχήματος. Στο παρόν υποσύστημα έχει σχεδιαστεί «πίσω» (Εικόνα 4-5).

στροφής του άλλου τροχού, του εσωτερικού δ_i (Εικόνα 4-6). Η σχέση $\delta_i = f(\delta_o)$ που θα προκύψει αποτελεί την κινηματική συνθήκη που διέπει το μοχλικό σύστημα.

Η σχέση αυτή μπορεί να πάρει διαφορετικές μορφές ανάλογα τη γεωμετρία των τροχών του μηχανισμού. Στα επόμενα υποκεφάλαια, παρατίθενται οι εξισώσεις – στην πραγματικότητα θέσεως και όχι κίνησης – του μηχανισμού.

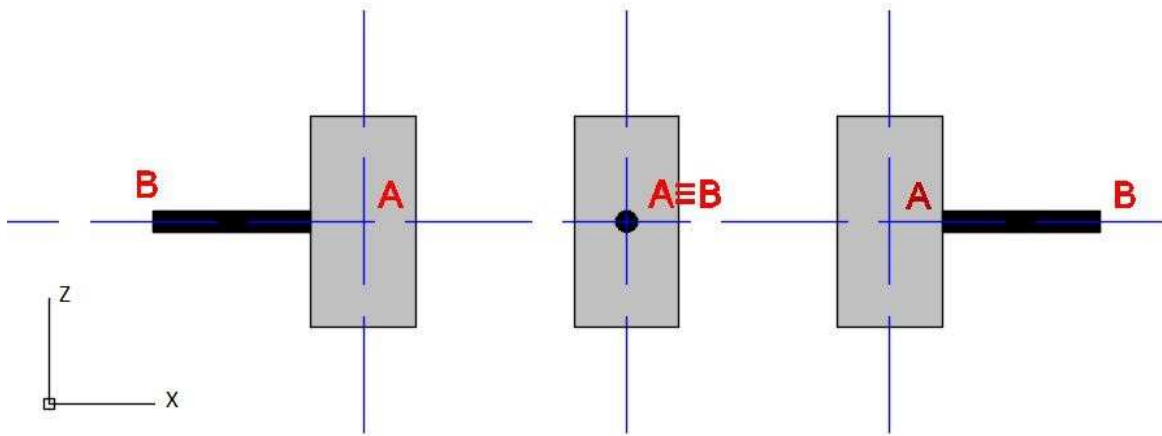
4.2.3 Κίνηση Απλουστευμένης Γεωμετρίας στο Επίπεδο

Το σύστημα κινείται εξαιτίας της αυτού γεωμετρίας, αλλά η μορφή της κίνησής του επηρεάζεται από τον τρόπο τοποθέτησης του βασιλικού πείρου. Εάν ο πείρος έχει τοποθετηθεί με μηδενική εγκάρσια και διαμήκης κλίση, ο μηχανισμός του συστήματος κινείται στο επίπεδο.

Το σημείο A, στην κάτοψη, αντιπροσωπεύει τον βασιλικό πείρο, είναι το σημείο ένωσης πείρου με αγκωνωτό βραχίονα και το κέντρο περιστροφής αυτού. Το σημείο B είναι άρθρωση – ακρόμπαρο – που συνδέει αγνωνωτό βραχίονα με ημίμπαρο.

Κίνηση στο επίπεδο x-z:

Όταν το όχημα στρίβει, στο επίπεδο x-z, το σημείο B κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά παράλληλη στον άξονα x (Εικόνα 4-7).



Εικόνα 4-7: Κάθετος πείρος, σε ευθεία πορεία (σχήμα στο κέντρο) και σε στροφή με άξονα περιστροφής τον z (σχήμα δεξιά και αριστερά). Όπως φαίνονται σε πίσω όψη (δηλαδή από τη θέση του οδηγού).

Χάριν απλούστευσης, η εικόνα 4-7 έχει σχεδιαστεί με $\omega = 0^\circ$. Αυτό δεν χρειάζεται απαραίτητα να ισχύει στο πραγματικό σύστημα.

Κίνηση στο επίπεδο x-y:

Στο επίπεδο x-y, το σημείο B κινείται σε κύκλο ακτίνας a , με κέντρο περιστροφής το σημείο A – βασιλικό πείρο. Τα σημεία Γ και E κινούνται σε κύκλο ακτίνας c , με κέντρο περιστροφής το Δ – κορυφή τριγώνου. Αντίστοιχα, το σημείο

$$\bullet \theta_4 = 2 \tan^{-1}\left(\frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1}\right) \quad (1)$$

$$\text{όπου, } A_1 = J_1 \cos(\theta_1) + J_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_2) + J_3$$

$$B_1 = 2[-J_1 \sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)]$$

$$C_1 = -J_1 \cos(\theta_1) + J_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + J_3 - \cos(\theta_2)$$

Απόδειξη Freudenstein's equation και τύπου θ_4 , στο Παράρτημα Γ (8.1.2).

Μηχανισμός Εξόδου ΔΕΖΗ:

$$\begin{aligned} \bullet \varphi_2 &= \theta_4 - 2 \tan^{-1}\left(\frac{x_t}{2y_t}\right) \\ \bullet \varphi_1 &= 360^\circ - \theta_1 \\ \bullet \varphi_4 &= 2 \tan^{-1}\left(\frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4A_2C_2}}{2A_2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{όπου } A_2 = J_2 \cos(\varphi_1) + J_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_2) + J_3$$

$$B_2 = 2[-J_2 \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)]$$

$$C_2 = -J_2 \cos(\varphi_1) + J_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + J_3 - \cos(\varphi_2)$$

οπότε, η γωνία στροφής του εσωτερικού τροχού (δ_i) υπολογίζεται ως:

$$\bullet \delta_i = \varphi_4 - (90^\circ + \omega)$$

4.2.4.1 Πιθανές Διατάξεις Μηχανισμού

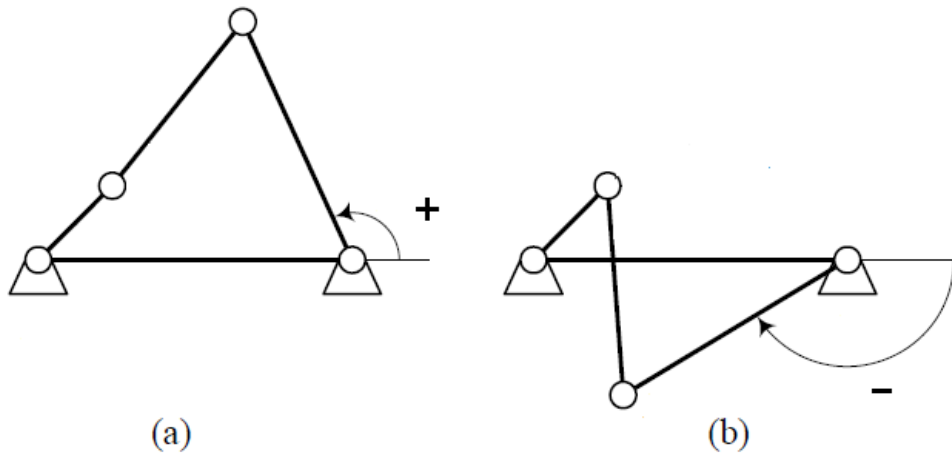
Όπως προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις, υπάρχουν δύο πιθανές λύσεις για τη θέση – γωνία του βραχίονα εξόδου σε κάθε μηχανισμό τεσσάρων βραχιόνων. Υπάρχουν δύο ρίζες της διακρίνουσας, οπότε και δύο πιθανές τιμές θ_4 και φ_4 .

Πιο αναλυτικά, για οποιαδήποτε τιμή γωνίας θ_2/φ_2 , και για κατάλληλες¹⁷ τιμές των a, b, c και d , προκύπτουν δύο τιμές θ_4/φ_4 . Οι δύο λύσεις είναι πιθανές και εκφράζουν διαφορετική διάταξη του ίδιου σχήματος (Εικόνα 4-9).

Η ρίζα με το πρόσημο (-) παρέχει θετικές γωνίες θ_4/φ_4 , ενώ η ρίζα με το πρόσημο (+) αρνητικές. Η διάταξη (a) – θετικές γωνίες θ_4/φ_4 – καλείται convex, non-crossed ή elbow-up, ενώ η διάταξη (b) – αρνητικές γωνίες θ_4/φ_4 – καλείται concave, crossed ή elbow-down (Jazar, 2009).

Είναι επόμενο ότι η διάταξη του συστήματος διεύθυνσης δεν θα είναι τύπου crossed, επομένως η ρίζα με το θετικό πρόσημο (+) ως πιθανή λύση, απορρίπτεται.

¹⁷ Ένας συνδυασμός των a, b, c και d τιμών θεωρείται κατάλληλος όταν παρέχει πραγματικές ρίζες στις σχέσεις (1) και (2) (Jazar, 2009).



Εικόνα 4-9: Πιθανές διατάξεις μηχανισμού τεσσάρων βραχιόνων (Jazar, 2009).

4.2.4.2 Σύγκλιση ή Απόκλιση Τροχών

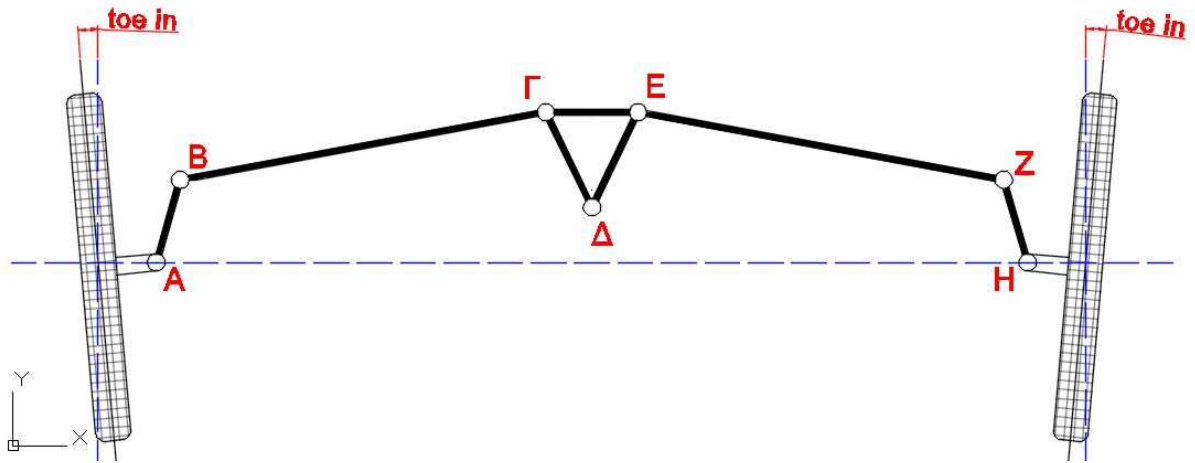
Η στατική ρύθμιση των τροχών σε σύγκλιση ή απόκλιση επηρεάζει τις σχέσεις $\theta_2 = f(\delta_o)$ και $\delta_i = f(\varphi_4)$ κατά ένα σταθερό μέγεθος. Το μέγεθος αυτό είναι η γωνία κατά την οποία είναι στραμμένος ο κάθε τροχός προς το εσωτερικό ή το εξωτερικό του οχήματος σε θέση συστήματος για ευθύγραμμη πορεία. Σε περίπτωση σύγκλισης η γωνία αυτή, και για τους δύο τροχούς, θα συμβολίζεται ως toe_{in} , ενώ σε περίπτωση απόκλισης, θα συμβολίζεται ως toe_{out} .

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται πως επιδρούν οι παραπάνω γωνίες στις εξισώσεις θ_2 και δ_i .

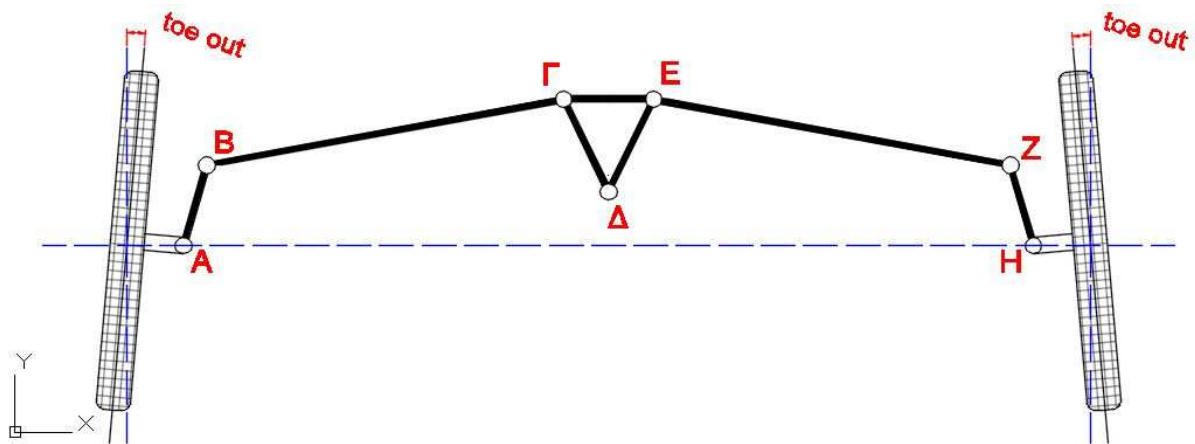
Πίνακας 4-3: Επίδραση σύγκλισης – απόκλισης στις εξισώσεις του μηχανισμού

Ρύθμιση Τροχών	Εξισώσεις	
$toe_{in} = toe_{out} = 0^\circ$	$\theta_2 = \delta_o + (90^\circ - \omega)$	$\delta_i = \varphi_4 - (90^\circ + \omega)$
$toe_{in} \neq 0^\circ$	$\theta_2 = \delta_o + toe_{in} + (90^\circ - \omega)$	$\delta_i = \varphi_4 - toe_{in} - (90^\circ + \omega)$
$toe_{out} \neq 0^\circ$	$\theta_2 = \delta_o - toe_{out} + (90^\circ - \omega)$	$\delta_i = \varphi_4 + toe_{out} - (90^\circ + \omega)$

Όπως φαίνεται και στις εικόνες 4-10 και 4-11, σε περίπτωση σύγκλισης, ο εξωτερικός τροχός είναι ήδη «μέσα» στη στροφή, ενώ σε περίπτωση απόκλισης, ο εσωτερικός.



Εικόνα 4-10: Ρύθμιση σύγκλισης, κάτοψη.

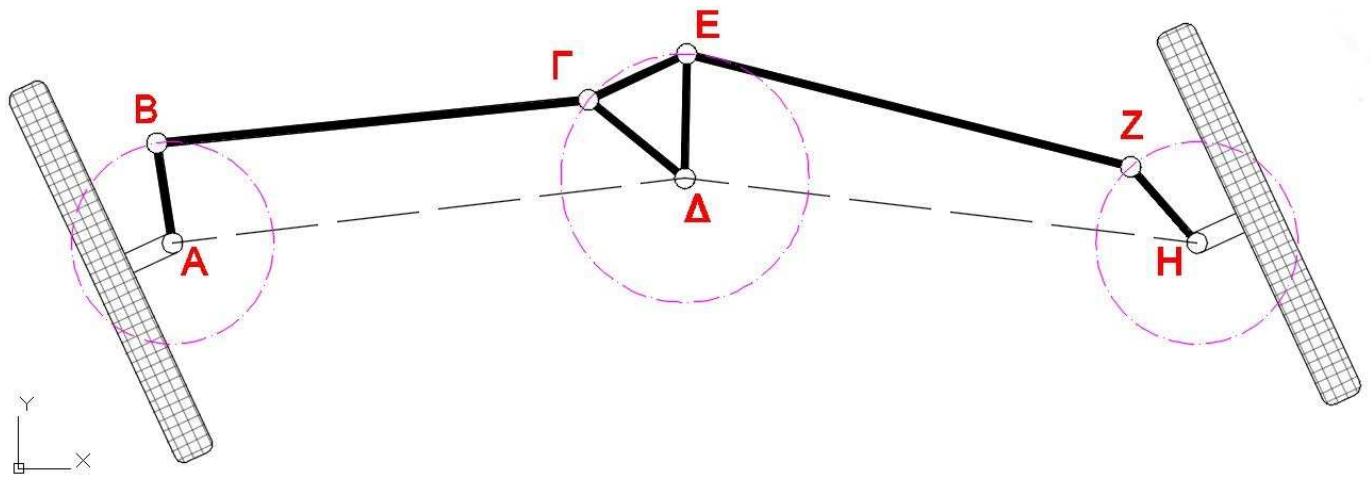


Εικόνα 4-11: Ρύθμιση απόκλισης, κάτοψη.

4.2.5 Κίνηση στο Χώρο, Κίνηση Οχήματος

Στην παρούσα εργασία αναλύεται η γεωμετρία της κινηματικής αλυσίδας σε κίνηση στο επίπεδο. Αποτυπώνεται η θέση κάθε βραχίονα που εμπεριέχει και η περιστροφή του πείρου του εσωτερικού τροχού σε σχέση με την περιστροφή του πείρου του εξωτερικού τροχού και την γωνία στροφής του τιμονιού (περιστροφή τριγώνου διευθύνσεως), λαμβάνοντας υπόψιν στατική ρύθμιση των τροχών σε σύγκλιση ή απόκλιση. Το τελικό αποτέλεσμα είναι η σχέση $\delta_i = f(\delta_o)$ των τροχών για κάθε πιθανή ακτίνα στροφής που δύναται να εκτελέσει το υπό σχεδιασμό όχημα (Εικόνα 4-12).

Στην πραγματικότητα όμως, το σύστημα κινείται στο χώρο και όχι στο επίπεδο, καθώς ο πείρος είναι τοποθετημένος – σχεδόν πάντα – με κάποια εγκάρσια (γωνία KPI) και διαμήκης (γωνία caster) κλίση. Αυτή η τοποθέτηση του πείρου, επηρεάζει την κίνηση των αγκωνωτών βραχιόνων, τα άκρα των οποίων (σημεία Β και Ζ) κινούνται και καθ' ύψος (ως προς άξονα z). Όπως φαίνεται δηλαδή σε κάτοψη, τα σημεία Β και Ζ δεν κινούνται σε κύκλο με ακτίνα a, αλλά σε κάποια καμπύλη μεταβλητής ακτίνας.



Εικόνα 4-12: Σύστημα με κάθετη τοποθέτηση πείρου σε στροφή.

Άλλη μια περίπτωση τοποθέτησης των εξαρτημάτων του μηχανισμού, που επηρεάζει την κίνηση των συνδέσμων στο χώρο και την αποτύπωσή τους στην κάτοψη, είναι η γωνία τοποθέτησης του τριγώνου διευθύνσεως. Η τροχιά κίνησης των συνδέσμων Γ και Ε είναι κυκλική με ακτίνα c , μόνο στην περίπτωση που το τρίγωνο διευθύνσεως έχει τοποθετηθεί παράλληλα στο επίπεδο $x-y$, παράλληλα, δηλαδή, προς το οδόστρωμα. Αυτή η τοποθέτηση δεν συναντάται στην πλειονότητα αυτών των συστημάτων, καθώς από την κορυφή του τριγώνου Δ και κέντρο περιστροφής των Γ, Ε διέρχεται η κολώνα διευθύνσεως, τοποθετημένη υπό κλίση (Εικόνα 4.13).



Εικόνα 4-13: Τρίγωνο σε κολώνα υπό κλίση, στο σύστημα διεύθυνσης του Trireme I (μονοθέσιο ομάδας «Ποσειδών» στο διαγωνισμό Shell Eco Marathon Europe 2014).

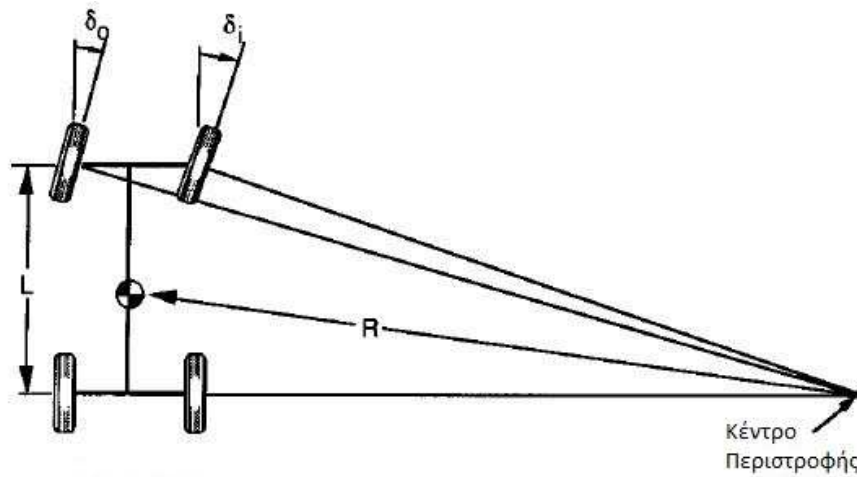
Συνεχίζοντας, αυτή η ανάλυση δεν δίνει την ακριβή θέση των τροχών ως προς το οδόστρωμα. Το ακραξόνιο, όπως και ο αγκωνωτός βραχίονας διεύθυνσης, είναι σταθερά συνδεδεμένο με τον πείρο. Συνεπώς, εάν ο πείρος είναι τοποθετημένος υπό κλίση, το ακραξόνιο, σε στροφή, κινείται σε καμπύλη στο χώρο, αλλάζοντας την κλίση σώτρου και ελαστικού ως προς την κάθετο στο οδόστρωμα (αλλάζουν η γωνία camber και η ακτίνα κύλισης).

Επιπλέον, οι γωνίες ολίσθησης των ελαστικών και η ελαστική παραμόρφωση εξαρτημάτων ή τμημάτων μηχανισμών που υποστηρίζουν τη λειτουργία της κινηματικής αλυσίδας δεν συμπεριλαμβάνονται. Η παρούσα εργασία δεν προβαίνει σε δυναμική μελέτη.

Κλείνοντας, λοιπόν, την ανάλυση των εξισώσεων, πρέπει να τονιστεί ότι η σχέση που δύναται να προκύψει μεταξύ γωνιών στροφής των τροχών και ακτίνας στροφής του οχήματος, δεν θα αντιπροσωπεύει πραγματικές, αγωνιστικές συνθήκες. Σε αγωνιστικές συνθήκες, δηλαδή σε στροφές με ταχύτητα, λόγω επίδρασης γωνιών ολίσθησης και πλευρικής επιτάχυνσης, η πορεία του οχήματος θα διαφέρει. Η παρακάτω σχέση¹⁸ (Jazar, 2009):

$$R = \sqrt{a_2^2 + l^2 (\cot \delta)^2},$$

όπου $\cot \delta = \frac{\cot \delta_o + \cot \delta_i}{2}$ και a_2 : διαμήκης απόσταση του πίσω άξονα από το κέντρο βάρους του οχήματος¹⁹ (Εικόνα 4-14), ισχύει για μηδενική ταχύτητα, όπως, για παράδειγμα, σε στροφή οχήματος κατά τον τεχνικό έλεγχο.



Εικόνα 4-14: Κέντρο περιστροφής οχήματος σε συνθήκες μηδενικής ταχύτητας (Gillespie, 1992).

¹⁸ Ισχύει για απόλυτη Ackermann.

¹⁹ Η γωνία δ είναι η αντίστοιχη γωνία στροφής που θα είχε ένα δίτροχο όχημα με ίδιο μεταξόνιο και ακτίνα στροφής R.

4.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΟΧΛΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Γνωρίζοντας πλέον την ακριβή μορφή του συστήματος, τις αναλυτικές εξισώσεις της κίνησής του και το επιθυμητό κριτήριο κίνησης, μπορεί να συνταχθεί πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Η μοντελοποίηση του προβλήματος βελτιστοποίησης περιλαμβάνει τον προσδιορισμό:

- Της αντικειμενικής συνάρτησης και των μεταβλητών.
- Των περιορισμών.

Η χρήση και διαμόρφωση των αλγορίθμων GlobalSearch και fmincon που θα χρησιμοποιηθούν (Βλ. 3.3.2.1) θα παρουσιαστεί στο επόμενο υποκεφάλαιο 4.4.

4.3.1 Αντικειμενική Συνάρτηση & Μεταβλητές

Η αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να συγκρίνει την κινηματική συνθήκη του συστήματος με την συνθήκη Ackermann, εφόσον αυτή επιλέχθηκε ως κριτήριο κίνησης (Βλ. 4.1). Η σύγκριση μπορεί να γίνει μέσω μιας εξίσωσης σφάλματος e , η οποία θα υπολογίζει την απόλυτη διαφορά μεταξύ της πραγματικής κίνησης (μοχλικού συστήματος) και της επιθυμητής (συνθήκη Ackermann) (Jazar, 2009).

Στο μοχλικό σύστημα η θέση του εσωτερικού τροχού εκφράζεται συναρτήσει της θέσεως εξωτερικού τροχού σε μια εξίσωση (Βλ. 4.2):

$$\delta_{Li} = f(\delta_o)$$

Η συνθήκη Ackermann (Βλ. 2.4.2) μπορεί να εκφραστεί επίσης ως θέση του εσωτερικού τροχού συναρτήσει του εξωτερικού σε μια εξίσωση:

$$\delta_{Ai} = f(\delta_o) \rightarrow \delta_{Ai} = \cot^{-1}\left(\cot \delta_o - \frac{w}{l}\right)$$

Οπότε η εξίσωση σφάλματος μπορεί να έχει τη μορφή:

$$e = |\delta_{Li} - \delta_{Ai}|$$

Με αυτή την εξίσωση προκύπτει ένας αριθμός e για κάθε γωνία στροφής εξωτερικού τροχού, που δείχνει τη διαφορά, σε μοίρες, της πραγματικής θέσης του εσωτερικού τροχού από αυτήν που θα είχε σε ένα σύστημα απόλυτης Ackermann.

Όταν ένα όχημα στρίβει, περνάει από τρία στάδια στροφής. Το μεταβατικό στάδιο εισόδου στη στροφή (transient turn-entry), το κυρίως τμήμα της στροφής (steady-state cornering) και το μεταβατικό στάδιο εξόδου από τη στροφή (transient turn-exit). Στην είσοδο, το όχημα αναπτύσσει πλευρική ταχύτητα από το μηδέν και κινείται σε μια μεταβαλλόμενη ακτίνα στροφής, μέχρι να φτάσει στο κυρίως τμήμα της στροφής όπου η ακτίνα R και η πλευρική ταχύτητα παραμένουν σταθερές ως προς το χρόνο. Στην έξοδο, το όχημα επιβραδύνεται πλευρικά και η ακτίνα R μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί και το όχημα να επανέλθει σε ευθύγραμμη πορεία.

Τα στάδια αυτά έχουν διαφορετική διάρκεια ανάλογα με τη μορφή της στροφής που καλείται να εκτελέσει το όχημα (Milliken και Milliken, 1995).

