

ΓΡΑΜ. ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ.

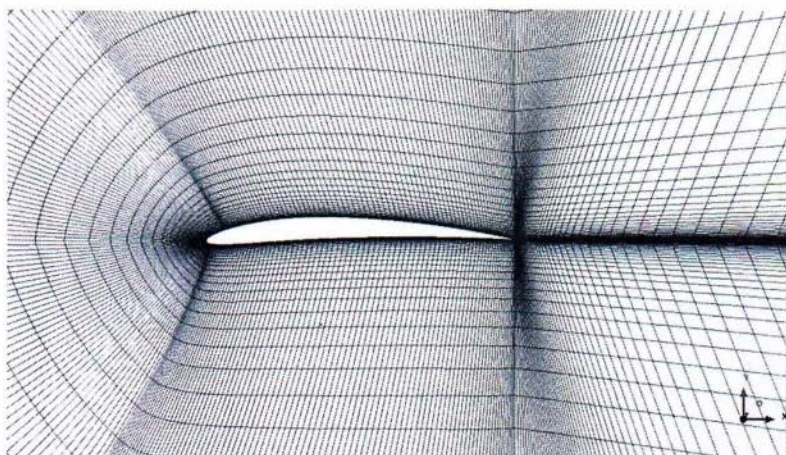


ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(ΤΕΙ) ΠΕΙΡΑΙΑ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

75
M

*«Μελέτη δημιουργίας πλέγματος και
αεροδυναμικής συμπεριφοράς δισδιάστατων
αεροτομών τύπου NACA μέσω υπολογιστικής
ρευστοδυναμικής»*

*“Study of Grid generation & aerodynamic behavior
of 2D airfoils NACA type via CFD”*



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΡΟΥΤΟΥΛΑΣ ΤΡΥΦΩΝ

Επιβλέπων Καθηγητής: Νίκας Κωνσταντίνος-Στέφανος

Αθήνα, Ιούλιος 2013

Πίνακας περιεχομένων

Ευχαριστίες.....	4
Περίληψη.....	5
Λέξεις-Κλειδιά.....	5
Abstract.....	5
Keywords.....	5
Εισαγωγή.....	6
1. ΘΕΩΡΙΑ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ.....	9
1.1 Συντελεστές.....	9
1.2 Οι εξισώσεις Navier-Stokes.....	10
1.3 Το σύστημα εξισώσεων Navier-Stokes.....	11
1.4 Χωρική διακριτοποίηση εξισώσεων.....	12
1.5 Προσέγγιση των μεταβλητών στα σύνορα των κελιών.....	13
1.6 Συνοριακές συνθήκες.....	14
1.7 Συνοριακές συνθήκες τοίχου (Solid Wall).....	14
1.8 Συνοριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου.....	14
1.9 Χρονική διακριτοποίηση εξισώσεων.....	16
1.10 Έμμεση ολοκλήρωση στο χρόνο (Implicit Time-Stepping).....	17
1.11 Μη-μόνιμες Ροές.....	18
2. ΘΕΩΡΙΑ ΤΥΡΒΗΣ.....	20
2.1 Γενικά.....	20
2.2 Μοντέλα τύρβης.....	21
3. ΑΕΡΟΤΟΜΕΣ.....	23
3.1 Γενικά.....	23
3.2 Γεωμετρία αεροτομής.....	23
3.3 Η αεροδυναμική των αεροτομών.....	24
3.3.1 Δύναμη άντωσης.....	24
3.3.2 Οπισθέλκουσα δύναμη.....	25
3.3.3 Συντελεστές Άντωσης και Οπισθέλκουσας.....	25
3.3.4 Γωνίες στις Αεροτομές.....	26
3.3.5 Κατανομή Πίεσης σε Αεροτομή.....	28
3.4 4-ψήφια αεροτομή NACA.....	30
4 ΠΛΕΓΜΑΤΑ.....	34
4.1 Χρησιμότητα.....	34
4.2 Χαρακτηριστικά Πλέγματος.....	34
4.3 Κελιά.....	36

4.4	Τύποι Πλεγμάτων	36
4.4.1	Πλέγμα δομημένων στοιχείων (Structured Grids).....	37
4.4.2	Πλέγμα μη δομημένων στοιχείων (Unstructured Grids).	38
4.4.3	Υβριδικό πλέγμα	38
4.5	Πως δημιουργούνται	39
5	ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ.....	41
5.1	Σύνοψη	41
5.2	Δημιουργία πλέγματος ICEMCFD	42
5.2.1	Γεωμετρία αεροτομής και far-field.....	42
5.2.2	Τοπολογία πλέγματος.....	43
5.2.3	Εφαρμογή παραμέτρων στις ακμές των block.....	47
5.3	Ο επιλύτης HMB (Helicopter Multi Block)	51
5.3.1	Μετατροπή του πλέγματος σε αρχείο μορφής *.gnd κατάλληλο για εισαγωγή στον επιλύτη HMB.....	51
5.3.2	Οριακές συνθήκες.....	51
5.3.3	Δημιουργία προαπαιτούμενων αρχείων για τον επιλύτη HMB	51
5.3.4	Εφαρμογή του προγράμματος προσομοίωσης.....	53
5.4	Αποτελέσματα και Σχολιασμός.....	59
5.4.1	Διαγράμματα συντελεστών (<i>Cl, Cd, Cm, Cp, LD</i>)	59
5.4.2	Σύγκριση αποτελεσμάτων του επιλύτη HMB με αποτελέσματα του επιλύτη του προγράμματος X-FOIL.....	82
5.4.3	Σύγκριση αποτελεσμάτων της αεροτομής NACA4407 με τα αποτελέσματα της αεροτομής NACA4412(με χρήση του επιλύτη HMB).....	84
6	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ.....	95
6.1	Συμπεράσματα.....	95
6.1.1	Πλέγμα μοντελοποίησης.....	95
6.1.2	Συντελεστές - Αποτελέσματα μελέτης.....	95
6.2	Προτάσεις για μελλοντική εργασία	96
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	97
	Παράρτημα Α.....	98
	Παράρτημα Β.....	102

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί την Πτυχιακή μου Εργασία στα πλαίσια των σπουδών μου στο τμήμα Μηχανολογίας του ΤΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου Κωνσταντίνο Νίκα για την ανάθεση της πτυχιακής εργασίας, καθώς και για την αμέριστη βοήθεια και την αποτελεσματική καθοδήγηση και υποστήριξη που μου προσέφερε για την ολοκλήρωσή της.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Liverpool University και διευθυντή του CFD-Lab Γεώργιο Μπαράκο, η συμβολή του οποίου κατέστησε πολλές πτυχές της εργασίας αυτής εύκολα προσπελάσιμες.

Τέλος, μου είναι δύσκολο να περιγράψω με λόγια την αγάπη, ενθάρρυνση και υποστήριξη που έλαβα από την οικογένειά μου.

Αθήνα, Ιούλιος 2013

Περίληψη

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει στόχο να υπολογίσει τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά δύο υπό μελέτη αεροτομών, επιλύοντας υπολογιστικά τις εξισώσεις Navier-Stokes σε δύο διαστάσεις, ώστε αυτές να αξιολογηθούν και να συγκριθούν μεταξύ τους, ως προς την συμπεριφορά και την χρησιμότητα σε εφαρμογές αεροδυναμικού ενδιαφέροντος.

Λέξεις-Κλειδιά

Δισδιάστατη Αεροτομή, Δομημένο Πλέγμα, Αεροδυναμική ανάλυση, Άντωση, Οπισθέλκουσα, Πίεση, Τύρβη,

Abstract

The present study aims to estimate the aerodynamic characteristics of two study airfoils by solving computationally the Navier-Stokes equations in two dimensions. There will be evaluation and comparison between the results concerning the behavior and usability of applications of aerodynamic interest.

Keywords

2-dimensional Airfoil, Structured Grid/mesh, Aerodynamic study, Lift, Drag, Pressure, Turbulence.

Εισαγωγή

Στα πρώτα βήματα της, η ρευστομηχανική περιοριζόταν από τις ανεπαρκείς δυνατότητες επίλυσης των εξισώσεων που χαρακτηρίζαν την ροή ενός ρευστού, έχοντας πληθώρα προβλημάτων που δεν ήταν δυνατό να λυθούν αναλυτικά ώστε να μπορούν να καταστούν ευρέως αποδεκτά σαν λύσεις σε περαιτέρω παρόμοιες περιπτώσεις. Περίτρανο παράδειγμα είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes, οι οποίες ακόμα και σήμερα δεν επιδέχονται αναλυτικής λύσης στα περισσότερα προβλήματα.

Σαν επακόλουθο, και σαν βοήθημα στην τόσο απαιτητική αυτή επιστήμη της ρευστομηχανικής, αναπτύχθηκαν αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης των αναλυτικά μη επιλύσιμων προβλημάτων. Δημιουργήθηκε έτσι ένας νέος, συγγενικός κλάδος, αυτός της υπολογιστικής ρευστομηχανικής (Computational Fluid Dynamics).

Στην εποχή μας, η ανάγκη για αεροδυναμικές προβλέψεις ακριβείας που σχετίζονται με αεροδυναμική τεχνολογία (ανεμογεννήτριες, ελικόπτερα, στροβιλομηχανές, κ.λ.π.) είναι πολύ σημαντική.

Παρά το γεγονός ότι το κόστος της εκτέλεσης αναλύσεων Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής (CFD) δεν είναι ασήμαντο, η μελέτη CFD μπορεί να είναι σημαντικά φθηνότερη από την εκτέλεση δοκιμών σε αεροσήραγγα και να είναι σε θέση να προσομοιώνει συνθήκες οι οποίες είναι δύσκολο ή αδύνατο να αναπαραχθούν σε μια αεροδυναμική σήραγγα και να παρέχει στοιχεία με πρωτοφανή λεπτομέρεια.

Για τον λόγο αυτό έχει υπάρξει μια αυξανόμενη χρήση των κωδίκων CFD κατά την τελευταία δεκαετία για την αεροδυναμική ανάλυση. Με τις προόδους στην επιστήμη και την τεχνολογία και πολύ ισχυρούς υπολογιστές με υψηλή χωρητικότητα μνήμης είναι τώρα διαθέσιμες τέτοιες χρήσεις.

Η μελέτη CFD έχει επιτρέψει στη βιομηχανία να εκτελέσει δοκιμές αεροδυναμικής νωρίτερα κατά τη φάση σχεδιασμού, και η χρήση της είναι βέβαιο ότι θα αυξηθεί στο μέλλον. Συνεπώς, η έρευνα στα CFD έχει επενδύσει σημαντική προσπάθεια για την ανάπτυξη CFD εργαλείων και να μεγιστοποιήσει τις δυνατότητες τους.

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει στόχο να υπολογίσει τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά δύο υπό μελέτη αεροτομών, επιλύοντας υπολογιστικά τις εξισώσεις Navier-Stokes σε δύο διαστάσεις, ώστε αυτές να αξιολογηθούν μεταξύ τους, ως προς τη συμπεριφορά και τη χρηστικότητα τους σε εφαρμογές αεροδυναμικού ενδιαφέροντος. Τα θεωρητικά πλεονεκτήματα πρέπει να επιβεβαιωθούν, ώστε να διαπιστωθεί εάν και κάτω από ποιές συνθήκες, η μια αεροτομή υπερτερεί έναντι της άλλης.

Κατά την εκπόνηση της εργασίας πραγματοποιήσα τα ακόλουθα βήματα.

- Αρχικά εξοικειώθηκα με την επιστήμη CFD, τις δυνατότητες και εφαρμογές της
- Μελέτησα τα λογισμικά εργαλεία ICEMCFD, HMB solver και Tecplot 360
- Χρησιμοποίησα τα ανωτέρω λογισμικά τα οποία μου παρασχέθηκαν από το εργαστήριο CFD του πανεπιστημίου του Liverpool και με τη βοήθεια τους,

πραγματοποίησα προσομοίωση βασικής ρευστομηχανικής εφαρμογής σε δισδιάστατες αεροτομές.

Η δομή της εργασίας συνίσταται από την θεωρητική ενότητα και την Υπολογιστική διερεύνηση.

Η Θεωρητική ενότητα αναπτύσσεται στα ακόλουθα κεφάλαια:

- Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι βασικοί συντελεστές της αεροδυναμικής και οι εξισώσεις Navier-Stokes που περιγράφουν την κίνηση των ρευστών στις οποίες βασίζεται η υπολογιστική ανάλυση.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσονται η γενική περιγραφή της τυρβώδους ροής και η ανάλυση ενός μοντέλου τύρβης που να επιτρέπει να λάβουμε υπ' όψιν και την επιρροή της στην υπολογιστική προσέγγιση προβλημάτων ρευστομηχανικής. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο τύρβης $k-\omega$ - SST.
- Το τρίτο κεφάλαιο πραγματεύεται την περιγραφή των αεροτομών γενικώς και των αεροτομών NACA ειδικότερα και αναλύει την γεωμετρία και την αεροδυναμική των.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφονται τα πλέγματα (grid/mesh) που είναι η «δίοδος» προκειμένου να μελετηθεί ένα αντικείμενο υπό συγκεκριμένες συνθήκες με μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Αναλύονται τα είδη, οι ιδιότητες και η μεθοδολογία κατασκευής των πλεγμάτων.

Η υπολογιστική διερεύνηση περιγράφεται αναλυτικά στο πέμπτο κεφάλαιο και περιλαμβάνει τα ακόλουθα:

- Δημιουργία πλέγματος ICEMCFD με ανάλυση τόσο της γεωμετρίας της αεροτομής, όσο και της περιοχής μέσα στην οποία θα μελετηθεί (far-field).
- Χρήση του πλέγματος ως δεδομένου εισόδου στον υπολογιστικό κώδικα, μαζί με τις επιθυμητές συνθήκες ροής.
- Δοκιμαστική εφαρμογή του υπολογιστικού κώδικα με σκοπό να διαπιστωθεί εάν η συμπεριφορά του πλέγματος ήταν η αναμενόμενη (μέσω σύγκρισης των αποτελεσμάτων του υπολογιστικού κώδικα με πειραματικά δεδομένα) και προσεκτικές βελτιώσεις με σκοπό την προσαρμογή του πλέγματος για να γίνει όσο το δυνατό πιο ομαλό και κατάλληλο για την εκάστοτε αεροτομή.
- Υπολογιστική προσομοίωση της ροής μέσω των εξισώσεων Navier-Stokes.

Οι γωνίες πρόσπτωσης ήταν σε κάθε περίπτωση από -16 έως 18 μοίρες και οι αριθμοί Reynolds 100000 , 500000 , 1000000 , 2000000 .

Οι επιμέρους περιπτώσεις ήταν οι παρακάτω:

- Μόνιμες Συνθήκες, πλήρως τυρβώδης ροή.

- Μόνιμες Συνθήκες, ροή με μετάβαση σε τύρβη σε συγκεκριμένο σημείο (όπου αυτό κρίθηκε σκόπιμο για σύγκριση με υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα)
- Μη-μόνιμες συνθήκες, πλήρως τυρβώδης ροή.
- Περιγραφή του επιλύτη HMB (Helicopter Multi Block) με τις απαιτούμενες εντολές, προαπαιτούμενα αρχεία και επεξήγηση αυτών.

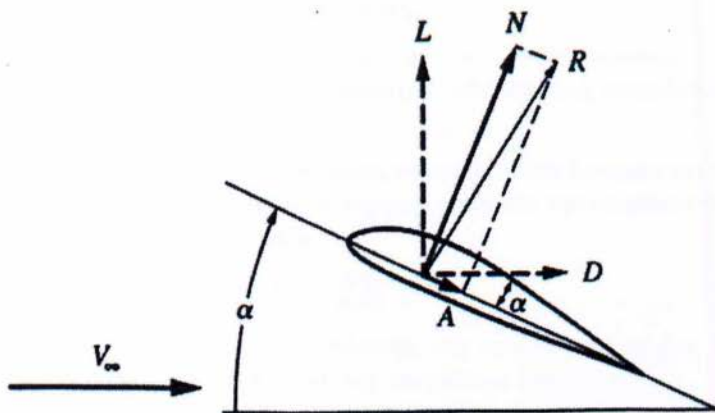
Για κάθε αεροτομή δημιουργήθηκαν διαγράμματα συντελεστών (C_l , C_d , C_m , C_p , L/D) συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης, για τις εκάστοτε συνθήκες ροής με στόχο να απεικονίσουν τη διαφορά στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της αεροτομής για αυξανόμενο αριθμό Reynolds και να συγκρίνουν τις επιμέρους αεροτόμες για τις ίδιες συνθήκες ροής ως προς τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά.

- Σχολιασμός και σύγκριση αποτελεσμάτων με X-FOIL.

1. ΘΕΩΡΙΑ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

1.1 Συντελεστές

Κατά την κίνηση ενός ρευστού γύρω από μια αεροτομή, αναπτύσσονται κάποιες δυνάμεις οι οποίες είναι υπεύθυνες για την κίνηση αυτής (Σχήμα 1.1). Το μέγεθος των δυνάμεων αυτών εξαρτάται κυρίως από τη γεωμετρία της αεροτομής και από την γωνία πρόσπτωσης του ρευστού (αέρα) πάνω σε αυτήν.



Σχήμα 1.1 Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται σε αεροτομή

Οι πιο σημαντικές από αυτές είναι:

- **Δύναμη άντωσης (Lift force):** Ονομάζεται η δύναμη που αναπτύσσεται σε ένα αντικείμενο (λ.χ. αεροτομή) ευρισκόμενο σε ροϊκό πεδίο και είναι κάθετη στη διεύθυνση του ρευστού. Πρακτικά, είναι η δύναμη η οποία προκαλεί την ανύψωση του αντικειμένου κατά την κίνηση του και προκύπτει από την ολοκλήρωση της δύναμης των πιέσεων στο περίγραμμα της αεροτομής.

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \cdot \rho \cdot u^2 \cdot A \quad (1.1)$$

- **Οπισθέλκουσα δύναμη (Drag force):** Ονομάζεται η δύναμη που αναπτύσσεται σε ένα αντικείμενο ευρισκόμενο σε ροϊκό πεδίο και είναι παράλληλη στη διεύθυνση του ρευστού. Η φορά του διανύσματος της οπισθέλκουσας δείχνει πάντα προς τη φορά κίνησης του ρευστού (αντίθετα προς την κίνηση του αντικειμένου).

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot u^2 \cdot A \quad (1.2)$$

Δεδομένου ότι το στοιχείο το οποίο λαμβάνουμε ως στοιχείο αναφοράς σε μια αεροτομή είναι η χορδή αυτής, πολλές φορές συμφέρει να ανάγουμε τις δύο παραπάνω δυνάμεις σε δυνάμεις οι οποίες ασκούνται κάθετα και παράλληλα στην χορδή.

- **Ονομαστική δύναμη (Nominal force):** Ονομάζεται η ανηγμένη δύναμη της άντωσης που ασκείται σε ένα σώμα. Στην περίπτωση της αεροτομής η ονομαστική δύναμη είναι πάντα κάθετη στην χορδή της.
- **Αξονική δύναμη (Axial force):** Ονομάζεται η ανηγμένη δύναμη της οπισθέλκουσας που ασκείται σε ένα σώμα και στην περίπτωση της αεροτομής η αξονική δύναμη είναι πάντα παράλληλη στην χορδή αυτής.

Τα χαρακτηριστικά της άντωσης και της οπισθέλκουσας, μπορούν να περιγραφούν χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους αδιάστατους συντελεστές άντωσης και οπισθέλκουσας (C_L και C_d).

Ο αδιάστατος συντελεστής της άντωσης αναφέρεται στα δυναμικά χαρακτηριστικά την δύναμη της άντωσης λαμβάνοντας ως περιοχή αναφοράς την επιφάνεια του σώματος πάνω στην οποία προσπίπτει το ρευστό.

$$C_L = \frac{2 \cdot F_L}{\rho \cdot u^2 \cdot A} \quad (1.3)$$

Αντίστοιχα ο αδιάστατος συντελεστής της οπισθέλκουσας μας δείχνει την αντίσταση που έχει ένα σώμα κατά την κίνηση του μέσα σε ένα ρευστό.

$$C_d = \frac{2 \cdot F_D}{\rho \cdot u^2 \cdot A} \quad (1.4)$$

Όπου:

F_D, F_L είναι η δύναμη οπισθέλκουσας και άντωσης, αντίστοιχα.

ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού.

u είναι η ταχύτητα του ρευστού όταν αυτό σε ελεύθερο ρεύμα.

A είναι η επιφάνεια του σώματος την οποία συναντά το ρευστό και ως προς αυτήν δημιουργούνται οι ανωτέρω δυνάμεις.

Οι συντελεστές της αεροδυναμικής αναπτύσσονται σε συγκεκριμένη εφαρμογή στο κεφάλαιο «Αεροτομές».

1.2 Οι εξισώσεις Navier-Stokes

Οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των ρευστών. Προκύπτουν από την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, μαζί με την υπόθεση ότι η τάση ενός ρευστού είναι το άθροισμα ενός όρου διάχυσης (ευθέως ανάλογου της βαθμίδας της ταχύτητας) και ενός όρου πίεσης.

Οι εξισώσεις αυτές είναι πολύ χρήσιμες, διότι περιγράφουν αρκετά προβλήματα ακαδημαϊκού και οικονομικού ενδιαφέροντος. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιήσουν τον καιρό, τα ρεύματα των ωκεανών, την ροή νερού στο εσωτερικό ενός σωλήνα καθώς και την ροή αέρα γύρω από μια αεροτομή.

Οι εξισώσεις αυτές, τόσο με τις πλήρεις, όσο και με τις απλοποιημένες μορφές τους, βοηθούν στο σχεδιασμό οχημάτων και αεροσκαφών, στη μελέτη του κυκλοφοριακού συστήματος, την ανάλυση της περιβαλλοντικής μόλυνσης και σε πλήθος από άλλες εφαρμογές.

1.3 Το σύστημα εξισώσεων Navier-Stokes

Το σύστημα των εξισώσεων Navier-Stokes ολοκληρωμένο σε όγκο Ω με σύνορο $\partial\Omega$ έχει την μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{U}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{C}} d\mathbf{S} - \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{U}}) d\mathbf{S} = \oint_{\Omega} \bar{\mathbf{Q}} d\Omega \quad (1.5)$$

Όπου:

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών,

$$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho w V + n_z p \\ \rho \left(E + \frac{p}{\rho} \right) V \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

είναι το διάνυσμα των συνεκτικών παροχών (*Viscous Fluxes*)

$$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \theta_x + n_y \theta_y + n_z \theta_z \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

είναι το διάνυσμα των συντηρητικών γενικευμένων παροχών (*Convective Fluxes*).

Το σύστημα εξισώσεων

$$\theta_x = u\tau_{xx} + u\tau_{xy} + u\tau_{xz} + k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.9)$$

$$\theta_y = u\tau_{yx} + u\tau_{yy} + u\tau_{yz} + k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.10)$$

$$\theta_z = u\tau_{zx} + u\tau_{zy} + u\tau_{zz} + k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.11)$$

κλείνει με την καταστατική εξίσωση για ιδανικό αέριο:

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right] \quad (1.12)$$

1.4 Χωρική διακριτοποίηση εξισώσεων

Η χωρική διακριτοποίηση αφορά στην αριθμητική προσέγγιση των συντηρητικών και των συνεκτικών παροχών καθώς και των πηγαίων όρων. Πολλές διαφορετικές μεθοδολογίες έχουν αναπτυχθεί για την επίτευξη του σκοπού αυτού, με πολλές να βρίσκονται ακόμα σε εξέλιξη.

Οι μέθοδοι αυτές, ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται η διακριτοποίηση, χωρίζονται σε:

- Μεθόδους πεπερασμένων διαφορών (*Finite Difference*)
- Μεθόδους πεπερασμένων όγκων (*Finite Volume*)
- Μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων (*Finite Element*)

Επίσης, ανάλογα με το πλέγμα στο οποίο γίνεται η επίλυση, χωρίζονται σε:

- Μεθόδους δομημένων πλεγμάτων (*Structured Grid*)
- Μεθόδους μη-δομημένων πλεγμάτων (*Unstructured Grid*)

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων επιλέχθηκε η μέθοδος πεπερασμένων όγκων διότι:

- Η χωρική διακριτοποίηση γίνεται στο φυσικό υπολογιστικό χωρίο
- Μπορεί να εφαρμοσθεί σε δομημένα αλλά και σε μη-δομημένα πλέγματα

Τέλος, οι μέθοδοι πεπερασμένων όγκων χωρίζονται σε:

- Cell-centered, στις οποίες οι μεταβλητές των εξισώσεων υπολογίζονται στα κέντρα των κελιών του πλέγματος. Στην περίπτωση αυτή τα υπολογιστικά κελιά ταυτίζονται με αυτά του πλέγματος.
- Cell-vertex, στις οποίες οι μεταβλητές των εξισώσεων υπολογίζονται στους κόμβους του πλέγματος. Σε αυτή την περίπτωση το υπολογιστικό κελί ορίζεται από κάποιον όγκο γύρω από τον κόμβο του πλέγματος.

Τα κελιά ορίζονται στους κόμβους του πλέγματος, ενώ οι μεταβλητές της ροής υπολογίζονται στα κέντρα των κελιών (*Finite Volume-Cell Centered Scheme*).

Θεωρώντας ότι ο όγκος των κελιών δεν μεταβάλλεται με το χρόνο:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{U} d\Omega = \Omega \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \quad (1.13)$$

όπου

$$\bar{U} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \bar{U}_{\text{exact}} d\Omega \quad (1.14)$$

Συνεπώς η εξίσωση 1.1 γίνεται:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} [\phi_{\partial\omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_u) dS - \int_{\Omega} \bar{Q} d\Omega] \quad (1.15)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην παραπάνω εξίσωση, προσεγγίζεται από το άθροισμα των παροχών στις επιφάνειες (*faces*) που συνιστούν το εκάστοτε κελί.