Είναι, λοιπόν, φανερό ότι το όχημα περνάει από διάφορα στιγμιαία κέντρα περιστροφής όταν στρίβει. Για να έχει την καλύτερη δυνατή συμπεριφορά, ως προς Ackermann, σε όλες αυτές τις πιθανές θέσεις – ακτίνες στροφής R , θα πρέπει το σφάλμα e , να υπολογίζεται για όλο το εύρος στροφών εξωτερικού τροχού που θα εκτελέσει και όχι για μια μεμονομένη τιμή δ_o .

Για να περιγραφεί η συμπεριφορά του συστήματος σε όλο το εύρος δ_o με ένα μέγεθος, θα χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα του σφάλματος e , το οποίο θα υπολογίζεται από την ελάχιστη $\delta_o = 0^\circ$ έως τη μέγιστη δ_o , που θα κληθεί να εκτελέσει το όχημα, όπως προβλέπεται από τους κανόνες του διαγωνισμού και τις στροφές της πίστας. Το μέγεθος θα καλείται απόκλιση και μαθηματικά εκφράζεται ως:

$$\int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} e d\delta_o$$

Η απόκλιση δεν θα υπολογίζεται από $-\delta_{max}$ έως δ_{max} , καθώς το σύστημα θα σχεδιαστεί συμμετρικό και θα στρίβει εξίσου δεξιά και αριστερά.

Ανεξάρτητες μεταβλητές θα είναι αυτές που ο κάθε διαφορετικός συνδυασμός τους θα προσδίδει διαφορετική τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Για όχημα δεδομένων κατασκευαστικών χαρακτηριστικών (γνωστά τα μεγέθη: $w, l, x_{max}, y_{max}, y_o, y_{kpi}$) προσδιορίζεται πλήρως η κινηματική συνθήκη Ackermann $\delta_{Ai} = f(\delta_o)$ και σε συνδυασμό με συγκεκριμένες τιμές των ω, α, x_t, y_t , όπως ορίζονται στα 4.2.1 και 4.2.2, προκύπτει διαφορετική συνθήκη μοχλικού συστήματος $\delta_{Li} = f(\delta_o)$. Εφόσον, λοιπόν, η τιμή της απόκλισης προκύπτει από ολοκλήρωση της διαφοράς των δύο συνθηκών, ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι τα μεγέθη ω, α, x_t, y_t του μοχλικού συστήματος.

4.3.2 Περιορισμοί

Συνήθης κινηματικός περιορισμός για συστήματα τεσσάρων βραχιόνων είναι το κριτήριο Grashoff. Όταν τηρείται το κριτήριο αυτό, ανισοτική σχέση μεταξύ των μηκών των βραχιόνων του μηχανισμού, εξασφαλίζει ότι τουλάχιστον ένας από τους βραχίονες μπορεί να εκτελέσει πλήρη περιστροφή (Jazar, 2009; Vinogradov, 2000). Στο μοχλικό σύστημα διεύθυνσης, κανένας βραχίονας δεν χρειάζεται να εκτελέσει τόσο μεγάλη στροφή, οπότε αυτός ο περιορισμός δεν θα συμπεριληφθεί στο πρόβλημα.

Η εφικτή περιοχή λύσης, στην οποία αναζητούν τη βέλτιστη οι αλγόριθμοι, μπορεί να μειωθεί αρκετά και να επιταχύνει την έκβαση του αποτελέσματος, εάν τεθούν όρια τιμών στις μεταβλητές. Οι μεταβλητές χαρακτηρίζουν εξαρτήματα

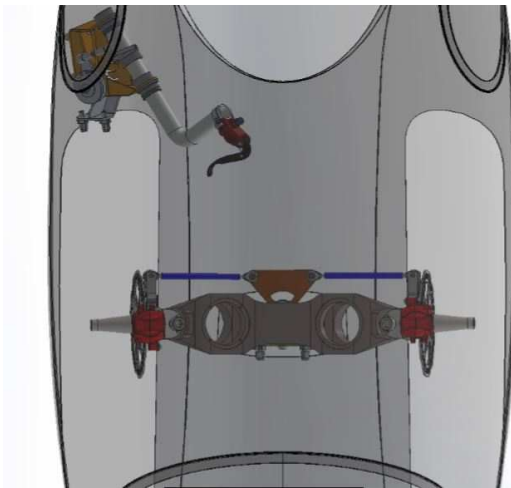
πραγματικού συστήματος, τα οποία θα πρέπει να κατασκευαστούν και να συνδεθούν μεταξύ τους και με το αυτοφερόμενο πλαίσιο, στο διατιθέμενο χώρο που προβλέπεται για το υποσύστημα. Οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές των μεταβλητών μπορούν να αποδοθούν με χωροταξικούς περιορισμούς.

Μέχρι στιγμής, η κίνηση του συστήματος βραχιόνων μελετάται μόνο ως προς τις επιθυμητές θέσεις, δηλαδή για το εύρος γωνιών τροχών που θα κληθεί να εκτελέσει το όχημα. Αυτό σε καμία περίπτωση δεν σημαίνει ότι οι βραχίονες, συνεπώς και οι τροχοί, δεν μπορούν να κινηθούν σε μεγαλύτερο εύρος. Το εύρος κίνησης ενός συστήματος οριοθετείται από τις οριακές και νεκρές θέσεις αυτού και πρέπει πάντα να συμπεριλαμβάνεται στο σχεδιασμό.

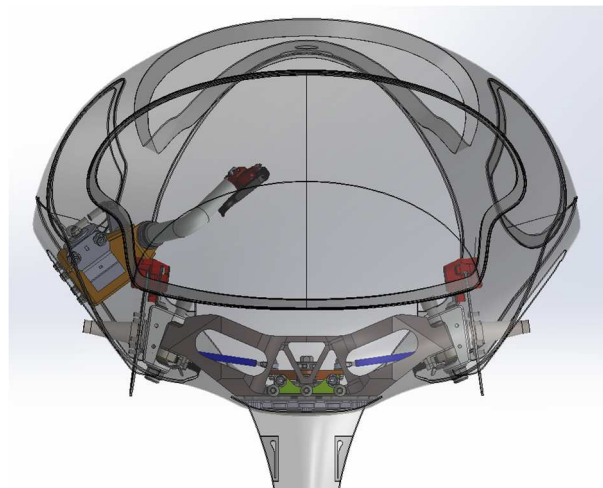
Στα επόμενα υποκεφάλαια περιγράφονται και διατυπώνονται μαθηματικά οι χωροταξικοί περιορισμοί και οι οριακές και νεκρές θέσεις του συστήματος.

4.3.2.1 Χωροταξικοί Περιορισμοί

Όλα τα επιμέρους εξαρτήματα του συστήματος θα πρέπει να κινούνται εντός του διαθέσιμου χώρου για το υποσύστημα (Εικόνες 4-15, 4-16).

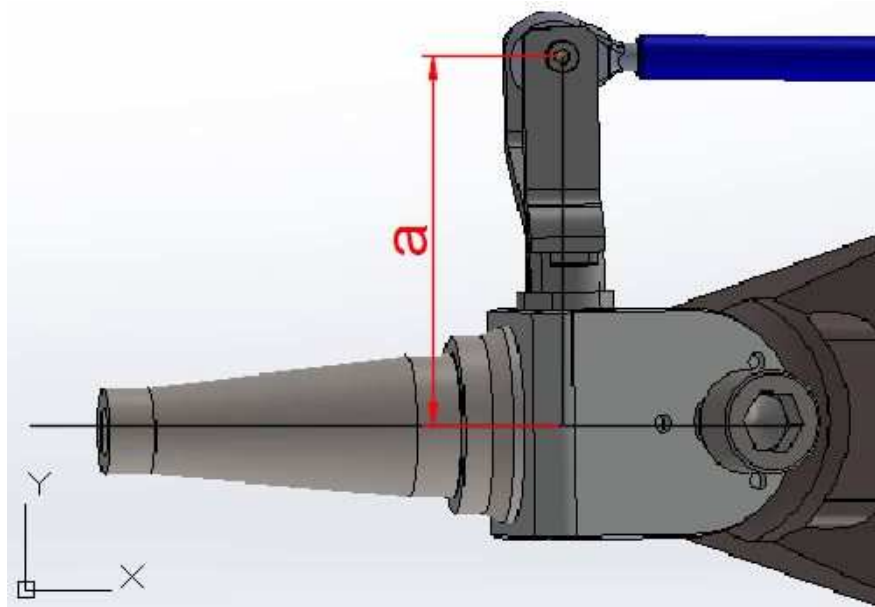


Εικόνα 4-15: Κάτοψη χώρου και υποσυστήματος μονοθεσίου.



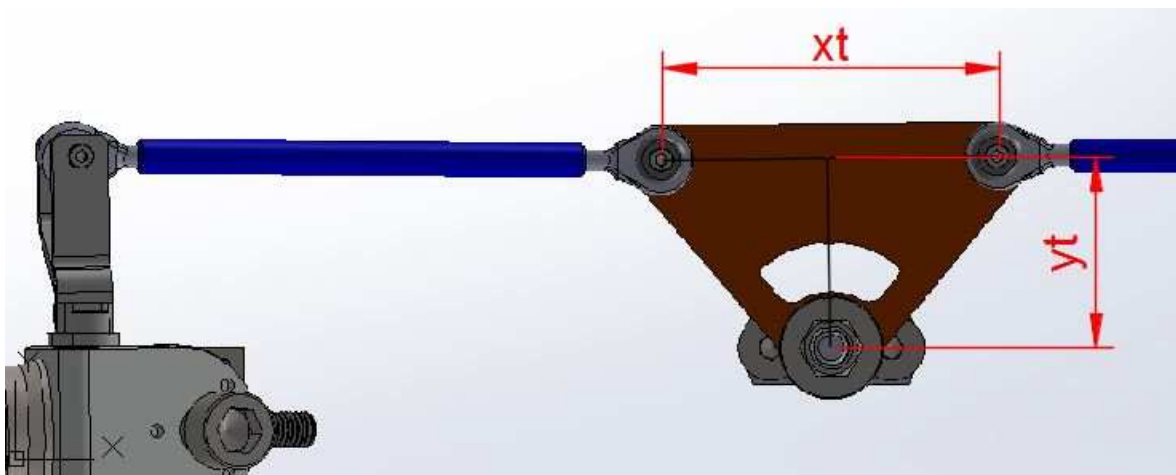
Εικόνα 4-16: Μπροστά όψη κελύφους και υποσυστήματος μονοθεσίου.

Η γωνία ω και το μήκος a του αγκωνωτού βραχίονα θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο βραχίονας να κινείται χωρίς εμπόδια και να φτάνει τη μέγιστη επιθυμητή γωνία τροχού χωρίς να έρχεται σε επαφή με το πλαίσιο του οχήματος ή με μέρη του συστήματος τροχού. Το μήκος a δεν εκφράζει το ολικό μήκος του βραχίονα, αλλά το μήκος μετρούμενο από το κέντρο του πείρου έως το κέντρο όπου θα γίνει η συναρμογή με το ακρόμπαρο του βραχίονα σύζευξης. Συνεπώς, δεν είναι κατασκευαστικά εφικτό η τιμή του a να πέσει κάτω από μια ελάχιστη τιμή αρκετών χιλιοστών, η οποία θα εξασφαλίζει σωστή συναρμογή και λειτουργία (Εικόνα 4-17).



Εικόνα 4-17: Μήκος a στο πραγματικό σύστημα.

Τα ίδια ισχύουν και για τα μήκη x_t και y_t του τριγώνου διεύθυνσεως. Το μήκος x_t δεν είναι η ακριβής βάση του τριγώνου, αλλά το μήκος μεταξύ των κέντρων των οπών όπου αυτό θα συνδεθεί με τα ακρόμπαρα. Για κατασκευαστικούς λόγους έχει ένα ελάχιστο όριο τιμής. Ακολούθως, το y_t δεν είναι το ακριβές ύψος, αλλά το κάθετο μήκος από το κέντρο περιστροφής του τριγώνου εώς την ευθεία που συνδέει τις οπές των ακρομπάρων. Επίσης, έχει ελάχιστο όριο τιμής (Εικόνα 4-18). Οι μέγιστες τιμές τους προκύπτουν από την επιφάνεια που θα σαρώνει το τρίγωνο κατά τη στροφή, η οποία πρέπει να είναι εντός του διατιθέμενου χώρου.



Εικόνα 4-18: Μήκη x_t , y_t στο πραγματικό σύστημα.

Επομένως, κάθε μεταβλητή διαθέτει συγκεκριμένο πεδίο τιμών, όπως εκφράζεται από τα ανώτερα και κατώτερα όρια που μπορεί να λάβει, δεδομένων χωροταξικών και κατασκευαστικών περιορισμών.

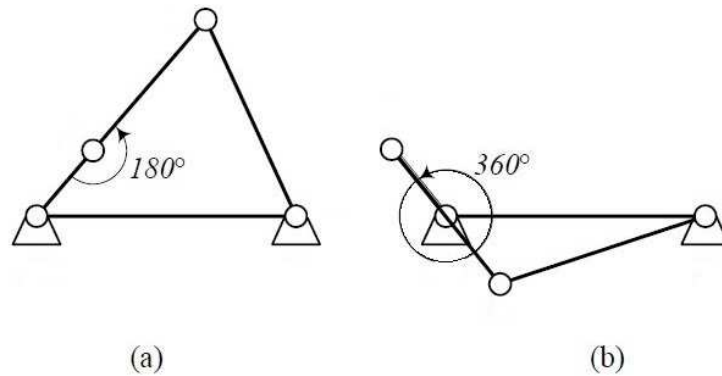
4.3.2.2 Οριακές Θέσεις

Οριακή θέση (limit position) υφίσταται όταν ο βραχίονας εξόδου ενός μηχανισμού τεσσάρων βραχιόνων σταματά, ενώ ο βραχίονας εισόδου δύναται να στραφεί. Αυτό συμβαίνει όταν η γωνία μεταξύ βραχίονα εισόδου και εξόδου είναι είτε 180° είτε 360° (Εικόνα 4-19) (Jazar, 2009).

Για non-crossed διάταξη μηχανισμού (Εικόνα 4-19 a) ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\text{βραχίονας εισόδου: } \theta_{2L} = \theta_1 - \cos^{-1}\left(\frac{c^2 - (a+b)^2 - d^2}{2(a+b)d}\right)$$

$$\text{βραχίονας εξόδου: } \theta_{4L} = \theta_1 - \cos^{-1}\left(\frac{c^2 + d^2 - (a+b)^2}{2cd}\right)$$



Εικόνα 4-19: Οριακές θέσεις (Jazar, 2009).

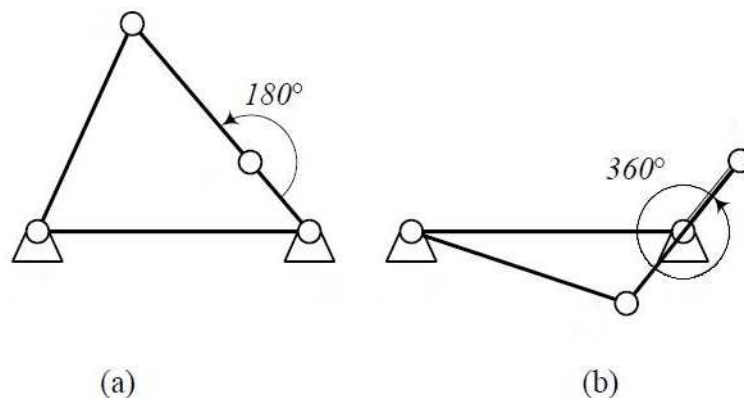
4.3.2.3 Νεκρές Θέσεις

Νεκρή θέση (dead position) υφίσταται όταν ο βραχίονας εισόδου «κλειδώνει» και δεν μπορεί να στραφεί. Συμβαίνει όταν η γωνία μεταξύ βραχίονα εξόδου και βραχίονα σύζευξης είναι είτε 180° είτε 360° (Εικόνα 4-20) (Jazar, 2009).

Για non-crossed διάταξη μηχανισμού (Εικόνα 4-20 a) ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\text{βραχίονας εισόδου: } \theta_{2D} = \theta_1 - \cos^{-1}\left(\frac{(b+c)^2 - a^2 - d^2}{2ad}\right)$$

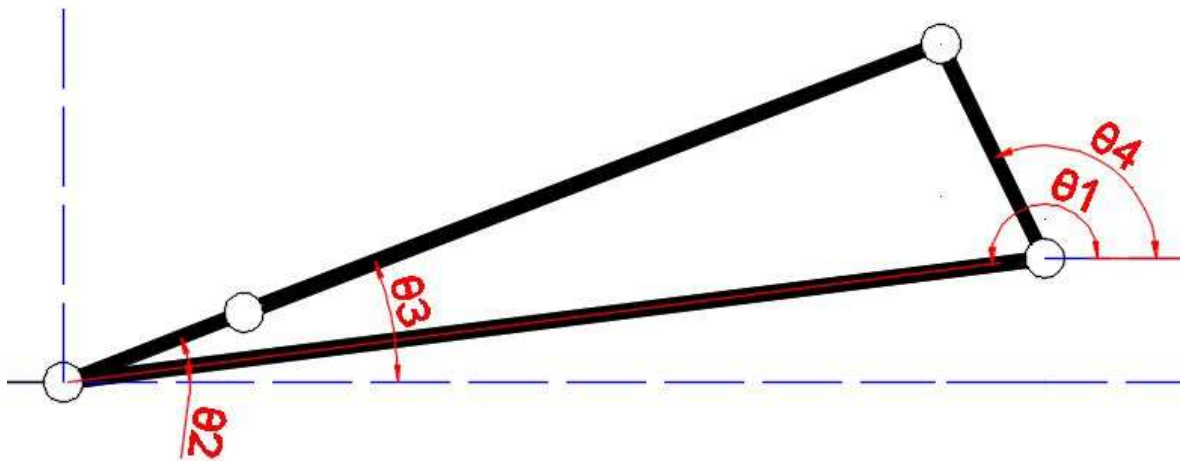
$$\text{βραχίονας εξόδου: } \theta_{4D} = \theta_1 - \cos^{-1}\left(\frac{(b+c)^2 + d^2 - a^2}{2(c+b)d}\right)$$



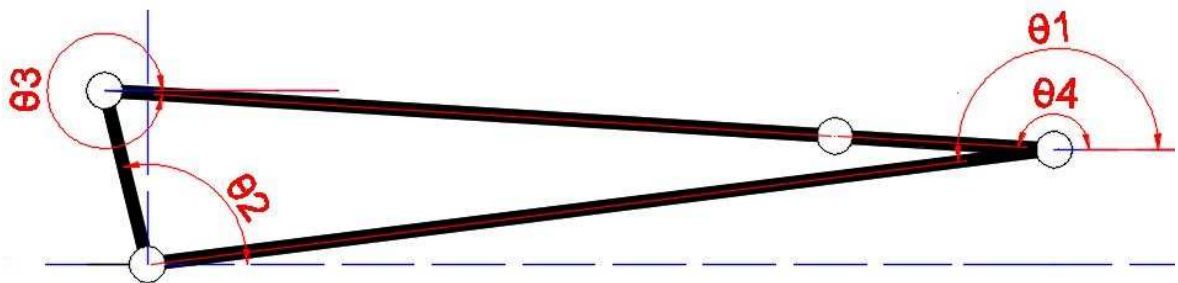
Εικόνα 4-20: Νεκρές θέσεις (Jazar, 2009).

Οι παραπάνω σχέσεις οριακών και νεκρών θέσεων έχουν εκφραστεί για τους βραχίονες του μηχανισμού εισόδου ΑΒΓΔ. Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για τους βραχίονες του μηχανισμού εξόδου ΔΕΖΗ. Αποδείξεις των σχέσεων στο υποκεφάλαιο 8.2 του παραρτήματος.

Κατά το σχεδιασμό, λοιπόν, πρέπει να εξασφαλιστεί ότι η κίνηση των βραχιόνων είναι εντός του εύρους που προκύπτει από αυτές τις θέσεις. Στις εικόνες 4-21 και 4-22 είναι εμφανές ότι η γωνία του βραχίονα εισόδου λαμβάνει την ελάχιστη δυνατή τιμή της στην οριακή θέση και τη μέγιστη στη νεκρή θέση. Το ίδιο ισχύει και για τη γωνία του βραχίονα εξόδου.



Εικόνα 4-21: Γωνίες βραχιόνων στην οριακή θέση.



Εικόνα 4-22: Γωνίες βραχιόνων στη νεκρή θέση.

Το εύρος αυτό μπορεί να εκφραστεί με ανισοτικούς περιορισμούς στις τιμές των γωνιών θ_2 , θ_4 , φ_2 και φ_4 . Κάθε πιθανή τιμή που λαμβάνουν οι γωνίες αυτές κατά την κίνηση του οχήματος θα πρέπει υπακούουν στους περιορισμούς (Πίνακας 4-4).

Πίνακας 4-4: Περιορισμοί οριακών και νεκρών θέσεων.

	Μηχανισμός	
	Εισόδου ΑΒΓΔ	Εξόδου ΔΕΖΗ
Βραχίονας Εισόδου	$\theta_{2L} < \theta_2 < \theta_{2D}$	$\varphi_{2L} < \varphi_2 < \varphi_{2D}$
Βραχίονας Εξόδου	$\theta_{4L} < \theta_4 < \theta_{4D}$	$\varphi_{4L} < \varphi_4 < \varphi_{4D}$

Όταν δεν ισχύει το κριτήριο Grashoff σε ένα μηχανισμό τεσσάρων βραχιόνων, ενδέχεται οι οριακές ή νεκρές θέσεις να μην είναι εφικτές. Ενδέχεται, δηλαδή, τα μήκη των βραχιόνων να μην «φτάνουν» στη διάταξη για τις αντίστοιχες θέσεις (εικόνες 4-19, 4-20) και η κίνηση του μηχανισμού να τερματίζει πριν από αυτές.

Σε τέτοια περίπτωση μηχανισμού, όπου οι οριακές και νεκρές θέσεις δεν είναι εφικτές, οι παραπάνω τύποι δεν αντιστοιχούν σε πραγματικές θέσεις βραχιόνων και λύση προκύπτει εκτός του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Για την αποφυγή αυτού του φαινομένου, θα πρέπει το όρισμα του τόξου συνημιτόνου των παραπάνω συναρτήσεων να είναι εντός του εύρους $[-1,1]$. Με αυτόν τον τρόπο ο μηχανισμός θα «φτάνει» τις οριακές και νεκρές θέσεις, ανεξαρτήτως της τήρησης ή μη του κριτηρίου Grashoff.

Συμπληρωματικά, λοιπόν, των περιορισμών του πίνακα 4-4, θα πρέπει να ισχύουν και οι εξής ανισώσεις:

Πίνακας 4-5: Περιορισμοί Ορισμάτων Τόξου Συνημιτόνου

	Ορίσματα Τόξου Συνημιτόνου	
Οριακές Θέσεις	$-1 \leq \frac{c^2 - (a+b)^2 - d^2}{2(a+b)d} \leq 1$	$-1 \leq \frac{c^2 + d^2 - (a+b)^2}{2cd} \leq 1$
Νεκρές Θέσεις	$-1 \leq \frac{(b+c)^2 - a^2 - d^2}{2ad} \leq 1$	$-1 \leq \frac{(b+c)^2 + d^2 - a^2}{2(c+b)d} \leq 1$

Με τήρηση αυτών των περιορισμών οι λύσεις των οριακών και νεκρών θέσεων των βραχιόνων του μηχανισμού εισόδου ΑΒΓΔ είναι πραγματικές. Στους τύπους των θέσεων για τον μηχανισμό εξόδου ΔΕΖΗ τα ορίσματα του τόξου συνημιτόνου είναι αντίθετα από αυτά του μηχανισμού εισόδου (Βλ. 8.2). Συνεπώς, ο πίνακας 4-5 εξασφαλίζει πραγματικές λύσεις και στις αντίστοιχες θέσεις του μηχανισμού εξόδου.

4.3.3 Μαθηματική Έκφραση Προβλήματος

Συνοψίζοντας, το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^4} f(x) \quad \text{υπόκειται σε } \{g_i(x) \leq 0, i \in J\}$$

όπου:

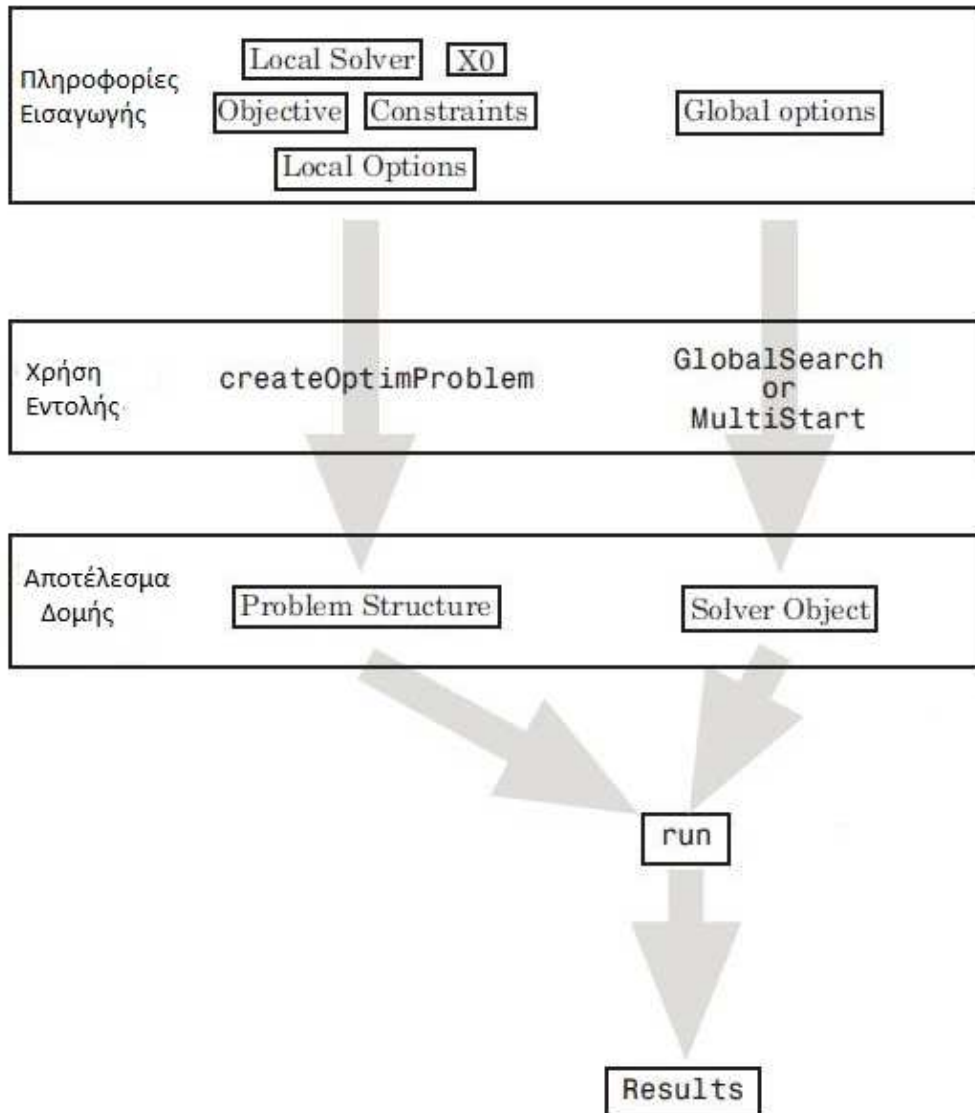
$x:$	διάνυσμα τεσσάρων συνιστωσών,	$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$, όπου $x_1 = \omega, \quad \omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$ $x_2 = \alpha, \quad \alpha \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$ $x_3 = x_t, \quad x_t \in [x_{tmin}, x_{tmax}]$ $x_4 = y_t, \quad y_t \in [y_{tmin}, y_{tmax}]$
$f:$	αντικειμενική συνάρτηση,	$\int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} e \, d\delta_o$
$g:$	συναρτήσεις περιορισμών,	$g_1(x) = \frac{c^2 - (a+b)^2 - d^2}{2(a+b)d} - 1$ $g_2(x) = -1 - \frac{c^2 - (a+b)^2 - d^2}{2(a+b)d}$ $g_3(x) = \frac{c^2 + d^2 - (a+b)^2}{2cd} - 1$ $g_4(x) = -1 - \frac{c^2 + d^2 - (a+b)^2}{2cd}$ $g_5(x) = \frac{(b+c)^2 - a^2 - d^2}{2ad} - 1$ $g_6(x) = -1 - \frac{(b+c)^2 - a^2 - d^2}{2ad}$ $g_7(x) = \frac{(b+c)^2 + d^2 - a^2}{2(c+b)d} - 1$ $g_8(x) = -1 - \frac{(b+c)^2 + d^2 - a^2}{2(c+b)d}$ $g_9(x) = \theta_{2L} - \theta_2$ $g_{10}(x) = \theta_{4L} - \theta_4$ Οριακές $g_{11}(x) = \varphi_{2L} - \varphi_2$ Θέσεις $g_{12}(x) = \varphi_{4L} - \varphi_4$ $g_{13}(x) = \theta_2 - \theta_{2D}$ $g_{14}(x) = \theta_4 - \theta_{4D}$ Νεκρές $g_{15}(x) = \varphi_2 - \varphi_{2D}$ Θέσεις $g_{16}(x) = \varphi_4 - \varphi_{4D}$
$\mathcal{J}:$	συνολά δεικτών των περιορισμών,	$i \in \{1,2, \dots, 16\}$

Το πρόβλημα δεν διαθέτει περιορισμούς ισότητας $h_i(x)$.

4.4 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης όπως εκφράστηκε παραπάνω πρέπει να διαμορφωθεί κατάλληλα, ώστε να συνταχθεί σε δομή που επιτρέπει την εφαρμογή των αλγορίθμων των Optimization Toolbox και Global Optimization Toolbox βιβλιοθηκών του MATLAB.

Η ροή εργασιών για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων έχει την εξής μορφή (Εικόνα 4-23):



Εικόνα 4-23: Ροή Εργασιών Βελτιστοποίησης στο MATLAB (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

4.4.1 Παράμετροι Εισόδου

Η δομή του προβλήματος (Problem Structure) καθορίζει το πρόβλημα τοπικής βελτιστοποίησης με χρήση τοπικής μεθόδου (Local Solver). Τοπική μέθοδος θα εφαρμοστεί με την εντολή `fmincon`. Η εντολή αυτή απαιτεί κάποια δεδομένα εισαγωγής (Πίνακας 4-6).

Πίνακας 4-6: Πίνακας Δεδομένων Εισαγωγής fmincon.

Απαιτούμενα:	Αντικειμενική Συνάρτηση (Objective)	Αρχικό Σημείο (x_0)
Προαιρετικά:	Συναρτήσεις Περιορισμών (Constraints)	Επιλογές Επίλυσης (Local Options)

Η αντικειμενική συνάρτηση δέχεται ως εισαγωγή διάνυσμα x (Βλ. 4.4.3) και επιστρέφει μονόμετρο μέγεθος, την τιμή της απόκλισης των δύο συστημάτων στο εύρος της επιθυμητής κίνησης, όπως προκύπτει από το σχετικό ολοκλήρωμα. Για γρηγορότερη επίλυση του κώδικα και αποφυγή επαναλήψεων στους υπολογισμούς, οι αριθμητικοί τελεστές των συναρτήσεων εφαρμόζονται σε σειρές διανυσμάτων. Η αντικειμενική συνάρτηση προκύπτει από συνδυασμό αρχείων τοπικών συναρτήσεων και μιας κοινής – ολικής (global) – μεταβλητής, της γωνίας στροφής του εξωτερικού τροχού δ_0 . Το ολοκλήρωμα – απόκλιση υπολογίζεται με τη μέθοδο τραπεζίου.

Το αρχικό σημείο x_0 είναι ένα τυχαίο διάνυσμα λύσης που ορίζει ο χρήστης. Το τοπικό ακρότατο θα αναζητηθεί γύρω από αυτό μέσω της fmincon. Οι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν τον αριθμό των στοιχείων του διανύσματος x_0 και το μέγεθός του για να υπολογίσουν τον αριθμό και το μέγεθος των μεταβλητών που δέχεται η αντικειμενική συνάρτηση $f(x)$.

Υπάρχουν πολλά είδη συναρτήσεων περιορισμών που μπορούν να ενσωματωθούν στο πρόβλημα: όρια τιμών μεταβλητών x (bounds), γραμμικές ισότητες (linear equalities), γραμμικές ανισότητες (linear inequalities), μη γραμμικές ισότητες (nonlinear equalities) και μη γραμμικές ανισότητες (nonlinear inequalities). Στο παρόν πρόβλημα θα χρησιμοποιηθούν όρια τιμών για τις μεταβλητές όπως προκύπτουν από τους χωροταξικούς περιορισμούς (4.3.2.1) και μη γραμμικές ανισότητες ώστε να μην «φτάνει» ο μηχανισμός τις οριακές (4.3.2.2) και νεκρές θέσεις (4.3.2.3). Τα υπόλοιπα είδη περιορισμών θα ενσωματωθούν στο πρόβλημα ως κενοί πίνακες.

Οι επιλογές επίλυσης τοπικής βελτιστοποίησης (Local Options) αποτελούν ένα σύνολο παραμέτρων που ρυθμίζουν ή τροποποιούν τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, επιλέγουν επιπλέον δυνατότητες και καθορίζουν τη μορφή και την πληροφορία που συνοδεύει το αποτέλεσμα. Έχουν συγκεκριμένη ονομασία, μέσω της οποίας καλούνται προς τροποποίηση. Οι επιλογές επίλυσης διαφοροποιούνται ανάλογα με τον επιλεγμένο αλγόριθμο.

Ομοίως, οι επιλογές επίλυσης ολικής βελτιστοποίησης (Global Options), ρυθμίζουν τη διαδικασία και το αποτέλεσμα της ολικής βελτιστοποίησης. Η ρύθμισή τους καταγράφεται στο Solver Object.

4.4.2 Ρύθμιση Επιλογών Αλγορίθμων

Όλες οι επιλογές επίλυσης είναι προκαθορισμένες. Με κατάλληλη τροποποίηση, π.χ. μείωση ή αύξηση ανοχής μεταξύ μεταβλητών ή τιμών αντικειμενικής συνάρτησης, αναφορά επαναλήψεων κ.α., η διαδικασία βελτιστοποίησης μπορεί να προσαρμοστεί στο εκάστοτε πρόβλημα, μειώνοντας τον χρόνο επίλυσης ή αυξάνοντας την ακρίβειά του αποτελέσματος, δίνοντας χρήσιμες πληροφορίες για αντιμετώπιση τυχών προβλημάτων κ.α.

4.4.2.1 Τοπική Βελτιστοποίηση

Για την τοπική βελτιστοποίηση τροποποιήθηκαν οι εξής επιλογές (Πίνακας 4-7).

Πίνακας 4-7: Επιλογές Τοπικής Βελτιστοποίησης fmincon.

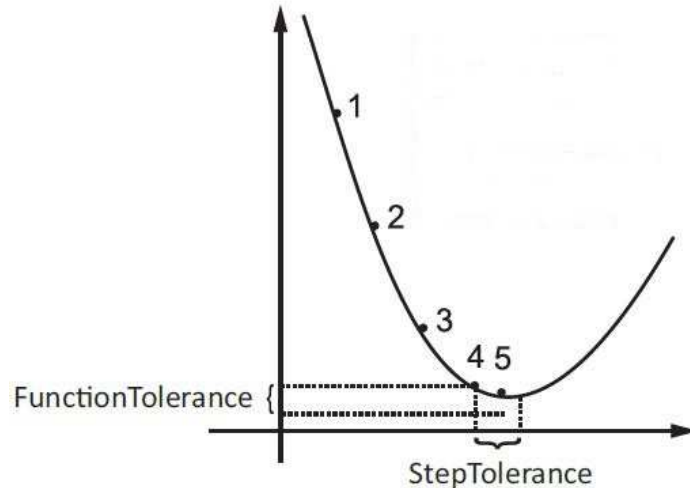
Επιλογές	Ρύθμιση
Diagnostics	'on'
Display	'final-detailed'
FunValCheck	'on'
StepTolerance	0,01
FunctionTolerance	0,00001

Η επιλογή Diagnostics στο 'on' παρουσιάζει πληροφορίες για την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς. Η επιλογή Display ορίζει το επίπεδο της απεικόνισης της λύσης ή των επαναλήψεων. Με ρύθμιση σε 'final-detailed' απεικονίζεται το τελικό αποτέλεσμα συνοδευόμενο από τεχνικό μήνυμα τερματισμού του αλγορίθμου. Με την επιλογή FunValCheck στο 'on' ελέγχεται η εγκυρότητα των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης και εμφανίζεται σφάλμα εάν το αποτέλεσμά της δεν ορίζεται, είναι μιγαδικός αριθμός ή άπειρο.

Ο αριθμός των επαναλήψεων σε μια βελτιστοποίηση εξαρτάται από τα κριτήρια τερματισμού της μεθόδου που χρησιμοποιείται. Τα κριτήρια αυτά διαθέτουν ανοχές που μπορούν να τροποποιηθούν, κάποιες από αυτές είναι οι StepTolerance και FunctionTolerance (Mathworks - MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Η ανοχή StepTolerance είναι ένα κατώτατο όριο στο μέγεθος του βήματος x , δηλαδή στο $|x_i - x_{i+1}|$. Όταν ο αλγόριθμος επιχειρήσει βήμα μικρότερο της τιμής StepTolerance, η επαναληπτική διαδικασία σταματά. Σε κάποιους αλγορίθμους, η ανοχή FunctionTolerance είναι ένα κατώτατο όριο διαφοράς της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης σε ένα βήμα. Εάν, δηλαδή, η διαφορά $|f(x_i) - f(x_{i+1})|$ είναι μικρότερη της τιμής FunctionTolerance, η επαναληπτική διαδικασία σταματά (Εικόνα 4-24) (Mathworks - MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Επειδή οι συνιστώσες του διανύσματος x αντιπροσωπεύουν είτε μήκη (a, x_t, y_t) εξαρτημάτων προς κατασκευή, είτε γωνίες (ω) τοποθέτησης, ακρίβεια x μεγαλύτερη του δεύτερου δεκαδικού ψηφίου δεν θα είχε ιδιαίτερο νόημα. Για τον λόγο αυτό ορίστηκε $StepTolerance = 0,01$. Όμοια, επειδή η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης χαρακτηρίζει ένα πραγματικό, μηχανικό σύστημα, η ανοχή της ορίστηκε σε $FunctionTolerance = 0,00001$.



Εικόνα 4-24: Απεικόνιση $StepTolerance$ και $FunctionTolerance$ σε βήματα επαναληπτικής διαδικασίας (Mathworks - MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Μέσω της `fmincon`, υπάρχουν τρεις διαφορετικοί αλγόριθμοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον εντοπισμό ακροτάτου στο παρόν πρόβλημα: `'interior-point'`, `'sqp'`, `'active-set'`. Ο `'interior-point'` είναι προεπιλεγμένος και προτείνεται να χρησιμοποιείται πρώτος. Οι άλλοι δύο αλγόριθμοι όμως, ενδέχεται να είναι γρηγορότεροι.

Για την επιλογή του αλγορίθμου της `fmincon` που τελικά θα χρησιμοποιηθεί μέσω της `GlobalSearch` για τον εντοπισμό του ολικού ακροτάτου, θα διενεργηθούν τρεις ενδεικτικές δοκιμές. Θα αναζητηθεί τρεις φορές τοπικό ακρότατο για το παρόν πρόβλημα, από το ίδιο αρχικό σημείο x_0 , με τις ίδιες τοπικές επιλογές επίλυσης (αυτές του πίνακα 4-7) και το μόνο που θα διαφέρει κάθε φορά θα είναι ο χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος. Το διάνυσμα δ_0 θα έχει βήμα 0,01 ($\delta_0 = [0: 0,01: 13]$).

Τα αποτελέσματα των δοκιμών συγκεντρώνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 4-8: Σύγκριση αλγορίθμων fmincon, $x_0 = [0,60,40,55]$.

Αποτέλεσμα		Αλγόριθμος		
		'interior- point'	'sqp'	'active-set'
x	x(1)	-6,3507	-6,1886	-6,1886
	x(2)	58,0444	58,0454	58,0454
	x(3)	36,9244	36,8675	36,8675
	x(4)	58,6225	58,9477	58,9477
fval		0,0272	0,0271	0,0270
exitflag		2	2	4
iterations		9	8	9
funcCount		53	47	45
time		0,88 sec	0,89 sec	1,59 sec

Μια λύση είναι καλύτερη από κάποια άλλη όταν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (fval) αυτής είναι μικρότερη (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016). Σύμφωνα, λοιπόν, με τον πίνακα 4-8 η λύση που προκύπτει από τον αλγόριθμο 'active-set' είναι καλύτερη.

Οι αλγόριθμοι 'interior- point' και 'sqp' τηρούν τα όρια τιμών των μεταβλητών σε κάθε επανάληψη. Υπάρχουν όμως και αλγόριθμοι, όπως ο 'active-set', των οποίων οι ενδιάμεσες επαναλήψεις οδηγούν σε σημεία εκτός της εφικτής περιοχής λύσης και ενδέχεται να παρουσιάσουν σφάλμα ή μη αναμενόμενα αποτελέσματα (Mathworks - MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, 2016). Η λύση του 'active-set' δεν τηρεί απόλυτα τους περιορισμούς ($constrviolation \neq 0$) (Βλ. 4.4.3). Δοκιμή μικρότερου βήματος διανύσματος δ_0 με τον 'active-set' διακόπτεται λόγω σφάλματος, μέσω της FunValCheck επιλογής, η οποία εντοπίζει μιγαδικούς αριθμούς στην αντικειμενική συνάρτηση. Θέτωντας την FunValCheck στο 'off' και επαναλαμβάνοντας τη δοκιμή, ο 'active-set' συγκλίνει σε μιγαδικό σημείο λύσης (Εικόνα 4-25). Για αυτούς τους λόγους δεν θα χρησιμοποιηθεί.

```

x =
-7.4692 + 0.0046i 56.0907 - 0.0033i 40.7431 + 0.0030i 60.0480 + 0.0032i

fval =
0.0280

```

Εικόνα 4-25: Μιγαδική λύση αλγορίθμου ‘active-set’ για τη δοκιμή (επιλογές επίλυσης αυτές του πίνακα 4-7, αρχικό σημείο $x_0 = [0,60,40,55]$ και διάνυσμα γωνιών εξωτερικού τροχού $\delta_o = [0:1:13]$).

Ο ‘sqp’ έχει τη δεύτερη καλύτερη τιμή fval, συγκλίνει σε λύση εξίσου γρήγορα με τον ‘interior-point’, κάνοντας λιγότερες επαναλήψεις και υπολογίζοντας λιγότερες φορές την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Επειδή στην GlobalSearch η fmincon θα εφαρμοστεί πολλές φορές, θα προτιμηθεί ο αλγόριθμος ‘sqp’²⁰, που διενεργεί τους λιγότερους υπολογισμούς.

4.4.2.2 Ολική Βελτιστοποίηση

Για την ολική βελτιστοποίηση τροποποιήθηκαν οι εξής επιλογές (Πίνακας 4-9).

Πίνακας 4-9: Επιλογές Ολικής Βελτιστοποίησης GlobalSearch.

Επιλογές	Ρύθμιση
Display	‘iter’
FunctionTolerance	0,00001
StartPointsToRun	‘bounds-ineqs’
XTolerance	0,009

Όπως και στην τοπική βελτιστοποίηση, έτσι και εδώ, η επιλογή Display καθορίζει το επίπεδο της απεικόνισης της λύσης. Με ρύθμιση ‘iter’, επιστρέφει αποτέλεσμα μετά την πρώτη εφαρμογή της fmincon, μετά το Στάδιο 1, μετά από κάθε 200 αρχικά σημεία και μετά από κάθε εφαρμογή fmincon, επιπρόσθετα της τελικής λύσης (περιγραφή του αλγορίθμου στο 3.3.2.2). Με την επιλογή StartPointsToRun στο ‘bounds-ineqs’ ο αλγόριθμος απορρίπτει αρχικά σημεία που δεν είναι εντός των ορίων τιμών ή δεν τηρούν τους ανισοτικούς περιορισμούς.

²⁰ Οι μέθοδοι σειριακού δευτεροβάθμιου προγραμματισμού (SQP) εκπροσωπούν τις τελευταίες εξελίξεις στις μη γραμμικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Έχουν γίνει αναφορές που αποδεικνύουν ότι εκδοχές SQP αποδίδουν καλύτερα από οποιαδήποτε άλλη μέθοδο σε επίπεδο εκτέλεσης, ακρίβειας και ποσοστού επιτυχημένων λύσεων, για ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων (Mathworks - MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Στην ολική βελτιστοποίηση οι ανοχές έχουν κάπως διαφορετική χρησιμότητα από ότι στην τοπική βελτιστοποίηση. Η ανοχή `FunctionTolerance` περιγράφει πόσο κοντά πρέπει να βρίσκονται δύο τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης ώστε να θεωρηθούν ίσες. Αντίστοιχα, η ανοχή `XTolerance` περιγράφει πόσο κοντά πρέπει να είναι δύο σημεία x ώστε να θεωρηθούν ίδια. Όταν δύο λύσεις έχουν απόσταση σημείων x μικρότερη από την ανοχή `XTolerance` και τιμές $f(x)$ με απόλυτη διαφορά μικρότερη της ανοχής `FunctionTolerance` θεωρούνται ίδιες και το τελικό διάνυσμα τοπικών ακροτάτων της μεθόδου `GlobalSearch` δεν ενημερώνεται. Εάν κάποιο από τα παραπάνω δεν ισχύει, οι λύσεις θεωρούνται διακριτές και καταγράφονται στο τελικό διάνυσμα λύσεων (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Επιλέχθηκαν τιμές ανοχών τέτοιες ώστε λύσεις με σημεία x που έχουν απόλυτη διαφορά δεύτερου δεκαδικού ψηφίου να θεωρούνται διακριτές και να επιστρέφονται στο αποτέλεσμα.

4.4.3 Αποτέλεσμα – Έξοδος

Η έξοδος ενός αλγορίθμου εκτός από τη λύση (διάνυσμα x) και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο λύσης (`fval`), μπορεί να δώσει σε μια δομή (output structure) διάφορες πληροφορίες για το αποτέλεσμα. Οι πληροφορίες και η δομή εξόδου εξαρτώνται από το είδος του αλγορίθμου και το είδος της βελτιστοποίησης (τοπικής ή ολικής).

Στην τοπική βελτιστοποίηση, μετά τον τερματισμό του αλγορίθμου, εκτός από τα x και `fval`, προαιρετικά επιστρέφονται ο λόγος τερματισμού του αλγορίθμου (`exitflag`), συμβολικά μέσω ακέραιων αριθμών, και η δομή εξόδου. Η δομή εξόδου περιλαμβάνει πληροφορίες για τον αριθμό των επαναλήψεων, τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης, τον αλγόριθμο, το τελευταίο βήμα του αλγορίθμου, την παράβαση περιορισμών και τις συνθήκες βελτιστότητας (Βλ. 3.2.3).

Για τη δοκιμή του 4.4.2.1 με αλγόριθμο `'sqp'`, η έξοδος είχε `exitflag = 2`. Αυτό σημαίνει ότι λύση προέκυψε διότι το τελευταίο βήμα ήταν μικρότερο των ανοχών `StepTolerance` και `ConstraintTolerance` που είχαν τεθεί. Ο γενικός κανόνας είναι πως ο αριθμός `exitflag` είναι θετικός ακέραιος όταν ο αλγόριθμος συγκλίνει σε λύση. Η δομή εξόδου είχε τη μορφή της εικόνας 4-26. Από αυτή, προκύπτει ότι, κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου, πραγματοποιήθηκαν 8 επαναλήψεις (iterations), 47 υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης (`funcCount`), 0 παραβάσεις περιορισμών (`constrviolation`) – στην πραγματικότητα πρόκειται για τη μέγιστη τιμή συνάρτησης περιορισμού $g_i(x)$ –, το μέγεθος της τελευταίας μετατόπισης x ήταν 1 (stepsize) και ο υπολογισμός της 1^{ης} παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης ήταν 0,0128 (`firstorderopt`).

```

iterations: 8
funcCount: 47
algorithm: 'sequential quadratic programming'
message: [1x726 char]
constrviolation: 0
stepsize: 1
firstorderopt: 0.0128

```

Εικόνα 4-26: Δομή εξόδου αλγορίθμου 'sqp'.

Ο υπολογισμός firstorderopt δείχνει πόσο κοντά είναι το σημείο λύσης x στο ακρότατο. Η τιμή της 1^{ης} παραγώγου – ή μερικής παραγώγου – πρέπει να είναι μηδέν στο ακρότατο. Είναι αναγκαία και όχι ικανή συνθήκη βελτιστότητας (Mathworks - MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, 2016).

Συμπληρωματικά με τα παραπάνω, οι τοπικοί αλγόριθμοι δύναται να επιστρέψουν πολλαπλασιαστές Lagrange των περιορισμών για το σημείο λύσης x , το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της αντικειμενικής συνάρτησης στο x και την εκτιμώμενη τιμή της εσσιανής σε αυτό.

Στην ολική βελτιστοποίηση, για λύση ολικού ακροτάτου, ο αλγόριθμος επιστρέφει την τοπική λύση x με την μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης fval. Προαιρετικά επιστρέφονται ο λόγος τερματισμού του αλγορίθμου (eflag) και η δομή εξόδου. Η ένδειξη eflag έχει τη λογική της ένδειξης exitflag των τοπικών αλγορίθμων. Εάν η eflag είναι θετικός αριθμός σημαίνει πως ο αλγόριθμος έχει εντοπίσει τουλάχιστον ένα τοπικό ακρότατο. Η δομή εξόδου έχει τη μορφή της εικόνας 4-27. Από αυτή, προκύπτουν πληροφορίες για τον αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης (funcCount), τις φορές που «κάλεσε» τοπικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης (localSolverTotal), τις φορές που ο τοπικός αλγόριθμος είχε θετική exitflag (localSolverSuccess), τις φορές που δεν ολοκληρώθηκε²¹ (localSolverIncomplete) και τις φορές που τερμάτισε λόγω σφάλματος ή δεν εντόπισε εφικτή λύση (localSolverNoSolution).

```

funcCount:
localSolverTotal:
localSolverSuccess:
localSolverIncomplete:
localSolverNoSolution:
message:

```

Εικόνα 4-27: Δομή αλγορίθμου GlobalSearch για λύση ολικού ακροτάτου.

²¹ Η τοπική βελτιστοποίηση δεν ολοκληρώνεται εάν ο αριθμός των επαναλήψεων υπερβεί τις MaxIterations ή η αντικειμενική συνάρτηση υπολογιστεί παραπάνω από MaxFunctionEvaluations φορές, όπως αυτά οριστούν από τον χρήστη στις επιλογές επίλυσης (Local Options). Τότε η ένδειξη exitflag είναι μηδέν. Οι προεπιλογές για το παρόν πρόβλημα είναι: MaxIterations = 400 και MaxFunctionEvaluations = 400 (για τον αλγόριθμο 'sqp').

5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η βέλτιστη γεωμετρία μοχλικού συστήματος για το μονοθέσιο, όπως προέκυψε από την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης στο MATLAB. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί εποπτικά, μέσω διαγραμμάτων, η σχέση μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών και των συναρτήσεων σφάλματος και απόκλισης και μια σύντομη ανάλυση ευαισθησίας αυτών. Τέλος, θα διαμορφωθεί διεπιφάνεια χρήστη για το πρόβλημα, με χρήση της εργαλειοθήκης GUIDE²² του MATLAB, και ένας σύντομος κώδικας προσομοίωσης του κινούμενου μηχανισμού.

5.1 ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ

Για να προκύψει από τον προγραμματισμό ο βέλτιστος μηχανισμός, θα πρέπει το πρόβλημα να προσαρμοστεί στα δεδομένα και τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του υπό σχεδιασμό οχήματος. Θα πρέπει, δηλαδή, να καθοριστούν οι τιμές των σταθερών x_{max} , y_{max} , y_0 , y_{kpi} , w , l και τα όρια τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών, όπως προκύπτουν από το σχεδιασμό του αυτοφερόμενου πλαισίου και των δομικών του χαρακτηριστικών (Λαμπρόπουλος και Ιατρού, 2014), καθώς και το επιθυμητό εύρος στροφής του εξωτερικού τροχού δ_o .

Στο 5.1.1 παρατίθενται τα w, l και το επιθυμητό εύρος στροφής, και στο 5.1.2 παρουσιάζονται τα υπόλοιπα σχεδιαστικά δεδομένα και η βέλτιστη γεωμετρία του μηχανισμού.