Συνήθως θεωρείται ότι η παροχή παραμένει σταθερή πάνω σε μια επιφάνεια και υπολογίζεται στο κέντρο της.

Η παραπάνω εξίσωση για ένα κελί I , γίνεται:

$$\frac{\partial \bar{U}_I}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \sum_{m=1}^{N_f} ((\bar{F}_c - \bar{F}_u)_m \Delta S_m) - (\bar{Q}\Omega)_I \quad (1.16)$$

όπου N_f είναι ο αριθμός των επιφανειών που περιγράφουν το κελί και ΔS_m είναι η επιφάνεια της πλευράς "m". Ο όρος R_I ονομάζεται υπόλοιπο (residual) με αποτέλεσμα η τελική μορφή της διακριτοποιημένης εξίσωσης να γράφεται:

$$\frac{d\bar{U}_I}{dt} = -\frac{1}{\Omega} \vec{R}_I \quad (1.17)$$

1.5 Προσέγγιση των μεταβλητών στα σύνορα των κελιών

Η διακριτοποίηση των συντηρητικών παροχών (*Convective Fluxes*) αφορά την διαδικασία εύρεσης των παροχών στα σύνορα των κελιών. Όπως αναφέρθηκε στα Cell-centered σχήματα οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών ($\rho, \rho \bar{U}, \rho E$), είναι γνωστές στα κέντρα των κελιών. Για να υπολογιστούν οι παροχές στα σύνορα των κελιών, χρειάζεται να προσεγγίσουμε είτε τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών εκεί είτε τις τιμές των παροχών απ' ευθείας.

Στη μέθοδο που αναπτύχθηκε υπολογίζονται οι τιμές των μεταβλητών (πρωτογενών) στα σύνορα και στη συνέχεια υπολογίζονται οι παροχές. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ανακατασκευή των μεταβλητών (reconstruction). Για να υπολογιστεί η τιμή στις επιφάνειες των κελιών χρησιμοποιούνται τα λεγόμενα left και rights states. Η χρήση αυτών έγκειται στο γεγονός ότι η παρεμβολή των μεταβλητών πάνω σε μία συγκεκριμένη επιφάνεια του κελιού γίνεται δύο φορές: μια από τα δεξιά και μία από τα αριστερά της επιφάνειας και στη συνέχεια υπολογίζεται η παροχή διαμέσου της επιφάνειας.

Στη μέθοδο αυτή, γίνεται η υπόθεση ότι η λύση είναι τμηματικά, γραμμικά κατανεμημένη στον πεπερασμένο όγκο. Τα left και right states υπολογίζονται ως εξής:

$$\bar{W}_L = \bar{W}_I + \Psi_L (\nabla \bar{W}_I \cdot \vec{r}_L) \quad (1.18)$$

$$\bar{W}_R = \bar{W}_J + \Psi_J (\nabla \bar{W}_J \cdot \vec{r}_R) \quad (1.19)$$

όπου:

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ E \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

είναι το διάνυσμα των πρωτογενών μεταβλητών και \vec{r}_L, \vec{r}_R είναι οι αποστάσεις των κέντρων των κελιών από το κέντρο της κοινής επιφάνειας.

Σημαντικός παράγοντας στο παραπάνω σχήμα είναι ο υπολογισμός του $\nabla \bar{W}_I$ στις εξισώσεις 1.18 και 1.19. Ο υπολογισμός της παραγώγου γίνεται με την προσέγγιση του Green-Gauss.

Η παράγωγος προσεγγίζεται από ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\nabla \bar{W}_I \cong \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega} \bar{W} \bar{n} dS \quad (1.21)$$

Στα Cell-centered σχήματα, η παραπάνω εξίσωση διακριτοποιείται ως εξής:

$$\nabla \bar{W}_I \cong -\frac{1}{\Omega} \sum_{j=1}^{N_f} \left(\frac{1}{2} (\bar{W}_I + \bar{W}_j) \bar{n}_{ij} \Delta S_{ij} \right) \quad (1.22)$$

Η συνάρτηση Ψ είναι μία συνάρτηση που αποτρέπει τις μεταβλητές από το να πάρουν ακραίες τιμές εκεί που εμφανίζονται ασυνέχειες. Αυτές οι συναρτήσεις ονομάζονται “περιοριστές” (limiters). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, εφαρμόστηκε ο limiter του Venkatakrishnan.

1.6 Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες χωρίζονται σε:

- Συνοριακές συνθήκες τοίχου (*Solid Wall*)
- Συνοριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου (*Farfield Inflow/Outflow*)
- Συνοριακές συνθήκες ανάμεσα σε blocks (*Multiblock boundary conditions*)

Για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών χρησιμοποιούνται φανταστικά κελιά (dummy cells) τα οποία μεγαλώνουν το υπολογιστικό χωρία, ώστε να γίνεται πιο εύκολα ο υπολογισμός των μεγεθών στα σύνορα.

1.7 Συνοριακές συνθήκες τοίχου (Solid Wall)

Οι συνοριακές συνθήκες τοίχου έχουν διαφορετική έκφραση στην περίπτωση του συνεκτικού και του μη-συνεκτικού ρευστού. Στην περίπτωση του μη-συνεκτικού ρευστού, οι συνοριακές συνθήκες τοίχου εκφράζονται από τη συνθήκη μη-εισχώρησης: $V = \bar{u}, \bar{n} = 0$ στον τοίχο.

Συνεπώς, το διάνυσμα των συντηρητικών παροχών στον τοίχο γίνεται:

$$\overline{(F_c)} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x P_w \\ n_y P_w \\ n_z P_w \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

όπου p_w είναι η πίεση στον τοίχο.

Στην περίπτωση του συνεκτικού ρευστού, η ταχύτητα στον τοίχο είναι μηδενική (συνοριακή συνθήκη μη-ολίσθησης). Συνεπώς, η συνοριακή συνθήκη στον τοίχο είναι: $u=v=w=0$ στον τοίχο.

1.8 Συνοριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου

Ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών των συντηρητικών παροχών, η πληροφορία μεταφέρεται από ή προς τα έξω από το υπολογιστικό χωρίο πάνω στις χαρακτηριστικές. Ο αριθμός των επιβαλλόμενων συνθηκών στο σύνορο πρέπει να είναι ίδιος με τον αριθμό

των χαρακτηριστικών που εισέρχονται στο υπολογιστικό χωρίο. Οι υπόλοιπες συνθήκες υπολογίζονται από την υπάρχουσα λύση στο χωρίο.

Η ροή μπορεί είτε να εισέρχεται είτε να εξέρχεται από το υπολογιστικό χωρίο. Συνεπώς, ανάλογα με τον τοπικό αριθμό Mach, προκύπτουν 4 τύποι οριακών συνθηκών:

- Υπερηχητική είσοδος (Supersonic Inflow)
- Υπερηχητική έξοδος (Supersonic Outflow)
- Υποχηχητική είσοδος (Subsonic Inflow)
- Υποχηχητική έξοδος (Subsonic Outflow)

Υπερηχητική είσοδος

Σε αυτή την περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές και άρα εισέρχονται στο χωρίο. Συνεπώς οι συντηρητικές μεταβλητές στο σύνορο υπολογίζονται μόνο από την επερχόμενη ροή.

$$\bar{U}_{boundary} = \bar{U}_{freestream}$$

Υπερηχητική έξοδος

Σε αυτή την περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές έχουν το ίδιο πρόσημο και εξέρχονται από το χωρίο. Συνεπώς οι συντηρητικές μεταβλητές στο σύνορο υπολογίζονται προεκβάλλοντας την υπάρχουσα λύση στο χωρίο.

$$\bar{U}_{boundary} = \bar{U}_{computational}$$

Υποχηχητική είσοδος

Σε αυτή την περίπτωση, τέσσερις χαρακτηριστικές εισέρχονται στο χωρίο και μία εξέρχεται. Συνεπώς μια χαρακτηριστική μεταβλητή υπολογίζεται στο σύνορο από το εσωτερικό του χωρίου.

$$P_b = \frac{1}{2} [P_a + P_d - \rho_0 c_0 (n_x(u_a - u_d) + n_y(u'_a - u'_d) + n_z(u_a - u_d))] \quad (1.24)$$

$$\rho_b = \rho_a + (p_b - p_a)/c_0^2 \quad (1.25)$$

$$u_b = u_a - n_x(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0) \quad (1.26)$$

$$v_b = v_a - n_y(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0) \quad (1.27)$$

$$w_b = w_a - n_z(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0) \quad (1.28)$$

όπου το ρ_0, c_0 αναφέρονται στο εσωτερικό του χωρίου.

Υποχηχητική έξοδος

Σε αυτήν την περίπτωση, τέσσερις χαρακτηριστικές εξέρχονται από το χωρίο και μία εισέρχεται σε αυτό. Συνεπώς, τέσσερις μεταβλητές υπολογίζονται από το εσωτερικό του χωρίου και μία (συνήθως η πίεση) επιβάλλεται εξωτερικά:

$$p_b = p_a \quad (1.29)$$

$$\rho_b = \rho_d + (p_b - p_d)/c_0^2 \quad (1.30)$$

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_d - \mathbf{n}_x(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0) \quad (1.31)$$

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_d - \mathbf{n}_y(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0) \quad (1.32)$$

$$\mathbf{w}_b = \mathbf{w}_d - \mathbf{n}_z(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0) \quad (1.33)$$

Οι παραπάνω συνοριακές συνθήκες υποθέτουν μηδενική κυκλοφορία, το οποίο είναι λάθος για ένα ανωστικό σώμα. Για αυτό το λόγο, το εξωτερικό όριο πρέπει να βρίσκεται μακριά από το σώμα. Η απόσταση του εξωτερικού ορίου μπορεί να μειωθεί σημαντικά, αν η επερχόμενη ροή περιστραφεί αναλογικά με την κυκλοφορία. Αυτή η διόρθωση ονομάζεται «vortex correction».

1.9 Χρονική διακριτοποίηση εξισώσεων

Για τη χρονική διακριτοποίηση εφαρμόζουμε τη μέθοδο των γραμμών (*method of lines*). Αυτό σημαίνει ότι ξεχωρίζουμε τη χωρική από τη χρονική διακριτοποίηση οπότε καταλήγουμε σ' ένα σύστημα πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων στο χρόνο για κάθε κελί:

$$\frac{d(\Omega \bar{M} \bar{U})_i}{dt} = -\bar{R}_i \quad (1.34)$$

Το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρέπει να ολοκληρωθεί στο χρόνο είτε για να πάρουμε τη λύση (στα μόνιμα προβλήματα) είτε για να αναπαράγουμε τη χρονική ιστορία στα μη μόνιμα προβλήματα.

Για μη μεταβαλλόμενα πλέγματα η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\frac{(\Omega \bar{M})_i}{\Delta t_l} = \frac{\beta}{1+\omega} R_i^{\bar{n}+1} - \frac{1-\beta}{1+\omega} R_i^{\bar{n}} + \frac{\omega}{1+\omega} \frac{(\Omega \bar{M})_i}{\Delta t_l} \Delta U_i^{\bar{n}-1} \quad (1.35)$$

όπου:

$$\Delta U_i^{\bar{n}} = U_i^{\bar{n}+1} - U_i^{\bar{n}} \quad (1.36)$$

είναι η διόρθωση της λύσης.

Το μητρώο \bar{M} είναι το λεγόμενο μητρώο μάζας (mass matrix), το οποίο για τα προβλήματα που εξετάζονται είναι μοναδιαίο.

Ο καθορισμός του χρονικού βήματος είναι σημαντικός παράγοντας για την ευστάθεια του προβλήματος. Το μέγιστο χρονικό βήμα για κάθε κελί καθορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\Delta t_l = \sigma \frac{\Omega}{(\hat{\lambda}_c + 4\hat{\lambda}_v)_i} \quad (1.37)$$

όπου τα λ_c , λ_v είναι ένα άθροισμα των συντηρητικών και των συνεκτικών ιδιοτιμών των επιφανειών που αποτελούν το κελί.

Αυτά ορίζονται σαν:

$$(\hat{\lambda}_c)_i = \sum_{j=1}^{N_f} (\bar{u}_{ij} \cdot \bar{n}_{ij} + C_{ij}) \Delta S_{ij} \quad (1.38)$$

$$(\hat{A}_v)_i = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^{N_f} \left[\max \left(\frac{3}{\rho_{ij}}, \frac{\gamma_{ij}}{\rho_{ij}} \right) \left(\frac{\mu_L}{Pr_L} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right)_{ij} (\Delta S_{ij})^2 \right] \quad (1.39)$$

1.10 Έμμεση ολοκλήρωση στο χρόνο (Implicit Time-Stepping)

Υπάρχουν αρκετά σχήματα έμμεσης ολοκλήρωσης στο χρόνο. Ένα έμμεσο σχήμα βάζοντας $\Omega=0$ στην εξίσωση (1.35) και με $\beta=1$ είναι:

$$\frac{(\overline{\Omega M})_I}{(\Delta t)_I} \Delta \vec{U}_I^n = -\vec{R}_I^{n+1} - \vec{R}_I^n \quad (1.40)$$

Όπως φαίνεται και παραπάνω, χρειάζονται οι τιμές των μεταβλητών την χρονική στιγμή $(n+1)$. Για να υπολογιστεί το υπόλοιπο σε αυτή τη χρονική στιγμή γραμμικοποιείται γύρω από την τρέχουσα χρονική στιγμή:

$$\vec{R}_I^{n+1} \approx \vec{R}_I^n + \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right)_I \Delta \vec{U}^n \quad (1.41)$$

όπου ο όρος $\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right)_I$ είναι η ιακωβιανή των παροχών.

Αν εισάγουμε την ιακωβιανή των παροχών στην εξίσωση (1.40) και για $\overline{M} = \mathbf{1}$ παίρνουμε το ακόλουθο σχήμα:

$$\left[\frac{(\Omega)_I}{\Delta t_I} + \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right)_I \right] \Delta \vec{U}^n = -\vec{R}_I^n \quad (1.42)$$

Έμμεσος τελεστής (Implicit Operator)

Η Ιακωβιανή των παροχών γράφεται ως:

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) = \frac{\sum_{m=1}^{N_f} \partial(\vec{F}_c)_m}{\partial \vec{U}} \Delta S_m - \frac{\sum_{m=1}^{N_f} \partial(\vec{F}_v)_m}{\partial \vec{U}} \Delta S_m - \frac{\partial(\Omega \vec{Q})}{\partial \vec{U}} \quad (1.43)$$

Είναι χαρακτηριστικό ότι οι παροχές που αναφέρονται στην παραπάνω εξίσωση δεν είναι αναγκαστικά ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στη χωρική διακριτοποίηση, αφού η Ιακωβιανή επηρεάζει μόνο τη διόρθωση της λύσης.

Χρησιμοποιώντας τις παροχές κατά Roe και βάζοντας την ιακωβιανή των συνεκτικών παροχών μηδέν, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Delta \vec{U}^n &= \sum_{m=1}^{N_f} \Delta S_m (\vec{A}_c)_{L,m} \Delta W_{R,m}^n + (\vec{A}_c)_{R,m} \Delta W_{R,m}^n - \\ &\left(\frac{\partial}{\partial \vec{W}_{L,m}} \right) [|A \sim_{Roe}|_m (W_{R,m}^n - W_{L,m}^n)] \Delta W_{L,m}^n \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial \vec{W}_{R,m}} \right) [|A \sim_{Roe}|_m (W_{R,m}^n - W_{L,m}^n)] \Delta W_{R,m}^n \quad (1.44) \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι τοπικά οι Ιακωβιανές κατά Roe είναι σταθερές, τότε:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Delta \vec{U}^n = \sum_{m=1}^{N_f} \Delta S_m [(\vec{A}_c)_{L,m} \Delta W_{R,m}^n + (\vec{A}_c)_{R,m} \Delta W_{R,m}^n - |A \sim_{Roe}|_m (W_{R,m}^n - W_{L,m}^n)] \quad (1.45)$$

1.11 Μη-μόνιμες Ροές

Για τον υπολογισμό μη-μόνιμων ροών χρησιμοποιείται η τεχνική του dual-time stepping. Για $\beta=1$ και $\omega=1/2$ η εξίσωση 1.35 γίνεται:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{2\Delta t} = -R_i^{n+1} \quad (1.46)$$

όπου το Δt είναι το φυσικό χρονικό βήμα. Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων εισάγεται η έννοια του ψευδοχρόνου. Στην πραγματικότητα το μη-μόνιμο πρόβλημα σε πραγματικό χρόνο μετατρέπεται σε ένα μόνιμο πρόβλημα σε ψευδοχρόνο.

Κάνοντας την υπόθεση ότι:

$$\frac{\partial}{\partial t^i} (\Omega_i^{n+1} \bar{U}^i) = -\bar{R}_i^i(\bar{U}^i) \quad (1.47)$$

όπου i είναι η προσέγγιση του \bar{U}^{n+1} και t είναι η μεταβλητή του ψευδοχρόνου.

Το μη-μόνιμο υπόλοιπο ορίζεται ως:

$$\bar{R}_i^i(\bar{U}^i) = \bar{R}_i^i(\bar{U}^i) + \frac{3}{2\Delta t} \Omega_i^{n+1} \bar{W}_i^i - \bar{Q}_i^i \quad (1.48)$$

Όλοι οι όροι που παραμένουν σταθεροί κατά τη διάρκεια των ψευδοχρονικών βημάτων τοποθετούνται στον όρο πηγών:

$$\bar{Q}_i^i = \frac{2}{\Delta t} \Omega_i^n \bar{U}_i^n - \frac{1}{2\Delta t} \Omega_i^{n-1} \bar{U}_i^{n-1} \quad (1.49)$$

Όταν η λύση στον ψευδοχρόνο συγκλίνει, τότε το υπόλοιπο \bar{R}_i^i θα είναι μηδέν και

$$\bar{U}_i^i = \bar{U}_i^{n+1} \quad (1.50)$$

Συνεπώς, θα ικανοποιείται η αρχική εξίσωση.

Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση των έμμεσων μεθόδων ολοκλήρωσης στο χρόνο η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t^i} (\Omega_i^{n+1} \bar{U}^i) = -(\bar{R}_i^i)^{l+1} \quad (1.51)$$

όπου $(l+1)$ είναι το νέο ψευδοχρονικό βήμα.

Υστερα γίνεται γραμμικοποίηση του μη-μόνιμου υπόλοιπου στο ψευδοχρόνο:

$$(\bar{R}_i^i)^{l+1} \sim (\bar{R}_i^i)^l + \frac{\partial \bar{R}_i^i}{\partial \bar{U}^i} \Delta \bar{U}^i \quad (1.52)$$

με $\Delta \bar{U}^i = (\bar{U}^i)^{l+1} - (\bar{U}^i)^l$ και με την ιακωβιανή των παροχών να ορίζεται ως:

$$\frac{\partial \bar{R}_i^i}{\partial \bar{U}^i} = \frac{\partial \bar{R}_i^i}{\partial \bar{U}} + \frac{3}{2\Delta t} \Omega_i^{n+1} \quad (1.53)$$

Με την εισαγωγή της γραμμικοποίησης στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε το έμμεσο αριθμητικό σχήμα:

$$\left[\left(\frac{1}{\Delta t^i} + \frac{3}{2\Delta t} \right) \Omega_i^{n+1} + \frac{\partial \bar{R}_i^i}{\partial \bar{U}} \right] \Delta \bar{U}^i = -(\bar{R}_i^i)^l \quad (1.54)$$

όπου το Δt_i αναφέρεται στο ψευδοχρόνο (που διαφέρει από κελί σε κελί) και το Δt αναφέρεται στο πραγματικό χρονικό βήμα.

2. ΘΕΩΡΙΑ ΤΥΡΒΗΣ

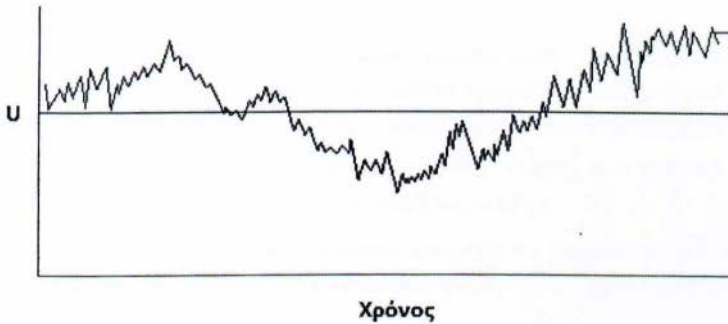
2.1 Γενικά

Στην επιστήμη της Μηχανικής των Ρευστών, **τυρβώδης ή στροβιλώδης ροή** (*turbulent flow*) ονομάζεται το συγκεκριμένο είδος ροής που χαρακτηρίζεται από χαώδεις ή τυχαίες μεταβολές του πεδίου ροής αυτών. Δηλαδή οι μεταβλητές του πεδίου ροής ενός ρευστού, πίεση και ταχύτητα, μεταβάλλονται απότομα και τυχαία για κάθε σημείο του χώρου που καταλαμβάνει το πεδίο ροής και κατά τη χρονική εξέλιξη του φαινομένου.

Η ταχύτητα διακρίνεται σε μέση τιμή και κυμαινόμενα τμήματα (Σχήμα 2.1):

$$U_i(t) = U_i + u_i(t) \quad (2.1)$$

Παρόμοιες διακυμάνσεις ισχύουν για την πίεση, τη θερμοκρασία και τις τιμές συγκέντρωσης.



Σχήμα 2.1 Διακύμανση Ταχύτητας ως προς χρόνο

Μερικά απλά παραδείγματα τυρβώδους ροής είναι:

- Η περίπτωση που ένα τζετ εισέρχεται σε μια περιοχή με στάσιμο ρευστό
- Η περιοχή στρώματος ανάμιξης
- Η περιοχή ροής πίσω από αντικείμενα όπως φιάλες.

Αυτές οι ροές χρησιμοποιούνται συχνά ως δοκιμές για να επικυρωθεί η δυνατότητα του λογισμικού υπολογιστικής ρευστοδυναμικής να προβλέψει με ακρίβεια τις ροές υγρών.

Η τυρβώδης ροή έχει τα ακόλουθα βασικά χαρακτηριστικά:

- Μη κανονικότητα ή τυχαιότητα. Πλήρως καθορισμένη προσέγγιση είναι πολύ δύσκολη και γ' αυτό προτιμάται η στατιστική περιγραφή της.
- Είναι πάντοτε χαοτικής μορφής, αλλά όλες οι χαοτικής μορφής ροές δεν είναι τυρβώδεις.

- Διαχυτικότητα η οποία στην τυρβώδη περιοχή προκαλεί ταχύτατη ανάμιξη και αυξημένες τιμές ορμής, θερμότητας και μεταφοράς μάζας.
- Μεγάλες τιμές αριθμού **Reynolds**.
- Είναι περιστροφική. Δηλαδή, έχει μη μηδενική στροβιλότητα. Μηχανισμοί όπως η τρισιδιάστατη ανάπτυξη δινών διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην τυρβώδη ροή.
- Η κινητική της ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα, λόγω ιξώδους διατμητικής τάσης. Η Τυρβώδης ροή είναι ανέφικτη, όταν δεν παρέχεται ενέργεια. Τυχαίες κινήσεις που έχουν ασήμαντες ιξώδεις απώλειες, όπως τυχαία ηχητικά κύματα, δεν προκαλούν τυρβώδη ροή.
- Ο στροβιλισμός είναι ένα χαρακτηριστικό της ροής του ρευστού, όχι του ρευστού. Όταν ο αριθμός Reynolds είναι αρκετά υψηλός η δυναμική του στροβιλισμού είναι η ίδια είτε το ρευστό είναι ένα πραγματικό υγρό ή ένα αέριο.

2.2 Μοντέλα τύρβης

Λόγω του ότι οι εξισώσεις Navier-Stokes περιγράφουν τυρβώδεις ροές, κρίνεται απαραίτητη η ύπαρξη ενός μοντέλου τύρβης που να επιτρέπει να λάβουμε υπ' όψιν και την επιρροή της στην υπολογιστική προσέγγιση προβλημάτων ρευστομηχανικής.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο τύρβης k- ω SST. Τα μοντέλα k- ω χρησιμοποιούν δύο εξισώσεις για την περιγραφή της τύρβης.

Σε αντίθεση με το μοντέλο Spalart-Almaras, μπορούν να λαμβάνουν υπ' όψιν και την επίδραση μεγεθών από προηγούμενες χρονικές στιγμές, όπως η μεταγωγή και η διάχυση της ενέργειας της τύρβης.

Η πρώτη μεταβλητή που μετατρέπεται στα μοντέλα αυτά, είναι η κινητική ενέργεια της τύρβης k . Η δεύτερη μεταβλητή είναι η συγκεκριμένη απαγωγή, ω .

Η τελευταία, είναι η μεταβλητή που προσδιορίζει το μέγεθος της τύρβης, ενώ η μεταβλητή k προσδιορίζει την ενέργεια της.

Οι δύο εξισώσεις που χαρακτηρίζουν το μοντέλο, δίνονται παρακάτω (σε συντηρητική μορφή):

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P - \beta \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i}] \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{V_t} P - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i}] + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_\omega z}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

όπου:

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(2S_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.5)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

και η τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα:

$$\mu_t = \frac{\rho \alpha_1 k}{\max(\alpha_1, \omega, \Omega F^2)} \quad (2.7)$$

Σε κάθε περίπτωση, οι ανωτέρω σταθερές είναι συνιστάμενες μιας εσωτερικής (inner) και μιας εξωτερικής (outer) σταθεράς, οι οποίες σχετίζονται με τον τύπο:

$$\varphi = F_1 \varphi_1 + (1 - F_1) \varphi_2 \quad (2.8)$$

όπου φ_1 και φ_2 είναι οι σταθερές 1 και 2 αντίστοιχα.

Οι επιπλέον συναρτήσεις δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (2.9)$$

$$\arg_1 = \min \vee \max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta \omega d}, \frac{500V}{d^2 \omega} \right), \frac{4\rho k \sigma \omega^2}{CD_{kw} d^2} \quad (2.10)$$

$$CD_{kw} = \max \left(2\rho \sigma \omega^2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (2.11)$$

$$F_2 = \tanh 2(\arg_2^2) \quad (2.12)$$

$$\arg_2 = \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{\beta \omega d}, \frac{500V}{d^2 \omega} \right) \quad (2.13)$$

ενώ:

- ρ είναι η πυκνότητα
- $\nu_t = \mu_t / \rho$ είναι η τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα
- μ είναι το μοριακό δυναμικό ιξώδες
- d είναι η απόσταση του σημείου από τον πλησιέστερο τοίχο (σ.σ. Στερεό όριο)
- Ω είναι το μέγεθος της στροβιλότητας

Οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\frac{U_\infty}{L} < \omega_{farfield} < 10 \frac{U_\infty}{L} \quad (2.14)$$

$$\frac{10^{-5} U_\infty^2}{Re_L} < k_{farfield} < \frac{0.1 U_\infty^2}{Re_L} \quad (2.15)$$

$$\omega_{wall} = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 (\Delta d_1)^2} \quad (2.16)$$

$$k_{wall} = 0 \quad (2.17)$$

Γενικά, προτείνεται στο μοντέλο αυτό να χρησιμοποιείται περιορισμός για να μην έχουμε πολύ μεγάλες τιμές στις προς υπολογισμό μεταβλητές.

Στην περίπτωση αυτή, ο όρος P στην εξίσωση του μοντέλου που αφορά τον όρο k αντικαθίσταται με:

$$\min(P, 20\beta \rho \omega k) \quad (2.18)$$

3. ΑΕΡΟΤΟΜΕΣ

3.1 Γενικά

Η ανάπτυξη και έρευνα στα τμήματα αεροτομών ξεκίνησε στα μέσα του 1800. Αεροτομή είναι το σχήμα της κάθετης τομής ενός πτερυγίου με ευρέως διαδεδομένες εφαρμογές σε πολλές τεχνολογίες, όπως αεροσκαφών, ανεμογεννητριών, αντλιών κ.ά.

Οι αεροτομές χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, στις **συμμετρικές** και στις **ασύμμετρες**. Στις συμμετρικές, η πάνω και κάτω επιφάνεια είναι ακριβώς οι ίδιες. Η εφαρμογή τους είναι ευρέως διαδεδομένη, καθώς το κέντρο πίεσης παραμένει σταθερό για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης εξασφαλίζοντας τη μέγιστη αναλογία άντωσης - οπισθέλκουσας (δύναμης) για όλες της ταχύτητες ανέμου από τη βάση του πτερυγίου έως την άκρη. Τα πτερώγια των ελικοπτέρων πρέπει να προσαρμόζονται σε διάφορες ταχύτητες ανέμου και γωνία πρόσπτωσης κατά τη διάρκεια κάθε περιστροφής του δρομέα και οι συμμετρικές αεροτομές λειτουργούν πολύ καλά κάτω από αυτές τις συνθήκες. Τέλος το χαμηλό κόστος δίνει ένα προβάδισμα σε σχέση με τις ασύμμετρες αεροτομές.

Οι ασύμμετρες αεροτομές έχουν μεγάλη ποικιλία όσον αφορά στο σχεδιασμό της κάτω και πάνω επιφάνειας. Χρησιμοποιούνται συνήθως σε στρατιωτικά ελικοπτερα και σε σύγχρονα αεροσκάφη. Έχουν υψηλό λόγο άντωσης-οπισθέλκουσας. Οι ασύμμετρες αεροτομές δε χρησιμοποιούνταν στο παλαιού τύπου ελικοπτερα διότι το κέντρο πίεσης μεταβάλλονταν πολύ καθώς η γωνία πρόσπτωσης άλλαζε. Όταν μεταβάλλεται το κέντρο πίεσης τότε αναπτύσσεται πάνω στην πτέρυγα μια δύναμη περιστροφής και για το λόγο αυτό τα στοιχεία του δρομέα πρέπει να αντέχουν σε αυτή τη δύναμη. Πρόσφατοι σχεδιασμοί και νέα υλικά ξεπέρασαν το πρόβλημα που υπήρχε με τις ασύμμετρες αεροτομές.

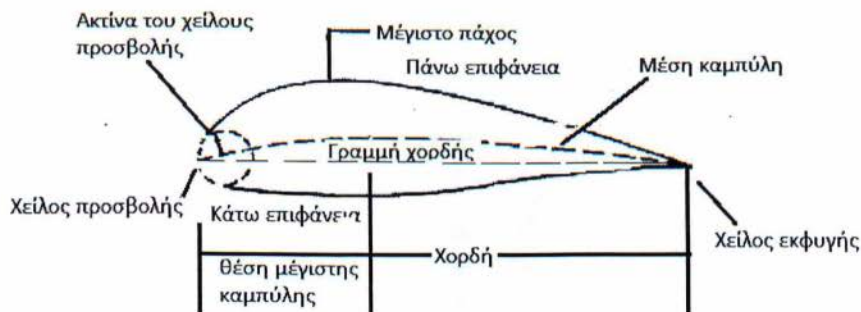
3.2 Γεωμετρία αεροτομής

Η γεωμετρία μιας αεροτομής μπορεί να χαρακτηριστεί από την κάτω και πάνω επιφάνειά της.

Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται για τον σχεδιασμό της είναι το μέγιστο πάχος, η θέση του μέγιστου πάχους, η μέγιστη καμπύλη (περνάει από τη μέση της αεροτομής) και η θέση της μέγιστης καμπύλης.

Στο Σχήμα 3.1 φαίνονται οι ονομασίες της κάθε περιοχής μιας αεροτομής. Όπως φαίνεται υπάρχουν και κάποιες άλλες παράμετροι εκτός από αυτούς που ήδη αναφέρθηκαν, οι οποίοι ολοκληρώνουν τη δομή της αεροτομής. Το χείλος προσβολής (*leading edge*) είναι η επιφάνεια η οποία πρώτη έρχεται σε επαφή με τον αέρα (είναι δηλαδή η αρχή της αεροτομής) και το χείλος εκφυγής (*trailing edge*) είναι το πίσω μέρος της αεροτομής και είναι το σημείο όπου αέρας ξανασυναντιέται μετά το διαχωρισμό του από τη κάτω και πάνω επιφάνεια.

Η ακτίνα του χείλους προσβολής (nose radius) συνδέει την κάτω και πάνω καμπύλη του χείλους και δίνεται σε εκατοστιαία ποσότητα της χορδής. Η γραμμή χορδής συνδέει τα δύο χείλη και η χορδή είναι το μήκος της.



Σχήμα 3.1: Γεωμετρία αεροτομής. (Πηγή: *The helicopter aviation*)

3.3 Η αεροδυναμική των αεροτομών.

Ο σχεδιασμός της αεροτομής γίνεται έτσι ώστε η ροή του αέρα διαμέσου της επιφάνειας της να δημιουργεί άνοση για τα πιο αποδοτικά χαρακτηριστικά της. Εκτός από τη δύναμη άντωσης, η οποία προκαλεί και την άνοση, αναπτύσσεται μια ακόμα δύναμη παράλληλη στην κατεύθυνση του ανέμου που ονομάζεται οπισθέλκουσα δύναμη. Η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης του ανέμου και της χορδής της αεροτομής ονομάζεται γωνία πρόσπτωσης και είναι υπεύθυνη για τις τιμές των δυνάμεων άνυψωσης και οπισθέλκουσας.

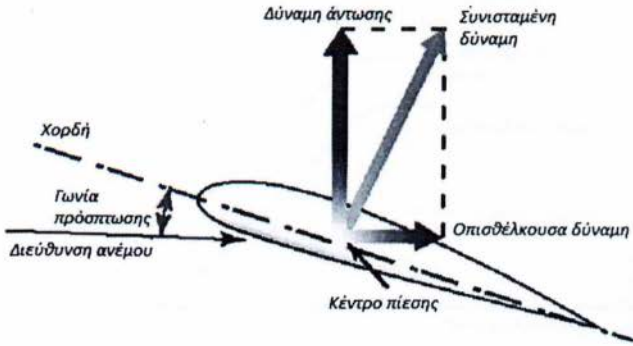
3.3.1 Δύναμη άντωσης

Δύναμη άντωσης ονομάζεται η δύναμη που αναπτύσσεται από ένα αντικείμενο ευρισκόμενο σε ροϊκό πεδίο και είναι κάθετη στη διεύθυνση του ρευστού. Οι δυνάμεις άντωσης είναι αυτές οι οποίες κάνουν ένα αεροπλάνο να πετάξει και εξ' αυτού η ονομασία τους. Η δύναμη άντωσης εξαρτάται από τη γωνία πρόσπτωσης καθότι όσο μικρότερη η γωνία τόσο μικρότερη είναι και η άντωση. Επίσης για μικρές γωνίες πρόσπτωσης δημιουργείται μια περιοχή χαμηλής πίεσης στην κάτω επιφάνεια της αεροτομής και έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της ταχύτητας του αέρα σε εκείνη την περιοχή. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει απευθείας σχέση μεταξύ της ταχύτητας και της πίεσης του αέρα, όσο αυξάνεται η ταχύτητα τόσο μειώνεται η πίεση. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως το φαινόμενο Bernoulli και συνεπώς η δύναμη άντωσης δρα ως ελκτική δύναμη (αρνητική πίεση) στο αντικείμενο όταν αυτό βρίσκεται κάθετα στη διεύθυνση του ρευστού.

3.3.2 Οπισθέλκουσα δύναμη

Οπισθέλκουσα δύναμη ονομάζεται η δύναμη που αναπτύσσεται από ένα αντικείμενο ευρισκόμενο σε ροϊκό πεδίο και είναι παράλληλη στη διεύθυνση του ρευστού. Όταν η διεύθυνση του ρευστού είναι κάθετη στην αεροτομή τότε η δύναμη αυτή είναι μέγιστη ενώ όταν είναι παράλληλη προς αυτή είναι ελάχιστη.

Σε ορισμένες περιπτώσεις μας ενδιαφέρει η οπισθέλκουσα δύναμη και βρίσκει εφαρμογές σε διάφορους σχεδιασμούς, ενώ σε άλλες περιπτώσεις προσπαθούμε να τη μειώσουμε, όπως για παράδειγμα στις πτέρυγες των αεροπλάνων.



Σχήμα 3.2 Δυνάμεις που αναπτύσσονται σε αεροτομή. (Πηγή: Free online private pilot ground school)

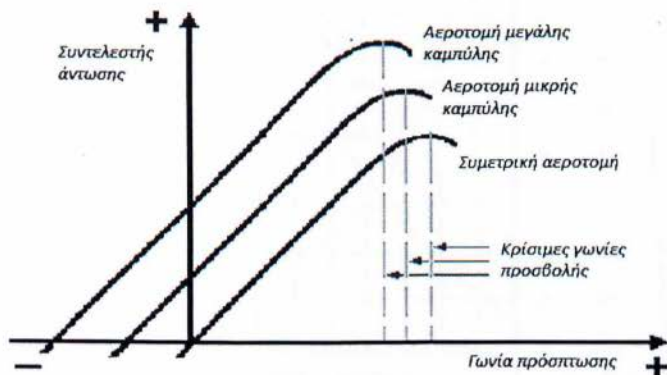


Σχήμα 3.3 Κανονική ροή κατά πλάτους της αεροτομής. (Πηγή: The Aviation History Online Museum)

3.3.3 Συντελεστές Άντωσης και Οπισθέλκουσας

Τα χαρακτηριστικά της άντωσης και της οπισθέλκουσας, για διάφορες αεροτομές και γωνίες πρόσπτωσης, έχουν προσδιοριστεί και ταξινομηθεί από μετρήσεις (παρακάτω φαίνεται και ένα τυπικό διάγραμμα των συντελεστών αυτών) σε αεροσήραγγες. Τα χαρακτηριστικά αυτά μπορούν να περιγραφούν χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους αδιάστατους συντελεστές άντωσης και οπισθέλκουσας (C_l και C_d). Η γνώση για τους συντελεστές αυτούς είναι ουσιώδης όταν επιλέγεται αεροτομή για το σχεδιασμό της πτέρυγας ανεμογεννήτριας. Μαθηματικά οι συντελεστές αυτοί έχουν εκφραστεί με τις εξισώσεις (1.3) και (1.4).

Ένα τελευταίο χαρακτηριστικό που συνδέει την άνωση και την οπισθέλκουσα είναι η κρίσιμη γωνία προσβολής ή πρόσπτωσης. Για μεγάλες γωνίες πρόσπτωσης δημιουργείται ένα φαινόμενο κατά το οποίο το ρευστό αφήνει την περιοχή «αναρρόφησης», με αποτέλεσμα την τραγική μείωση της άνωσης και τη μεγάλη αύξηση της οπισθέλκουσας. Η περίπτωση αυτή λέγεται απώλεια στήριξης (*stall*) και είναι ιδιαίτερα επικίνδυνη για τα αεροσκάφη.



Σχήμα 3.4 Κρίσιμη γωνία προσβολής για διάφορων τύπων αεροτομές
(Πηγή: www.adamone.rchomepage.com)

3.3.4 Γωνίες στις Αεροτομές

Γωνία πρόσπτωσης

Για να επιτύχουμε αρκετή άνωση σε μια αεροτομή πρέπει ο αέρας να χτυπάει την αεροτομή σε μια εξασφαλισμένη γωνία. Η γωνία αυτή ονομάζεται γωνία πρόσπτωσης και ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζεται από τη διεύθυνση του ανέμου και της χορδής της αεροτομής. Παίζει πρωτεύοντα ρόλο στην άνωση και όπως φαίνεται και από το Σχ. 3.5 η άνωση αυξάνεται καθώς αυξάνεται η γωνία πρόσπτωσης. Ωστόσο όταν η γωνία πρόσπτωσης γίνει εξαιρετικά μεγάλη τότε στην πάνω επιφάνεια της αεροτομής δημιουργούνται στροβιλισμοί και η άνωση μειώνεται απότομα.

Γωνία βήματος

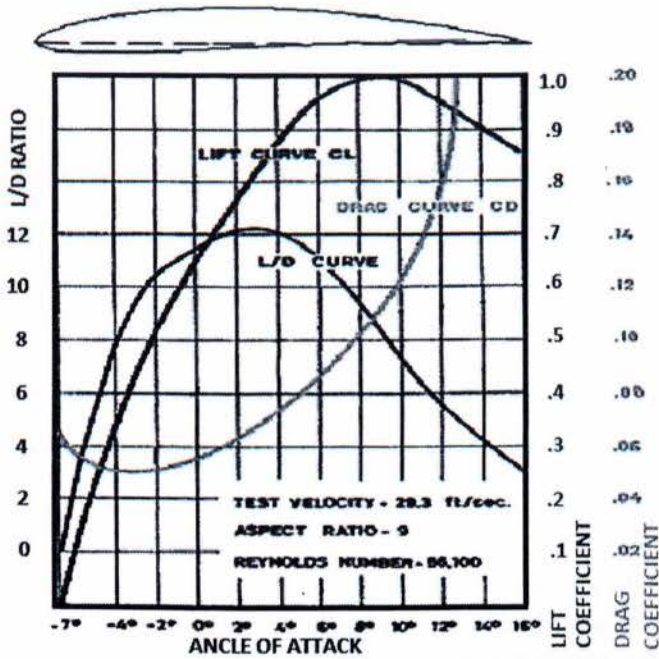
Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της διεύθυνσης του ανέμου και του άξονα περιστροφής ονομάζεται γωνία βήματος ϕ και υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση. Με βάση τη γωνία πρόσπτωσης και τη γωνία βήματος υπολογίζεται η κωνικότητα του περυγίου β .

$$\cot \phi = \frac{3}{2} \frac{r}{R} \lambda_N$$

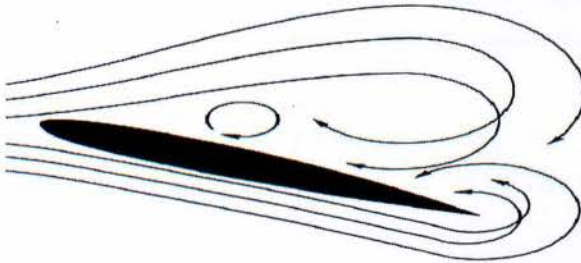
όπου: r η ακτινική απόσταση

R η ακτίνα δρομέα

λ_N ο λόγος ταχυτήτων πτερυγίου



Σχήμα 3.5 Συντελεστές άνωσης-οπισθέλκουσας (C_L και C_D) και λόγος άνωσης-οπισθέλκουσας δύναμης (L/D) συναρτήσει γωνίας πρόσπτωσης. (Πηγή: www.adamone.rchomepage.com)



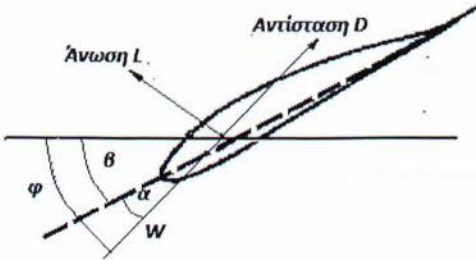
Σχήμα 3.6 Φαινόμενο Απώλειας Στήριξης. (Πηγή: The Aviation History Online Museum)

Σημείωση: Ο λόγος ταχυτήτων εκφράζεται ως η περιστροφική ταχύτητα του πτερυγίου προς ταχύτητα του αέρα.

Κωνικότητα

Η γωνία μεταξύ της χορδής και του άξονα περιστροφής ονομάζεται «κωνικότητα περυγίου» β , και χρησιμοποιείται ως αρχικό σημείο κατά το σχεδιασμό και την κατασκευή του περυγίου. Η κωνικότητα υπολογίζεται ως:

$$\beta = \varphi - \alpha$$



Σχήμα 3.7 Γωνίες πρόσπτωσης, κωνικότητας και βήματος σε αεροτομή

3.3.5 Κατανομή Πίεσης σε Αεροτομή

Η αεροδυναμική συμπεριφορά μιας αεροτομής μπορεί να μελετηθεί ευκολότερα εάν δούμε πώς κατανέμεται η πίεση στην πάνω και κάτω επιφάνεια της αεροτομής. Η επιφανειακή πίεση εξαρτάται από την ταχύτητα και την πυκνότητα του ρευστού αλλά και από τις αλλαγές ταχύτητας και ενεργειακές απώλειες καθώς το ρευστό περνάει πάνω από την επιφάνεια. Επίσης τοπικές ανομοιομορφίες της επιφάνειας μπορούν να επηρεάσουν τις πιέσεις. Οι πιέσεις μπορεί να είναι σταθερές ή να μεταβάλλονται χρονικά. Η κατανομή της πίεσης εκφράζεται από τον συντελεστή πίεσης c_p . Ο παρονομαστής του κλάσματος εκφράζει τη δυναμική πίεση του ρευστού.

$$c_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2}$$

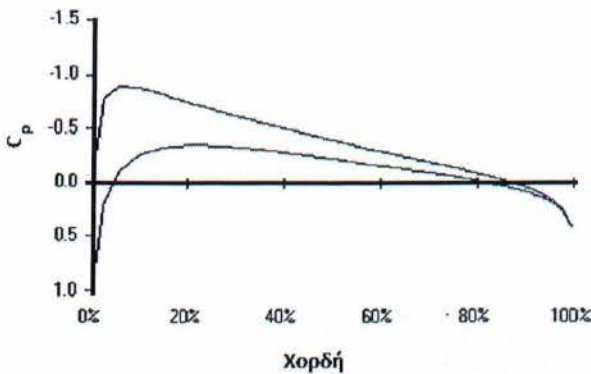
όπου:

P η τοπική στατική πίεση.

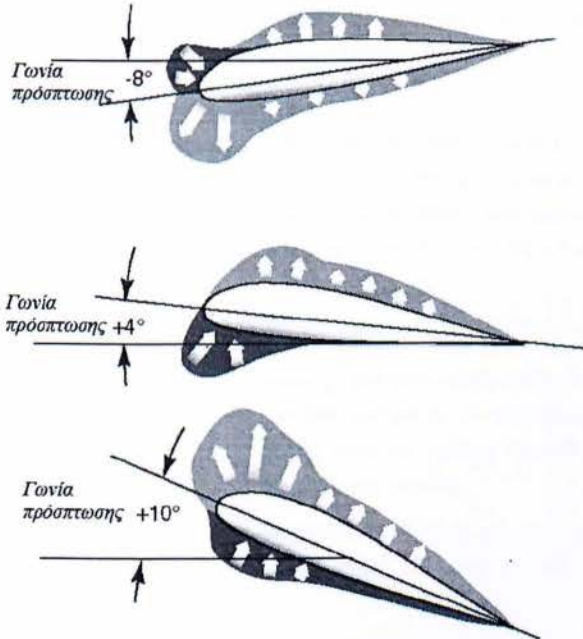
P_∞ η στατική πίεση του ελεύθερου ρεύματος.

u η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος.

ρ η πυκνότητα του ελεύθερου ρεύματος.



Σχήμα 3.8 Κατανομή συντελεστή πίεσης στη NACA 0016 για γωνία πρόσπτωσης 2° (Πηγή: One Design Airfoil Analysis)

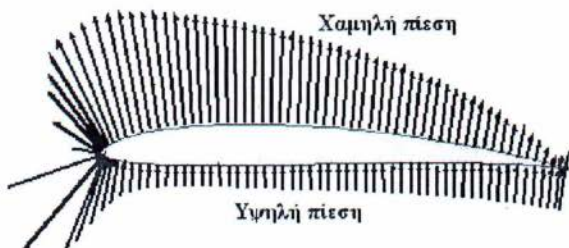


Σχήμα 3.9 Κατανομή πίεσης για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης (Πηγή: Free online private pilot ground school)

Ο συντελεστής πίεσης είναι μια πολύ χρήσιμη παράμετρος με βάση την οποία μπορεί να μελετηθεί η ροή ασυμπίεστων ρευστών, όπως το νερό αλλά και συμπίεστων, όπως ο αέρας. Ο συντελεστής πίεσης συναντιέται σε διαγράμματα συναρτήσεως του λόγου x/c όπου x είναι τεταγμένη της αεροτομής και c είναι η χορδή της. Στο διάγραμμα του

Σχήματος 3.8 φαίνεται η κατανομή πίεσης στη πάνω και κάτω επιφάνεια της συμμετρικής αεροτομής NACA 0016.

Επίσης στη κατανομή πίεσης πολύ βασικός παράγοντας είναι η γωνία πρόσπτωσης ω . Για διάφορες τιμές της γωνίας, η κατανομή της πίεσης στην επιφάνεια της πτέρυγας μεταβάλλεται (βλέπε Σχήμα 3.9 και Σχήμα 3.10).



Σχήμα 3.10 Κατανομή πίεσης στη πάνω και κάτω επιφάνεια της αεροτομής E64 για γωνία προσβολής 2.
(Αποτέλεσμα από Drela's XFOil code)

3.4 4-ψηφια αεροτομή NACA

Οι αεροτομές NACA (*National Advisory Committee for Aeronautics*) περιγράφονται χρησιμοποιώντας ένα πλήθος από ψηφία τα οποία ακολουθούν μετά τα NACA. Τα ψηφία αυτά είναι παράμετροι οι οποίες εισάγονται σε εξισώσεις βάση των οποίων μπορεί να δημιουργηθεί μια κάθετη τομή του πτερυγίου (αεροτομή) και να υπολογιστούν οι ιδιότητες της. Η 4-ψηφια αεροτομή μπορεί να παρασταθεί ως:

NACA - m p XX

Κάθε γράμμα αποτελεί και ένα ψηφίο. Το πρώτο ψηφίο που συμβολίζεται με **m** είναι η μέγιστη τιμή της καμπύλης σε % της χορδής, το δεύτερο με **p** αντιπροσωπεύει τη θέση της μέγιστης καμπύλης σε δέκατα της χορδής από το χείλος προσβολής. Τα δύο τελευταία ψηφία είναι το πάχος της αεροτομής σε % της χορδής.

Σαν παράδειγμα θα θεωρήσουμε την αεροτομή NACA 4412. Έχει μέγιστο πάχος 12% και η μέγιστη τιμή της καμπύλης είναι 4% η οποία βρίσκεται 40% από το χείλος εκφυγής. Τα παραπάνω μεγέθη είναι % της χορδής.