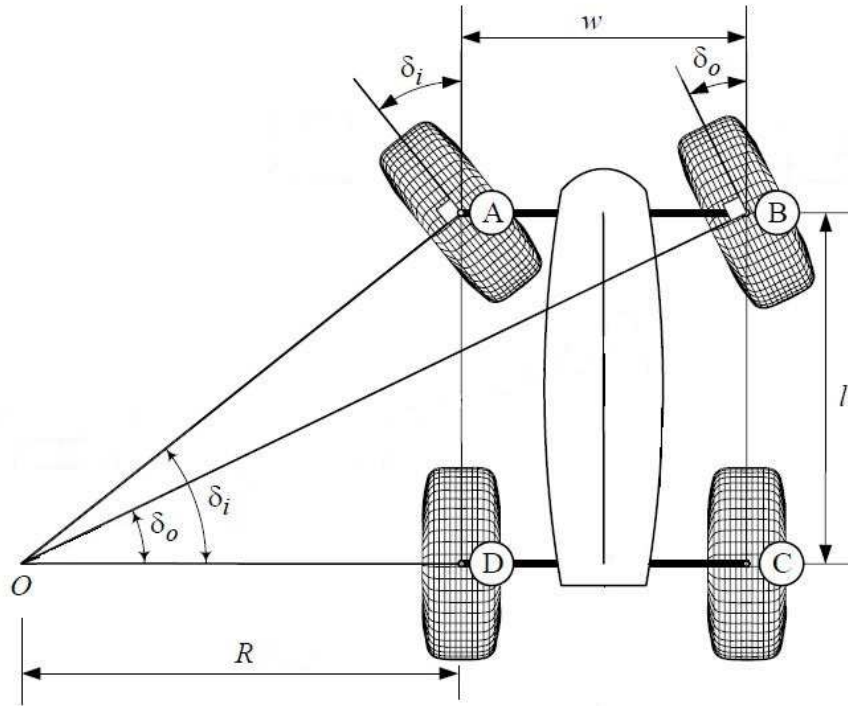
5.1.1 Επιθυμητό Εύρος Κίνησης

Το όχημα, για να εκπληρώσει επιτυχώς τον τεχνικό έλεγχο του διαγωνισμού, θα πρέπει να μπορεί να διανύσει ημικύκλιο ακτίνας 8 μέτρων. Ως ακτίνα ορίζεται η απόσταση μεταξύ του κέντρου του κύκλου και του εξωτερικού τροχού του οχήματος. Η δοκιμή πραγματοποιείται σε συνθήκες μηδενικής ταχύτητας, με κύλιση του οχήματος χωρίς ενεργή πρόωση. Σε αγωνιστικές συνθήκες, οι στροφές που καλείται να εκτελέσει είναι μεγαλύτερης ή ίσης ακτίνας, ασχέτως της εκάστοτε πίστας.

Όταν τηρείται η αρχή Ackermann, οι γωνίες των τροχών για δεδομένη ακτίνα στροφής είναι (Εικόνα 5-1) (Jazar, 2009):

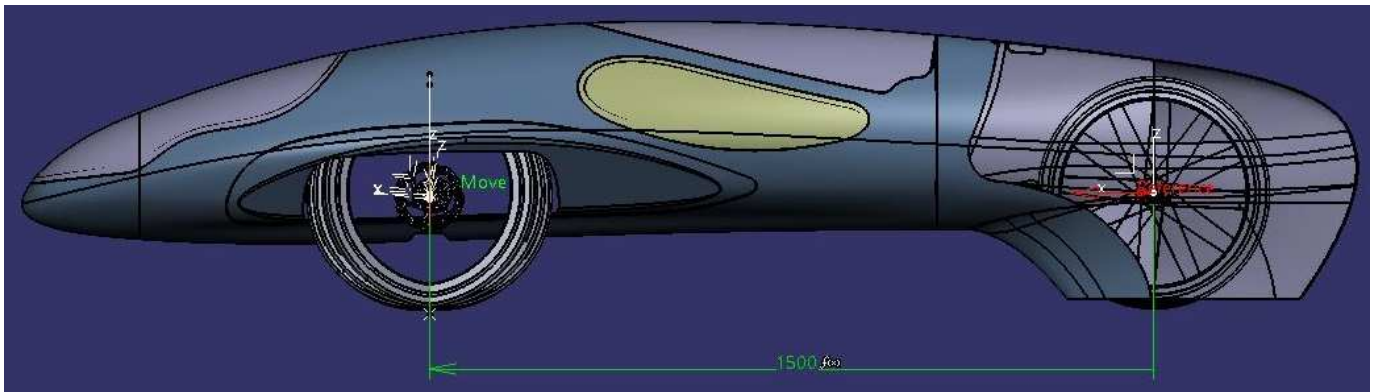
$$\delta_o = \tan^{-1}\left(\frac{l}{R}\right), \delta_i = \tan^{-1}\left(\frac{l}{R-w}\right)$$

²² Η εργαλειοθήκη GUIDE διαθέτει ένα drag-and-drop περιβάλλον διαμόρφωσης διεπιφανειών χρήστη με στοιχεία ελέγχου. Ο κώδικας που ρυθμίζει τη λειτουργία των στοιχείων ελέγχου της εφαρμογής προγραμματίζεται ξεχωριστά σε M-file.



Εικόνα 5-1: Όχημα σε στροφή, με κέντρο περιστροφής O (Jazar, 2009).

Το μεταξόνιο του μονοθεσίου είναι $l = 1500mm$ και το μετατρόχιο $w = 312mm$ (Εικόνες 5-2, 5-3). Το μετατρόχιο μετράται από πείρο σε πείρο.

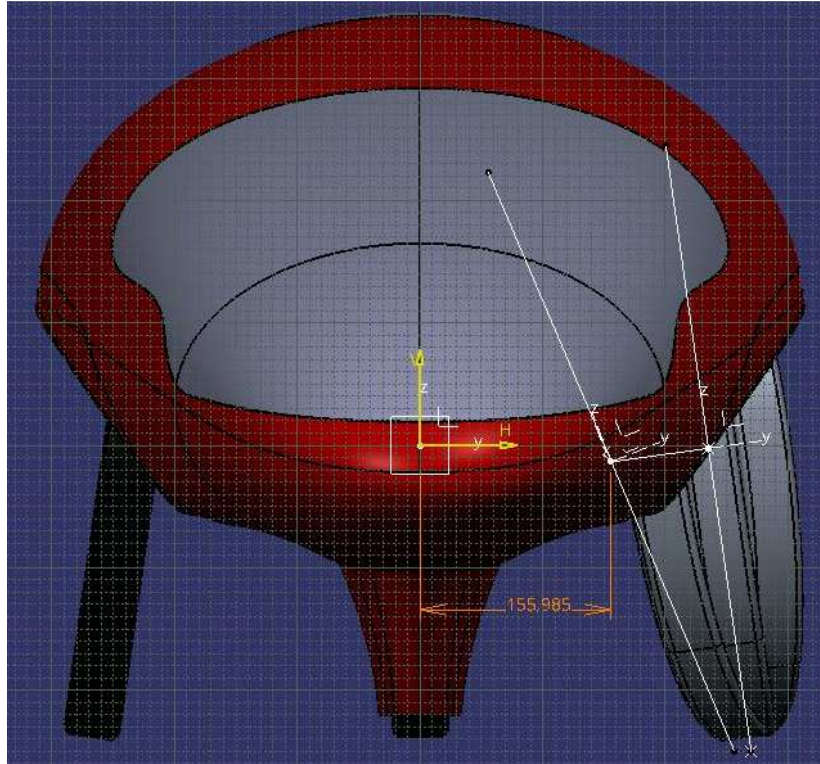


Εικόνα 5-2: Μεταξόνιο (l) μονοθεσίου.

Το όχημα θα έχει τις μέγιστες γωνίες στροφής στη μικρότερη ακτίνα στροφής R . Για $R = 8000mm$, τα δ_o και δ_i θα είναι (Πίνακας 5-1):

Πίνακας 5-1: Μέγιστες επιθυμητές γωνίες στροφής τροχών.

R (m)	δ_o (μοίρες)	δ_i (μοίρες)
8000	10,62°	11,04°



Εικόνα 5-3: Απόσταση κέντρου περιστροφής τροχού από κέντρο οχήματος $\left(\frac{w}{2}\right)$ σε μπροστά όψη οχήματος.

Στην πραγματικότητα, το όχημα δεν θα στρίβει με απόλυτη Ackermann, οπότε για την επίτευξη της ακτίνας στροφής R με κάποια βεβαιότητα (Βλ. 4.2.5), το εύρος της επιθυμητής κίνησης, για το οποίο θα γίνει βελτιστοποίηση του συστήματος, θα αυξηθεί μερικές μοίρες.

Το επιθυμητό, λοιπόν, εύρος γωνίας στροφής εξωτερικού τροχού θα οριστεί στο σύνολο $\delta_o \in [0,13]$, εκφρασμένο σε μοίρες.

5.1.2 Γεωμετρία

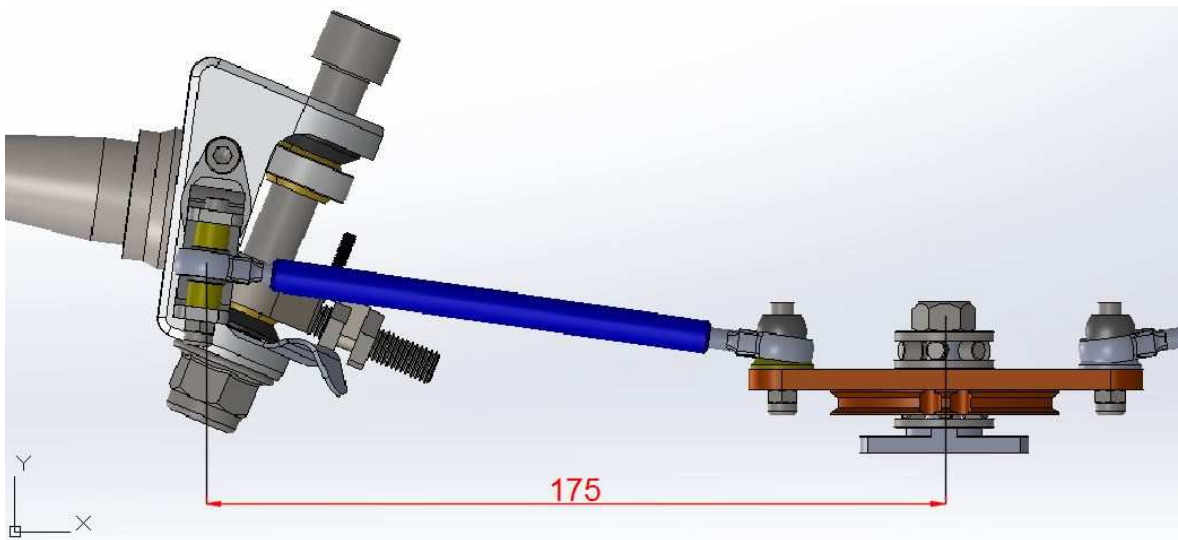
Με τη μορφή που έχουν δομηθεί οι εξισώσεις στο 4.2.4, τα μεγέθη y_{max} και y_{kpi} δεν είναι απαραίτητα για τον προσδιορισμό της γωνίας δ_i και για το λόγο αυτό θα παραληφθούν. Στον παρακάτω πίνακα 5-2 δίνονται οι τιμές x_{max} , y_o και τα όρια τιμών των μεταβλητών, όπως προκύπτουν από τους χωροταξικούς περιορισμούς (Βλ. 4.3.2.1) (Εικόνες 5-4, 5-5).

Πίνακας 5-2: Μεγέθη διατιθέμενου χώρου υποσυστήματος & Όρια τιμών μεταβλητών (μήκη σε χιλιοστά, γωνίες σε μοίρες).

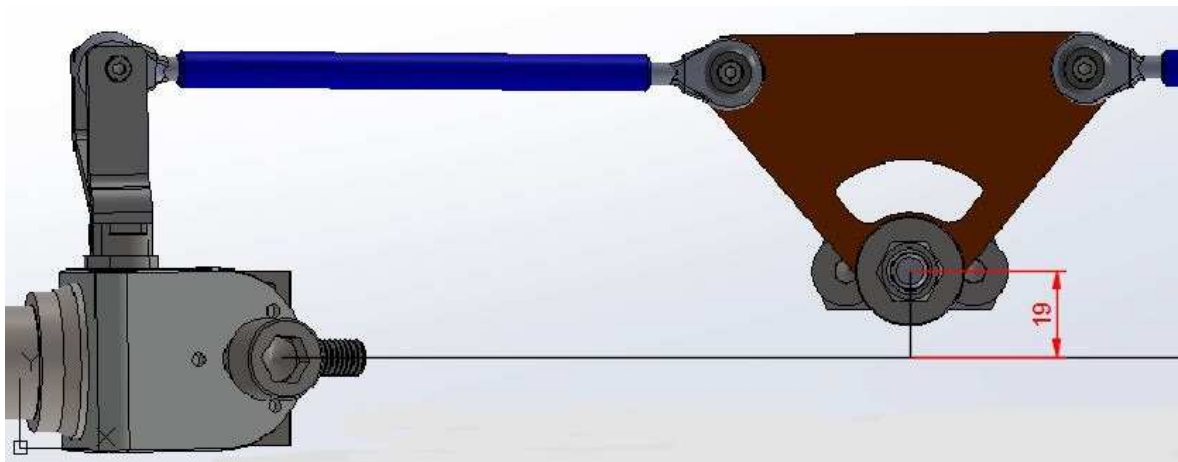
Διατιθέμενος Χώρος	
x_{max}	350
y_o	19

Όρια Τιμών Μεταβλητών		
Μεταβλητή	Min	Max
ω	-20°	20°
α	55	64
x_t	30	60
y_t	30	60

Το μέγεθος x_{max} χρησιμοποιείται στον υπολογισμό βραχιόνων και θέσεων αυτών στο μηχανισμό. Η απόσταση δεν μετράται από πείρο σε πείρο, καθώς ο αγκωνωτός βραχίονας διεύθυνσης δεν τοποθετείται στο κέντρο του πείρου, αλλά μέσω πλήμνης συνδέεται σε κάποια απόσταση από αυτόν (Εικόνα 5-4).



Εικόνα 5-4: Απόσταση $\frac{x_{max}}{2}$, πίσω όψη συστήματος.



Εικόνα 5-5: Απόσταση y_o , κάτοψη.

Με εισαγωγή των παραπάνω δεδομένων στο πρόγραμμα βελτιστοποίησης, προκύπτει το εξής αποτέλεσμα (Πίνακας 5-3).

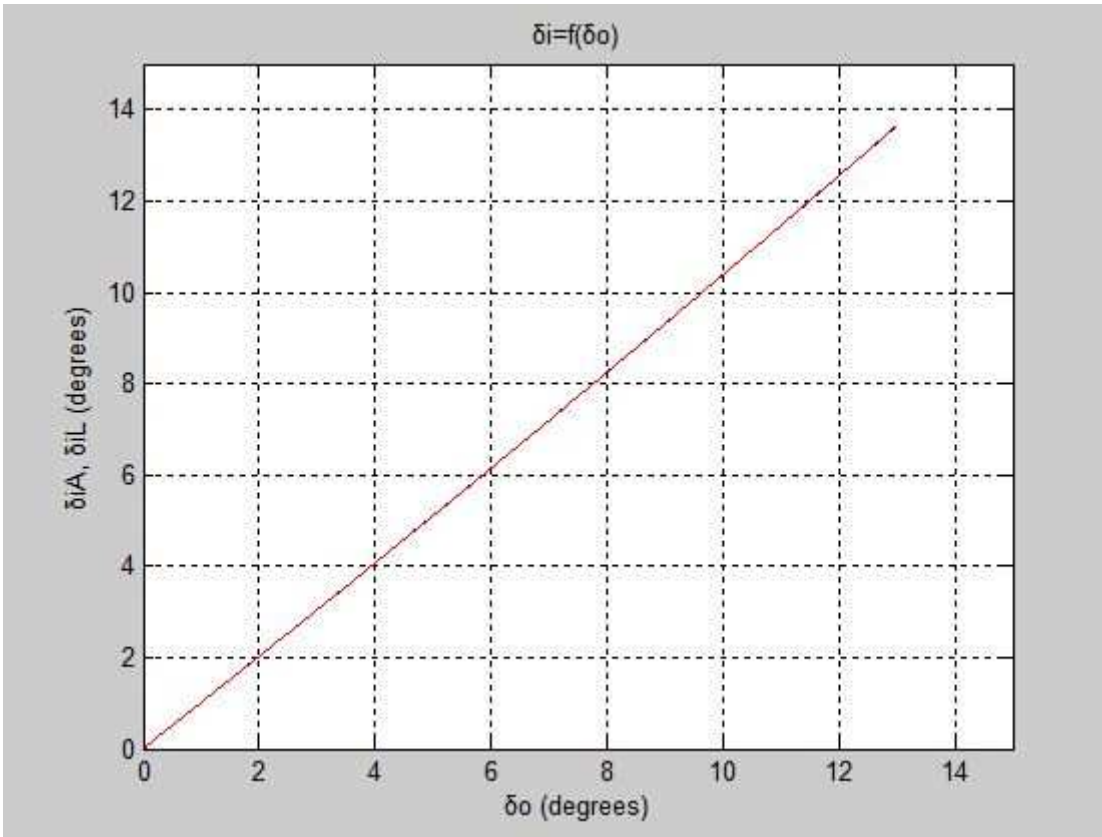
Πίνακας 5-3: Βέλτιστη Γεωμετρία

Μεταβλητές:			
ω (deg)	a (mm)	x_t (mm)	y_t (mm)
-10,3676	55,5393	49,6594	60,0000
Απόκλιση:			
			0,0258
Αξιολόγηση Λύσης (eflag):			
			1
Μήκη Βραχιόνων:			
a (mm)	b (mm)	c (mm)	d (mm)
55,5393	162,0083	64,9347	176,0284
Γωνίες Βραχιόνων ($\delta_o = 0^\circ$):			
θ_2 (deg)	θ_4 (deg)	φ_2 (deg)	φ_4 (deg)
100,3676	112,4812	67,5188	79,6324

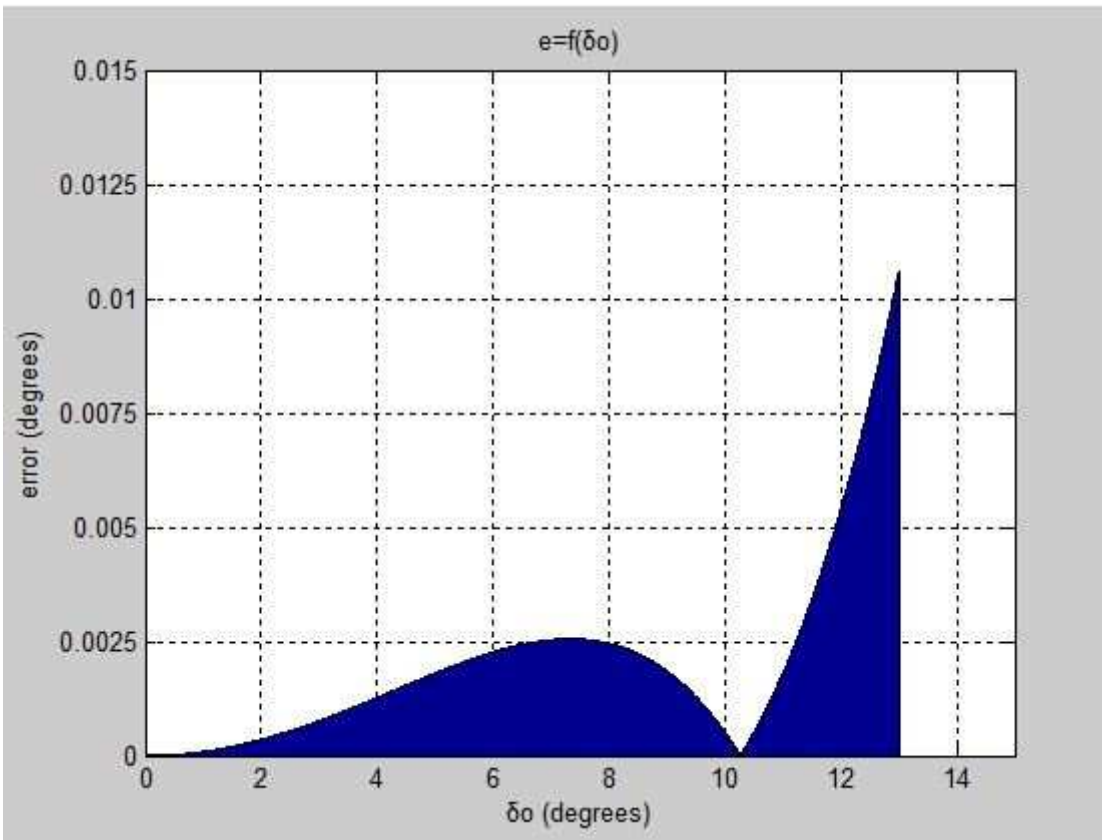
Λύση με $eflag = 1$ δηλώνει ότι η τιμή της 1^{ης} παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης για το σημείο λύσης είναι μικρότερη της ανοχής OptimalityTolerance. Η ανοχή δεν έχει ρυθμιστεί στο παρόν πρόβλημα. Η προεπιλογή της είναι $OptimalityTolerance = 1 \times e^{-6}$.

Ακολουθούν τρία διαγράμματα για το βέλτιστο μηχανισμό. Στο 1^ο διάγραμμα (Εικόνα 5-6) απεικονίζονται η γωνία στροφής εσωτερικού τροχού στο μοχλικό σύστημα δ_{iL} και η γωνία στροφής εσωτερικού τροχού συνθήκης Ackermann δ_{iA} συναρτήσει γωνίας στροφής εξωτερικού τροχού δ_o . Στο 2^ο διάγραμμα (Εικόνα 5-7) απεικονίζεται η συνάρτηση σφάλματος e ως προς τη γωνία στροφής εξωτερικού τροχού δ_o . Τέλος, στο 3^ο διάγραμμα (Εικόνα 5-8) απεικονίζεται η γωνία τιμονιού $\Delta\varphi_4$ συναρτήσει της γωνίας στροφής των τροχών δ (Βλ. 4.2.5).

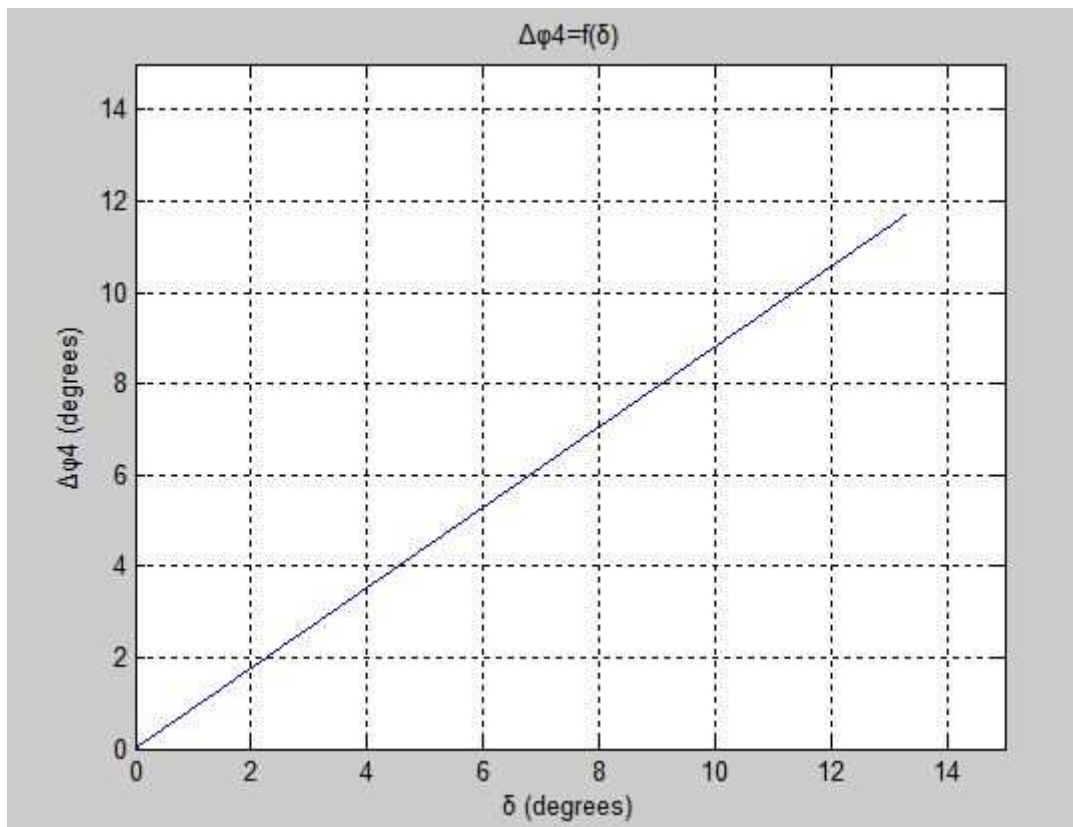
Στο 1^ο διάγραμμα, τα σημεία δ_{iA} είναι μπλέ, ενώ τα σημεία δ_{iL} είναι κόκκινο χρώματος. Ο βαθμός επικάλυψής τους είναι εμφανής. Στο 2^ο διάγραμμα παρουσιάζεται ένα σημείο (αντιστοιχεί σε μια ακτίνα στροφής οχήματος) λίγο μετά τις 10^ο δ_o όπου ο μηχανισμός επιτυγχάνει απόλυτη Ackermann. Στο 3^ο διάγραμμα, η κλίση της ευθείας εκφράζει τη σχέση μετάδοσης τιμονιού.



Εικόνα 5-6: Διάγραμμα 1, $\delta_i = f(\delta_o)$.



Εικόνα 5-7: Διάγραμμα 2, $e = f(\delta_o)$.



Εικόνα 5-8: Διάγραμμα 3, $\Delta\phi_4 = f(\delta)$.

5.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας των εξισώσεων κίνησης ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές είναι δύσκολο να αποδοθούν ποιοτικά συμπεράσματα για το σύστημα από τη μορφή των εξισώσεων. Για να εξεταστεί, λοιπόν, πως επηρεάζει κάθε μεταβλητή την κίνηση του συστήματος και σε τι βαθμό, θα διαμορφωθούν τρία είδη γραφικών παραστάσεων.

Τα πρώτα θα είναι της μορφής $integ = f(x(i))$, όπου θα παρουσιάζεται η τιμή της απόκλισης (*integ*) συναρτήσει μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, όπου $i \in \{1,2,3,4\}$ δείκτης των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Τα δεύτερα θα είναι της μορφής $e = f(x(i), \delta_o)$, όπου θα παρουσιαστούν οι τιμές της συνάρτησης σφάλματος *e* συναρτήσει μιας ανεξάρτητης μεταβλητής για κάθε πιθανή γωνία εξωτερικού τροχού δ_o . Τα διαγράμματα αυτά θα έχουν τρισδιάστατη απεικόνιση.

Τέλος, θα πραγματοποιηθεί μια σύντομη ανάλυση ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης και τα αποτελέσματά της θα αποτυπωθούν σε κατάλληλα ραβδογράμματα.

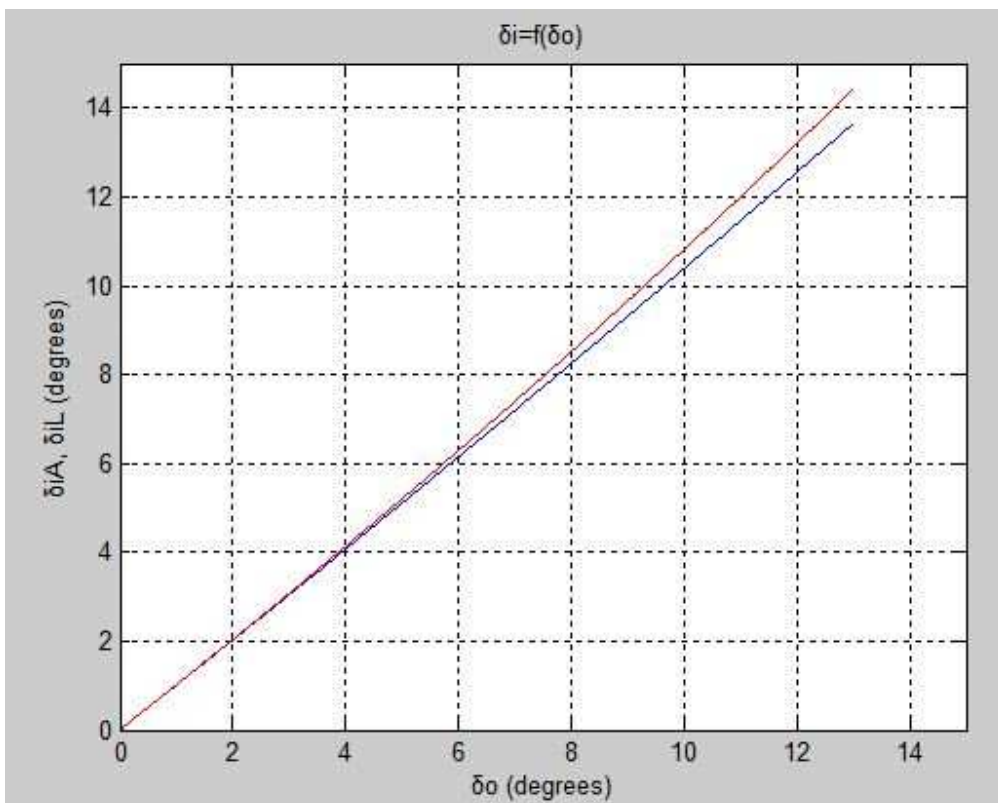
Για την διαμόρφωση των γραφικών παραστάσεων δεν θα χρησιμοποιηθεί η βέλτιστη γεωμετρία, αλλά μια ενδεικτική, «καλή» γεωμετρία με τυπικές τιμές

μεταβλητών, της οποίας οι γωνίες στροφής εσωτερικού τροχού δ_{iL} δεν θα διαφέρουν περισσότερο από 1° από τις αντίστοιχες γωνίες δ_{iA} της συνθήκης Ackermann.

Τα βασικά χαρακτηριστικά της «τυπικής» γεωμετρίας παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα.

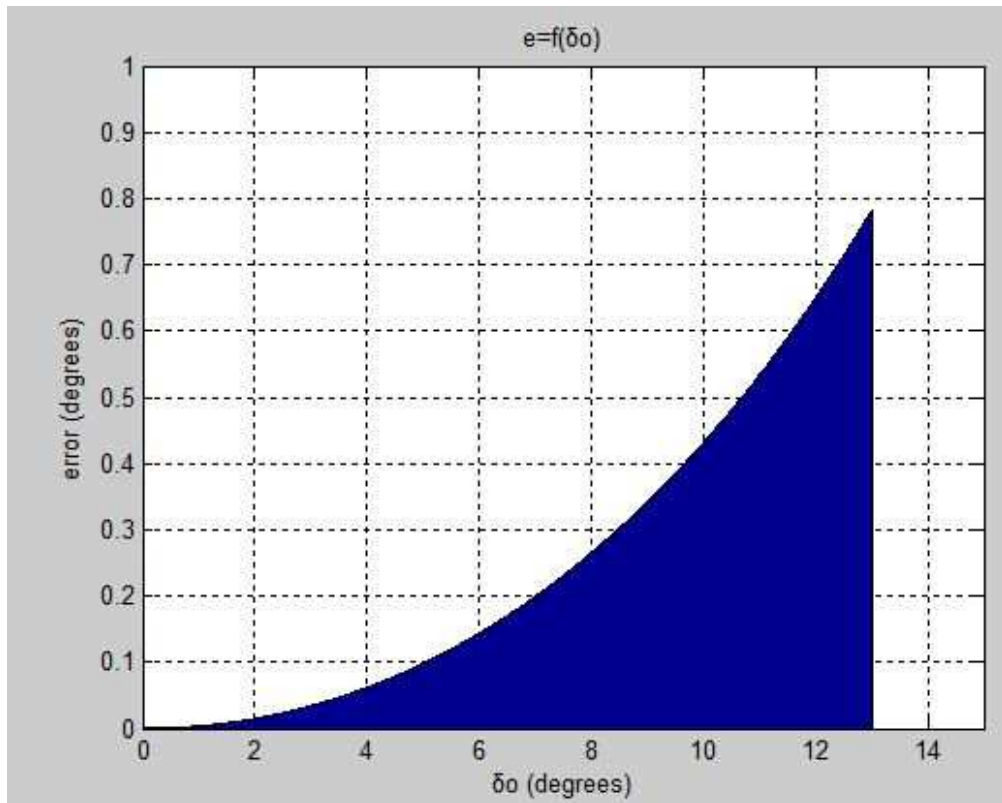
Πίνακας 5-4: Τυπική Γεωμετρία.

Μεταβλητές:			
ω (deg)	a (mm)	x_t (mm)	y_t (mm)
0	60	40	55
Απόκλιση:			
3,1557			
Μήκη Βραχιόνων:			
a (mm)	b (mm)	c (mm)	d (mm)
60,0000	155,6310	58,5235	176,0284
Γωνίες Βραχιόνων ($\delta_o = 0^\circ$):			
θ_2 (deg)	θ_4 (deg)	φ_2 (deg)	φ_4 (deg)
90,0000	109,9831	70,0169	90,0000



Εικόνα 5-9: Διάγραμμα $\delta_i = f(\delta_o)$ τυπικής γεωμετρίας.

Για γωνίες εξωτερικού τροχού μεγαλύτερες των 5° , ο εσωτερικός τροχός του παραπάνω συστήματος (γωνίες δ_{iL}) στρίβει περισσότερο από ό,τι ενδείκνυται στη συνθήκη Ackermann. Στο διάγραμμα της εικόνας 5-9, τα σημεία δ_{iA} είναι μπλέ, ενώ τα σημεία δ_{iL} είναι κόκκινου χρώματος.



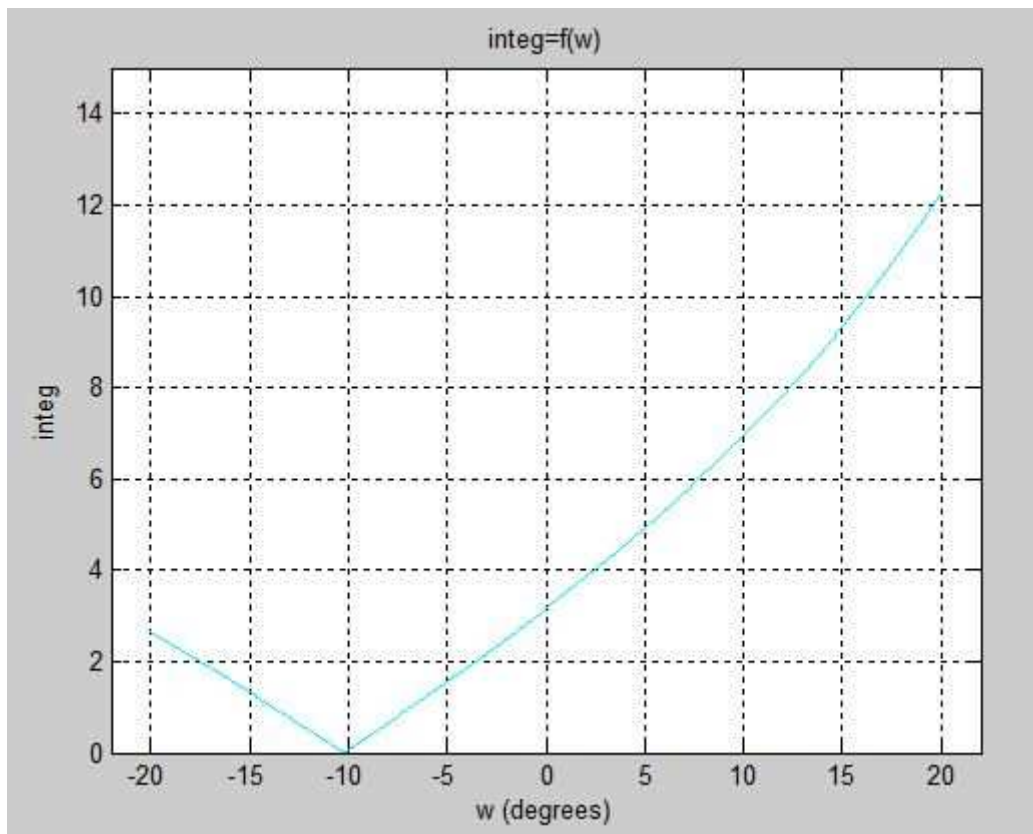
Εικόνα 5-10: Διάγραμμα $e = f(\delta_o)$ τυπικής γεωμετρίας.

5.2.1 Διαγράμματα Ανεξάρτητων Μεταβλητών

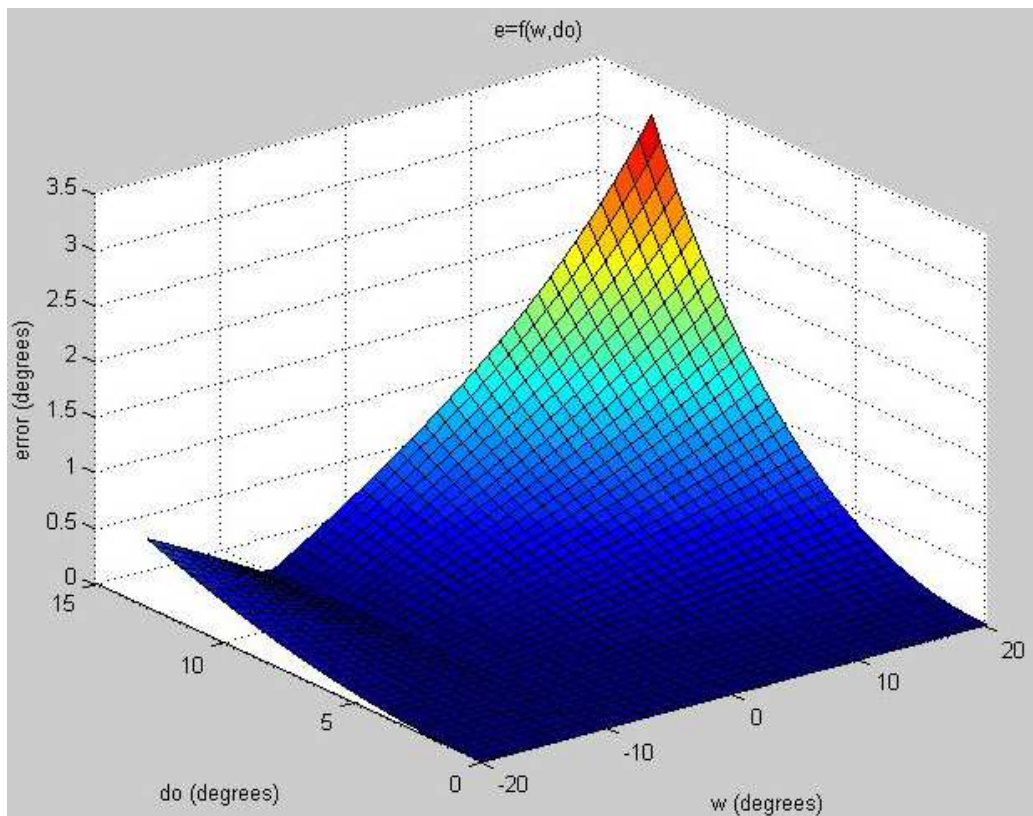
Για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή θα παρουσιαστούν οι δύο πρώτες μορφές γραφικών παραστάσεων που αναφέρθηκαν στην αρχή του υποκεφαλαίου 5.2.

Κάθε φορά τρεις μεταβλητές θα λαβαίνουν σταθερές τιμές και μια θα μεταβάλλεται εντός του εύρους τιμών αυτής, σύμφωνα με τα δεδομένα του παρόντος προβλήματος (Βλ. Πίνακα 5-2, Όρια Τιμών Μεταβλητών). Οι σταθερές τιμές θα είναι οι αντίστοιχες της τυπικής γεωμετρίας (Βλ. Πίνακα 5-4).

5.2.1.1 Γωνία Τοποθέτησης Αγκωνοποτού Βραχίονα (ω)

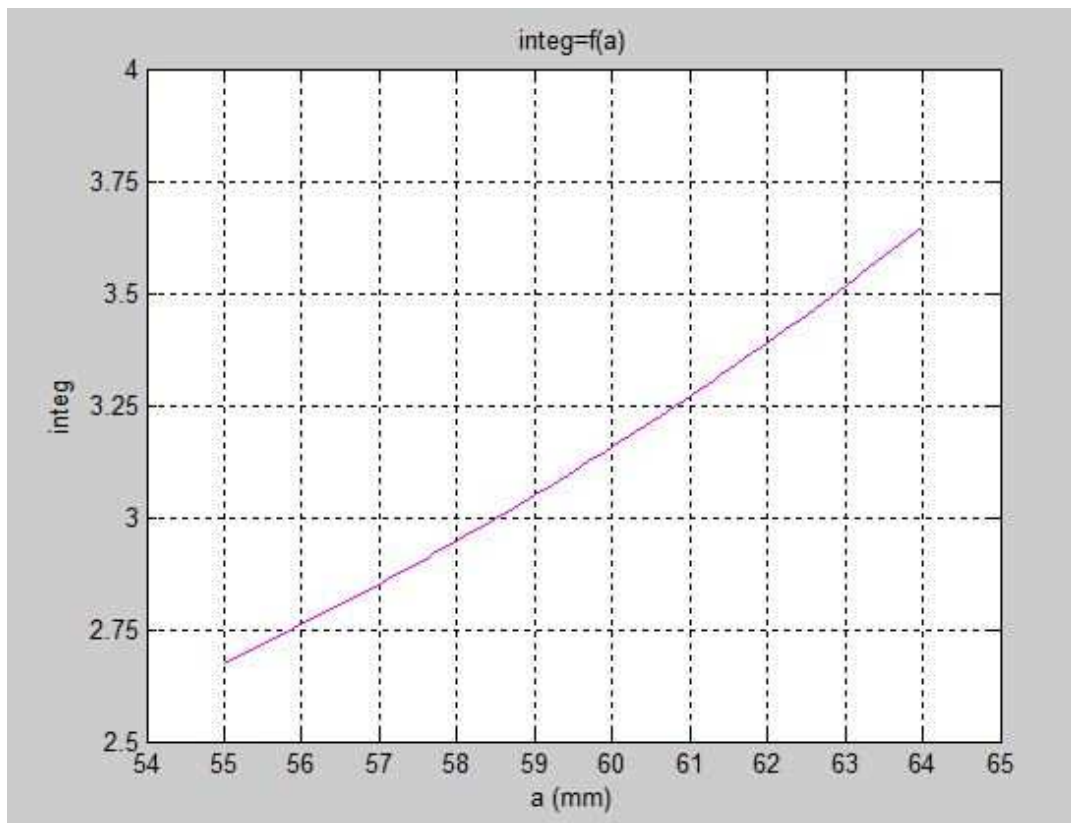


Εικόνα 5-11: Διάγραμμα $integ = f(\omega)$.

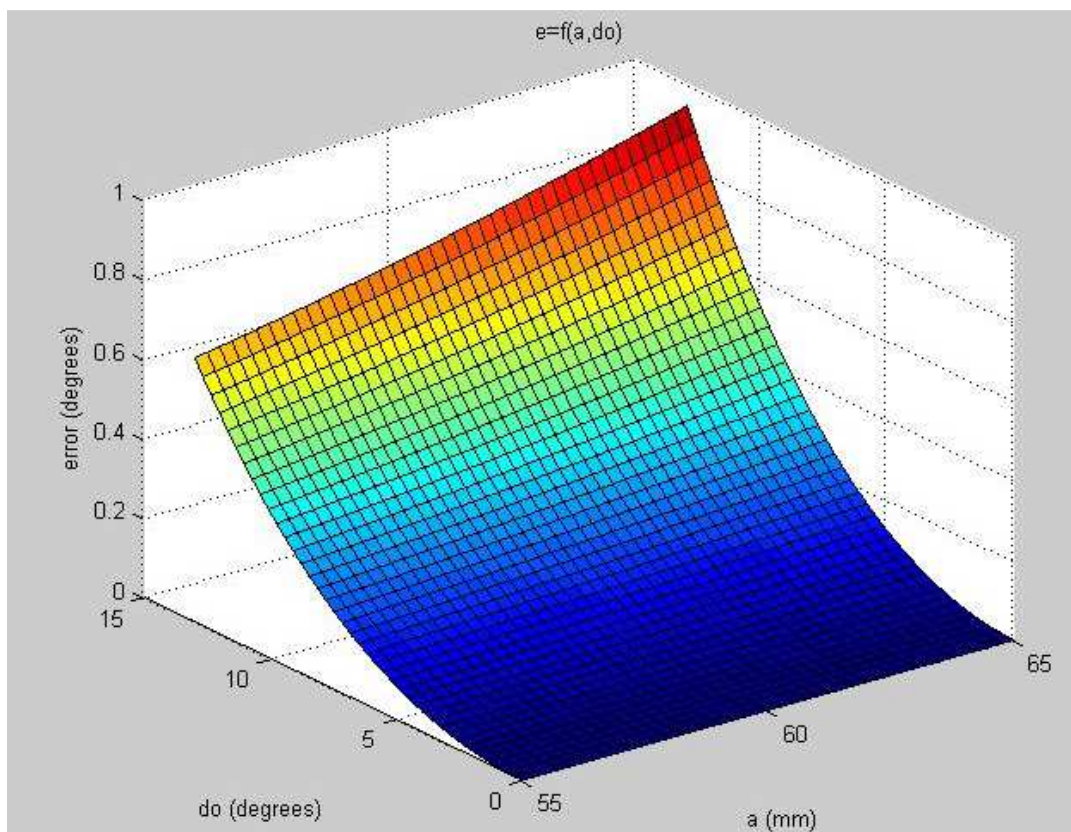


Εικόνα 5-12: Διάγραμμα $e = f(\omega, \delta_o)$.

5.2.1.2 Μήκος Αγκωνωτού Βραχίονα (a)

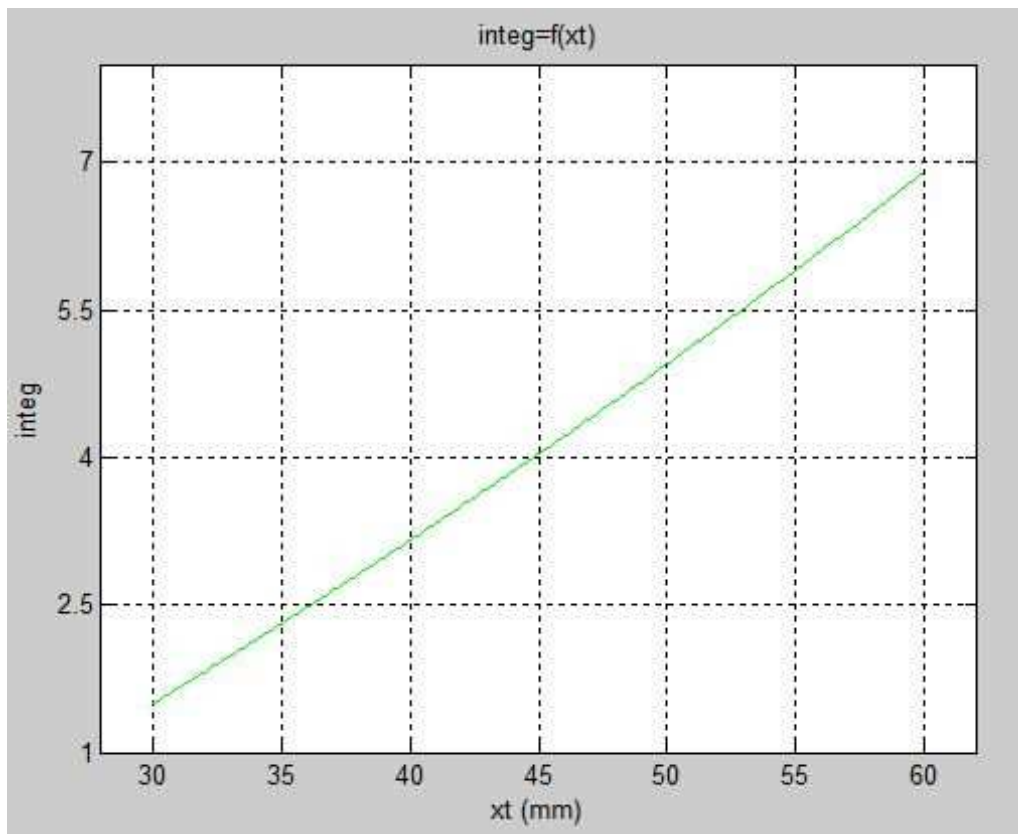


Εικόνα 5-13: Διάγραμμα $integ = f(a)$.

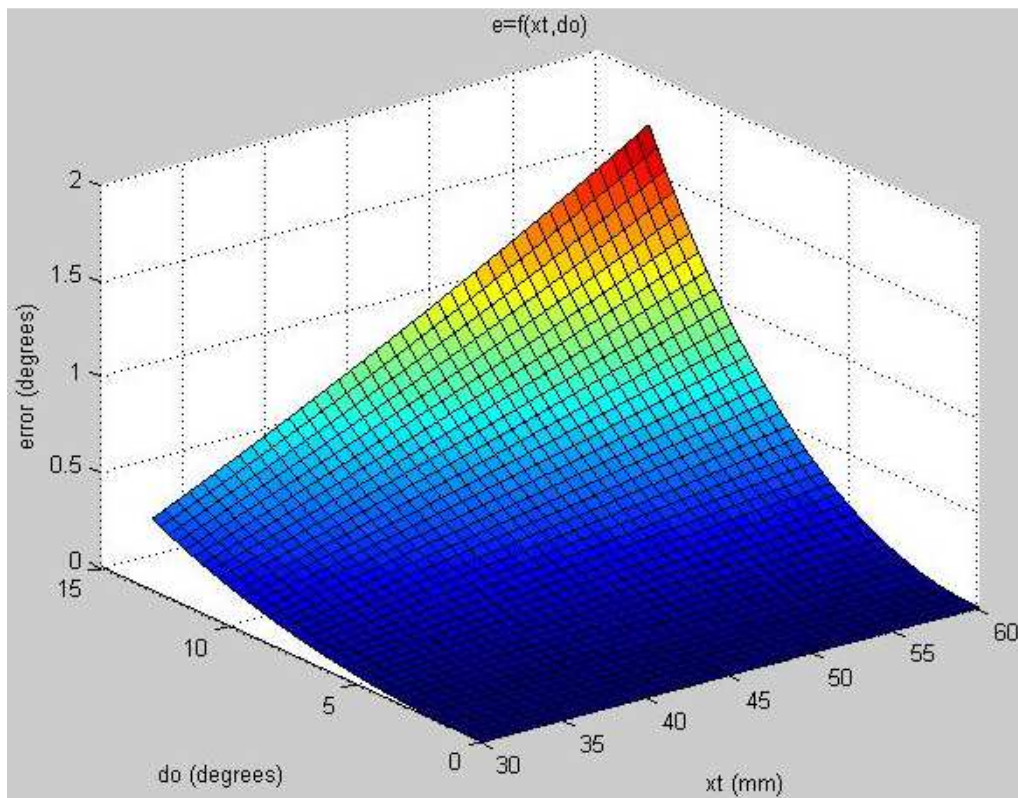


Εικόνα 5-14: Διάγραμμα $e = f(a, \delta_o)$.

5.2.1.3 Βάση Τριγώνου Διευθύνσεως (x_t)

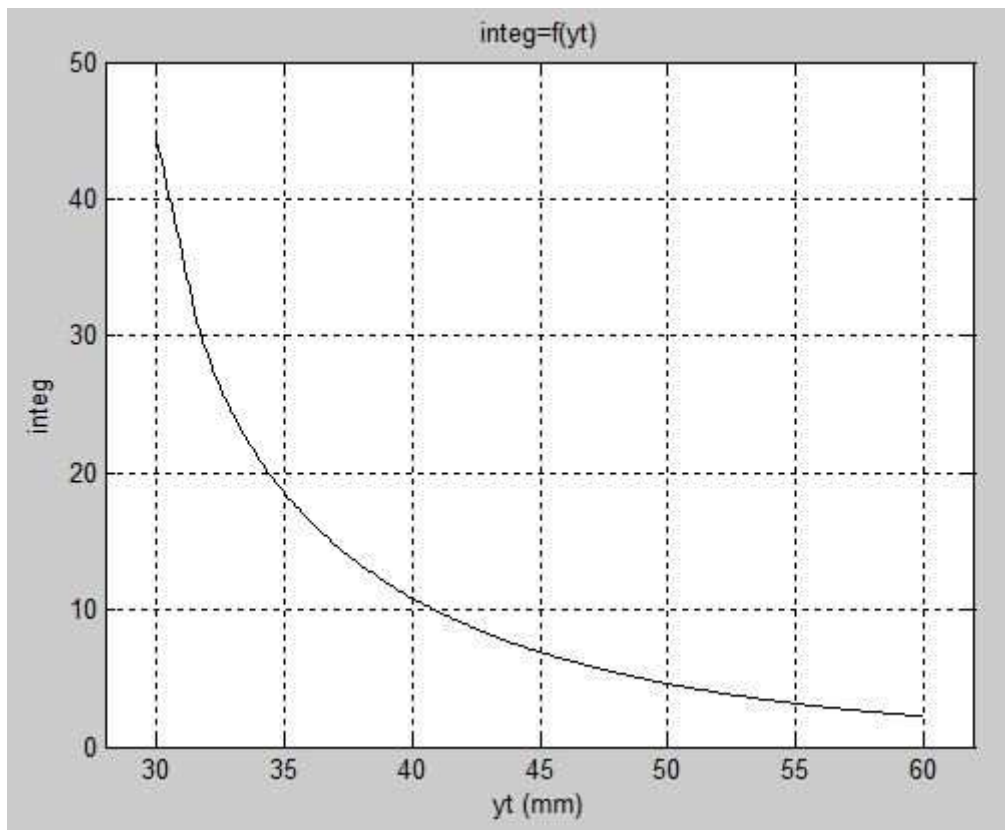


Εικόνα 5-15: Διάγραμμα $integ = f(x_t)$.