Για τη κατασκευή της αεροτομής ακολουθούνται τα βήματα:

- Αρχικά δίνουμε συντεταγμένες για το χείλος προσβολής ($\chi=0$) και για το χείλος εκφυγής ($\chi=c$) αντίστοιχα. Ο συμβολισμός c προέρχεται από την Αγγλική λέξη chord (χορδή).
- Υπολογίζουμε τη κατανομή του πάχους y_t χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση:

$$y_t = \frac{t}{0,2} (0,2969\sqrt{x} - 0,126x - 0,35160x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4)$$

- Υπολογίζουμε τη κεντρική καμπύλη y_c της αεροτομής. Για NACA τεσσάρων ψηφίων, η κεντρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$y_c = \frac{m}{p^2} (2px - x^2) \quad \text{για } 0 < p \leq p$$

$$y_c = \frac{m}{1-p^2} ((1-2p) + 2px - x^2) \quad \text{για } p \leq x < c$$

- Τέλος υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του περυγίου για τη κάτω αλλά και πάνω επιφάνεια. Οι συντεταγμένες υπολογίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

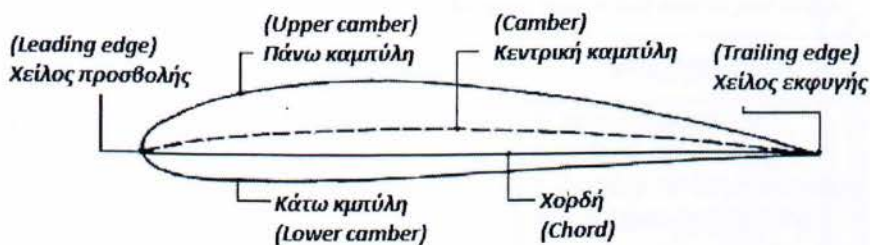
$$X_U = x - y_t \sin(\theta)$$

$$Y_U = y_c + y_t \cos(\theta)$$

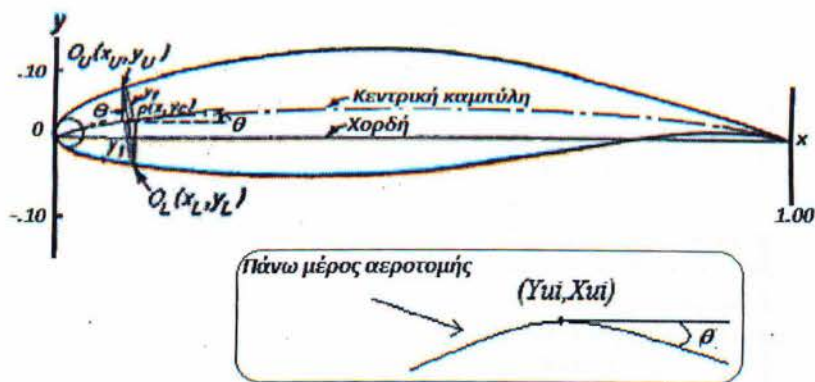
$$X_L = x + y_t \sin(\theta)$$

$$Y_L = y_c - y_t \cos(\theta)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της κλίσης της καμπύλης και της συντεταγμένης (y, x) . Οι δείκτες U και L δηλώνουν την πάνω (upper) και κάτω (lower) επιφάνεια (Σχήματα 3.11 και 3.12).



Σχήμα 3.11 Γεωμετρία αεροτομής



Σχήμα 3.12 Γεωμετρική κατασκευή αεροτομής. (Πηγή: German Modifications to NACA Airfoils)

Μαθηματικά η γωνία θ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\theta = \arctan\left(\frac{dy_c}{dx}\right)$$

Στον παρακάτω Πίνακα 3.1 παρατίθενται τα βασικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των αεροτομών NACA διαφόρων ψηφίων.

Πίνακας 3.1 Βασικά Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα των Αεροτομών NACA

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ	ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ	ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ
4 Ψηφίων	<ol style="list-style-type: none"> 1. Καλά χαρακτηριστικά αποκόλλησης. 2. Μικρή μετατόπιση του κέντρου πίεσης για μεγάλο εύρος ταχυτήτων. 3. Μικρή επίδραση της τραχύτητας 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Χαμηλός μέγιστος συντελεστής άνωσης. 2. Σχετικά υψηλή αντίσταση. 3. Υψηλή ροπή πρόνευσης.
5 Ψηφίων	<ol style="list-style-type: none"> 1. Υψηλός μέγιστος συντελεστής άνωσης. 2. Χαμηλή ροπή πρόνευσης. 3. Μικρή επίδραση της τραχύτητας. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Μέτρια χαρακτηριστικά αποκόλλησης. 2. Σχετικά υψηλή αντίσταση.
Σειρά 16	<ol style="list-style-type: none"> 1. Αποτρέπει κορυφές χαμηλών πιέσεων. 2. Μικρή αντίσταση σε υψηλές ταχύτητες. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Σχετικά μικρή άνωση.
Σειρά 6	<ol style="list-style-type: none"> 1. Υψηλός μέγιστος συντελεστής άνωσης. 2. Πολύ χαμηλή αντίσταση 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Υψηλή αντίσταση έξω από την περιοχή των βέλτιστων συνθηκών λειτουργίας.

	σε ένα μικρό εύρος συνθηκών λειτουργίας. 3. Έχει βελτιστοποιηθεί για υψηλές ταχύτητες.	2. Υψηλή ροπή πρόνευσης. 3. Μέτρια χαρακτηριστικά αποκόλλησης. 4. Έντονη ευαισθησία στην τραχύτητα.
Σειρά 7	1. Πολύ χαμηλή αντίσταση σε ένα μικρό εύρος συνθηκών λειτουργίας. 2. Χαμηλή ροπή πρόνευσης.	1. Μειωμένος μέγιστος συντελεστής άνωσης. 2. Υψηλή αντίσταση έξω από την περιοχή των βέλτιστων συνθηκών λειτουργίας. 3. Μέτρια χαρακτηριστικά αποκόλλησης. 4. Έντονη ευαισθησία στην τραχύτητα.

4 ΠΛΕΓΜΑΤΑ

4.1 Χρησιμότητα

Για να διεκπεραιωθεί μια μελέτη CFD απαιτείται η ύπαρξη της γεωμετρίας του προς μελέτη αντικειμένου. Δεδομένου όμως ότι μέχρι σήμερα οι υπολογιστές δεν μπορούν να προσπελάσουν μη πεπερασμένα στοιχεία χρειάζεται να εισάγουμε στον κώδικα του υπολογιστή την εκάστοτε γεωμετρία ως ένα σύνολο πεπερασμένων στοιχείων-κόμβων. Γι'αυτό το λόγο, οι μέθοδοι που προσεγγίζουν την μελέτη CFD ενός αντικειμένου ονομάζονται μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων, διαφορών, όγκων κλπ. Έτσι λοιπόν, το πλέγμα (*grid/mesh*) είναι η «δίοδος» προκειμένου να μελετηθεί ένα αντικείμενο υπό συγκεκριμένες συνθήκες με μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Το πλέγμα δημιουργείται έπειτα από δημιουργία δομικά στοιχείων (*blocks*) τα οποία τεμαχίζονται, ούτως ώστε να δημιουργηθεί πλέγμα.

Σε μια μελέτη CFD, το πλέγμα πρέπει να ταυτίζεται με τη γεωμετρία, αλλά ταυτόχρονα να μπορεί να προσομοιάζει το αντικείμενο όσο πιο καλά γίνεται σε κρίσιμες περιοχές, όπως για παράδειγμα μια περιοχή που αλλάζει απότομα η γεωμετρία, ή μια περιοχή όπου απαιτείται πιο λεπτομερής μελέτη. Άρα, μπορούμε να συμπεράνουμε πως η τοπολογία του πλέγματος για ένα αντικείμενο (πχ. μια αεροτομή) δεν αποτελεί μοναδικό στοιχείο, αλλά μπορεί διαφορετικές τοπολογίες να ανταποκρίνονται στο ίδιο αντικείμενο.

4.2 Χαρακτηριστικά Πλέγματος

Για ένα πλέγμα υπάρχουν κάποια χαρακτηριστικά τα οποία επιδρούν και προσδιορίζουν την ποιότητά του, την ποσότητα της απαιτούμενης υπολογιστικής ισχύος, τον συνολικό χρόνο για την διεκπεραίωση της μελέτης, την ποιότητα των αποτελεσμάτων και τη σύγκλιση του εκάστοτε αποτελέσματος σε κάποια τιμή. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι τα ακόλουθα:

- ✓ Η πυκνότητα του πλέγματος (*Density*).
- ✓ Η ομαλότητά του πλέγματος (*Skewness*).
- ✓ Η συμμετρία του ως προς το αντικείμενο.
- ✓ Η αναλογία του μήκους ακμών και του μεγέθους των πεπερασμένων όγκων (*Aspect Ratio*).
- ✓ Η ποιότητα του πλέγματος στην περιοχή όπου ορίζονται οι οριακές συνθήκες (*boundary conditions*)

Όλα τα παραπάνω συντελούν στη καλή ποιότητα του πλέγματος και κατ' επέκταση στην εξαγωγή ορθών αποτελεσμάτων.

Γενικά, για κάθε αντικείμενο υπάρχει ένα πλέγμα το οποίο χαρακτηρίζεται ιδανικό (*optimum*) διότι συνδυάζει ταυτόχρονα όλα τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Βέβαια, συνδυάζει μεν τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά αλλά δεν φτάνει μόνο αυτό. Πρέπει, επίσης ταυτόχρονα, αυτά τα χαρακτηριστικά να είναι τα

ιδανικά για την εκάστοτε περίπτωση προβλήματος. Για παράδειγμα, το ιδανικό πλέγμα για την μελέτη μιας αεροτομής, δεν πρέπει να είναι γενικά πυκνό, αλλά πρέπει να πυκνώνει σε περιοχές όπου, είτε η ροή του ρευστού γίνεται ασταθής, είτε απαιτείται μεγάλη ποσότητα πληροφορίας.

Το στοιχείο της ομαλότητας του πλέγματος έχει άμεσο αντίκτυπο στην ποιότητα των αποτελεσμάτων, καθότι ο κώδικας του προγράμματος αεροδυναμικής ανάλυσης που προσπελαύνει τους κόμβους

εξάγει αποτελέσματα-πληροφορίες για κάθε κόμβο τα οποία εξαρτώνται από τον προηγούμενο, έτσι εάν δεν υπάρχει ομαλή έκβαση των αποστάσεων μεταξύ των κόμβων τότε ο κώδικας δεν θα

μπορεί να συγκλίνει σε μια τιμή γιατί δεν θα υπάρχει ομαλή διακριτοποίηση των κόμβων.



Ομαλή αλλαγή του μεγέθους των κελιών.

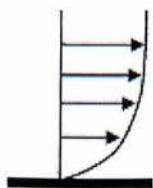


Μη ομαλή αλλαγή του μεγέθους των κελιών.

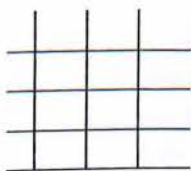
Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα για τον συνδυασμό την πυκνότητας και της ομαλότητας που πρέπει να έχει ένα πλέγμα είναι η περιοχή εκείνη όπου υπάρχει ανάπτυξη οριακού στρώματος (*boundary layer*). Όπως είναι γνωστό, σε μια επιφάνεια όπου υπάρχει ροή ρευστού η ταχύτητα αυτού πάνω στην επιφάνεια είναι μηδενική. Όσο απομακρυνόμαστε όμως από την επιφάνεια η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται σταδιακά έως ότου να φτάσει την τιμή της ταχύτητας του ελευθέρου ρεύματος (*free-stream*). Η ανάπτυξη της ταχύτητας αυτής δεν γίνεται απότομα, αλλά σταδιακά. Για να μπορέσει κανείς να έχει μια σαφή ένδειξη για τον τρόπο όπου αλλάζει η τιμή της ταχύτητας στην περιοχή όπου αυτή αναπτύσσεται απαιτούνται πολλές μετρήσεις άρα στην περιοχή εκείνη το πλέγμα πρέπει να είναι αρκετά πυκνό. Αντίθετα, στην περιοχή όπου πλέον η ροή είναι ελεύθερη και δεν υπάρχουν σημαντικές μεταβολές το πλέγμα δεν είναι αναγκαίο να είναι πυκνό και άρα να σπαταλιέται άσκοπα επεξεργαστική ισχύς.

Η ύπαρξη συμμετρίας του πλέγματος ως προς την γεωμετρία, παίζει σημαντικό ρόλο γιατί έτσι εξασφαλίζεται ότι τα αποτελέσματα που θα εξαχθούν θα ανταποκρίνονται απόλυτα στην μορφολογία της γεωμετρίας.

Επίσης, πρέπει εδώ να τονίσουμε πως στην ομαλότητα του πλέγματος συμβάλει και η αναλογία των αποστάσεων μεταξύ των κόμβων ή των όγκων μεταξύ των κελιών (*Aspect Ratio*). Η αναλογία αυτή υπάρχει προκειμένου η αυξομείωση της πυκνότητας των κελιών να γίνεται **ομαλά και σταθερά**. Γενικά η αναλογία αυτή δεν πρέπει να ξεπερνά την τιμή του 1.2.



Ροή ρευστού



Ανεπαρκής πυκνότητα κελιών



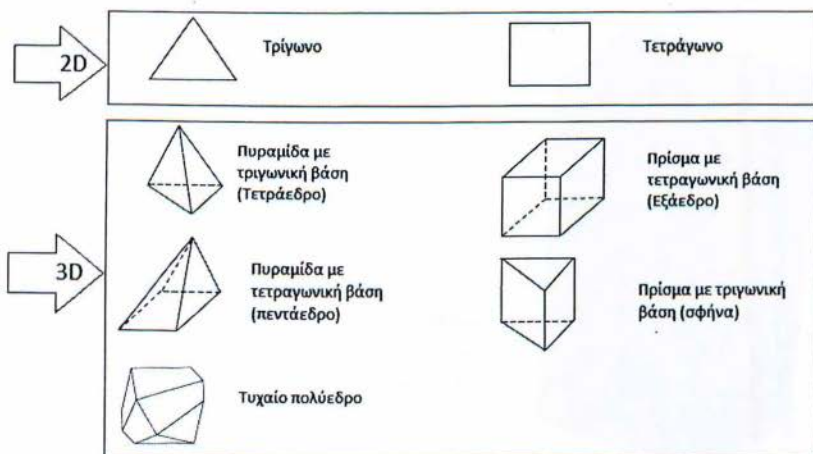
Ιδανική πυκνότητα και ομαλότητα κελιών

4.3 Κελιά

Το κάθε πλέγμα αποτελείται από πεπερασμένα στοιχεία, τα οποία μάλιστα όταν πρόκειται για αντικείμενα τριών διαστάσεων, ονομάζονται πεπερασμένοι όγκοι.

Όταν τα αντικείμενα απεικονίζονται στις δυο διαστάσεις τότε τα στοιχεία μπορεί να είναι:

- ο Τρίγωνα.
- ο Τετράγωνα (Πρίσμα δυο διαστάσεων).



Σχήμα 4.1 Στοιχεία πλεγμάτων

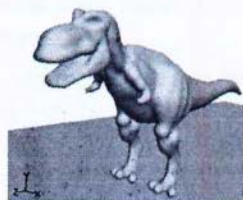
Από την άλλη μεριά, όταν τα στοιχεία είναι 3D δηλαδή στερεομετρικά τότε αυτά μπορεί να έχουν διάφορα σχήματα όπως για παράδειγμα:

- ο Τετράεδρα (Πυραμίδα με τριγωνική βάση).
- ο Πεντάεδρα (Πυραμίδα με τετράγωνη βάση).
- ο Πρίσμα με τετράγωνη βάση (Εξάεδρο).
- ο Πρίσμα με τριγωνική βάση (σφήνα).

Σχηματικά τα ανωτέρω εμφανίζονται στο Σχήμα 4.1.

4.4 Τύποι Πλεγμάτων

Η μορφολογία της γεωμετρίας επηρεάζει αρκετά την ποιότητα του πλέγματος. Εκτός όμως από την ποιότητα επηρεάζει και την μορφολογία του ίδιου του πλέγματος. Για παράδειγμα, για ένα αντικείμενο το οποίο έχει αρκετά πολύπλοκη γεωμετρία τότε το πλέγμα αυτού δεν μπορεί να



περιέχει κελιά (*cells*) τα οποία να είναι σε απόλυτη διάταξη καθότι η ίδια η γεωμετρία το εμποδίζει αυτό. Για αυτό το λόγο έχουν δημιουργηθεί τρία είδη πλεγμάτων τα οποία φαίνονται παρακάτω.

- Πλέγμα **δομημένων** στοιχείων (structured grid).
- Πλέγμα **μη δομημένων** στοιχείων (Un-structured grid).
- **Υβριδικό** πλέγμα (Hybrid grid).

4.4.1 Πλέγμα δομημένων στοιχείων (Structured Grids).

Το πλέγμα δομημένων στοιχείων αποτελεί μια οικογένεια πλεγμάτων όπου τα κελιά είναι ομαλά διατεταγμένα μεταξύ τους. Τα κελιά αυτά ακολουθούν την μορφολογία συγκεκριμένων σχημάτων (βλ. τύποι κελιών). Ένα από τα σημαντικότερα κριτήρια για την ποιότητα των εν λόγω πλεγμάτων είναι το ποσοστό προσέγγισης του τελικού σχήματος του εκάστοτε κελιού (μετά την ταυτοποίηση του πλέγματος με την γεωμετρία) με το σχήμα του τύπου του κελιού.

Ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα των πλεγμάτων δομημένων στοιχείων είναι το γεγονός ότι οι συντεταγμένες του κάθε κόμβου (i, j, k) υπολογίζονται με χρήση εξισώσεων από τις συντεταγμένες του προηγούμενου κόμβου.

Η κατηγορία αυτή αναλύεται σε δυο υποκατηγορίες:

- Πλέγμα δομημένων στοιχείων προερχόμενο από μονό block (single-block structured grid).
- Πλέγμα δομημένων στοιχείων προερχόμενο από πολλαπλά block (multi-block structured grid).

Η διαφορά των πιο πάνω υποκατηγοριών είναι ότι η μεν πρώτη χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που έχουμε πολύ απλές γεωμετρίες, ενώ η άλλη σε αντίθετες περιπτώσεις. Επίσης το πλέγμα δομημένων στοιχείων που προκύπτει από πολλαπλά block χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που απαιτείται διαφορετική διάταξη και πυκνότητα των κελιών σε ορισμένες περιοχές. Τέλος, όταν το πλέγμα είναι «μεγάλο» δηλαδή περιέχει πολλούς κόμβους τότε συμφέρει να δημιουργηθεί από πολλαπλά block καθότι το κάθε block που αναγνωρίζει ο κώδικας, το «επεξεργάζεται» ένας επεξεργαστής.

Για παράδειγμα, εάν ένα πλέγμα έχει προέλθει από 7 υπο-block, τότε και αυτό θα τμηθεί σε 7 κομμάτια και άρα το πλέγμα αυτό μπορεί να μελετηθεί από 7 επεξεργαστές το πολύ. Φυσικά σε κάθε περίπτωση μπορεί να χρησιμοποιηθούν και λιγότεροι. Από την άλλη μεριά αν αυτό το πλέγμα είχε προέλθει από ένα μονό block τότε θα έπρεπε να μελετηθεί από

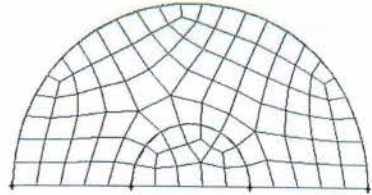


έναν και μόνο επεξεργαστή, το οποίο σημαίνει μεγάλος χρόνος ολοκλήρωσης της αεροδυναμικής μελέτης και ίσως υπερβολική καταπόνηση του υπολογιστή.

4.4.2 Πλέγμα μη δομημένων στοιχείων (Unstructured Grids).

Σε αντίθεση με την προηγούμενη κατηγορία, τα πλέγματα μη δομημένων στοιχείων αποτελούνται από κελιά τα οποία ΔΕΝ είναι ευθυγραμμισμένα μεταξύ τους και άρα δεν υπάρχει λογική πίσω από την θέση και την κατανομή των κόμβων στο πλέγμα. Δεδομένου του γεγονότος ότι οι κόμβοι είναι σε «άτακτα» δομημένοι στο πλέγμα συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να υπολογιστούν οι συντεταγμένες τους με εξισώσεις μέσω των μεταβλητών θέσης (i,j,k).

Επίσης λόγω της άτακτης θέσης των κόμβων, οι σχηματισμοί των κελιών σπάνια είναι μορφοποιημένα σχήματα. Έτσι πολλές φορές ένα πλέγμα μη δομημένων στοιχείων έχει λιγότερους κόμβους από ένα πλέγμα δομημένων στοιχείων. Παρόλα αυτά απαιτείται περισσότερος χρόνος για την κατασκευή του. Αυτό συμβαίνει διότι η δημιουργία των κελιών και η τοποθέτηση των κόμβων στον χώρο προκύπτουν από κάποιες εξισώσεις τις οποίες επιλύει ο κώδικας του προγράμματος δημιουργίας πλέγματος, ενώ στα πλέγματα δομημένων στοιχείων ο χρήστης επιλέγει σε πόσα διαστήματα θα τμηθεί κάθε ακμή των block και άρα το πρόγραμμα δημιουργίας πλέγματος απλά συνδέει τους κόμβους που προκύπτουν από την εκάστοτε τομή και έτσι δημιουργείται το πλέγμα. Άρα για μια συγκεκριμένη γεωμετρία ένα πλέγμα μη δομημένων στοιχείων μελετάται σε λιγότερο χρόνο και με μικρότερη επεξεργαστική ισχύ.

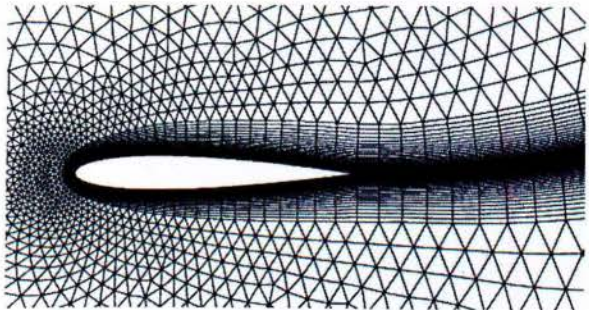


Για να καταστεί ένα πλέγμα μη δομημένων στοιχείων κατάλληλο προς μελέτη χρήζει την μετατροπή αυτού σε πλέγμα δομημένων στοιχείων (συνήθως τριγώνων) με χρήση κατάλληλου αλγορίθμου (όπως πχ. Ο αλγόριθμος του Ruppert). Παρόλα αυτά, σε πλέγματα μη δομημένων στοιχείων μπορεί κανείς να βρει και στοιχεία τετράεδρα και εξαέδρα.

Σε αντίθεση με τα δομημένα πλέγματα, τα μη δομημένα απαιτούν μια λίστα της συνδεσιμότητας που καθορίζει τον τρόπο που ένα δεδομένο σύνολο των κορυφών αποτελούν μεμονωμένα στοιχεία (βλ. γράφημα (δομή δεδομένων)).

4.4.3 Υβριδικό πλέγμα

Τα υβριδικά πλέγματα όπως λέει και η λέξη, δεν αποτελούν πλέγματα συγκεκριμένου χαρακτήρα όπως οι άλλες δυο κατηγορίες πλεγμάτων που προαναφέρθηκαν. Υβριδικό



λέγεται ένα πλέγμα του οποίου τα στοιχεία είναι και δομημένα και μη δομημένα. Πιο συγκεκριμένα, το υβριδικό πλέγμα για ένα αντικείμενο είναι σε κάποιες περιοχές δομημένων στοιχείων και σε κάποιες άλλες μη δομημένων.

Συνήθως χρησιμοποιούνται για γεωμετρίες που στο σύνολό τους περιέχουν και περίπλοκα τμήματα (που δεν μπορούν να περιγραφούν με δομημένο πλέγμα) και απλά.

Τα στοιχεία που απαρτίζουν τα υβριδικά πλέγματα μπορεί να είναι:

- Τρίγωνα και τετράγωνα σε δισδιάστατα πλέγματα.
- Τετράεδρα, πρίσματα και πυραμίδες σε τρισδιάστατα πλέγματα.

Προφανώς ένα πλέγμα το οποίο είναι υβριδικό δεν είναι λογικό να προέρχεται από μόνο block καθότι η αλλαγή του είδους διάταξης των στοιχείων σηματοδοτεί και την αλλαγή των block. Σε σύγκριση με τα πλέγματα δομημένων στοιχείων οι κόμβοι του ενός είδους διάταξης των στοιχείων μπορεί να μην ταιριάζουν με τους κόμβους της άλλης διάταξης στα όρια των block. Δηλαδή είναι πιθανό να μην υπάρχει «ασυνέχεια» στην θέση των κόμβων μεταξύ δυο διαφορετικών διατάξεων στοιχείων στα όρια των block.

Επίσης μια άλλη διαφορά που έχουν τα υβριδικά πλέγματα από τις άλλες κατηγορίες πλεγμάτων είναι το γεγονός ότι μπορεί να περιέχουν πολλών ειδών στοιχεία. Για παράδειγμα ένα πλέγμα δομημένων στοιχείων μπορεί να αποτελείται μόνο από εξάεδρα, τετράεδρα κλπ. Αντίθετα, ένα υβριδικό πλέγμα μπορεί να αποτελείται από κάθε συνδυασμό τετράεδρα πρίσματα και πυραμίδες.