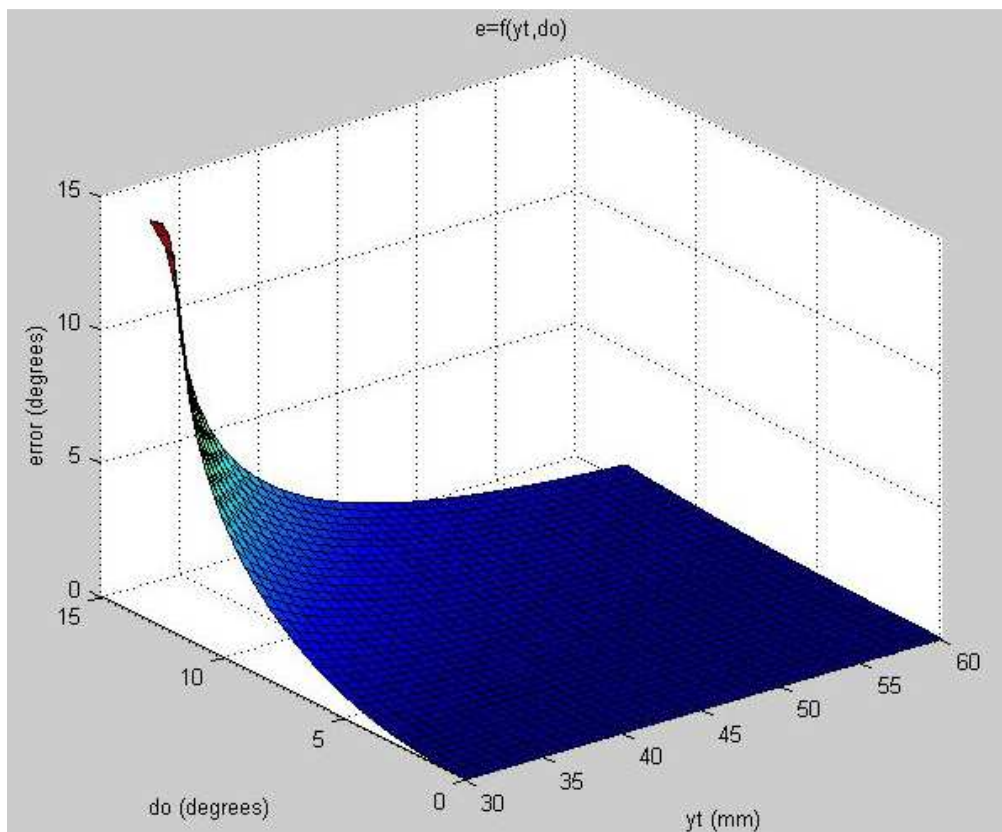


Εικόνα 5-16: Διάγραμμα $e = f(x_t, \delta_o)$.

5.2.1.4 Ύψος Τριγώνου Διευθύνσεως (y_t)



Εικόνα 5-17: Διάγραμμα $integ = f(y_t)$.

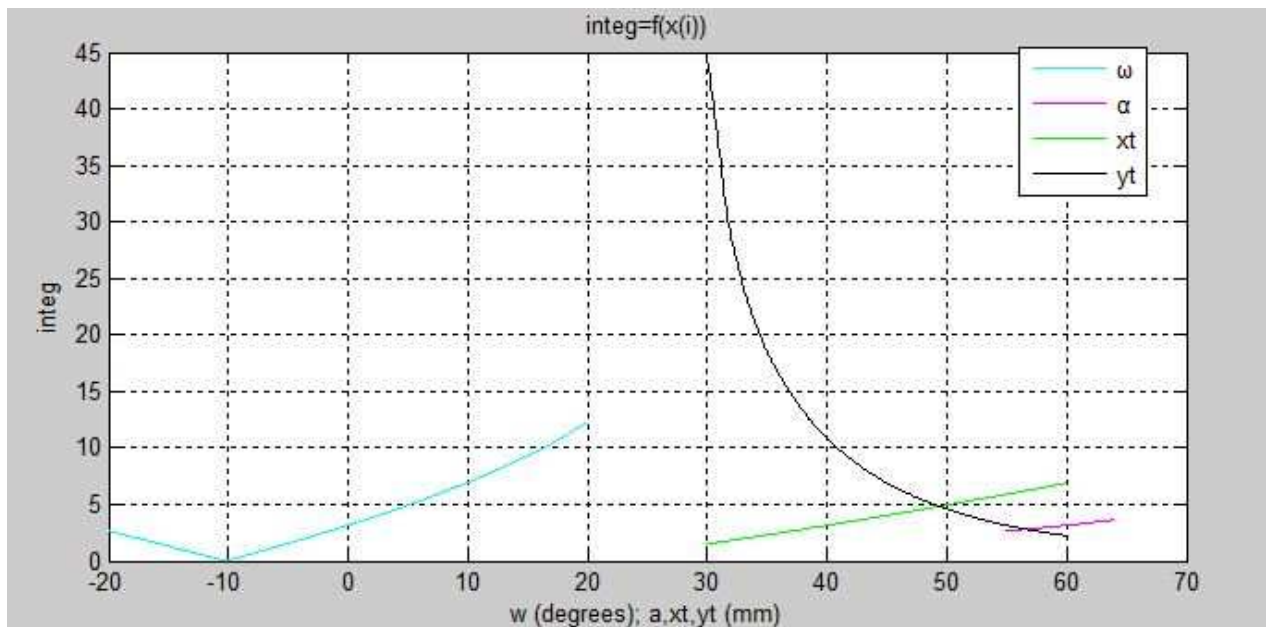


Εικόνα 5-18: Διάγραμμα $e = f(y_t, \delta_o)$.

5.2.1.5 Σύγκριση – Σχολιασμός

Τα διαγράμματα $integ = f(x(i))$ είναι μονότονα για όλες τις μεταβλητές, εκτός της γωνίας αγκωνωτού βραχίονα διεύθυνσης ω . Σε αυτήν (Εικόνα 5-11) η τιμή της απόκλισης σχεδόν μηδενίζεται για $\omega \cong -10^\circ$, όπου παρουσιάζει ακρότατο. Για τιμές γωνίας ω μεγαλύτερες ή μικρότερες των -10° η απόκλιση αυξάνεται. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $integ = f(a)$ και $integ = f(x_t)$ είναι γνησίως αύξουσες. Η συνάρτηση $integ = f(y_t)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Η μορφή των $integ = f(a)$ και $integ = f(x_t)$ φαίνεται προσεγγιστικά γραμμική, και της $integ = f(y_t)$ εκθετική.

Με συγκέντρωση όλων των συναρτήσεων $integ = f(x(i))$ σε κοινό διάγραμμα (Εικόνα 5-19), είναι εμφανές ότι η μεταβολή y_t , ειδικά σε τιμές χαμηλότερες των 40 mm, επηρεάζει σε μεγαλύτερο βαθμό την απόκλιση, η οποία αυξάνεται εκθετικά, συγκριτικά με τις άλλες μεταβλητές.



Εικόνα 5-19: Συναρτήσεις $integ = f(x(i))$ σε κοινό διάγραμμα.

Από τις τρισδιάστατες γραφικές παραστάσεις φαίνεται το σύστημα να έχει μικρό σφάλμα – τιμές συνάρτησης σφάλματος e χαμηλότερες της 1° - για γωνίες στροφής μικρότερες των 10° (περιοχές απεικόνισης με σκούρο μπλέ χρώμα).

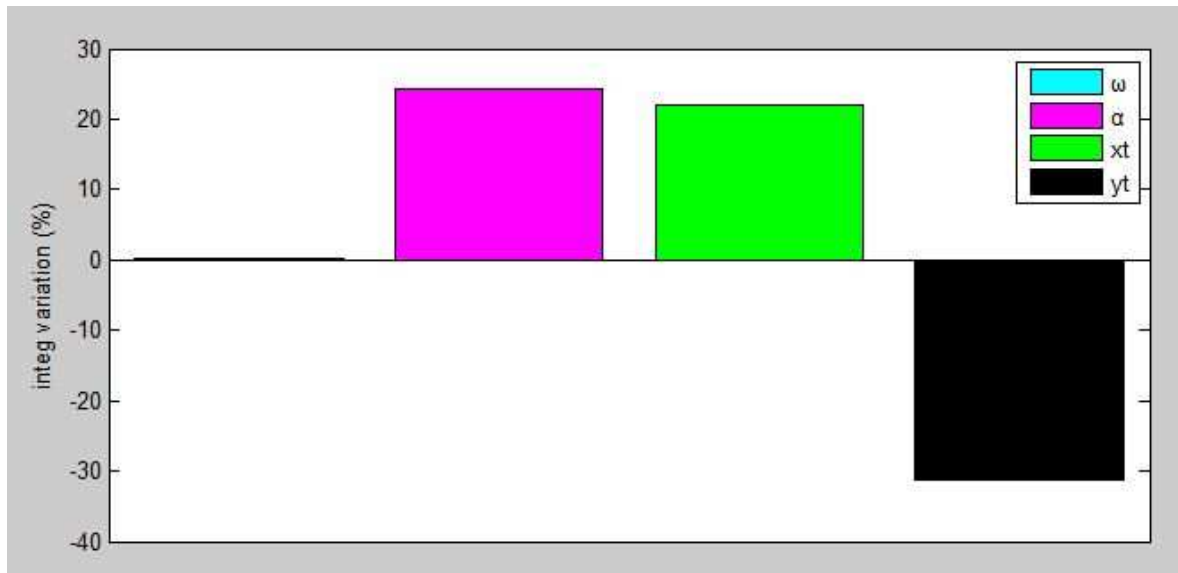
5.2.2 Ανάλυση Ευαισθησίας

Στην ανάλυση ευαισθησίας θα διερευνηθεί πόσο δραστικά επηρεάζει κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ($integ$). Θα πραγματοποιηθούν δύο δοκιμές, κάθε μια θα συνοδεύεται από ένα ραβδόγραμμα.

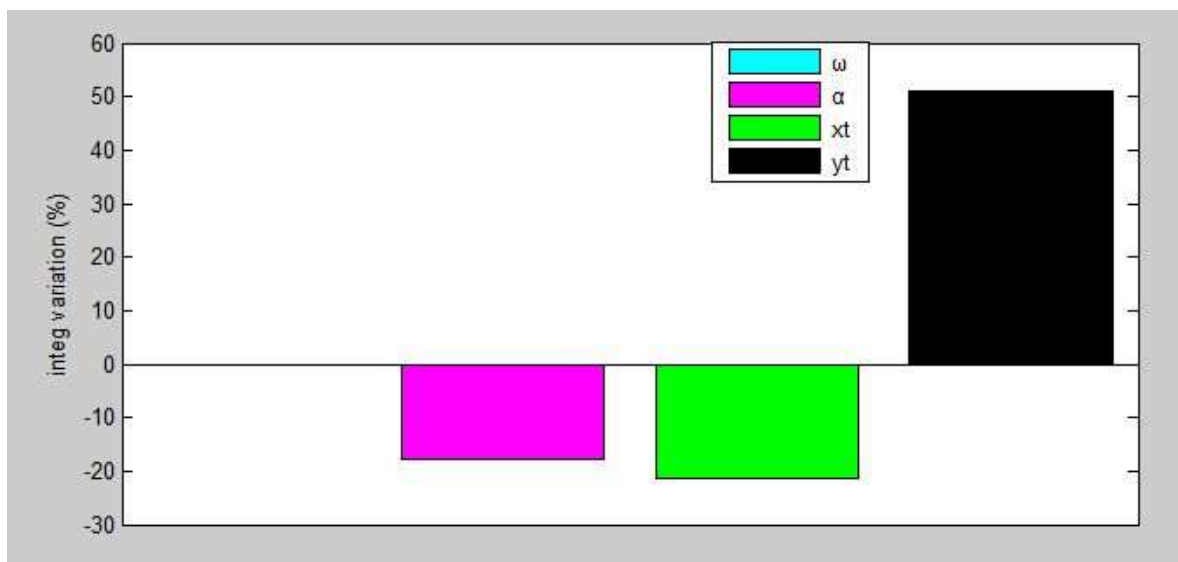
Στην πρώτη, η τιμή μιας μεταβλητής – της γωνίας αγκωνωτού βραχίονα ω , είτε του μήκους αγκωνωτού βραχίονα a , είτε της βάσης τριγώνου διευθύνσεως x_t , είτε του ύψους τριγώνου διευθύνσεως y_t – θα αυξάνεται 10% από αυτήν της τυπικής

γεωμετρίας (Βλ. Πίνακα 5.4) και θα υπολογίζεται η τιμή της απόκλισης (*integ*). Οι τιμές των υπολοίπων τριών μεταβλητών θα παραμένουν σταθερές και ίσες με τις αντίστοιχες της τυπικής γεωμετρίας. Στον κατακόρυφο άξονα *y* του ραβδογράμματος θα εκφράζεται η ποσοστιαία μεταβολή της απόκλισης (Εικόνα 5-20).

Στην δεύτερη, θα πραγματοποιηθεί η ίδια διαδικασία για μείωση της τιμής κάθε μεταβλητής κατά 10% (Εικόνα 5-21).



Εικόνα 5-20: Ποσοστιαία μεταβολή απόκλισης για 10% αύξηση τιμής μεταβλητής.



Εικόνα 5-21: Ποσοστιαία μεταβολή απόκλισης για 10% μείωση τιμής μεταβλητής.

Από τα παραπάνω επαληθεύεται η μεγάλη επίδραση που έχει το ύψος του τριγώνου διευσθύνσεως y_t στην απόκλιση του συστήματος, συγκριτικά με τις υπόλοιπες μεταβλητές, όπως ήταν επίσης εμφανές στο συγκεντρωτικό διάγραμμα $integ = f(x(i))$ (Εικόνα 5-19). Η επίδρασή της είναι αντίθετη από αυτή των μεταβλητών α και x_t , με αύξηση της τιμής της, η απόκλιση μειώνεται. Όταν η τιμή

της μειώνεται κατά 10%, η απόκλιση επηρεάζεται σε σχεδόν διπλάσιο βαθμό (αυξάνεται 50%) από ότι συμβαίνει όταν η τιμή της αυξάνεται 10% (η απόκλιση μειώνεται 30%). Η κρισιμότητα της μεταβλητής y_t να μην μειωθεί περαιτέρω των 50 mm είναι και στα παραπάνω διαγράμματα ιδιαίτερα εμφανής.

Η επίδραση της γωνίας αγκωνωτού βραχίονα ω είναι μηδαμινή, καθώς η τιμή της στο σύστημα τυπικής γεωμετρίας προσεγγίζει το μηδέν. Οι υπολογισμοί, 10% αύξησης και μείωσης, έγιναν για $\omega = 0,1^\circ$.

Για 10% αύξηση ή μείωση των μεταβλητών a και x_t , η απόκλιση αυξάνεται ή μειώνεται, αντίστοιχα, σε ένα ποσοτό περίπου 20%.

5.3 ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΙΑΛΟΓΟΥ

Προκειμένου το πρόγραμμα να έχει καθολική εφαρμογή σε προβλήματα σχεδιασμού συστημάτων διεύθυνσης ίδιου τύπου, διαμορφώνεται πλαίσιο διαλόγου όπου θα ελέγχονται τα δεδομένα εισαγωγής του προβλήματος και θα προσαρμόζονται στο εκάστοτε πρόβλημα.

Για το σχεδιασμό και προγραμματισμό της διεπιφάνειας χρησιμοποιήθηκε η εργαλειοθήκη GUIDE του MATLAB.

Η διεπιφάνεια διαθέτει δύο πάνελ ένα εισόδου (input) και ένα εξόδου (output), ένα κουμπί και δύο γραφικές παραστάσεις.

Το πάνελ εισόδου αποτελείται από τρεις πίνακες με επεξεργάσιμα κελιά (Εικόνα 5-22). Σε αυτά ο χρήστης μπορεί να πληκτρολογήσει τις τιμές των κατασκευαστικών παραμέτρων w, l, x_{max}, y_0 του υπό σχεδιασμό οχήματος (Πίνακας: Vehicle Characteristics), την ελάχιστη και μέγιστη γωνία στροφής εξωτερικού τροχού δ_o (Πίνακας: Outer Wheel Steering Angles), τη διαμέρισή τους ($\delta_{o(i+1)} - \delta_{o(i)}$), τα όρια τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών (Πίνακας: Variable's Bounds) και το αρχικό σημείο x_0 του αλγορίθμου βελτιστοποίησης (Πίνακας: Optimization Start Point).

Το πάνελ εξόδου αποτελείται από δύο πίνακες, μη επεξεργάσιμους (Εικόνα 5-23). Σε αυτούς εμφανίζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης (Πίνακας: Optimization) και τα στατικά μεγέθη – για μηδενική γωνία δ_o – της βέλτιστης γεωμετρίας (Πίνακας: Geometry Static ($\delta_o = 0$)).

Όταν ο χρήστης πατήσει το κουμπί Optimize, αφού πρώτα έχει καταχωρήσει τις απαραίτητες τιμές στο πάνελ εισόδου, ενεργοποιείται η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Τα αποτελέσματα αυτής επιστρέφονται στο πάνελ εξόδου και στα δύο διαγράμματα (Εικόνα 5-24).

Μετά τη βελτιστοποίηση, η 1^η γραφική παράσταση εμφανίζει το διάγραμμα $\delta_i = f(\delta_o)$ και η 2^η το διάγραμμα $e = f(\delta_o)$ (Εικόνα 5-25).

Input

Vehicle Characteristics

	Value (mm)
track	
wheelbase	
xmax	
y0	

Outer Wheel Steering Angles

	Min (degrees)	Max (degrees)	Precision
δ_0			

Variable's Bounds

	Min (degrees or mm)	Max (degrees or mm)
ω		
α		
xt		
yt		

Optimization Start Point

	ω (degrees)	α (mm)	xt (mm)	yt (mm)
x0				

Εικόνα 5-22: Πάνελ εισόδου διεπιφάνειας (κενό).

Output

Optimization

	ω (degrees)	α (mm)	xt (mm)	yt (mm)
x				

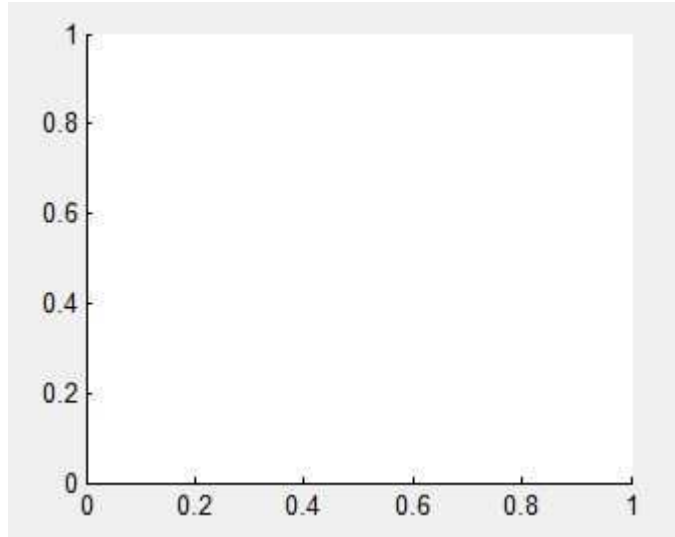
Geometry Static ($\delta_0=0$)

	Value (degrees or mm)
a	
b	
c	
d	
θ_2	
θ_4	
φ_2	
φ_4	

Εικόνα 5-23: Πάνελ εξόδου διεπιφάνειας (κενό).

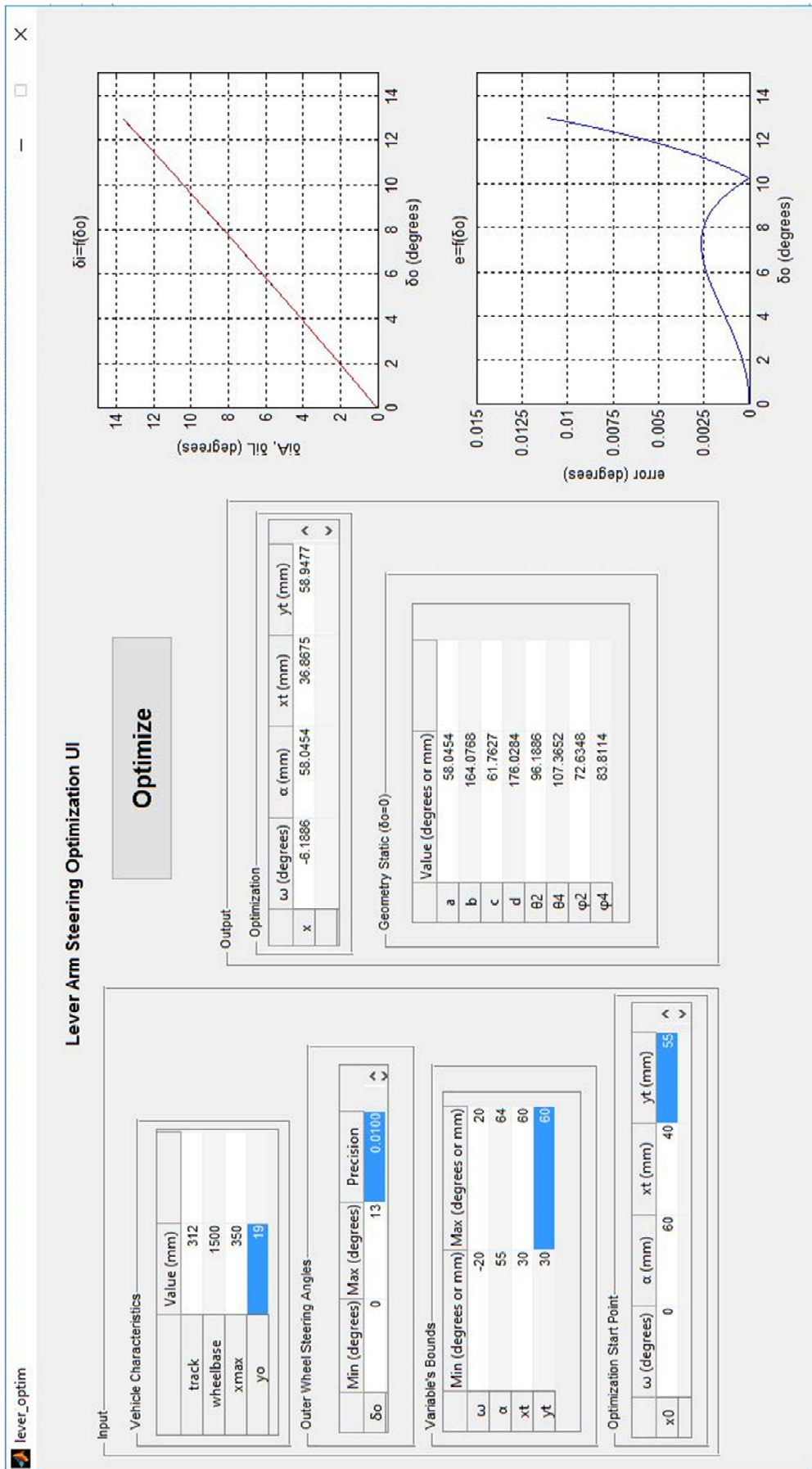


Εικόνα 5-24: Κουμπί Optimize.



Εικόνα 5-25: Γραφική παράσταση διεπιφάνειας (κενή).

Στην επόμενη σελίδα ακολουθεί στιγμιότυπο οθόνης από καταχώρηση των δεδομένων του προβλήματος και βελτιστοποίηση στη διεπιφάνεια (Εικόνα 5-26).



Εικόνα 5-26: Βελτιστοποίηση με χρήση διεπιφάνειας.

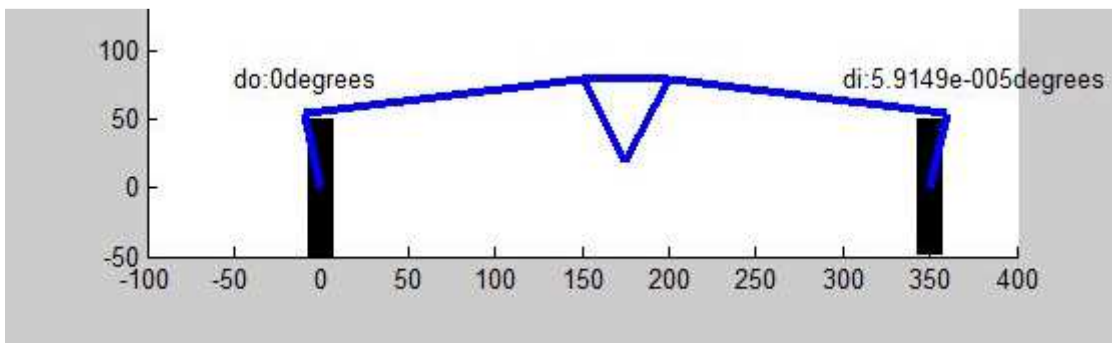
5.4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

Για να αποδοθεί ο μηχανισμός στο εύρος κίνησής του εποπτικά, διαμορφώνεται κώδικας με χρήση εντολών για animated lines στο MATLAB.

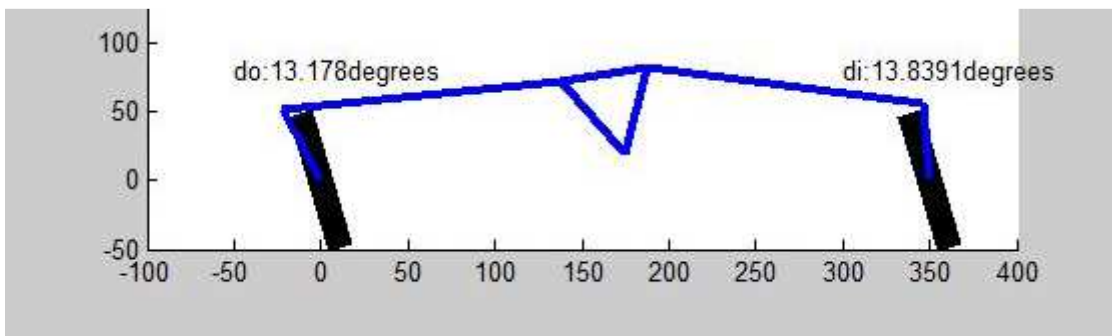
Σε διάγραμμα δύο διαστάσεων αποτυπώνονται γραμμές για κάθε ξεχωριστό βραχίονα του μηχανισμού και για τους τροχούς, οι οποίες ανανεώνονται – διαγράφονται και επανασχεδιάζονται – για κάθε πιθανή γωνία στροφής του εύρους κίνησης του οχήματος.