4.5 Πως δημιουργούνται

Για την δημιουργία ενός πλέγματος ακολουθούνται τα ακόλουθα βήματα:

- Δημιουργία, ή εισαγωγή του ορίου του πλέγματος.
- Έλεγχος της ποιότητας του ορίου του πλέγματος.
- Βελτίωση και επισκευή ορίου.
- Δημιουργία όγκου πλέγματος και περαιτέρω βελτίωση, αν απαιτείται.
- Έλεγχος της ποιότητας του όγκου του πλέγματος.
- Αποθήκευση όγκου πλέγματος



Ενδεικτική διαδικασία δημιουργίας πλέγματος φαίνεται παρακάτω

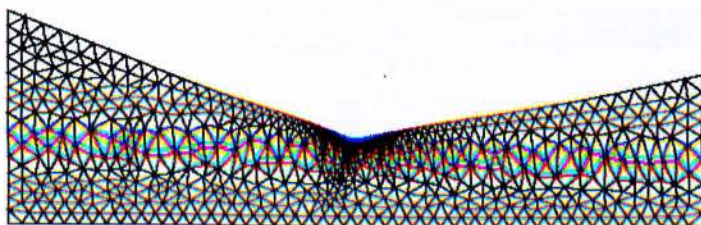
➤ Αρχική δημιουργία



➤ Βελτίωση ορίων αρχικού πλέγματος



➤ Βελτίωση πυκνότητας κελιών



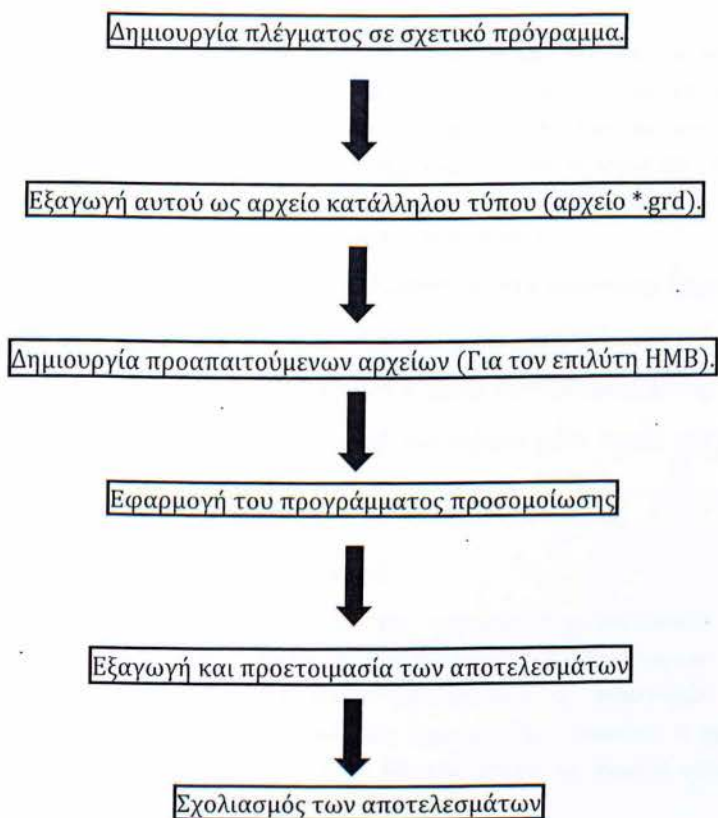
Η ποιότητα του πλέγματος εκφράζεται με την μέτρηση τριών παραμέτρων: (α) της Ασυμμετρίας, (β) της Ομαλότητας (αλλαγή στο μέγεθος) και (γ) του Λόγου διαστάσεων.

5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

5.1 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στην δημιουργία του πλέγματος μοντελοποίησης για δισδιάστατες αεροτομές (2D airfoils). Σημειώτεον, ότι τα πτερύγια δυο διαστάσεων αποτελούνται από ένα προφίλ αεροτομής, το οποίο είναι "φουσκωμένο" κατά την διεύθυνση ενός άξονα. Στην πραγματικότητα και σχεδιαστικά είναι πτερύγια τριών διαστάσεων, αλλά δεδομένου ότι κατά μήκος ενός άξονα δεν υπάρχει καμία αλλαγή στην γεωμετρία, μελετώνται ως πτερύγια- αεροτομές δυο διαστάσεων.

Τα στάδια για την μελέτη ενός πτερυγίου δυο ή τριών διαστάσεων απεικονίζονται παραστατικά στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1 Στάδια για την μελέτη πτερυγίου δυο ή τριών διαστάσεων

Αυτοί είναι οι τομείς που λήφθηκαν υπόψη για την αεροδυναμική μελέτη των προαναφερθεισών αεροτομών.

5.2 Δημιουργία πλέγματος ICEMCFD

Για την δημιουργία του πλέγματος προσομοίωσης έχουμε επιλέξει το εμπορικό πρόγραμμα ICEMCFD το οποίο ανήκει στην οικογένεια προγραμμάτων ANSYS.

Προκειμένου να επιτευχθεί η δημιουργία του πλέγματος, απαιτείται η ύπαρξη της γεωμετρίας τόσο της αεροτομής όσο και της περιοχής μέσα στην οποία θα μελετηθεί η οποία αποκαλείται ΠΜΑ (περιοχή μελέτης αεροτομής, far-field). Η ΠΜΑ υφίσταται προκειμένου να υπάρξει η οριοθέτηση των οριακών συνθηκών (Boundary conditions), δηλαδή των συνθηκών κάτω από τις οποίες θα μελετηθεί η αεροτομή. Δεδομένου ότι κοντά στο πτερύγιο κυριαρχούν διαφορετικά φαινόμενα πίεσης και ταχύτητας του ρευστού τα οποία αναιρούν τις συνθήκες του ελεύθερου ρεύματος έχουμε επιλέξει η ΠΜΑ να είναι σχετικά μακριά από την αεροτομή για έναν ακόμη λόγο. Ο λόγος αυτός είναι πως θέλουμε να θέσουμε τις οριακές συνθήκες σε μια περιοχή όπου θα υπάρχει ελεύθερο ρεύμα, δηλαδή μια περιοχή όπου η κίνηση του ρευστού δεν θα επηρεάζεται από την ύπαρξη του πτερυγίου.

Η γεωμετρία της ΠΜΑ θα καθορίσει και τον τύπο της τοπολογίας του πλέγματος. Στην δική μας περίπτωση έχουμε επιλέξει τοπολογία τύπου C (C-Type topology). Ο λόγος που επιλέχτηκε αυτός ο τύπος έναντι άλλων -όπως H ή O- είναι ότι έχουμε παρόμοια γεωμετρία με την γεωμετρία της αεροτομής οπότε και οι υπολογισμοί θα επιτευχθούν με μεγαλύτερη ακρίβεια και αυτό δεδομένου ότι η προσπέλαση των σημείων του πλέγματος θα ταιριάζει με την ακολουθία της γεωμετρίας της αεροτομής.

Για την δημιουργία του πλέγματος ακολουθήθηκαν τα παρακάτω βήματα:

- Προσδιορισμός της γεωμετρίας της αεροτομής και της ΠΜΑ.
- Δημιουργία της τοπολογίας του πλέγματος μέσω συγκρότησης block.
- Εφαρμογή των παραμέτρων για ορισμό των κελιών κάθε ακμής της ΠΜΑ και της αεροτομής (pre-mesh parameters).

5.2.1 Γεωμετρία αεροτομής και far-field

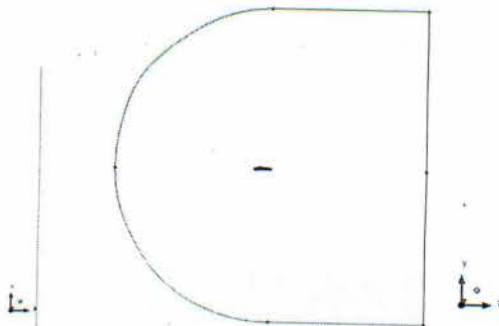
Για την δημιουργία της γεωμετρίας της αεροτομής χρειαζόμαστε ένα πλήθος σημείων αυτής. Για τον λόγο αυτό δημιουργήθηκε ένα πρόγραμμα σε γλώσσα προγραμματισμού C, το οποίο λαμβάνει υπόψη τις εξισώσεις των αεροτομών τύπου NACA τεσσάρων ψηφίων και υπολογίζει ένα πλήθος σημείων, που επιλέγει ο χρήστης. Έτσι λοιπόν χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα αυτό και εισάγουμε τα σημεία στο πρόγραμμα ICEMCFD ως αρχείο μορφής *.txt.

Σαν επόμενο βήμα, δημιουργούμε την γεωμετρία της ΠΜΑ. Επειδή γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των οριακών σημείων του πτερυγίου (Χείλη προσβολής και εκφυγής) μπορούμε να οριοθετήσουμε την ΠΜΑ ως προς την αεροτομή. Δημιουργούμε λοιπόν 5 σημεία γύρω από την αεροτομή δηλώνοντας στο ICEMCFD τις συντεταγμένες τους. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι το σημείο στο χείλος προσβολής της αεροτομής, είναι το σημείο τομής των αξόνων x, y, z (0, 0, 0) και αυτό διότι έτσι διευκολύνεται τόσο ο

υπολογισμός των σημείων από το πρόγραμμα όσο και η οροθέτηση του ΠΜΑ γύρω από το πτερύγιο καθώς λαμβάνεται σαν σημείο αναφοράς.



Σχ.5.2 Τα σημεία της αεροτομής



Σχ.5.3 Τα σημεία και οι ακμές του Far-field

Έχοντας λοιπόν τα σημεία της αεροτομής και της ΠΜΑ, δημιουργούμε την γεωμετρία αυτών ενώνοντάς τα κατάλληλα μεταξύ τους όπως φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 5.2. Πλέον είμαστε σε θέση να δώσουμε όγκο στην αεροτομή. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της αντιγραφής της δημιουργηθείσας γεωμετρίας και μεταφορά αυτής κατά μήκος του άξονα z. Έπειτα για να αποκτήσει η αεροτομή όγκο πρέπει να ενώσουμε τα σημεία που έχουν δημιουργηθεί στο ένα και στο άλλο επίπεδο μεταξύ τους. Ενώνοντας λοιπόν τα δύο επίπεδα μεταξύ τους δημιουργείται η αεροτομή και η ΠΜΑ ως ένα τρισδιάστατο μοντέλο ακμών χωρίς μεταβολές της γεωμετρίας κατά μήκος του άξονα z.

Δεδομένου ότι οι οριακές συνθήκες τις οποίες θα θέσουμε αργότερα πρέπει να εφαρμοστούν στις επιφάνειες των μοντέλων προς μελέτη, θα πρέπει να δημιουργηθούν αυτές χρησιμοποιώντας την υπάρχουσα γεωμετρία. Έτσι με κατάλληλα εργαλεία του προγράμματος ICEMCFD ορίζουμε τις επιφάνειες ως τις περιοχές μεταξύ δυο έως τεσσάρων ακμών. Έπειτα δημιουργούμε μικρές ομάδες επιφανειών όπως για παράδειγμα οι επιφάνειες που οριοθετούν το πτερύγιο ή οι επιφάνειες που οριοθετούν την ΠΜΑ. Πλέον το προς μελέτη μοντέλο αποτελεί μοντέλο επιφανειών και ακμών.

5.2.2 Τοπολογία πλέγματος

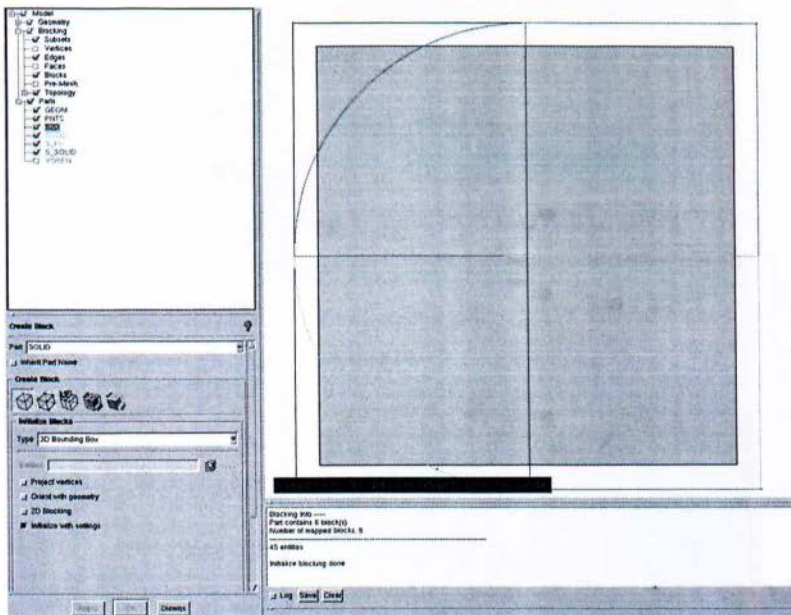
Η τοπολογία του πλέγματος αποτελεί μια διάταξη από blocks των οποίων οι ακμές (όχι όλες) θα τεμαχιστούν σε συγκεκριμένο αριθμό τεμαχίων-κελιών. Η διάταξη των κελιών αυτών πάνω στην εκάστοτε ακμή θα ακολουθεί συγκεκριμένη συνάρτηση. Για παράδειγμα 40 κελιά με συνάρτηση διάταξης αυτών Exponential και συγκεκριμένα με σταδιακή πύκνωση προς το σημείο 2 (δηλαδή το ένα άκρο της ακμής).

Για να έχουμε σωστή διάταξη του πλέγματος καθώς επίσης και για να ανταποκρίνεται στην αεροτομή θα πρέπει η τοπολογία να «ταυτίζεται» με τη

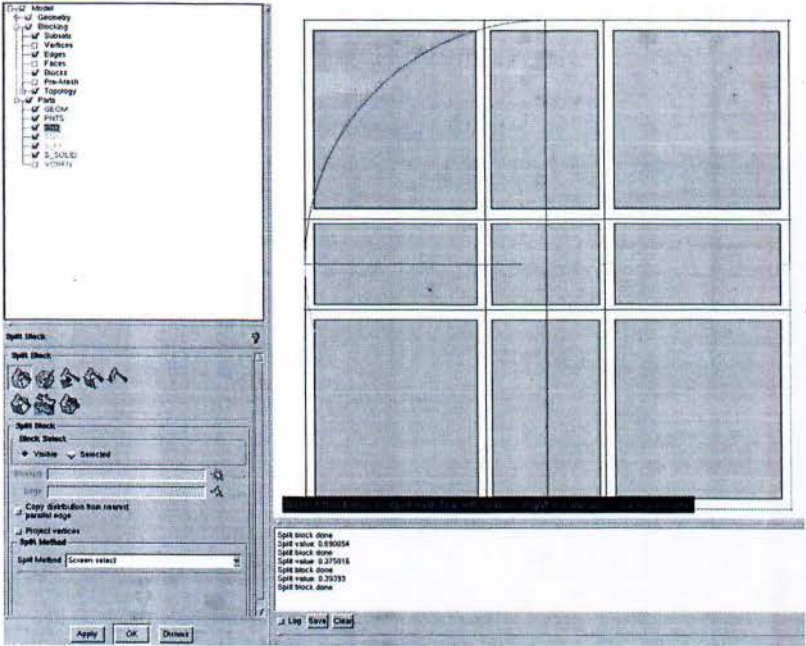
δημιουργηθείσα γεωμετρία. Αυτός λοιπόν είναι ο λόγος για τον οποίο δημιουργούμε την γεωμετρία.

Η συλλογιστική για την δημιουργία των block τόσο σε 2D όσο και σε 3D πτερύγια είναι να δημιουργήσουμε ένα αρχικό block που θα ανταποκρίνεται αρχικά σε ολόκληρη την γεωμετρία και μετά τα το τεμαχίσουμε καταλλήλως ούτως ώστε να ταιριάζει και να ταυτιστεί με την γεωμετρία. Έτσι λοιπόν χρησιμοποιώντας κατάλληλα εργαλεία για την δημιουργία block ακολουθούμε τα βήματα που απεικονίζονται παρακάτω.

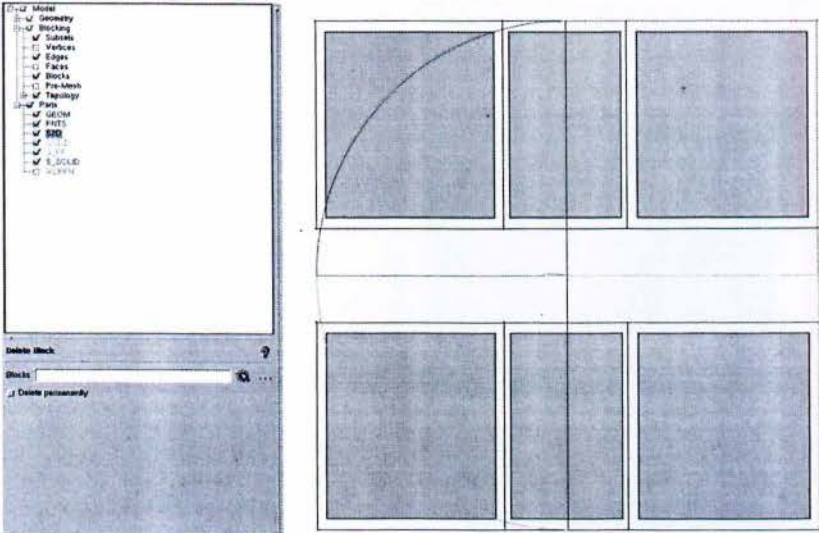
Βήμα 1^ο: Δημιουργία αρχικού block.



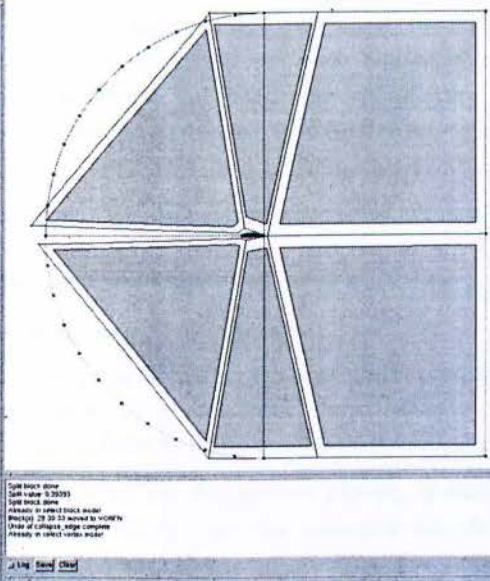
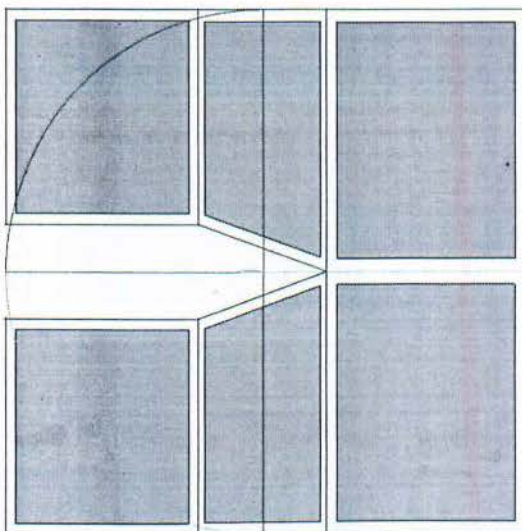
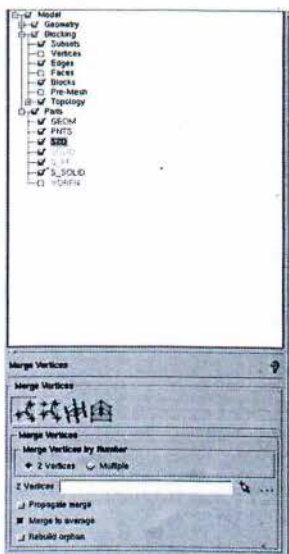
Βήμα 2^ο: Τεμαχισμός του αρχικού block σε 9 μικρότερα.



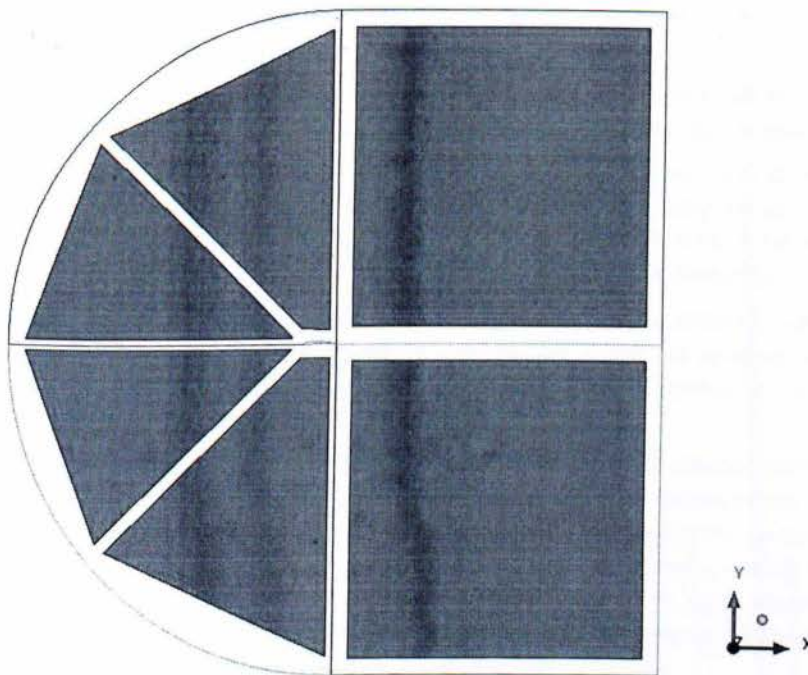
Βήμα 3^ο: Διαγραφή των τριών μεσαίων υπο-block.



Βήμα 4^ο: Ένωση των κατάλληλων κορυφών των block μεταξύ τους καθώς και κατάλληλη μετακίνηση των block για την διαμόρφωση της μορφολογίας των σύμφωνα με την γεωμετρία.



Βήμα 5^ο : Ταύτιση των συντεταγμένων των ενωμένων κορυφών με τις συντεταγμένες επιλεγμένων σημείων της γεωμετρίας καθώς και ταύτιση συγκεκριμένων ακμών των block με τις καμπύλες ακμές της γεωμετρίας.



Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι παρότι το πλέγμα στο τέλος όλης αυτής της διαδικασίας θα είναι και θα φαίνεται ενιαίο, τα block τα οποία θα το έχουν δημιουργήσει θα είναι ξεχωριστά κομμάτια μεταξύ τους. Αργότερα και κατά την χρήση του κώδικα θα παρατηρηθεί πως το τελικό πλέγμα θα τεμαχιστεί σε τόσα τεμάχια όσα και τα block.

Σημαντικό στοιχείο για την σωστή τοπολογία είναι η ταύτιση των ακμών των block με τις ακμές της γεωμετρίας καθώς επίσης και η ταύτιση (association) των κορυφών (vertices) των block με συγκεκριμένα σημεία (points) της γεωμετρίας και έτσι με την κίνηση αυτή επικυρώνουμε το γεγονός ότι η τοπολογία block θα ταυτίζεται με την γεωμετρία.

5.2.3 Εφαρμογή παραμέτρων στις ακμές των block

Εδώ θα αναφερθούμε στις παραμέτρους που θέτουμε σε συγκεκριμένες ακμές των block που δημιουργήθηκαν προκειμένου αυτά να τεμαχιστούν σε κατάλληλο αριθμό και κατάλληλης πυκνότητας κομμάτια, ούτως ώστε να δημιουργηθεί το κατάλληλο πλέγμα.

Όπως αναφέρεται και στο τέταρτο κεφάλαιο του θεωρητικού μέρους, η πυκνότητα των κελιών του πλέγματος είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ποιότητα και ακρίβεια των αποτελεσμάτων αλλά και του χρόνου ολοκλήρωσης της μελέτης. Για παράδειγμα σε περιοχές που η γεωμετρία αλλάζει απότομα, όπως είναι στο χείλος προσβολής, εάν δεν

είναι το πλέγμα αρκετά πυκνό τότε δεν θα υπάρχουν αρκετοί κόμβοι (Nodes) ώστε να τους προσπελάσει ο κώδικας και έτσι να αποκτήσει πληροφορίες για τα φαινόμενα τα οποία λαμβάνουν χώρα εκεί. Αντίθετα εάν σε όλες τις περιοχές του πλέγματος τα κελιά είναι πολύ πυκνά μεταξύ τους τότε ο κώδικας του προγράμματος αεροδυναμικής ανάλυσης θα χρειαστεί πολύ περισσότερο χρόνο, ώστε να ολοκληρώσει την μελέτη και έτσι θα καταστεί χρονικά ασύμφορη.

Προτού ξεκινήσουμε να θέτουμε τις παραμέτρους στις ακμές των block καλό είναι να γνωρίζουμε σε ποιες περιοχές χρειάζεται αυξημένη πυκνότητα κελιών και σε ποιες όχι.

Το ρευστό (αέρας) προσπίπτει σε μια αεροτομή πρώτα στο χείλος προσβολής και εξέρχεται από το χείλος διαφυγής και αναλόγως της γωνίας πρόσπτωσης τα φαινόμενα ποικίλουν. Άρα αρχικά μπορούμε να είμαστε βέβαιοι πως απαιτείται μεγάλη πυκνότητα κελιών στις γειτονικές περιοχές του χείλους προσβολής και του χείλους διαφυγής.

Επίσης, δεδομένου ότι κατά μήκος όλης της αεροτομής έχουμε ανάπτυξη οριακού στρώματος (boundary layer) το οποίο μάλιστα αποτελεί και σημαντικό στοιχείο για την αναγνώριση του σημείου αποκόλλησης της ροής θέλουμε να έχουμε με μεγάλη λεπτομέρεια πληροφοριών την ανάπτυξη αυτής.

Τέλος, απαιτείται μεγάλη πυκνότητα κελιών στην περιοχή αμέσως μετά την αεροτομή. Σε αυτή την περιοχή εμφανίζεται τυρβώδης ροή. Επειδή ο τρόπος με τον οποίο επιλύονται οι εξισώσεις Navier-Stokes βασίζεται στις πεπερασμένες διαφορές/ πεπερασμένους όγκους, οι τιμές των μεγεθών της ταχύτητας, πίεσης, πυκνότητας, κινητικής ενέργειας, κλπ, εξαρτώνται άμεσα η μια από την άλλη κατά μήκος της αεροτομής. Έτσι μέχρις ότου επαναναπτυχθεί πλήρως η ροή του ρευστού θέλουμε να γνωρίζουμε με μεγάλη ακρίβεια τις τιμές των μεγεθών αυτών.

Συνοψίζοντας, οι περιοχές του πλέγματος όπου απαιτείται μεγάλη πυκνότητα κελιών είναι οι εξής:

- Η περιοχή γύρω και κοντά στο πτερύγιο και ιδιαίτερα στ' α χείλη προσβολής και διαφυγής.
- Η περιοχή μετά την έξοδο του ρευστού από την αεροτομή.
- Η περιοχή (σχεδόν σημειακή) όπου η ροή αποκολλάται από την αεροτομή (στο χείλος διαφυγής).

Τα είδη των συναρτήσεων βάση των οποίων θα οριστούν οι κατανομές των κελιών θα είναι:

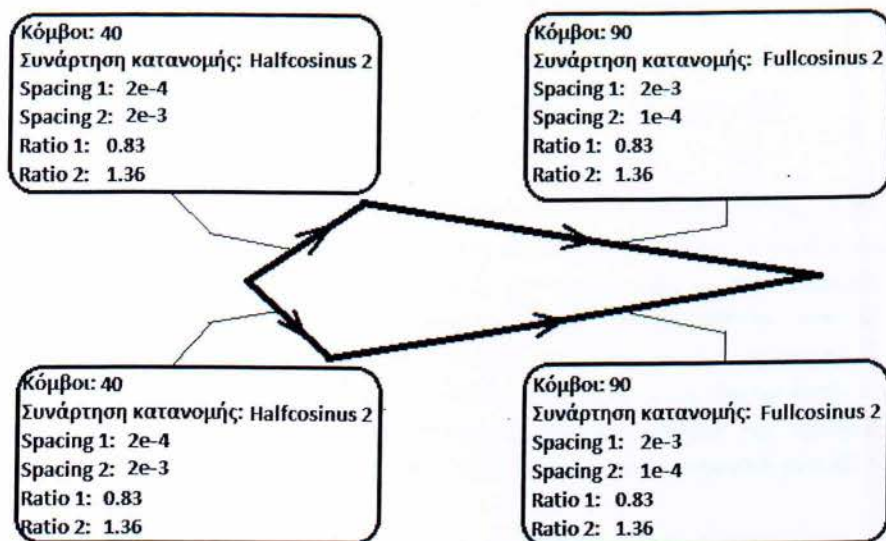
- Εκθετική (*Exponential*)
- Γεωμετρική (*Biometric*)
- Ημισυνημιτονοειδής (*Halfcosinus*)
- Υπερβολική (*Hyperbolic*)

Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι στην ομαλότητα και πυκνότητα του πλέγματος παίζει μεγάλο ρόλο η αναλογία της μεγαλύτερης από την μικρότερη ακμή του εκάστοτε κελιού (*Aspect Ratio*).

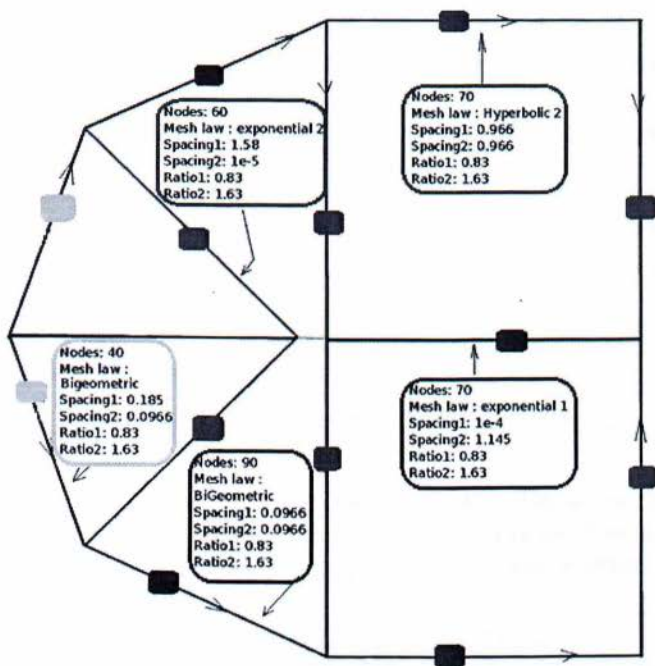
Για να γίνει κατανοητό από το πρόγραμμα ICEMCFD προς ποια κατεύθυνση θα πυκνώνουν τα κελιά, έχουν οριστεί δυο σημεία (1 και 2) της εκάστοτε ακμής, τα οποία είναι τα σημεία αρχής και τέλους. Έτσι επιλέγοντας μια ακμή αυτόματα μας εμφανίζονται τα σημεία 1 και 2, οπότε επιλέγουμε τα κελιά να πυκνώνουν καθώς πλησιάζουμε στο σημείο 2 ή 1, άρα θα ορίζουμε συνάρτηση κατανομής πυκνότητας Exponential 2 ή Exponential 1.

Παρακάτω, φαίνονται στα Σχήματα 5.2 και 5.3 η κατανομή των κελιών στις ακμές των block τόσο της αεροτομής όσο και της FF.

Ο αριθμός των κελιών μας δείχνει την ποσότητα των κομματιών στην οποία «κόβουμε» την κάθε ακμή. Η συνάρτηση κατανομής από την άλλη μας δείχνει σε ποιες περιοχές της ακμής θα υπάρχει συσσώρευση κόμβων και σε ποιες όχι. Οι ποσότητες των διαστημάτων 1 & 2 μας καθορίζουν το μήκος του πρώτου και του τελευταίου κελιού κατά μήκος της εκάστοτε ακμής. Παρόλα αυτά, κάποιες συναρτήσεις κατανομής όπως για παράδειγμα η Halfcosinus δεν μας επιτρέπουν να καθορίσουμε εμείς το μήκος του δεύτερου κελιού, γι'αυτό το λόγο χρησιμοποιείται η συνάρτηση Fullcosinus.



Σχήμα 5.2. Κατανομή των κελιών στις ακμές των block της αεροτομής



Σχήμα 5.3. Κατανομή των κελιών στις ακμές των block της ΠΜΑ

Μετά τον καθορισμό του αριθμού των κελιών και της κατανομής αυτών πάνω στις ακμές των block, τελευταίο βήμα είναι η ομαλοποίηση του πλέγματος, η οποία επιτυγχάνεται με το «ταίριασμα» (matching) των spacing 1 & 2 των συγγενικών ακμών. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι η απόσταση του πρώτου κόμβου μιας ακμής με τον δεύτερο είναι η ίδια με αυτήν του τελευταίου με τον προτελευταίο της προηγούμενης συγγενικής ακμής. Το βήμα αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι η ομαλή επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes απαιτεί ομαλή προσπέλαση των κόμβων του πλέγματος από τον κώδικα του προγράμματος αεροδυναμικής ανάλυσης. Έτσι παρότι τα 6 υπο-block είναι ξεχωριστά μεταξύ τους το πλέγμα φαίνεται ομαλό και ενιαίο.

5.3 Ο επιλύτης HMB (Helicopter Multi Block)

5.3.1 Μετατροπή του πλέγματος σε αρχείο μορφής *.grd κατάλληλο για εισαγωγή στον επιλύτη HMB.

Είναι γνωστό ότι ο κώδικας του επιλύτη HMB για να μελετήσει αεροδυναμικά μια αεροτομή, χρειάζεται το πλέγμα μοντελοποίησης αυτής. Η μορφή που απαιτείται να έχει το πλέγμα για να αναγνωριστεί από τον επιλύτη είναι *.grd. Επίσης πρέπει να «δηλωθεί» κατά την εξαγωγή του πλέγματος ότι αυτό προέκυψε από πολλαπλά block (multi-block).

Προκειμένου να υπάρξει το αρχείο του πλέγματος σε μορφή τύπου *.grd θα πρέπει να ακολουθηθούν δύο βήματα:

- Εξαγωγή των απαραίτητων αρχείων για την δημιουργία του αρχείου *.grd τα οποία είναι (*.topo), (*.boco), (*.top).
- Χρήση του προγράμματος *HexaZeros* δημιουργίας του αρχείου *.grd.

5.3.2 Οριακές συνθήκες

Το πρόγραμμα *HexaZeros* εισάγει τις οριακές συνθήκες (*Boundary Conditions*), οι οποίες αποτελούν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες θα γίνει η μελέτη. Έτσι το αρχείο *.grd αποτελεί το πλέγμα στο οποίο έχουν εφαρμοστεί οι οριακές συνθήκες. Οι οριακές συνθήκες αφορούν τα εξής τμήματα:

- Far-field (η περιοχή όπου υπάρχει ελεύθερο ρεύμα) $\frac{dU}{dx} = 0$

Στην περιοχή αυτή δηλώνουμε ότι η ταχύτητα του ρευστού δεν εξαρτάται από την μεταβολή της απόστασης x.

- 2D boundary (Η περιοχή στα πλαϊνά της αεροτομής όπου δεν υπάρχει ρευστό) $\frac{dz}{dt} = 0$ (dz επειδή η γεωμετρία της αεροτομής παραμένει ίδια κατά μήκος του z άξονα)

Στην περιοχή αυτή η οποία εκτείνεται στο επίπεδο x-y και μάλιστα στις δυο άκρες της αεροτομής θέλουμε η ταχύτητα να είναι 0 διότι η γεωμετρία της αεροτομής παραμένει σταθερή κατά μήκος του άξονα z.

- S_Solid (η επιφανειακή περιοχή πάνω στο πτερύγιο) $U_{x,y,z}=0$

Στην περιοχή αυτή δηλαδή οριακά και πάνω στο πτερύγιο η ταχύτητα είναι μηδενική.

Πρακτικά οι οριακές συνθήκες βοηθούν στην επίλυση των εξισώσεων διότι μια διαφορική εξίσωση χωρίς οριακές τιμές δεν μπορεί να δώσει συγκεκριμένη λύση αλλά οικογένειες λύσεων.

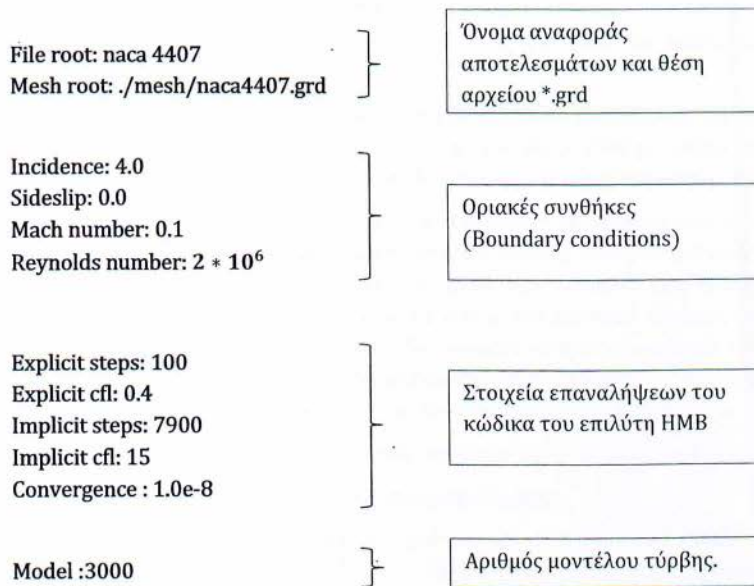
5.3.3 Δημιουργία προαπαιτούμενων αρχείων για τον επιλύτη HMB

Για την εκτέλεση του κώδικα του επιλύτη HMB απαιτούνται κάποιες πληροφορίες, όπως για παράδειγμα ο αριθμός Reynolds του ρευστού, ο αριθμός Mach, η τοποθεσία του αρχείου *.grd, ο αριθμός των επαναλήψεων, κλπ.

Το αρχείο αυτό ονομάζεται *st* (εκ του steady επειδή η ροή δεν είναι ασταθής).

Το περιεχόμενο του αρχείου αυτού περιγράφεται στο Σχήμα 5.4

Τα πρώτα δύο στοιχεία του αρχείου *st* είναι τα στοιχεία αναφοράς. Το πρώτο είναι το όνομα-πρόθεμα που έχουν τα εξαγόμενα αποτελέσματα και το δεύτερο είναι η τοποθεσία του αρχείου *.grd ως προς την τοποθεσία του αρχείου *st*



Σχήμα 5.4 Το περιεχόμενο του αρχείου *st*

Η δεύτερη ομάδα στοιχείων του αρχείου *st* είναι οι συνθήκες ροής του ρευστού (αέρας). Στην δική μας περίπτωση τα στοιχεία αυτά είναι:

- Η γωνία πρόσπτωσης του αέρα στην αεροτομή (*Incidence angle*)
- Η γωνία (κλίση) του ελευθέρου ρεύματος ως προς τους άξονες Z, Y (*Sideslip*)
- Ο αριθμός Mach του ρευστού (έτσι δηλώνεται η ταχύτητα του ρευστού)
- Ο αριθμός Reynolds του ρευστού.

Η τρίτη ομάδα στοιχείων του αρχείου *st* είναι τα στοιχεία που αναφέρονται στις επαναλήψεις που θα κάνει ο επιλύτης HMB προκειμένου να μας παρέχει έγκυρα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα τα στοιχεία αυτά είναι:

- Επαναλήψεις ρητής μεθόδου (*Explicit steps*)

- Ο αριθμός CFL για την ρητή μέθοδο (*Explicit CFL*)
- Επαναλήψεις έμμεσης μεθόδου (*Implicit steps*)
- Ο αριθμός CFL για την έμμεση μέθοδο (*Implicit CFL*)
- Ο αριθμός-όριο για σύγκλιση.

Οι ρητές μέθοδοι (*explicit methods*) υπολογίζουν την κατάσταση ενός προβλήματος ή τη λύση μιας εξίσωσης σε μεταγενέστερο χρόνο από την κατάσταση του προβλήματος την δεδομένη χρονική στιγμή. Αντίθετα με τις έμμεσες μεθόδους (*Implicit methods*) μπορεί να βρεθεί λύση σε μια εξίσωση, η οποία θα αφορά τόσο την τρέχουσα χρονική στιγμή, όσο και κάποια μεταγενέστερη.

Πρακτικά χρησιμοποιούνται οι δύο αυτές μέθοδοι προκειμένου να βρεθεί μια «κοντινή» λύση στις εξισώσεις Navier-Stokes & μοντέλου τύρβης (μέσω της ρητής μεθόδου) και μετά αυτή η λύση να τελειοποιηθεί ως προς την σύγκλιση αυτής σε μια τιμή.

Ο αριθμός CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) αποτελεί την απαραίτητη προϋπόθεση για να υπάρξει σύγκλιση της υπολογιζόμενης από τον κώδικα λύσης σε μια τιμή κατά την λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων με την χρήση των μεθόδων των πεπερασμένων διαφορών/όγκων. Ουσιαστικά είναι το κατώτατο όριο του χρονικού βήματος (time step) το οποίο εφαρμόζεται για την λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων με ρητές μεθόδους. Ο αριθμός αυτός υπολογίζεται από τον πολλαπλασιασμό της ταχύτητας του ήχου με τον λόγο του χρόνου προσπέλασης των κελιών ως προς το μήκος των κελιών.

Τέλος, στο αρχείο *st* ορίζεται ο αριθμός-κατάταξη του μοντέλου τύρβης.

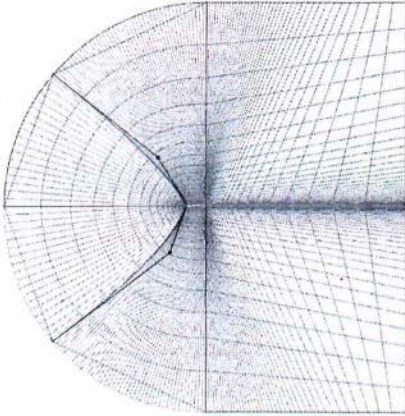
5.3.4 Εφαρμογή του προγράμματος προσομοίωσης.

Έχοντας δημιουργήσει τα αρχεία **.grd* και *st*, μπορούμε να εκτελέσουμε τον κώδικα του προγράμματος προσομοίωσης. Πρέπει όμως να είμαστε σίγουροι πως το πλέγμα μας είναι ιδανικό καθώς επίσης και οι παράμετροι του αρχείου *st* προκειμένου να εξαχθούν σωστά αποτελέσματα. Για να ανακαλύψουμε εάν το πλέγμα μας είναι το βέλτιστο δυνατό (*optimum*) ακολουθούμε την μέθοδο δοκιμής και λάθους.

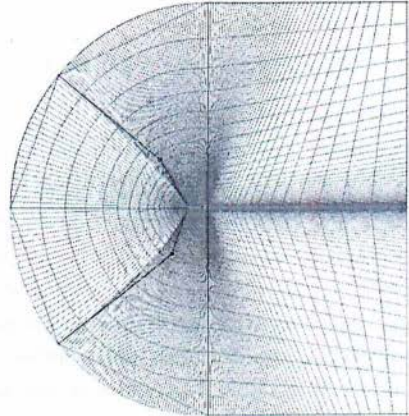
Πιο συγκεκριμένα δοκιμάζουμε διαφορετικά είδη πλεγμάτων (ως προς την πυκνότητα των κελιών) καθώς επίσης δοκιμάζουμε για τα πλέγματα αυτά διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων. Το ιδανικό είναι να έχουμε σύγκλιση των εξαγόμενων αποτελεσμάτων σε κάποια τιμή και ταυτόχρονα η τιμή αυτή να μην αλλάζει για διαφορετικές πυκνότητες πλεγμάτων.

Στην δική μας περίπτωση για την αεροτομή NACA4407 δημιουργούμε 5 διαφορετικά πλέγματα το ένα πυκνότερο από το άλλο προσέχοντας πάντα τις περιοχές αυξημένης πυκνότητας που αναφέρονται σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τα πλέγματα αυτά, τα οποία παρατίθενται στη συνέχεια, έχουν τους εξής αριθμούς κελιών:

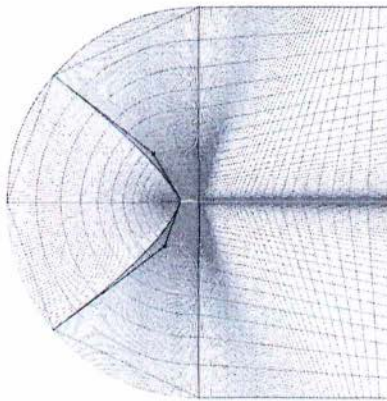
Πλέγμα Νο1: ~20.000 κόμβοι (Nodes)



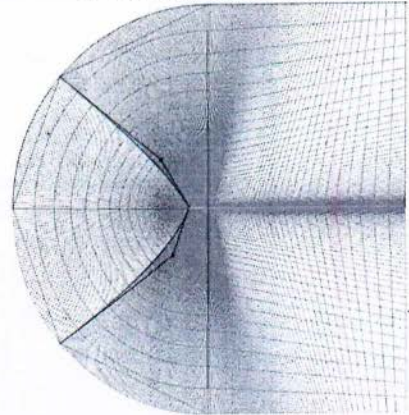
Πλέγμα Νο2: ~30.000 κόμβοι



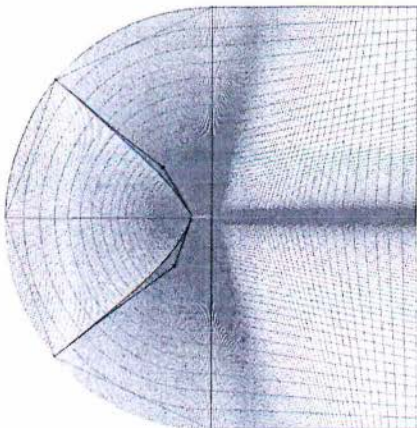
Πλέγμα Νο3: ~47.260 κόμβοι



Πλέγμα Νο4: ~85.000 κόμβοι



Πλέγμα Νο5: ~119.000 κόμβοι

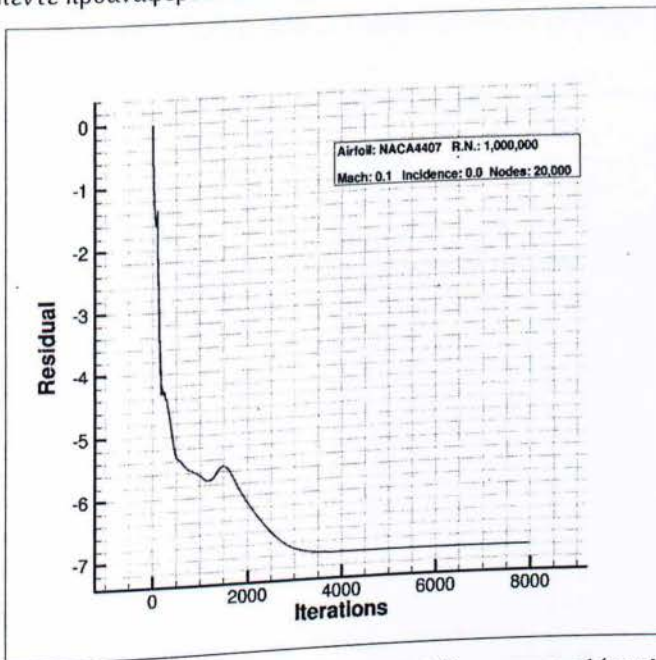


Προκειμένου να θεωρήσουμε ότι έχουμε έγκυρα αποτελέσματα πρέπει να συμβαίνουν ταυτόχρονα τα ακόλουθα:

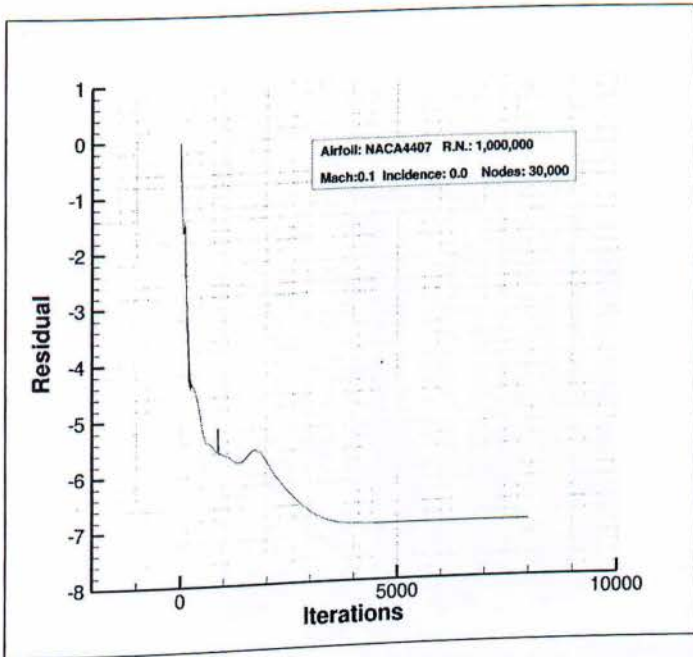
- Να σταθεροποιηθούν οι τιμές των αποτελεσμάτων κατά την πάροδο των επαναλήψεων.
- Να σταθεροποιούνται και τα κατάλοιπα (*Residuals*) μεταξύ των επαναλήψεων κατά την πάροδο αυτών.

Εδώ πρέπει να τονίσουμε πως τα κατάλοιπα-υπολείμματα (*Residuals*) αποτελούν ένα μέτρο της διαφοράς δυο επαναλήψεων. Δεδομένου ότι η επίλυση των εξισώσεων μέσω του κώδικα προσεγγίζει μια τιμή η οποία τις ικανοποιεί, η διαφορά που προκύπτει μετά από κάθε επανάληψη θα γίνεται όλο και μικρότερη. Αυτό ισχύει αν σκεφτούμε ότι η εικασία για την λύση των εξισώσεων για μια επανάληψη είναι απλά η λύση που βρέθηκε για την προηγούμενη επανάληψη. Έτσι οι λύσεις των εξισώσεων Navier-Stokes και του μοντέλου τύρβης κατά το πέρας των επαναλήψεων συγκλίνουν σε κάποια τιμή.

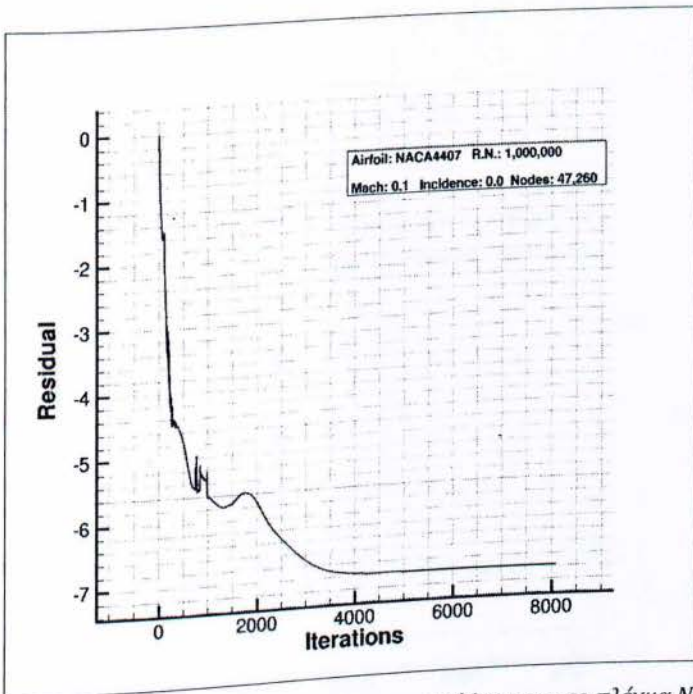
Τα παρακάτω πέντε διαγράμματα (Σχήματα 5.5 – 5.9) δείχνουν την σύγκλιση που έχουν τα υπολείμματα-διαφορές των επαναλήψεων μεταξύ τους σύμφωνα με την πάροδο αυτών για τα πέντε προαναφερθέντα πλέγματα.