Οι αρθρώσεις των βραχιόνων έχουν τοποθετηθεί στο διάγραμμα βάσει συντεταγμένων, τηρώντας τις σχετικές θέσεις μεταξύ τους, όπως προκύπτουν από την τοποθέτηση του μηχανισμού στο διατιθέμενο χώρο και τις διαστάσεις της βέλτιστης γεωμετρίας (Βλ. Πίνακα 5-3).

Ακολουθούν στιγμιότυπα από την προσομοίωση.



Εικόνα 5-27: Στιγμιότυπο στη θέση μηδενικής γωνίας στροφής εξωτερικού τροχού.



Εικόνα 5-28: Στιγμιότυπο στη θέση μέγιστης γωνίας στροφής εξωτερικού τροχού.

6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε κινηματική σύνθεση μοχλικού συστήματος διεύθυνσης που προσεγγίζει σε βέλτιστο βαθμό τη συνθήκη Ackermann. Το σύστημα μελετήθηκε ως μηχανισμός που κινείται στο επίπεδο, με απλουστευμένη γεωμετρία τροχών. Βελτιστοποίηση πραγματοποιήθηκε με εφαρμογή σειριακού δευτεροβάθμιου προγραμματισμού και στοχαστικού αλγορίθμου εντοπισμού ολικού ακροτάτου, μέσω των εργαλειοθηκών Optimization Toolbox και Global Optimization Toolbox του μαθηματικού λογισμικού MATLAB. Το τελικό πρόγραμμα διαμορφώθηκε σε διεπιφάνεια, μέσω της εργαλειοθήκης GUIDE του MATLAB, ώστε ο έλεγχος των δεδομένων εισαγωγής της κινηματικής σύνθεσης να γίνεται από ανεξάρτητο χρήστη.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου ακολουθεί μια σύντομη αποτίμηση επίτευξης των επιμέρους στόχων της εργασίας και του τελικού προγράμματος που διαμορφώθηκε. Παράλληλα, η μεθοδολογία και η ανάλυση της παρούσας εργασίας συγκρίνονται με παρόμοιες μελέτες. Τέλος, προτείνονται μελλοντικά σχέδια και τρόποι εξέλιξης της μελέτης.

6.1 ΣΥΖΗΤΗΣΕΙΣ – ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Στα πρώτα κεφάλαια αναφέρθηκαν, συνοπτικά, βασικά στοιχεία θεωρίας οχημάτων και μεθοδολογίας μοντελοποίησης, βελτιστοποίησης και χρήσης σχετικών εργαλειοθηκών του λογισμικού MATLAB, στα οποία βασίστηκε η μετέπειτα ανάλυση.

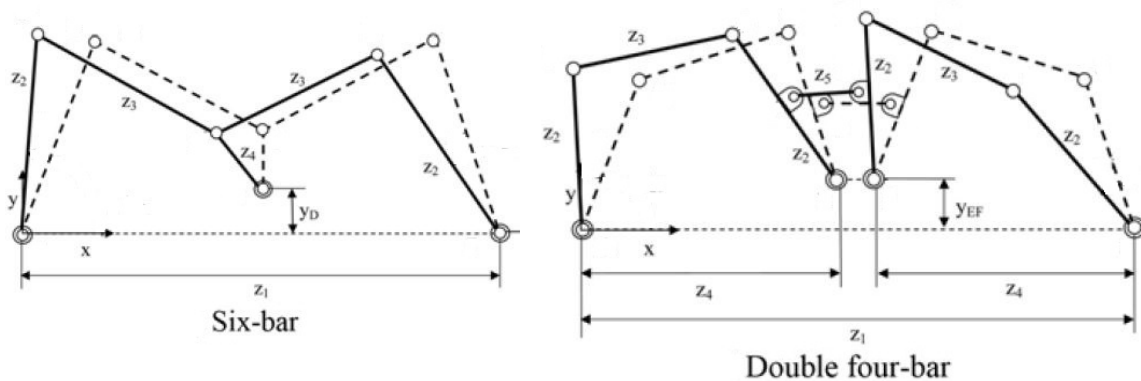
Στο κεφάλαιο 4 ο μηχανισμός αναλύθηκε σε εξισώσεις κίνησης στο επίπεδο με χρήση γεωμετρικών και τριγωνομετρικών σχέσεων. Διαμορφώθηκε μαθηματικά το πρόβλημα βελτιστοποίησης – βέλτιστης κινηματικής σύνθεσης – και επιλέχθηκαν κατάλληλοι αλγόριθμοι MATLAB, βάσει της μορφής των εξισώσεων κίνησης και των εξισώσεων που περιγράφουν τους περιορισμούς αυτής. Από τους υποψήφιους αλγόριθμους επιλέχθηκαν οι καλύτεροι για τις παρούσες συνθήκες, βάσει των χρόνων επίλυσης του προβλήματος και της ακρίβειας του αποτελέσματος. Πραγματοποιήθηκε συγγραφή κώδικα βελτιστοποίησης.

Στο κεφάλαιο 5 το πρόβλημα προσαρμόστηκε στα δεδομένα του υπό σχεδιασμού οχήματος και παρουσιάστηκε η βέλτιστη γεωμετρία συστήματος για αυτό, όπως προέκυψε ως αποτέλεσμα του κώδικα βελτιστοποίησης. Επιπλέον, αποδόθηκε εποπτικά η επίδραση των ανεξάρτητων παραμέτρων του συστήματος στην κίνησή του και έγινε μια προσπάθεια σύντομης ανάλυσης ευαισθησίας αυτών. Διαμορφώθηκε διεπιφάνεια χρήστη, λιτής, λειτουργικής μορφής, ώστε τα δεδομένα εισαγωγής του προβλήματος – που προκύπτουν από τις ιδιαιτερότητες του υπό σχεδιασμού οχήματος – να ελέγχονται από ανεξάρτητο χρήστη. Τέλος, αναπτύχθηκε

κώδικας για απεικόνιση του μηχανισμού σε κίνηση, μέσω εντολών animation του MATLAB.

6.1.1 Μοντελοποίηση Συστήματος

Η πλειονότητα των μελετών της βιβλιογραφίας αναλύει μηχανισμούς τεσσάρων βραχιόνων στο επίπεδο είτε πρόκειται για μηχανισμούς διεύθυνσης είτε όχι. Μόνο η μελέτη των De-Juan κ.α. προσεγγίζει μηχανισμούς πολλαπλών βραχιόνων (Εικόνες 6-1, 6-2). Παρά την ομοιότητα με το σύστημα της παρούσας μελέτης, τα παρακάτω συστήματα έχουν χαρακτηριστεί με διαφορετικές ανεξάρτητες μεταβλητές, λιγότερες σε αριθμό. Όσες, όμως, περισσότερες είναι οι μεταβλητές, τόσο αυξάνεται η προσαρμοστικότητα του συστήματος και οι πιθανότητες για μια καλύτερη λύση (De-Juan κ.α., 2012).



Εικόνα 6-1: Μηχανισμός έξι βραχιόνων (De-Juan κ.α., 2012).

Εικόνα 6-2: Μηχανισμός αποτελούμενος από δύο μηχανισμούς τεσσάρων βραχιόνων (De-Juan κ.α., 2012).

Ένα μοχλικό σύστημα διεύθυνσης σπανίως έχει απλουστευμένη γεωμετρία τροχών. Έτσι, λοιπόν, όπως σχολιάστηκε στο 4.2.5, το σύστημα θα έπρεπε να μελετηθεί στο χώρο. Προσδοκία για την παρούσα μελέτη ήταν να αποτυπώσει και στη συνέχεια να βελτιστοποιήσει την κίνηση του μηχανισμού στο χώρο. Η αρχική προσέγγιση ήταν να εντοπιστεί ο τρόπος με τον οποίο οι σύνδεσμοι του συστήματος κινούνται και καθ' ύψος – κατά τον άξονα z – και να εκφραστεί, μέσω κατάλληλων εξισώσεων, στην κάτοψη. Αυτή η μέθοδος δεν είχε την απαραίτητη μαθηματική πιστότητα και απορρίφθηκε. Ο μηχανισμός πρέπει να μελετηθεί στο χώρο με χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων, γεγονός που αποτελεί στόχο μετέπειτα έρευνας.

6.1.2 Επιλογή Κριτηρίου Βελτιστοποίησης

Με στόχο τις λιγότερες δυνατές τριβές τροχών και απώλειες ενέργειας κατά την κίνηση του οχήματος σε στροφή, ως κριτήριο βελτιστοποίησης επιλέχθηκε η συνθήκη Ackermann. Αυτή επιλέγεται ως κριτήριο και στις μελέτες των Etfefagh και Javash και De-Juan κ.α.

Σε πραγματικές όμως συνθήκες, στροφές με ταχύτητα, η σχέση μεταξύ των τροχών αλλάζει δυναμικά, λόγω επίδρασης των γωνιών ολίσθησης και πλευρικής μεταφοράς φορτίου (Βλ. 4.2.5). Συνεπώς, για να έχουν οι τροχοί κοινό κέντρο περιστροφής σε αγωνιστικές συνθήκες, θα έπρεπε να έχει επιλεγεί, ως στόχος βελτιστοποίησης, γεωμετρία πιθανά με κάποιο ποσοστό Anti-Ackermann.

Η παρούσα, όμως, εργασία δεν προβαίνει σε δυναμική μελέτη. Αυτό, σε συνδυασμό με την έλλειψη πληροφοριών για τα χρησιμοποιούμενα ελαστικά²³ του οχήματος, καθιστά τον υπολογισμό του επιθυμητού ποσοστού Anti-Ackermann γεωμετρίας και κατ'επέκταση την χρήση του ως κριτήριο βελτιστοποίησης, μη εφικτά, προς το παρόν.

6.1.3 Αποτελέσματα Προγραμματισμού

Όσον αφορά τον προγραμματισμό και τον τελικό κώδικα που διαμορφώθηκε, υπάρχουν διάφορα σημεία που χρήζουν επισήμανσης.

Για την επιλογή μεθόδου βελτιστοποίησης θεωρήθηκε ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι συνεχής με εξίσωση ομαλής καμπύλης. Σε περίπτωση που διαπιστωθεί ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει, το πρόβλημα θα πρέπει να λυθεί με μεθόδους διακριτής βελτιστοποίησης. Σε κάθε περίπτωση, τα αποτελέσματα των αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ικανοποιητικά, οπότε δεν διαφαίνεται κάποια τέτοια αναγκαιότητα. Επιπλέον, πρέπει να αναφερθεί ότι η μέθοδος GlobalSearch, ως στοχαστική, δεν εγγυάται ότι επιστρέφει το βέλτιστο αποτέλεσμα – ολικό ακρότατο. Για κάθε εφαρμογή της επιστρέφει διαφορετικό αποτέλεσμα, λόγω του τυχαίου τρόπου παραγωγής των αρχικών σημείων που αξιολογεί. Ο μόνος τρόπος να αξιολογηθεί το αποτέλεσμα ως βέλτιστο ή μη είναι να γίνει εφαρμογή της GlobalSearch με αρχικό σημείο x_0 ίσο με το διάνυσμα του αποτελέσματος του αλγορίθμου (Mathworks - MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide, 2016). Εάν προκύψει άλλη λύση, το αρχικό αποτέλεσμα δεν ήταν ολικό ακρότατο κ.ο.κ. Η γεωμετρία που παρουσιάστηκε στο 5.1 ως βέλτιστη δεν επιστρέφει καλύτερο αποτέλεσμα όταν χρησιμοποιηθεί ως αρχικό σημείο x_0 .

Η τιμή της απόκλισης, βάσει της οποίας επιλέγεται το βέλτιστο σύστημα, υπολογίζεται ως ολοκλήρωση της συνάρτησης σφάλματος. Ο χρήστης επιλέγει έμμεσα την ακρίβεια της ολοκλήρωσης, μέσω της διεπιφάνειας (Βλ. 5.3), καθώς επιλέγει το μέγεθος του διανύσματος δ_0 . Όσο μικρότερο είναι το βήμα διαμέρισης του διανύσματος, τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη μέθοδο του τραπεζίου, για την οποία το MATLAB διαθέτει έτοιμη συνάρτηση. Εάν αξιολογηθεί ότι η μέθοδος αυτή δεν έχει επαρκή ακρίβεια, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μέθοδος Simpson, με διαμόρφωση αντίστοιχης συνάρτησης. Στη βιβλιογραφία, η μέθοδος που

²³ Michelin Radial 45/75 R16.

χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του σφάλματος μεταξύ πραγματικού συστήματος και επιθυμητής συμπεριφοράς, είναι το άθροισμα ελαχίστων τετραγώνων μεταξύ των δύο κινηματικών συνθηκών σε συγκεκριμένες γωνίες στροφής τροχών (De-Juan κ.α., 2012; Ettefagh και Javash, 2014; Jazar, 2009).

Στη μελέτη *Optimal synthesis of function generation in steering linkages* οι De-Juan κ.α. υποστηρίζουν ότι για ένα συμμετρικό σύστημα, ακριβέστερη κινηματική σύνθεση επιτυγχάνεται όταν η αντικειμενική συνάρτηση τηρεί στις εξισώσεις της τη συμμετρία των διαστάσεων των βραχιόνων του μηχανισμού και υπολογίζεται για όλο το εύρος κίνησης $[\delta_{min}, \delta_{max}]$. Παραθέτουν πως όταν η βελτιστοποίηση της $f(x)$ πραγματοποιείται στο μισό εύρος κίνησης $[0^\circ, \delta_{max}]$ προκύπτουν σφάλματα στη δομή όταν ο μηχανισμός κινείται στο εύρος $[\delta_{min}, 0^\circ]$. Αυτή η διαπίστωση θα μπορούσε να εξεταστεί στο παρόν σύστημα.

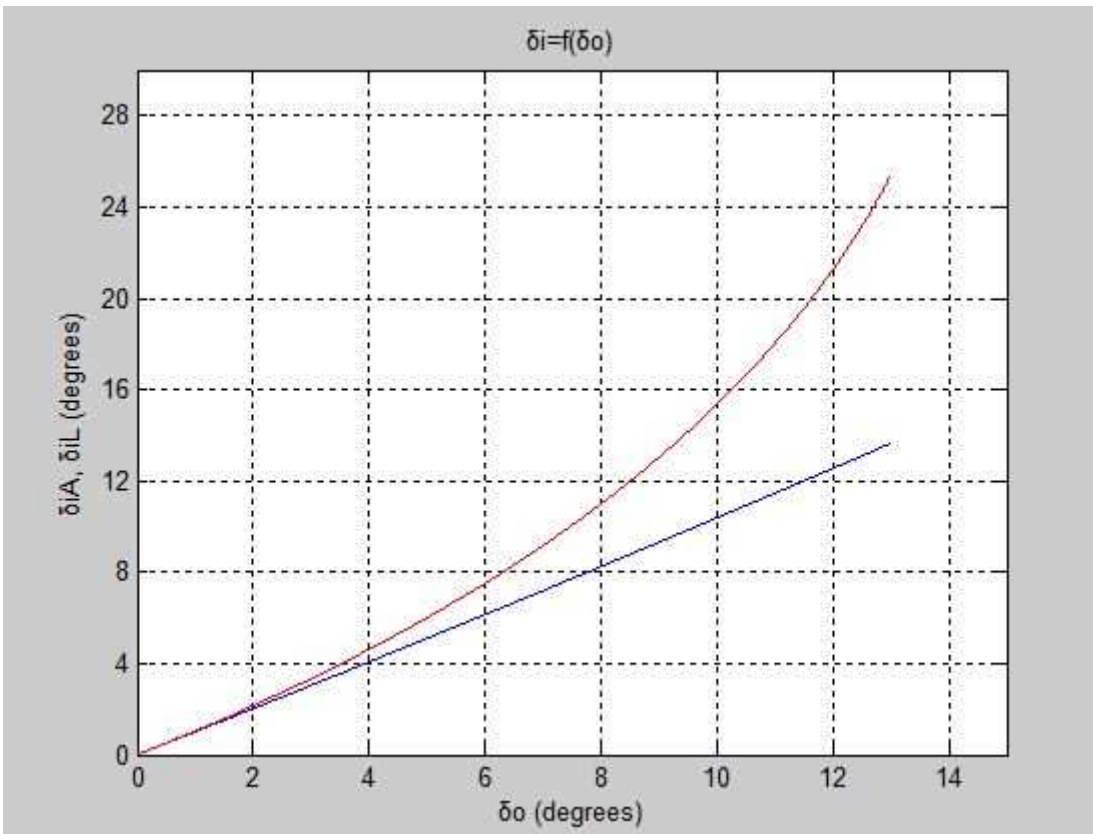
Στο 4.2.4.2 έγινε αναφορά στη στατική ρύθμιση συνήθως σε σύγκλιση που έχουν οι τροχοί. Η ρύθμιση αυτή επηρεάζει τις σχέσεις των γωνιών στροφής των τροχών $\theta_2 = f(\delta_o)$, $\delta_i = f(\varphi_4)$ κατά ένα σταθερό μέγεθος, τη γωνία toe_{in} . Στα οχήματα με πίσω σύστημα μετάδοσης, οι δυνάμεις που ασκούνται στους μπροστινούς τροχούς, όταν το όχημα κινείται προς τα εμπρός, καταλαμβάνουν τις ανοχές στους συνδέσμους των ακραξονίων και προκαλούν μικρή εκτροπή των βραχιόνων του συστήματος διεύθυνσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι τροχοί να λοξοδρομούν προς τα έξω. Η σύγκλιση ρυθμίζεται έτσι ώστε σε ευθύγραμμη πορεία οι τροχοί να είναι παράλληλοι χωρίς να στρέφουν προς τα μέσα (Hillier και Coombs, 2004). Η σύγκλιση, λοιπόν, συνδέεται άμεσα με την ελαστική παραμόρφωση του συστήματος, η οποία δεν μελετάται στην παρούσα εργασία, για αυτό και δεν συμπεριλαμβάνεται στις τελικές εξισώσεις του προγράμματος βελτιστοποίησης. Εάν χρησιμοποιούνταν θα προέκυπτε σφάλμα, καθώς σε ευθύγραμμη πορεία οι γωνίες δ_o και δ_i δεν θα ήταν μηδενικές.

Κλείνοντας, για να αξιολογηθεί η χρησιμότητα του προγράμματος, θα μπορούσαμε να παραθέσουμε μια γεωμετρία που αποκλίνει πολύ από την ιδανική, για τα δεδομένα του παρόντος προβλήματος. Αυτή η γεωμετρία θα είχε τα εξής χαρακτηριστικά:

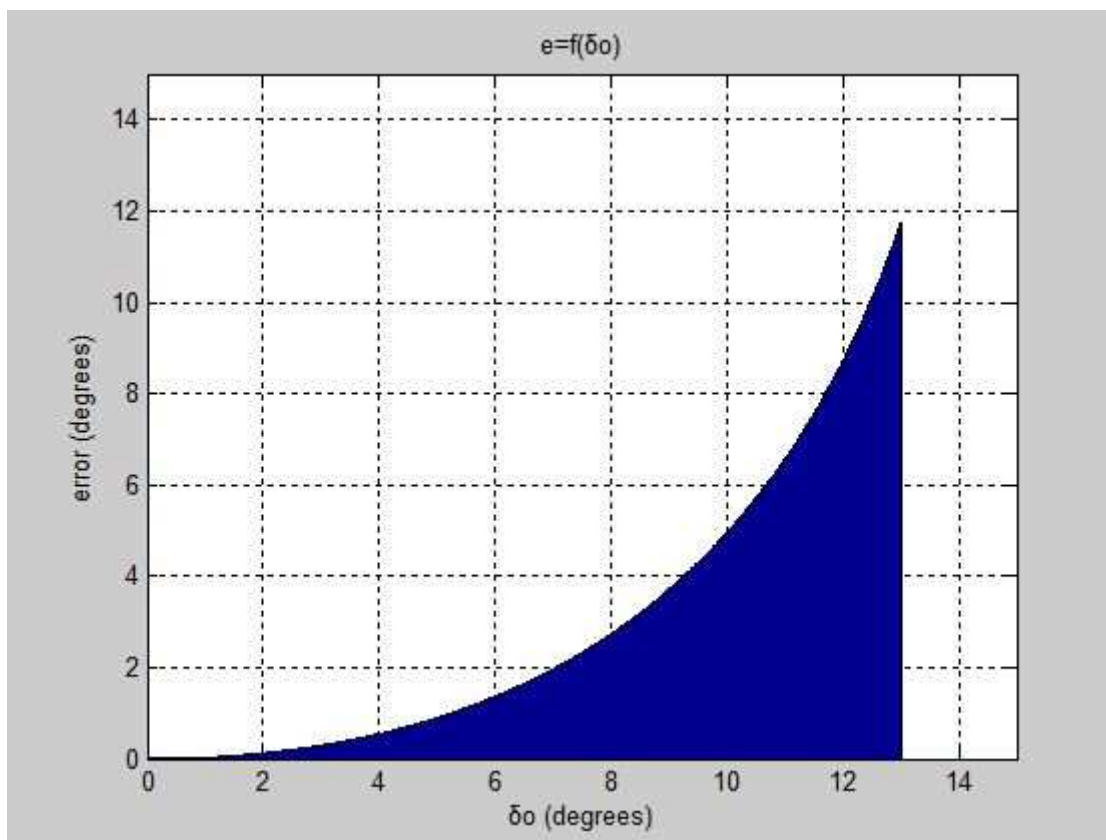
Πίνακας 6-1: Γεωμετρία Μεγάλης Απόκλισης

Μεταβλητές:			
ω (deg)	a (mm)	x_t (mm)	y_t (mm)
20	50	59	35
Απόκλιση:			
			37,4774
Μήκη Βραχιόνων:			

a (mm)	b (mm)	c (mm)	d (mm)
50,0000	128,5905	45,7739	176,0284
Γωνίες Βραχιόνων ($\delta_o = 0^\circ$):			
θ_2 (deg)	θ_4 (deg)	φ_2 (deg)	φ_4 (deg)
70,0000	130,1261	49,8739	110,0000



Εικόνα 6-3: Διάγραμμα $\delta_i = f(\delta_o)$ γεωμετρίας μεγάλης απόκλισης.



Εικόνα 6-4: Διάγραμμα $e = f(\delta_o)$ γεωμετρίας μεγάλης απόκλισης.

Στην εικόνα 6.1 τα σημεία δ_{iA} είναι μπλέ, ενώ τα σημεία δ_{iL} είναι κόκκινου χρώματος. Σε μια τέτοια περίπτωση γεωμετρίας, βέβαια, τα προβλήματα στην κίνηση θα ήταν εμφανή και χωρίς υπολογισμούς.

6.2 ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΑ ΣΧΕΔΙΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μελλοντικά σχέδια για την εξέλιξη της μελέτης, καθώς και προτάσεις για πειραματικές προσεγγίσεις και αξιολόγηση του μηχανισμού και του παρόντος προγράμματος.

6.2.1 Ανάλυση

Μια επέκταση της παρούσας εργασίας θα μπορούσε να περιλαμβάνει περιγραφή και βελτιστοποίηση του μοχλικού συστήματος στο χώρο και να λαβαίνει υπόψιν δυναμικές παραμέτρους, όπως ελαστική παραμόρφωση εξαρτημάτων, γωνίες ολίσθησης ελαστικών, μεταφορά φορτίου κ.α. Επιπλέον, θα μπορούσε να παρέχει πληροφορίες για την ταχύτητα και την επιτάχυνση των συνδέσμων του συστήματος, όπως συνηθίζεται σε μελέτες συστημάτων βραχιόνων (Jazar, 2009).

6.2.2 Εξέλιξη Προγράμματος

Όσον αφορά τον προγραμματισμό, θα μπορούσε να λάβει μια πιο γενικευμένη μορφή ώστε να προσαρμόζεται σε πληθώρα προβλημάτων και σε συνδυασμό με μια λεπτομερή διεπιφάνεια, τα δομικά του χαρακτηριστικά να ορίζονται από ανεξάρτητο χρήστη.

Οι σταθερές παράμετροι $x_{max}, y_{max}, y_0, y_{kpi}$ των εξισώσεων της κινηματικής αλυσίδας του μοχλικού συστήματος ή ακόμα και τα μεγέθη w και l θα μπορούσαν να ενσωματωθούν στο πρόβλημα ως ανεξάρτητες μεταβλητές ή ακόμα θα μπορούσε ο χρήστης να ορίζει ποιες παράμετροι είναι σταθερές και ποιες έχουν όρια τιμών, ανάλογα με την ελευθερία για την κατασκευή του συστήματος που του παρέχει το εκάστοτε όχημα.

Επιπλέον, ανάλογα με το πρόβλημα, είναι πιθανό διαφορετικά κριτήρια βελτιστοποίησης να είναι επιθυμητά. Θα μπορούσαν, λοιπόν, αυτά να επιλέγονται επίσης από το χρήστη. Έτσι, ο χρήστης θα έχει τη δυνατότητα να επιλέξει ανάμεσα σε διαφορετικές αρχές κίνησης (π.χ. Ackermann, Anti-Ackermann κ.α.) ή ποσοστά αυτών, να ορίσει για ποιο εύρος στροφής είναι επιθυμητά, σε ποιες γωνίες στροφής να επιτυγχάνεται απόλυτα η επιθυμητή γεωμετρία ή ακόμα και να επιλέξει σύνθετα κριτήρια, προς επίλυση προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης.

Η αντικειμενική συνάρτηση θα μπορούσε να λάβει άλλη μορφή, όπως π.χ. να εκφράζει κάποιο ανώτατο όριο για τις τιμές που λαβαίνει η συνάρτηση σφάλματος.

Το πρόγραμμα, αντί για γωνίες στροφής εξωτερικού τροχού ως δεδομένο εισαγωγής θα μπορούσε να δέχεται ακτίνες στροφής, π.χ. από συγκεκριμένη διαδρομή ή πίστα αγώνων, που καλείται να εκτελέσει το υπό σχεδιασμό όχημα, αρκεί να υπάρχουν πληροφορίες για το σημείο του κέντρου βάρους του.

Όλα τα παραπάνω, θα ήταν συνετό να συνοδεύονται από ένα αναλυτικό και φιλικότερο προς το χρήστη πλαίσιο διαλόγου.

6.2.3 Αξιολόγηση – Εξέταση Συστήματος

Περαιτέρω εξέλιξη της ανάλυσης ή του προγράμματος δεν θα έχει νόημα εάν πρώτα δεν επαληθευτούν τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης.