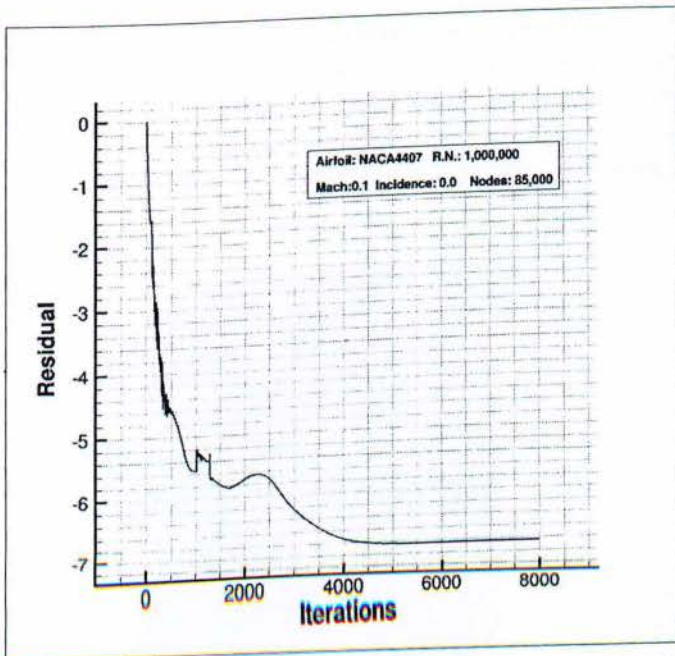
Σχήμα 5.5 Διάγραμμα υπολειμμάτων - επαναλήψεων για το πλέγμα No 1



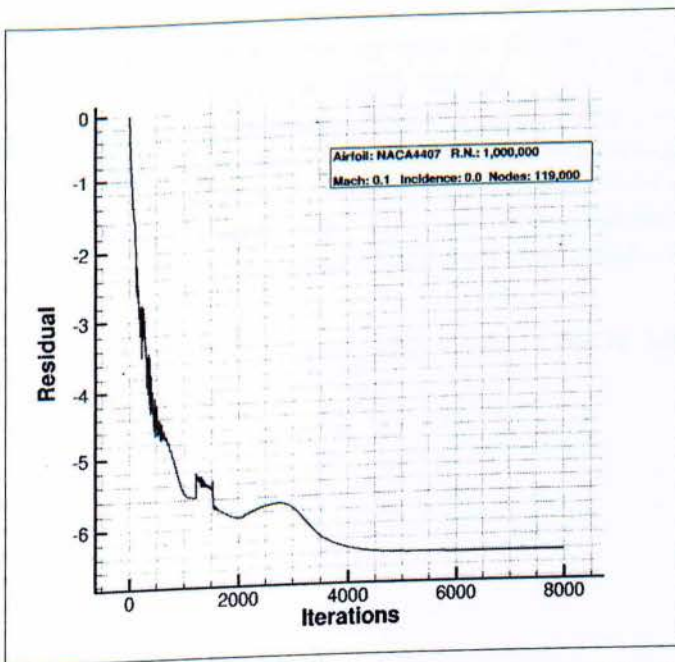
Σχήμα 5.6 Διάγραμμα υπολειμμάτων - επαναλήψεων για το πλέγμα No 2



Σχήμα 5.7 Διάγραμμα υπολειμμάτων - επαναλήψεων για το πλέγμα No 3

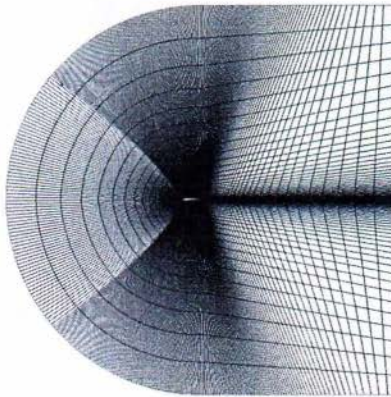


Σχήμα 5.8 Διάγραμμα υπολειμμάτων - επαναλήψεων για το πλέγμα Νο 4



Σχήμα 5.9 Διάγραμμα υπολειμμάτων - επαναλήψεων για το πλέγμα Νο 5

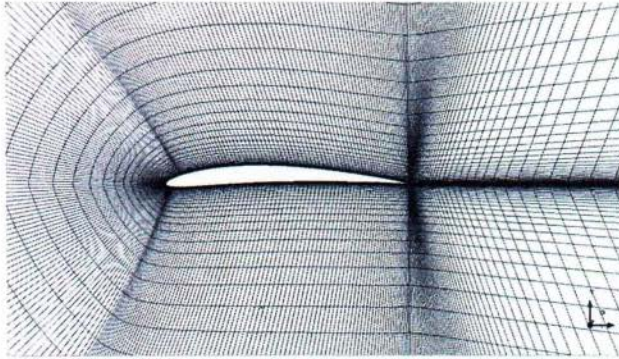
Από τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε πως η σύγκλιση των συντελεστών σε κάποια τιμή ξεκινάει από το πλέγμα Νο 3 αλλά τελειοποιείται στο τελευταίο πλέγμα το οποίο είναι και μεγαλύτερο. Αυτό είναι απόλυτα λογικό και αναμενόμενο, διότι όσο πιο πυκνό είναι το πλέγμα τόσο πιο μικρές μεταβολές των φαινομένων έχουμε μεταξύ δυο κόμβων, άρα προκύπτουν πιο λεπτομερείς και ακριβείς οι λύσεις και συνεπώς αποτελέσματα.



Σχήμα 5.10 Το πλέγμα Νο3

Παρόλα αυτά, θεωρώ πως είναι σκόπιμο να λαμβάνουμε υπόψη και τον υπολογιστικό χρόνο που αναλογεί σε κάθε πλέγμα. Από πλευράς ακρίβειας αποτελεσμάτων είναι πιο σωστό να χρησιμοποιήσουμε το μεγαλύτερο πλέγμα. Αντίθετα από πλευράς χρόνου υπολογισμού είναι πιο σώφρον να χρησιμοποιήσουμε το μικρότερο δυνατό πλέγμα, το οποίο παράλληλα να μας δίνει τιμές αποτελεσμάτων οι οποίες θα βρίσκονται όσο πιο κοντά γίνεται στην τιμή στην οποία έχουμε σύγκλιση. Το καταλληλότερο πλέγμα για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις είναι το πλέγμα Νο3 με αριθμό κόμβων 47,260.

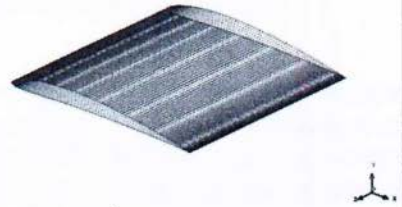
Η μορφή του πλέγματος Νο3 με 47260 κόμβους φαίνεται στα Σχ. 5.10-5.13.



Σχήμα 5.11 Το πλέγμα με No3 κοντά στην αεροτομή



Σχήμα 5.12 Το πλέγμα με No3 πάνω στην αεροτομή



Σχήμα 5.13 Το πλέγμα No3 στο Far-field

5.4 Αποτελέσματα και Σχολιασμός

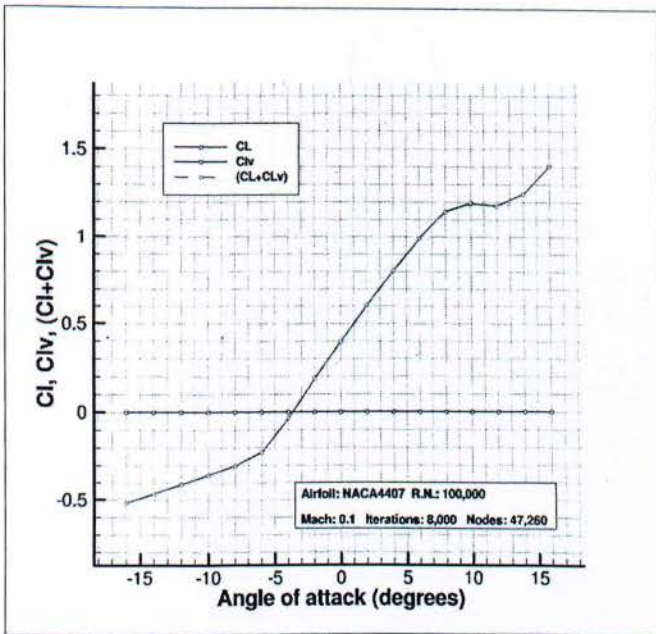
5.4.1 Διαγράμματα συντελεστών (C_L , C_d , C_m , C_p , $\frac{L}{D}$)

Συντελεστής άντωσης (C_L)

Ο συντελεστής άντωσης (C_L) μας δείχνει ποιοτικά το μέγεθος της δύναμης άντωσης (*Lift force*). Φυσικά δεν είναι απλά ένας δείκτης αλλά επηρεάζει την δύναμη άντωσης όπως φαίνεται και στην παρακάτω εξίσωση.

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot C_L \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot A \quad (5.1)$$

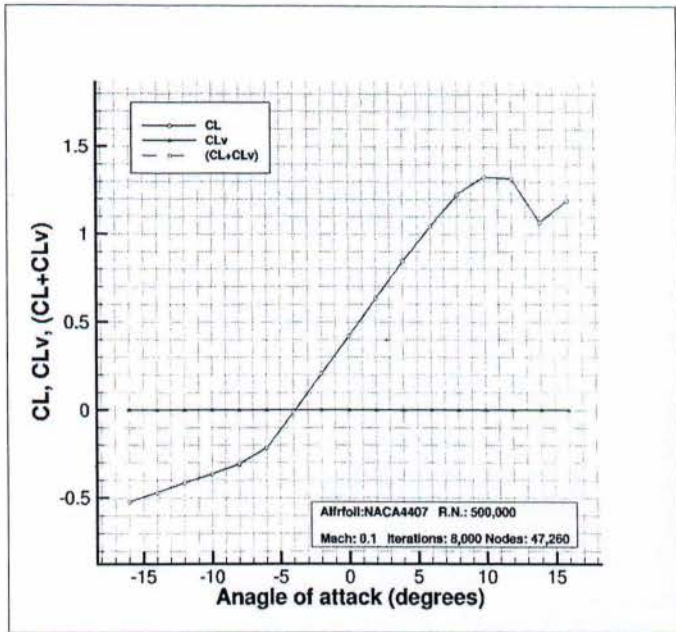
Τα παρακάτω διαγράμματα (Σχήματα 5.14 –5.17) δείχνουν την συμπεριφορά του συντελεστή άντωσης (C_L) ως προς τη γωνία προσβολής α για τους αριθμούς Reynolds: 10^5 , $5 \cdot 10^5$, 10^6 και $2 \cdot 10^6$.



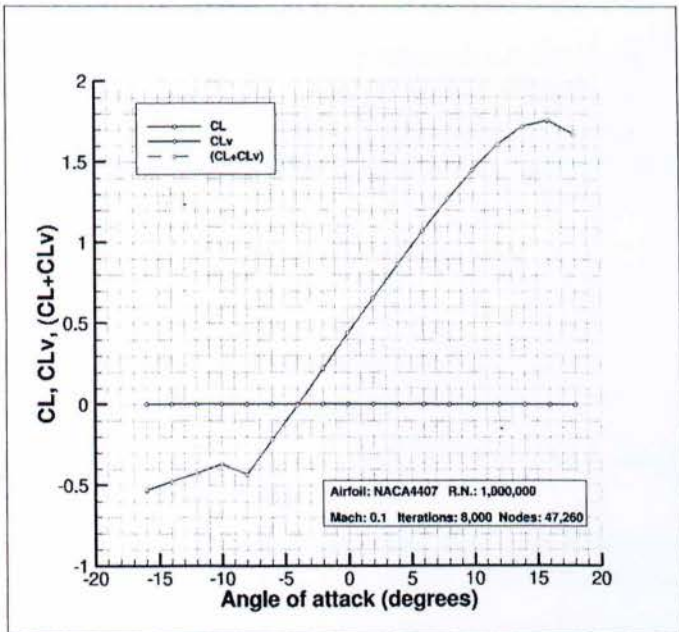
Σχήμα 5.14 Σχέση συντελεστή άντωσης με γωνία προσβολής α ($Re = 10^5$)

Όπως φαίνεται και στα διαγράμματα, ο συντελεστής αυτός είναι ραγδαία αυξανόμενος για μια περιοχή γωνιών από -5° έως 10° (περίπου) για κάθε διαφορετική περίπτωση του αριθμού Reynolds (εκτός των 2,000,000). Για αυτές τις γωνίες πρόσπτωσης του ρευστού η δύναμη άντωσης αυξάνεται, άρα η αεροτομή ωθείται προς τα πάνω (πρακτικά δηλαδή «πετάει»).

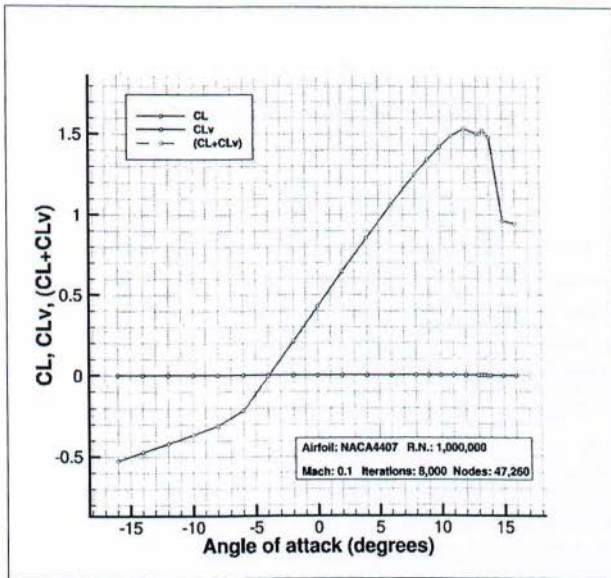
Στις περιοχές γωνιών με τιμές μικρότερες από 5° και μεγαλύτερες από 16° τα φαινόμενα που λαμβάνουν μέρος κοντά και πάνω στην αεροτομή είναι ασταθή, οπότε δεν είναι εφικτό να προσδιοριστούν με τον τρόπο που παρουσιάζεται εδώ. Τα σημεία όπου σταματάει να ισχύει η γραμμική αύξηση του συντελεστή άντωσης είναι σημεία όπου έχουμε απώλεια στήριξης (*Stall*).



Σχήμα 5.15 Σχέση συντελεστή άντωσης με γωνία προσβολής α ($Re = 5 \cdot 10^5$)



Σχήμα 5.16 Σχέση συντελεστή άντωσης με γωνία προσβολής α ($Re = 10^6$)



Σχήμα 5.17 Σχέση συντελεστή άντωσης με γωνία προσβολής α ($Re = 2 \cdot 10^6$)

Επίσης, παρατηρείται πως ο συντελεστής άντωσης αρχίζει να φθίνει μετά τις 10° , αλλά αυτό το φαινόμενο λαμβάνει χώρα μόνο για τις περιπτώσεις αριθμών Reynolds 10^5 , $5 \cdot 10^5$ και 10^6 . Αντίθετα για την περίπτωση όπου $Re=2,000,000$ παρατηρείται stall στις 16° . Το φαινόμενο αυτό ισχύει και επιβεβαιώνεται από τον ανηγμένο τύπο του αριθμού Reynolds ο οποίος έχει ως εξής:

$$Re = \frac{\rho \cdot U \cdot L}{\mu} \quad (5.2)$$

Όπου:

- U , είναι η ταχύτητα του ρευστού (σταθερό μέγεθος)
- L , το μήκος της αεροτομής, $L \neq c$ (σταθερό μέγεθος)
- μ , είναι το δυναμικό ιξώδες το οποίο εξαρτάται μόνο από το υλικό του ρευστού άρα αποτελεί και αυτό ένα σταθερό μέγεθος.
- ρ , είναι η πυκνότητα του ρευστού κοντά και πάνω στην αεροτομή. Η πυκνότητα είναι μεταβλητό μέγεθος, επειδή το μελετούμενο ρευστό (αέρας) είναι συμπιεστό.

Θεωρώντας τα στοιχεία U , L και μ σταθερά στην εξίσωση (5.2) συμπεραίνουμε πως με την αύξηση του αριθμού Reynolds έχουμε αύξηση της πυκνότητας ρ . Όμως με την αλλαγή της πυκνότητας έχουμε και αλλαγή στην κατανομή της πίεσης πάνω στο πτερύγιο. Το φαινόμενο αυτό αποδεικνύεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και έχει ως εξής:

$$\frac{dp}{dR} = \rho \cdot \frac{u^2}{R} \quad (5.3)$$

Όπου:

- dp , η διαφορά της πίεσης πάνω στο φτερό.
- R , η ακτίνα της εκάστοτε καμπυλότητας της αεροτομής.
- ρ , η πυκνότητα του ρευστού.
- U , η ταχύτητα που αναπτύσσεται κοντά στο ρευστό.

Από την παραπάνω εξίσωση (5.3) συμπεραίνουμε πως με την αύξηση της πυκνότητας έχουμε ταυτόχρονα αύξηση της διαφοράς πίεσης. Άρα η ροή του ρευστού αποκολλάται πιο δύσκολα από το πτερύγιο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της θεώρησης αποτελεί το γεγονός ότι όταν στα πτερύγια ενός αεροπλάνου παρατηρείται αποκόλληση της ροής του ρευστού (Stall) τότε για την αποφυγή του φαινομένου πραγματοποιείται αύξηση της ταχύτητας αυτού μέσω αύξησης της ώσης από τους κινητήρες του αεροπλάνου.

Στα διαγράμματα που παρετέθησαν παραπάνω φαίνονται τρεις συντελεστές άντωσης. Ουσιαστικά πρόκειται για δυο πηγές του συντελεστή άντωσης. Η πρώτη είναι η πίεση (C_L) και η δεύτερη είναι το ιξώδες (δυνάμεις τριβής) (C_{L_V}). Ο τρίτος συντελεστής είναι ο συνολικός. ($C_L + C_{L_V}$). Η δύναμη της άντωσης εξαρτάται κυρίως από τις δυνάμεις πίεσης και για αυτό το λόγο ο συντελεστής C_{L_V} είναι πολύ χαμηλός ($\cong 0$).

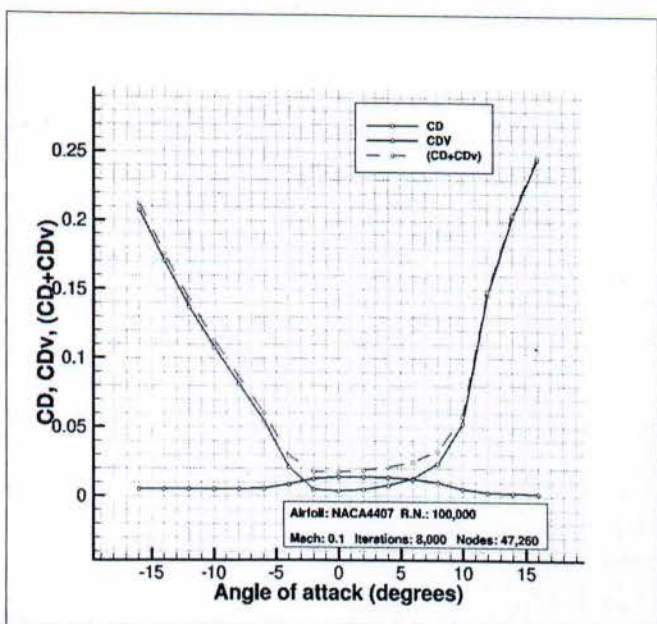
Συντελεστής Οπισθέλκουσας (C_D)

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας παρουσιάζει ποιοτικά το μέγεθος της δύναμης οπισθέλκουσας (Drag force), η οποία αποτελεί την δύναμη που αναπτύσσεται με φορά αντίθετη αυτής της κίνησης του πτερυγίου (ή ίδια με αυτή της κίνησης του ρευστού). Αποτελεί δηλαδή την αντίσταση που συναντά το σώμα κατά την κίνησή του. Όπως και με τον συντελεστή άντωσης, ο συντελεστής οπισθέλκουσας προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση:

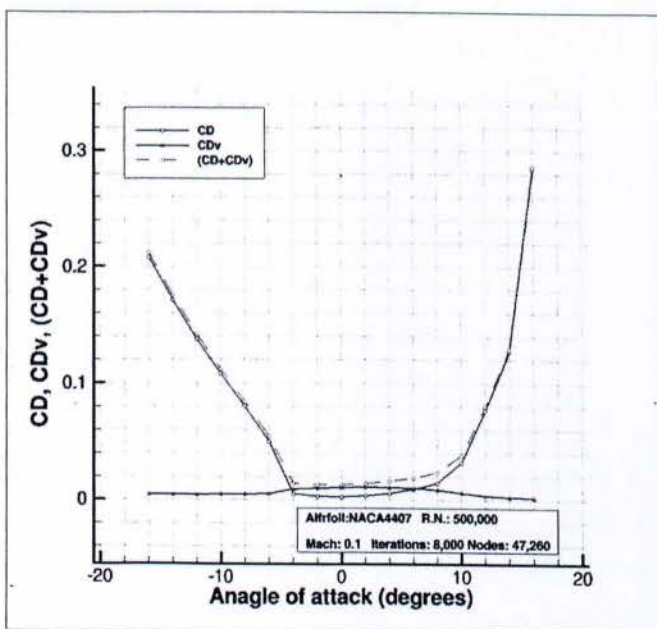
$$C_D = \frac{2 \cdot D}{\rho \cdot U_{\infty}^2 \cdot A} \quad (5.4)$$

Όπου: D , είναι η δύναμη οπισθέλκουσας.

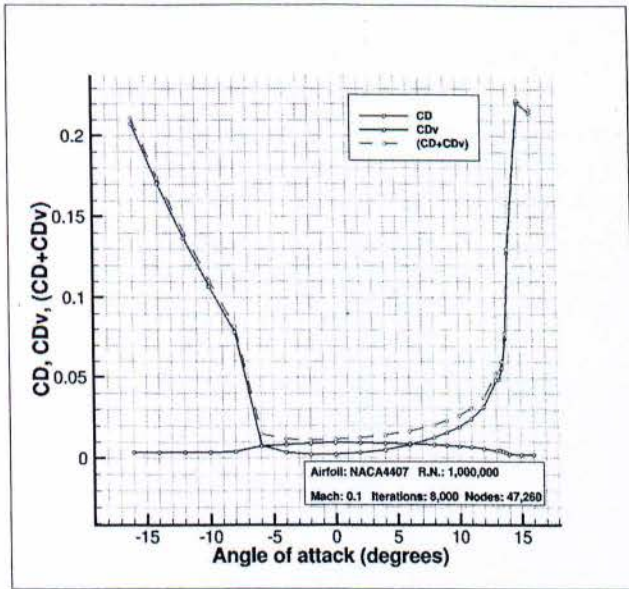
Τα παρακάτω 4 διαγράμματα (Σχ. 5.18 -5.21) δείχνουν την συμπεριφορά του συντελεστή οπισθέλκουσας (C_D) ως προς την γωνία προσβολής α για τους αριθμούς Reynolds: 10^5 , $5 \cdot 10^5$, 10^6 και $2 \cdot 10^6$.



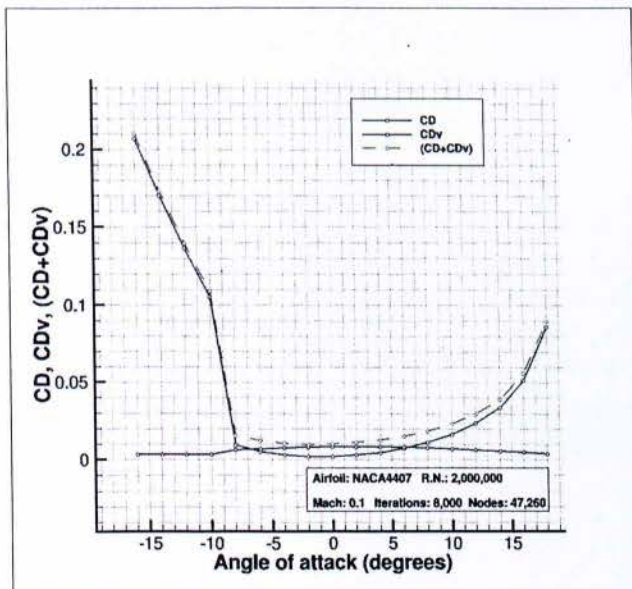
Σχήμα 5.18 Σχέση συντελεστή οπισθέλκουσας με γωνία προσβολής α ($Re = 10^5$)



Σχήμα 5.19 Σχέση συντελεστή οπισθέλκουσας με γωνία προσβολής α ($Re = 5 \cdot 10^5$)



Σχήμα 5.20 Σχέση συντελεστή οπισθέλκουσας με γωνία προσβολής α ($Re = 10^6$)



Σχήμα 5.21 Σχέση συντελεστή οπισθέλκουσας με γωνία προσβολής α ($Re = 2 \cdot 10^6$)

Όπως παρατηρείται, εδώ έχουμε πάλι ένα συντελεστή οπισθέλκουσας λόγω δυνάμεων ιξώδους, ένα συντελεστή λόγω δυνάμεων πίεσης και ένα τρίτο ο οποίος είναι ο συνολικός (το αλγεβρικό άθροισμα των δυο προηγούμενων).

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η οπισθέλκουσα δύναμη αποτελεί την αντίσταση που βρίσκει το σώμα μέσα στο ρευστό κατά την κίνησή του. Για αυτό το λόγο είναι σημαντικό το ρευστό να μην βρίσκει μεγάλη επιφάνεια στην επαφή του με το σώμα.

Όπως φαίνεται και στα διαγράμματα για γωνίες πρόσπτωσης από -5° έως και 5° (περίπου) ο συντελεστής οπισθέλκουσας που δημιουργείται λόγω δυνάμεων ιξώδους είναι μεγαλύτερος από τον συντελεστή λόγω δυνάμεων πίεσης για τον λόγο που αναφέραμε πιο πριν.