Τα αποτελέσματα της βέλτιστης γεωμετρίας του παρόντος προβλήματος θα μπορούσαν να επαληθευτούν με εφαρμογή κινηματικής ανάλυσης σε κάποιο πρόγραμμα CAD π.χ. με motion study στο SolidWorks. Ακόμα μεγαλύτερο ενδιαφέρον θα είχε όμως, μια πειραματική προσέγγιση του αποτελέσματος. Για τη γεωμετρία συστήματος που έχει ήδη σχεδιαστεί και κατασκευαστεί – βασισμένη σε προγενέστερη μορφή της παρούσας μελέτης – για το μονοθέσιο όχημα του προβλήματος, θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν μετρήσεις για τη διαφορά των γωνιών στροφής των δύο διεθυντήριων τροχών σε στροφή, σε συνθήκες μηδενικής ταχύτητας, προς σύγκριση με τα αποτελέσματα του προγράμματος. Από την

ακρίβεια των μετρήσεων ενδεχομένως να προέκυπταν κριτήρια τερματισμού για την βελτιστοποίηση, τιμές ανοχών για τους αλγορίθμους ή ο μέγιστος αριθμός σημαντικών ψηφίων που έχει πρακτική σημασία να λαμβάνουν οι μεταβλητές.

The ultimate reality of a vehicle can only be had by experiencing it. Anything less than this – such as talking or writing about the car's behavior – is an abstraction or approximation of reality.

Milliken & Milliken

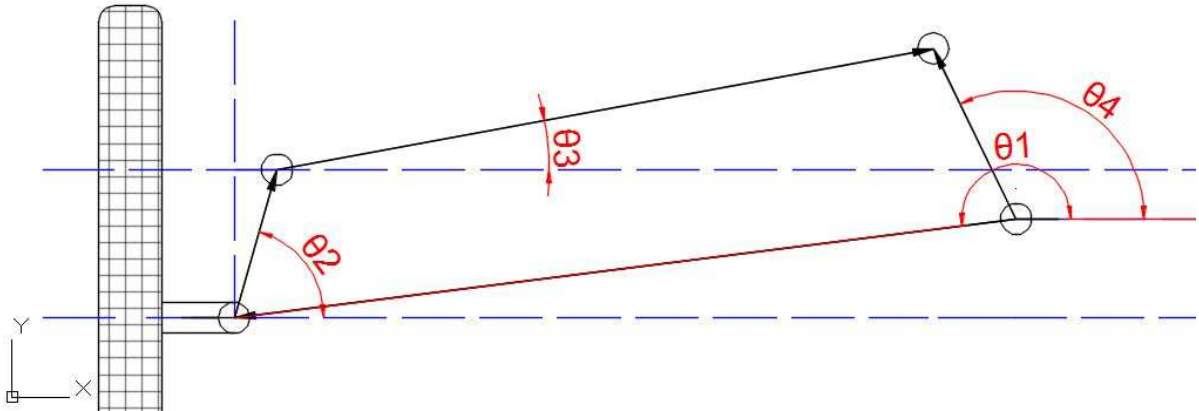


7 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Breteler, A.J.K., 1987. Kinematic optimization of mechanisms: a finite element approach /. ResearchGate.
- De-Juan, A., Sancibrian, R., Viadero, F., 2012. Optimal synthesis of function generation in steering linkages. *Int. J. Automot. Technol.* 13, 1033–1046.
- Ettefagh, M.M., Javash, M.S., 2014. Optimal synthesis of four-bar steering mechanism using AIS and genetic algorithms. *J. Mech. Sci. Technol.* 28, 2351–2362.
- Gebreslasie, M., Bazezew, A., 2001. Synthesis, Analysis and Simulation of a Four-Bar Mechanism Using Matlab Programming. *Zede J.* 18, 85–96.
- Gillespie, T.D., 1992. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers Inc, Warrendale, PA.
- Glover, F., 1997. A template for scatter search and path relinking, in: SpringerLink. Presented at the European Conference on Artificial Evolution, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 1–51.
- Hillier, V., Coombs, P., 2004. *Hillier's Fundamentals of Motor Vehicle Technology*, 5th edition. ed. Nelson Thornes, Cheltenham.
- Ion, I., n.d. The Optimal Design of Linkage Based on Matlab. *Sci. Bull. Automot. Ser. 1*, 67–72.
- Jazar, R.N., 2009. *Vehicle Dynamics: Theory and Application*, 1st ed. 2008. Corr. 3rd printing 2009 edition. ed. Springer, New York; London.
- Jianxia, L., 2015. The Optimization Design of the Four-bar linkage Based on MATLAB. Presented at the International Conference on Intelligent Systems Research and Mechatronics Engineering (ISRME).
- Keshwani, S., Kumar, S., 2012. Reverse Engineering of Steering System with Developed Equation for Steer Angle. *Int. J. Mech. Prod. Eng. Res. Dev.*
- Krašna, S., Ciglaric, I., Prebil, I., 2002. Four-Bar Linkage Design Using Global Optimization Approach, in: *DS 30: Proceedings of DESIGN 2002, the 7th International Design Conference, Dubrovnik*. Presented at the DESIGN 2002 - 7th International Design Conference.
- Mathworks, 2016. *MATLAB Optimization Toolbox User's Guide*.
- Mathworks, 2016. *MATLAB Global Optimization Toolbox User's Guide*.

- Messac, A., 2015. Optimization in Practice with MATLAB®: For Engineering Students and Professionals, 1 edition. ed. Cambridge University Press, New York, NY.
- Milliken, W.F., Milliken, D.L., 1995. Race Car Vehicle Dynamics. SAE International.
- Myszka, D.H., 2011. Machines & Mechanisms: Applied Kinematic Analysis, 4th edition. ed. Pearson, Boston.
- Nocedal, J., Wright, S.J., 2006. Numerical Optimization, 2nd ed, Springer.
- Rao, S.S., 2009. Engineering Optimization: Theory and Practice, 4th edition. ed. Wiley, Hoboken, N.J.
- Santin, J.J., Onder, C.H., Bernard, J., Isler, D., Kobler, P., Kolb, F., Weidmann, N., Guzzella, L., 2007. The World's Most Fuel Efficient Vehicle: Design and Development of Pac-car II. vdf Hochschulverlag AG, an der ETH Zurich.
- Thompson, D., Ackerman? Anti-Ackerman? Or Parallel Steering?
- Venkataraman, P., 2001. Applied Optimization with Matlab Programming, 1st Edition. ed. Wiley, John & Sons, Incorporated.
- Vinogradov, O., 2000. Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms, 1 edition. ed. CRC Press, Boca Raton.
- Wadagbalkar, P., Somani, C., 2016. Formulation of a Standardized Procedure for Designing the Steering System of Small Vehicles Like Go-Karts. Presented at the International Journal of Engineering Research and Technology, IJERT.
- Αποστολοπούλου, Μ., 2011. Μαθηματικές μέθοδοι βελτιστοποίησης προβλημάτων μεγάλης κλίμακας (Διδακτορική Διατριβή).
- Θέος, Φ., 2001. Μέθοδοι Ολικής Ελαχιστοποίησης (Μεταπτυχιακή Εργασία). Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
- Λαμπρόπουλος, Α., Ιατρού, Π., 2014. Σχεδιασμός Οχήματος Βελτιστοποιημένης Ενεργειακής Απόδοσης (Πτυχιακή Εργασία). Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τεχνολογικού Τομέα.
- Μπιλάλης, Ν., Μαραβελάκης, Ε., 2009. Συστήματα CAD/CAM Και Τρισδιάστατη Μοντελοποίηση, 1η. ed. Κριτική ΑΕ.

8.1.2 Εξισώσεις θ_4, φ_4



Εικόνα 8-3: Οι βραχίονες του μηχανισμού ως διανύσματα.

Στον παραπάνω κλειστό βρόγχο, με θεώρηση των διανυσμάτων i (στον άξονα x) και j (στον άξονα y) ως μοναδιαίων, τα διανύσματα μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$r_1 = d \times (\cos(\theta_1) \times \hat{i} + \sin(\theta_1) \times \hat{j})$$

$$r_2 = a \times (\cos(\theta_2) \times \hat{i} + \sin(\theta_2) \times \hat{j})$$

$$r_3 = b \times (\cos(\theta_3) \times \hat{i} + \sin(\theta_3) \times \hat{j})$$

$$r_4 = c \times (\cos(\theta_4) \times \hat{i} + \sin(\theta_4) \times \hat{j})$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 \rightarrow r_1 + r_2 + r_3 - r_4 = 0 \rightarrow$$

$$d \times (\cos(\theta_1) \times \hat{i} + \sin(\theta_1) \times \hat{j}) + a \times (\cos(\theta_2) \times \hat{i} + \sin(\theta_2) \times \hat{j}) + b \times (\cos(\theta_3) \times \hat{i} + \sin(\theta_3) \times \hat{j}) - c \times (\cos(\theta_4) \times \hat{i} + \sin(\theta_4) \times \hat{j}) = 0 \quad (1)$$

Από την εξίσωση (1) είναι γνωστά τα μήκη των βραχιόνων a, b, c και d , καθώς και δυο γωνίες, οι θ_1 και θ_2 . Οι δυο γωνίες θ_3 και θ_4 είναι άγνωστες. Σύμφωνα, λοιπόν, με τον Oleg Vinogradov, στο βιβλίο *Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms*, εμπίπτει στην 4^η περίπτωση επίλυσης εξισώσεων κλειστού βρόγχο.

Από την (1) με ανάλυση σε όρους ημιτόνων και συνημιτόνων, προκύπτει:

$$d \sin(\theta_1) + a \sin(\theta_2) + b \sin(\theta_3) - c \sin(\theta_4) = 0$$

$$d \cos(\theta_1) + a \cos(\theta_2) + b \cos(\theta_3) - c \cos(\theta_4) = 0$$

Για να προκύψει εξίσωση μεταξύ των γωνιών με έναν άγνωστο όρο, θα πρέπει να απαλειφεί ο όρος είτε της θ_3 είτε της θ_4 . Επειδή αναζητείται εξίσωση για την θ_4 , θα απαλειφεί η γωνία του βραχίονα σύζευξης, θ_3 .

$$(b \sin \theta_3)^2 = (-a \sin \theta_2 + c \sin \theta_4 - d \sin \theta_1)^2$$

$$(b \cos \theta_3)^2 = (-a \cos \theta_2 + c \cos \theta_4 - d \cos \theta_1)^2$$

χρήση ταυτότητας: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

- $(-\alpha \sin \theta_2 + c \sin \theta_4 - d \sin \theta_1)^2 = (-\alpha \sin \theta_2)^2 + (c \sin \theta_4)^2 + (-d \sin \theta_1)^2 + 2(-\alpha \sin \theta_2)(c \sin \theta_4) + 2(c \sin \theta_4)(-d \sin \theta_1) + 2(-\alpha \sin \theta_2)(-d \sin \theta_1)$
- $(-\alpha \cos \theta_2 + c \cos \theta_4 - d \cos \theta_1)^2 = (-\alpha \cos \theta_2)^2 + (c \cos \theta_4)^2 + (-d \cos \theta_1)^2 + 2(-\alpha \cos \theta_2)(c \cos \theta_4) + 2(c \cos \theta_4)(-d \cos \theta_1) + 2(-\alpha \cos \theta_2)(-d \cos \theta_1)$

Με πρόσθεση των παραπάνω εξισώσεων και χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

- $(b \sin \theta_3)^2 + (b \cos \theta_3)^2 = b^2(\sin^2 \theta_3 + \cos^2 \theta_3) = b^2$
- $(-\alpha \sin \theta_2)^2 + (c \sin \theta_4)^2 + (-d \sin \theta_1)^2 + 2(-\alpha \sin \theta_2)(c \sin \theta_4) + 2(c \sin \theta_4)(-d \sin \theta_1) + 2(-\alpha \sin \theta_2)(-d \sin \theta_1) + (-\alpha \cos \theta_2)^2 + (c \cos \theta_4)^2 + (-d \cos \theta_1)^2 + 2(-\alpha \cos \theta_2)(c \cos \theta_4) + 2(c \cos \theta_4)(-d \cos \theta_1) + 2(-\alpha \cos \theta_2)(-d \cos \theta_1) = \alpha^2 + c^2 + d^2 - 2ac \cos(\theta_4 - \theta_2) - 2cd \cos(\theta_1 - \theta_4) + 2ad \cos(\theta_1 - \theta_2)$

$$b^2 = \alpha^2 + c^2 + d^2 - 2ac \cos(\theta_4 - \theta_2) - 2cd \cos(\theta_1 - \theta_4) + 2ad \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\rightarrow -\frac{d}{a} \cos(\theta_1 - \theta_4) + \frac{d}{c} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{\alpha^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

$$= \cos(\theta_4 - \theta_2)$$

Σχηματισμός Freudenstein's equation:

$$-J_1 \cos(\theta_1 - \theta_4) + J_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + J_3 = \cos(\theta_4 - \theta_2)$$

όπου $J_1 = \frac{d}{a}$

$$J_2 = \frac{d}{c}$$

$$J_3 = \frac{\alpha^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

Μετά από ανάλυση με χρήση και των σχέσεων: $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$

$$A_1 \tan^2 \left(\frac{\theta_4}{2} \right) + B_1 \tan \left(\frac{\theta_4}{2} \right) + C_1 = 0$$

όπου, $A_1 = J_1 \cos(\theta_1) + J_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_2) + J_3$

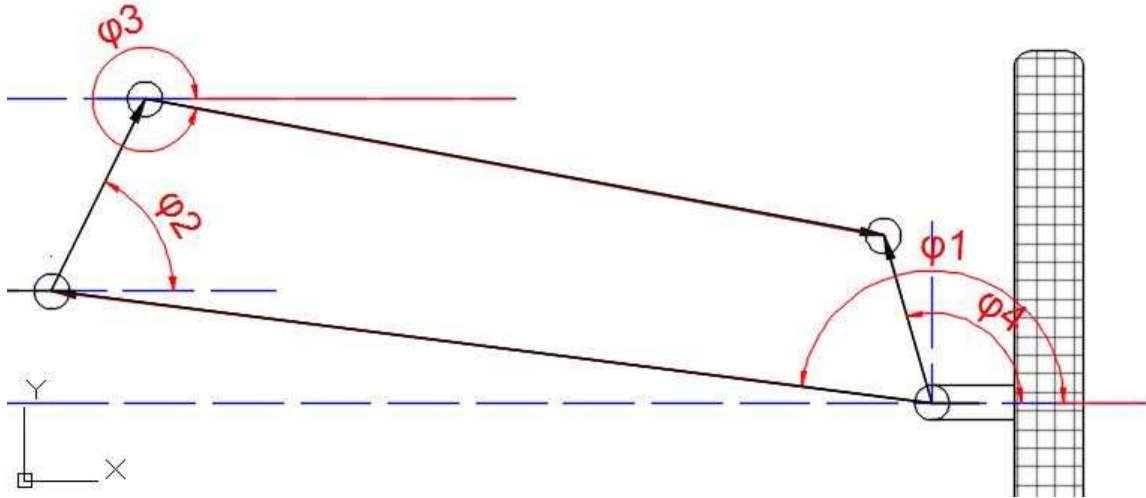
$$B_1 = 2[-J_1 \sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)]$$

$$C_1 = -J_1 \cos(\theta_1) + J_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + J_3 - \cos(\theta_2)$$

Η λύση της διακρίνουσας δίνει την ζητούμενη γωνία:

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1} \right)$$

Η απόδειξη για τη γωνία φ_4 είναι αντίστοιχη, στον μηχανισμό εξόδου ΔΕΖΗ (Εικόνα 8-4).



Εικόνα 8-4: Βραχίονες μηχανισμού εξόδου ως διανύσματα.

Ομοίως:

$$r_1 = d \times (\cos(\varphi_1) \times \hat{i} + \sin(\varphi_1) \times \hat{j})$$

$$r_2 = c \times (\cos(\varphi_2) \times \hat{i} + \sin(\varphi_2) \times \hat{j})$$

$$r_3 = b \times (\cos(\varphi_3) \times \hat{i} + \sin(\varphi_3) \times \hat{j})$$

$$r_4 = \alpha \times (\cos(\varphi_4) \times \hat{i} + \sin(\varphi_4) \times \hat{j})$$

Η Freudenstein's equation θα έχει τη μορφή:

$$-J_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) + J_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + J_3 = \cos(\varphi_4 - \varphi_2)$$

όπου τα J_1 , J_2 και J_3 ίδια με αυτά του μηχανισμού εισόδου.

Μετά από ανάλυση με χρήση και των σχέσεων: $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$,

$$A_2 \tan^2 \left(\frac{\varphi_4}{2} \right) + B_2 \tan \left(\frac{\varphi_4}{2} \right) + C_2 = 0$$

$$\text{όπου, } A_2 = J_2 \cos(\varphi_1) + J_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_2) + J_3$$

$$B_2 = 2[-J_2 \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)]$$

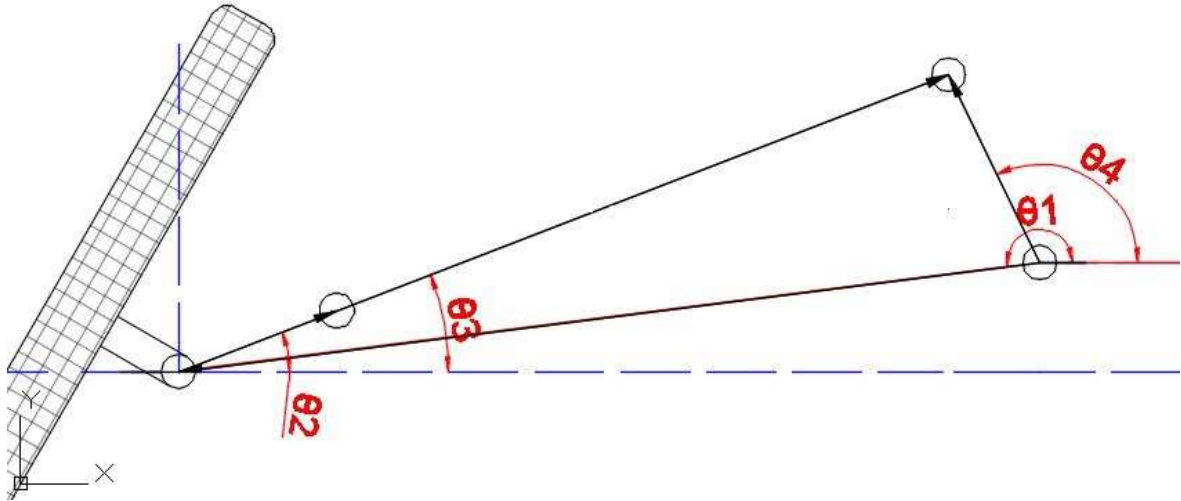
$$C_2 = -J_2 \cos(\varphi_1) + J_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + J_3 - \cos(\varphi_2)$$

Η λύση της διακρίνουσας δίνει την ζητούμενη γωνία:

$$\varphi_4 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4A_2C_2}}{2A_2} \right)$$

8.2 ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ 4.3.2

8.2.1 Εξισώσεις θ_{2L} , θ_{4L}



Εικόνα 8-5: Οριακές θέσεις μηχανισμού εισόδου, με βραχίονες ως διανύσματα.

Όπως και στο 8.1.2, με θεώρηση ως μοναδιαίων των διανυσμάτων i (στον άξονα x) και j (στον άξονα y), τα διανύσματα μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 \rightarrow r_1 + r_2 + r_3 - r_4 = 0 \rightarrow$$

$$d \times (\cos(\theta_1) \times \hat{i} + \sin(\theta_1) \times \hat{j}) + a \times (\cos(\theta_2) \times \hat{i} + \sin(\theta_2) \times \hat{j}) + b \times (\cos(\theta_3) \times \hat{i} + \sin(\theta_3) \times \hat{j}) - c \times (\cos(\theta_4) \times \hat{i} + \sin(\theta_4) \times \hat{j}) = 0 \quad (1)$$

Από την εξίσωση (1) είναι γνωστά τα μήκη των βραχιόνων a , b , c και d , η γωνία θ_1 . Οι γωνίες θ_2 και θ_3 είναι ίσες.

Από την (1) με ανάλυση σε όρους ημιτόνων και συνημιτόνων, προκύπτει:

$$\begin{aligned} d \sin(\theta_1) + a \sin(\theta_2) + b \sin(\theta_3) - c \sin(\theta_4) &= 0 \\ d \cos(\theta_1) + a \cos(\theta_2) + b \cos(\theta_3) - c \cos(\theta_4) &= 0 \end{aligned}$$

Λόγω ισότητας θ_2 και θ_3 , ισχύει:

$$\begin{aligned} d \sin(\theta_1) + a \sin(\theta_2) + b \sin(\theta_2) - c \sin(\theta_4) &= 0 \\ d \cos(\theta_1) + a \cos(\theta_2) + b \cos(\theta_2) - c \cos(\theta_4) &= 0 \end{aligned}$$

Για να προκύψει εξίσωση της θ_2 χωρίς άγνωστους όρους, θα πρέπει να απαλειφεί ο όρος της θ_4 .

$$\begin{aligned} (c \sin \theta_4)^2 &= (a \sin \theta_2 + b \sin \theta_2 + d \sin \theta_1)^2 \\ (c \cos \theta_4)^2 &= (a \cos \theta_2 + b \cos \theta_2 + d \cos \theta_1)^2 \end{aligned}$$

χρήση ταυτότητας: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

- $(d \sin \theta_1 + (a + b) \sin \theta_2)^2 = d^2 \sin^2 \theta_1 + 2(a + b)d \sin \theta_1 \sin \theta_2 + (a + b)^2 \sin^2 \theta_2$

- $(d \cos \theta_1 + (a + b) \cos \theta_2)^2 = d^2 \cos^2 \theta_1 + 2(a + b)d \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (a + b)^2 \cos^2 \theta_2$

Με πρόσθεση των όρων ημιτόνων και συνημιτόνων και χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$, προκύπτει:

$$c^2 = (a + b)^2 + d^2 + 2(a + b)d \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Με επίλυση ως προς θ_2 :

$$\theta_2 = \theta_1 - \cos^{-1} \left(\frac{c^2 - (a + b)^2 - d^2}{2(a + b)d} \right)$$

Για να προκύψει εξίσωση για τη γωνία θ_4 , θα πρέπει από την ανάλυση των διανυσμάτων να απαλειφεί ο όρος της θ_2 . Με την ίδια μεθοδολογία, προκύπτει:

$$(a + b)^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\theta_1 - \theta_4)$$

Με επίλυση ως προς θ_4 :

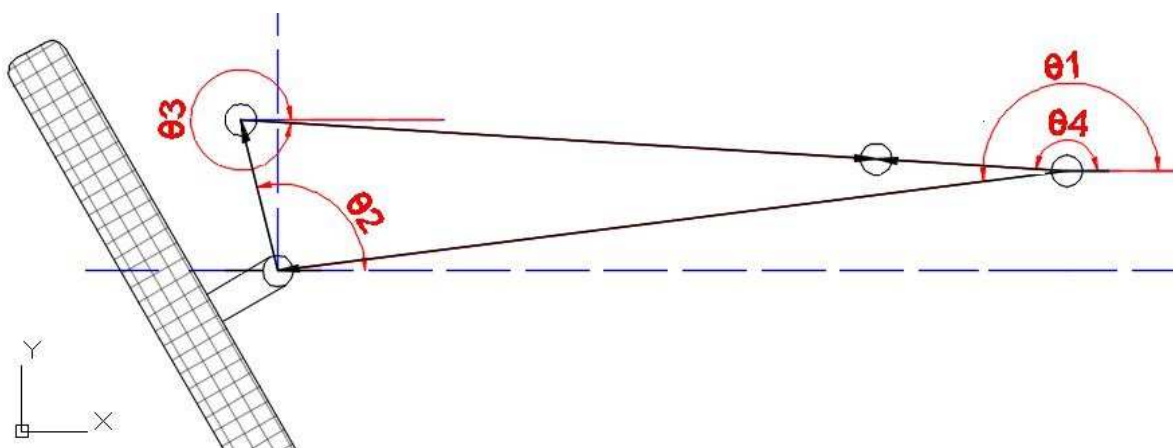
$$\theta_4 = \theta_1 - \cos^{-1} \left(\frac{c^2 + d^2 - (a + b)^2}{2cd} \right)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις για το μηχανισμό εξόδου αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο:

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \cos^{-1} \left(\frac{\alpha^2 - (c + b)^2 - d^2}{2(c + b)d} \right)$$

$$\varphi_4 = \varphi_1 - \cos^{-1} \left(\frac{\alpha^2 + d^2 - (c + b)^2}{2ad} \right)$$

8.2.2 Εξισώσεις θ_{2D} , θ_{4D}



Εικόνα 8-6: Νεκρές θέσεις μηχανισμού εισόδου, με βραχίονες ως διανύσματα.

Ακολουθείται η ίδια ανάλυση με τις αποδείξεις του 8.2.1.

Από την εξίσωση (1) είναι γνωστά τα μήκη των βραχιόνων a , b , c και d , η γωνία θ_1 . Οι γωνίες θ_3 και θ_4 συνδέονται μέσω της σχέσης: $\theta_3 = 180^\circ + \theta_4$. Οπότε η ανάλυση σε όρους ημιτόνων και συνημιτόνων θα διαμορφωθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} d \sin(\theta_1) + a \sin(\theta_2) + b \sin(180^\circ + \theta_4) - c \sin(\theta_4) \\ = d \sin(\theta_1) + a \sin(\theta_2) - b \sin(\theta_4) - c \sin(\theta_4) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \cos(\theta_1) + a \cos(\theta_2) + b \cos(180^\circ + \theta_4) - c \cos(\theta_4) \\ = d \cos(\theta_1) + a \cos(\theta_2) - b \cos(\theta_4) - c \cos(\theta_4) = 0 \end{aligned}$$

Για να προκύψει εξίσωση της θ_2 χωρίς άγνωστους όρους, θα πρέπει να απαλειφεί ο όρος της θ_4 . Οι όροι ημιτόνων και συνημιτόνων των διανυσμάτων υψώνονται στο τετράγωνο, προστίθενται και μέσω τριγωνομετρικής ταυτότητας καταλήγουν στη:

$$(b + c)^2 = a^2 + d^2 + 2ad \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Με επίλυση ως προς θ_2 :

$$\theta_2 = \theta_1 - \cos^{-1} \left(\frac{(b + c)^2 - a^2 - d^2}{2ad} \right)$$

Για να προκύψει εξίσωση για τη γωνία θ_4 , θα πρέπει από την ανάλυση των διανυσμάτων να απαλειφεί ο όρος της θ_2 . Με την ίδια μεθοδολογία, προκύπτει:

$$a^2 = (b + c)^2 + d^2 - 2(b + c)d \cos(\theta_1 - \theta_4)$$

Με επίλυση ως προς θ_4 :

$$\theta_4 = \theta_1 - \cos^{-1} \left(\frac{(b + c)^2 + d^2 - a^2}{2(b + c)d} \right)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις για το μηχανισμό εξόδου αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο:

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \cos^{-1} \left(\frac{(\alpha + b)^2 - c^2 - d^2}{2cd} \right)$$

$$\varphi_4 = \varphi_1 - \cos^{-1} \left(\frac{(\alpha + b)^2 + d^2 - c^2}{2(\alpha + b)d} \right)$$