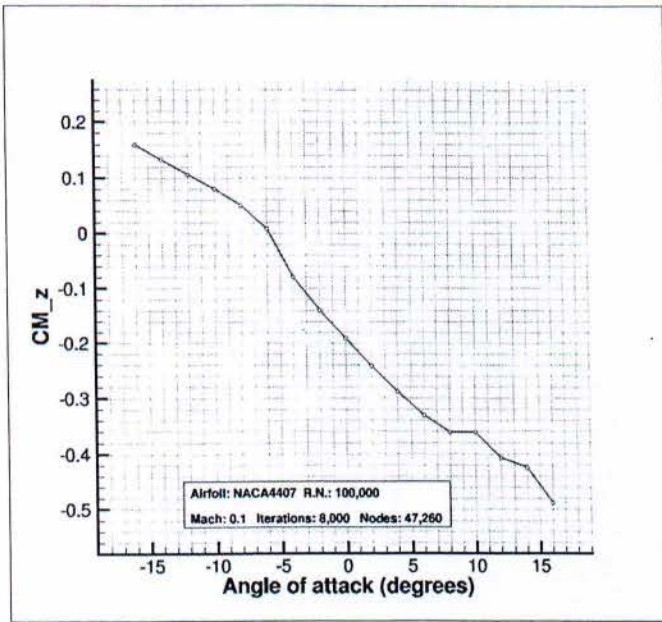
Φυσικά όσο μεγαλύτερος είναι ο συνολικός συντελεστής οπισθέλκουσας (C_D) τόσο πιο δύσκολη καθίσταται η πτήση του πτερυγίου. Βέβαια, υπάρχουν και θετικά αποτελέσματα από την χρήση του «μεγάλου» συντελεστή οπισθέλκουσας. Για παράδειγμα, όταν ένα αεροπλάνο επιτελεί προσγείωση και ως εκ τούτου χρειάζεται μείωση της ταχύτητας ενώ αυτό δεν είναι εφικτό όσο «πέφτει», τότε λαμβάνουν χώρα στις άκρες των πτερυγίων του πρόσθετα πτερύγια υπό κλίση (*flaps*) τα οποία αυξάνουν αρκετά των συνολικό συντελεστή οπισθέλκουσας των πτερυγίων.

Τέλος, από τα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται το γεγονός ότι για γωνίες πρόσπτωσης μικρότερες των -5° και μεγαλύτερες των 6° (περίπου) ο συντελεστής οπισθέλκουσας που δημιουργείται λόγω των δυνάμεων πίεσης αυξάνεται δραματικά σε αντίθεση με τον συντελεστή λόγω δυνάμεων ιξώδους. Αυτό συμβαίνει διότι πριν τις -5° και μετά τις 6° , η κίνηση του ρευστού στην επιφάνεια της αεροτομής δυσκολεύεται πολύ περισσότερο και έτσι αναπτύσσονται δυνάμεις πίεσης.

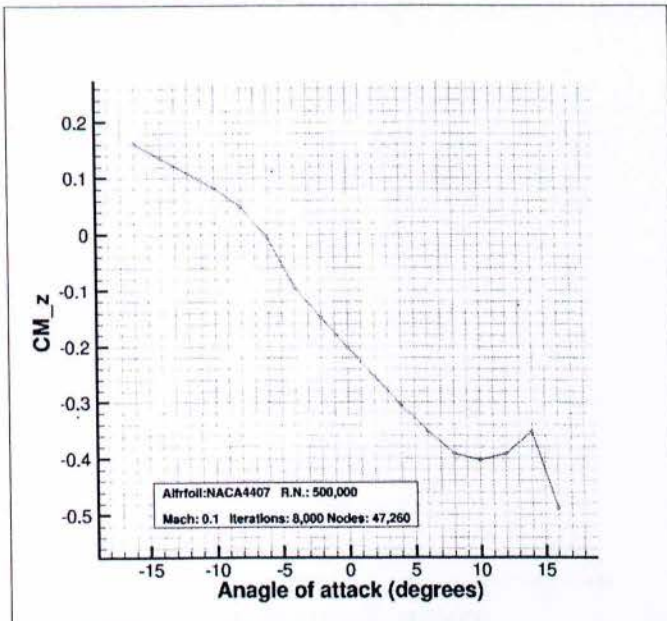
Συντελεστής Ροπής (C_M).

Η ροπή περιστροφής όπως λέγεται (*pitching moment*) είναι η ροπή που ασκείται στην αεροτομή λόγω της δράσης των δυνάμεων αεροδυναμικής (άντωση, οπισθέλκουσα, αξονική, ονομαστική, κλπ). Το κέντρο όπου δρουν οι παραπάνω δυνάμεις, και η ροπή αποτελεί το «αεροδυναμικό» κέντρο (*aerodynamic center*) και όχι το κέντρο πίεσης το οποίο θα αναφερθεί παρακάτω. Το κέντρο αυτό βρίσκεται περίπου στο 25% της χορδής κοντά στο χείλος προσβολής (*Leading edge*) και αφορά όλες τις αεροτομές.

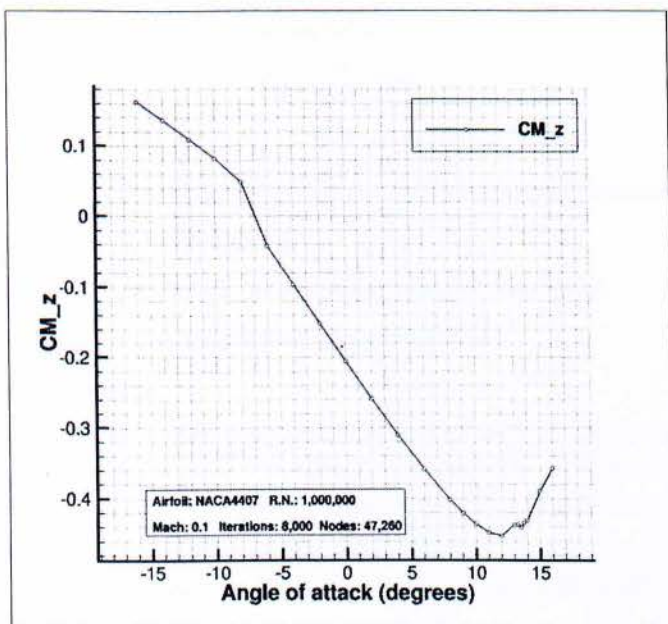
Τα παρακάτω 4 διαγράμματα (Σχ. 5.22 - 5.25) δείχνουν την συμπεριφορά του συντελεστή ροπής (C_M) ως προς την γωνία προσβολής α για τους αριθμούς Reynolds: 10^5 , $5 \cdot 10^5$, 10^6 και $2 \cdot 10^6$.



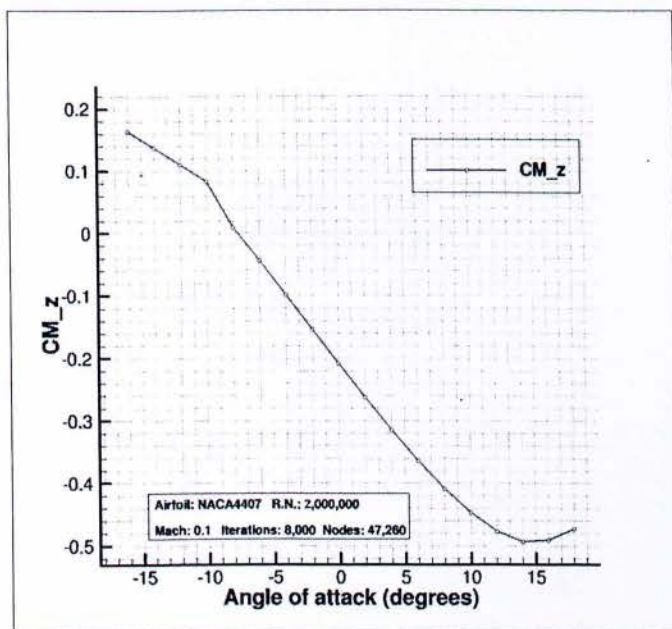
Σχήμα 5.22 Σχέση συντελεστή ροπής με γωνία προσβολής α ($Re = 10^5$)



Σχήμα 5.23 Σχέση συντελεστή ροπής με γωνία προσβολής α ($Re = 5 \cdot 10^5$)



Σχήμα 5.24 Σχέση συντελεστή ροπής με γωνία προσβολής α ($Re = 10^6$)



Σχήμα 5.25 Σχέση συντελεστή ροπής με γωνία προσβολής α ($Re = 2 \cdot 10^6$)

Ο συντελεστής ροπής (C_M) υπολογίζεται ως εξής:

$$C_M = \frac{M}{q \cdot S \cdot c} \quad (5.5)$$

Όπου:

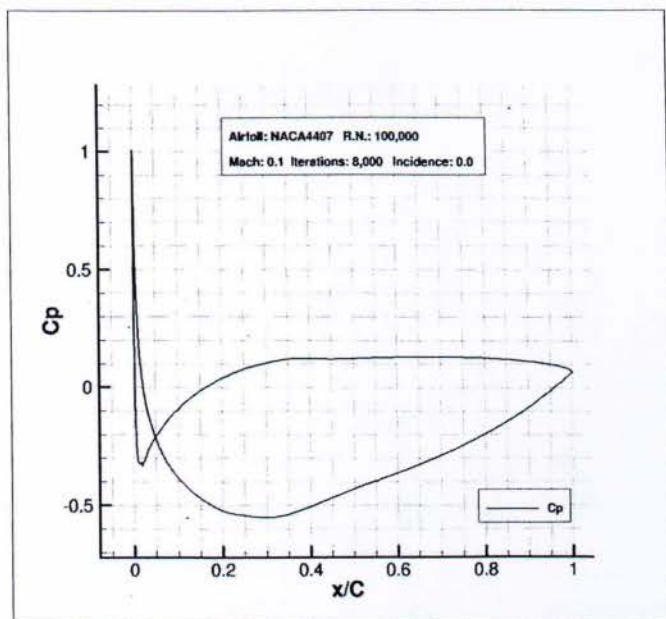
- M , η ροπή που αναπτύσσεται στο κέντρο αεροδυναμικής.
- q , η δυναμική πίεση.
- S , η επιφάνεια της αεροτομής υπό κάτοψη αυτής.
- c , το χαρακτηριστικό μήκος της χορδής.

Συντελεστής Πίεσης (C_p).

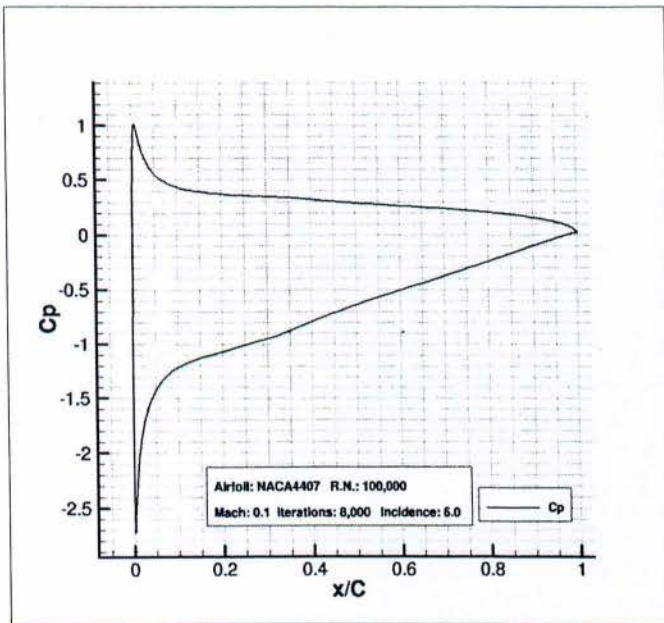
Ένας από τους πιο σημαντικούς συντελεστές είναι ο συντελεστής πίεσης, ο οποίος συσχετίζεται στα διαγράμματα με τον λόγο x/C . Ο λόγος αυτός αποτελεί το εκάστοτε μήκος x (κατά μήκος της αεροτομής) ανηγμένο στο χαρακτηριστικό μήκος της χορδής C .

Τα παρακάτω 4 διαγράμματα (Σχ. 5.26 - 5.29) δείχνουν τη συμπεριφορά του συντελεστή ροπής (C_p) ως προς τον λόγο x/C για τους αριθμούς Reynolds: 10^5 , $5 \cdot 10^5$, και τις γωνίες προσβολής 0° και 6° .

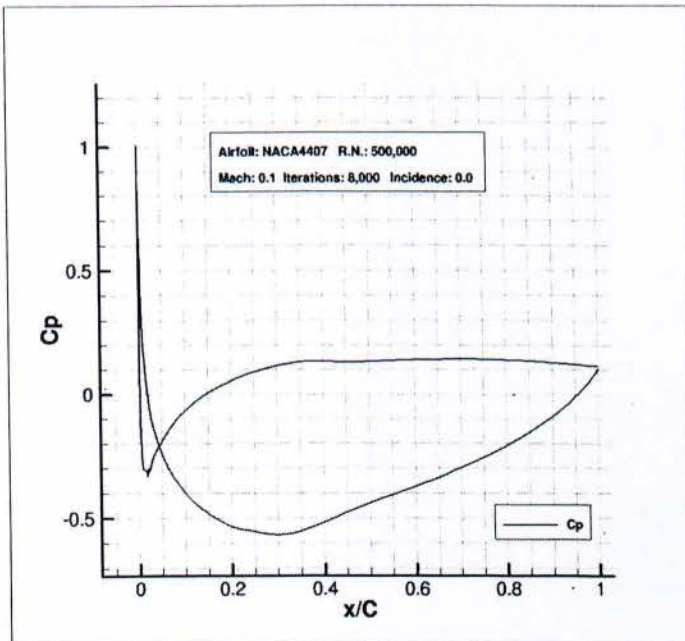
Τα επόμενα 15 διαγράμματα (Σχ. 5.30 - 5.44) παραθέτουν συνοπτικά και δείχνουν τη συμπεριφορά του συντελεστή ροπής (C_p) ως προς τον λόγο x/C για τους αριθμούς Reynolds: $2 \cdot 10^6$ και τις γωνίες προσβολής 0° και 6° , ενώ για $Re=10^6$ οι γωνίες προσβολής είναι από 0° έως 16° .



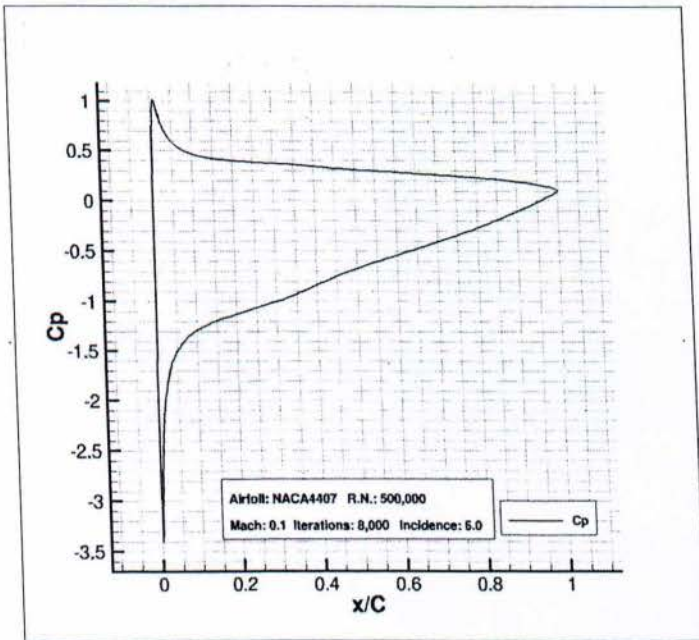
Σχήμα 5.26 Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=0^\circ$ και $Re = 10^5$ για την αεροτομή NACA4407



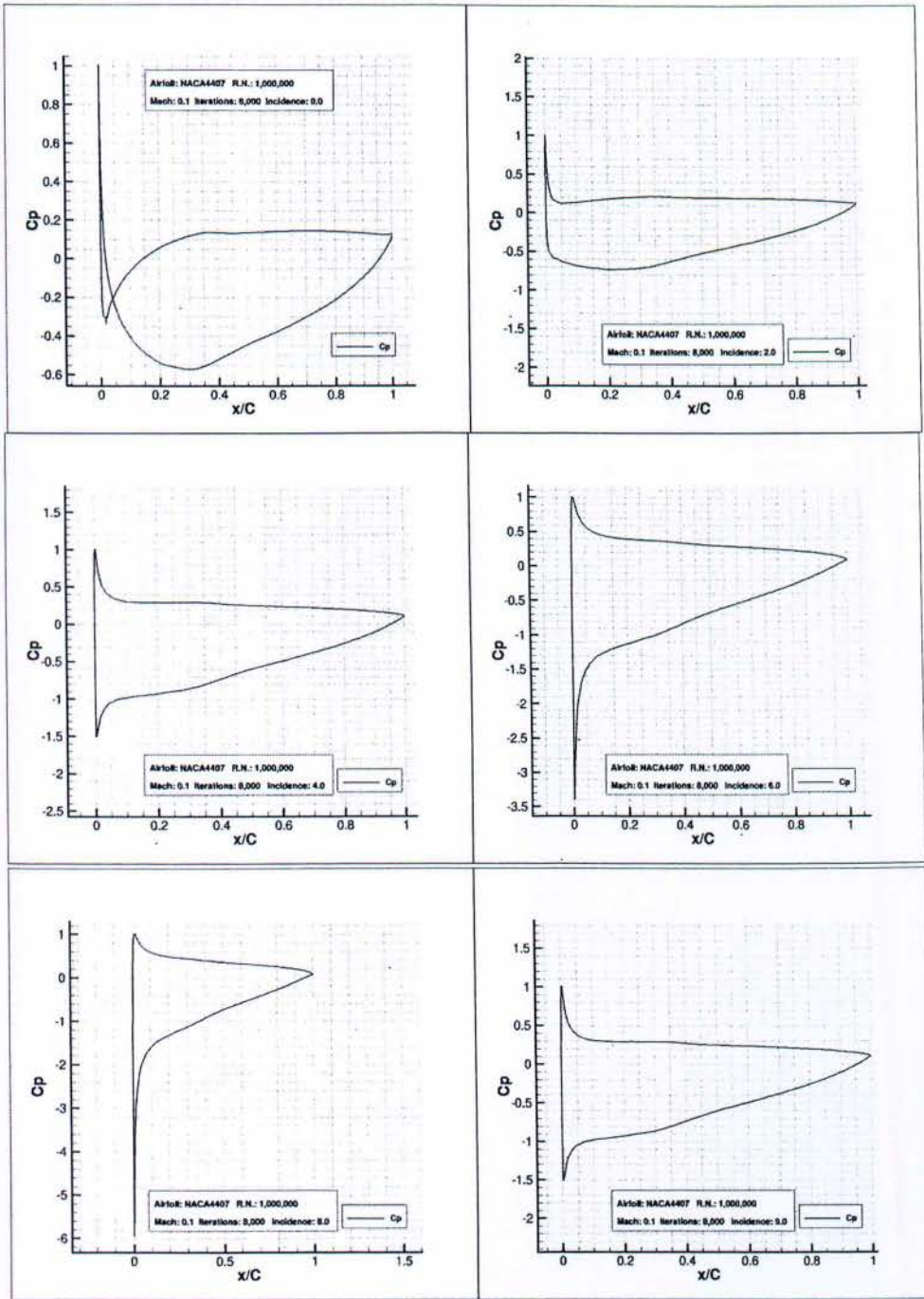
Σχήμα 5.27 Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=6^\circ$ και $Re = 10^5$ για την αεροτομή NACA4407



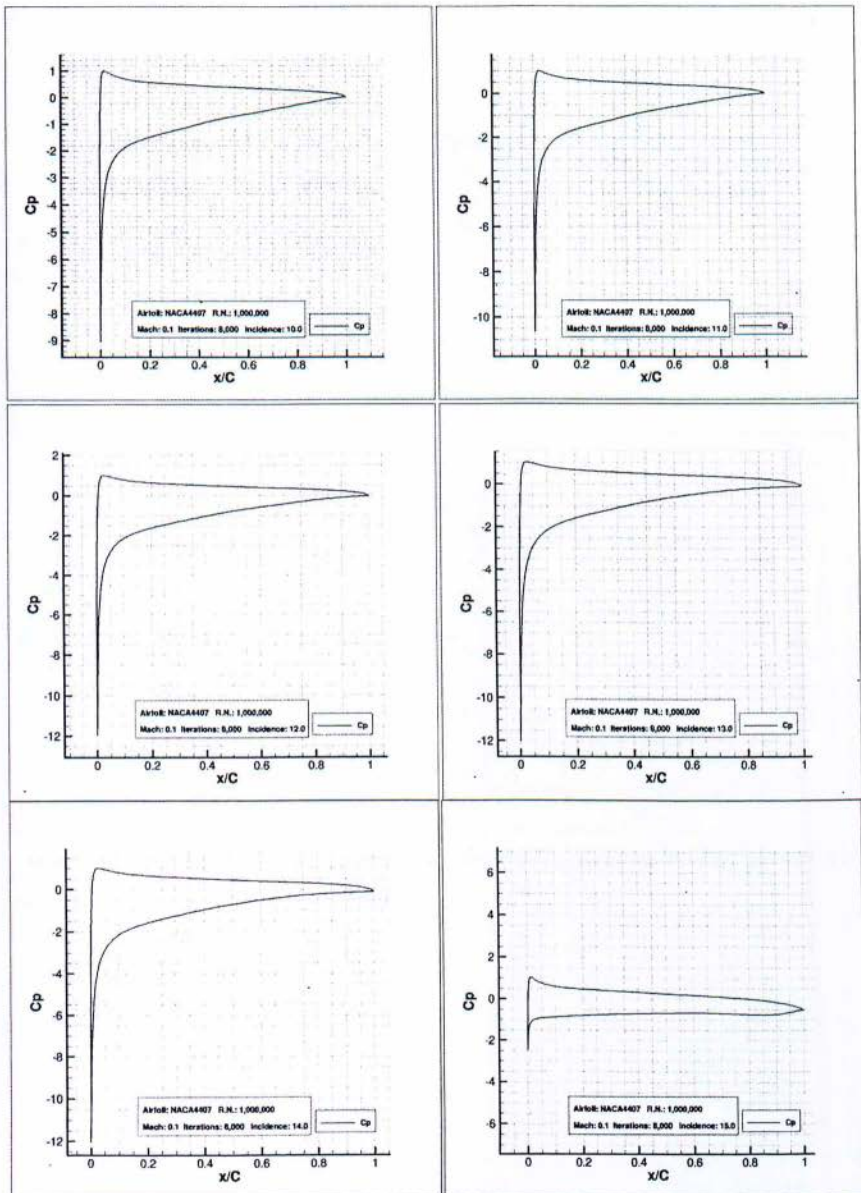
Σχήμα 5.28 Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=0^\circ$ και $Re = 5 \cdot 10^5$ για την αεροτομή NACA4407



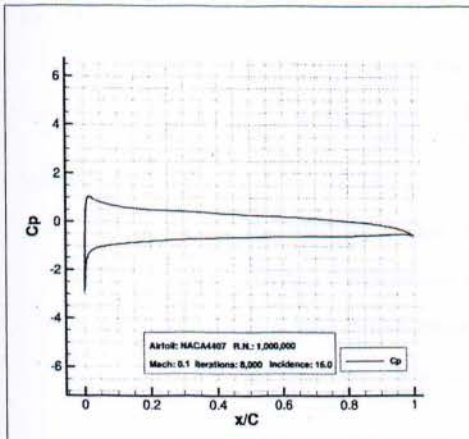
Σχήμα 5.29 Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=6^\circ$
 και $Re = 5 \cdot 10^5$ για την αεροτομή NACA4407



Σχήματα κατά σειρά 5.30 - 5.35 Σχέσεις συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha = 0^\circ - 9^\circ$ και $Re = 10^6$ για την αεροτομή NACA4407

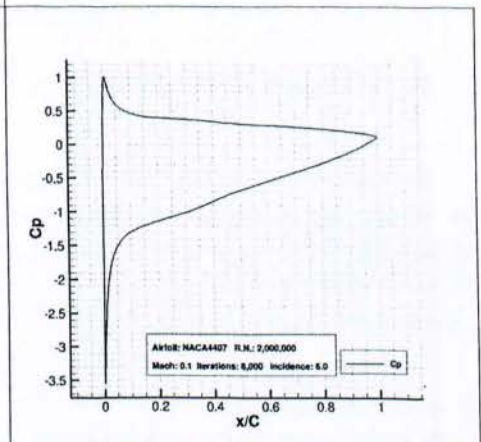
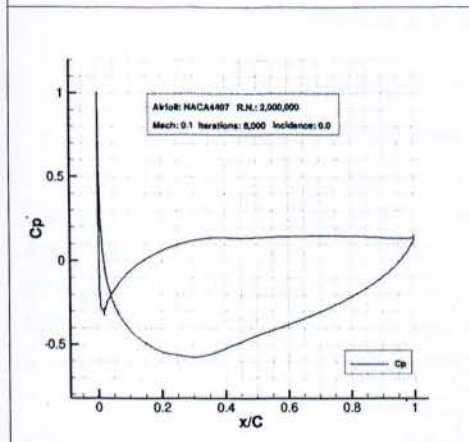


Σχήματα κατά σειρά 5.36 - 5.41 Σχέσεις συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha = 10^\circ - 15^\circ$ και $Re = 10^6$ για την αεροτομή NACA4407.



Σχήμα 5.42

Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=16^\circ$ και $Re = 10^6$ για την αεροτομή *NACA4407*.



Σχήματα κατά σειρά 5.43 - 5.44 Σχέσεις συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=0^\circ$ & 6° και $Re = 2 \cdot 10^6$ για την αεροτομή *NACA4407*.

Ο συντελεστής πίεσης μας δείχνει ποιοτικά πως κατανέμεται η πίεση του ρευστού γύρω και πάνω στην αεροτομή.

Ο υπολογισμός του συντελεστή πίεσης γίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho^2 U_\infty^2} \Leftrightarrow C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \cdot \left(\frac{P}{P_\infty} - 1 \right) \Leftrightarrow C_p = 2 \cdot \left(P - \frac{1}{\gamma M^2} \right) \quad (5.6)$$

Όπου:

- P_∞ , η πίεση του ελευθέρου ρεύματος.
- U_∞ , η ταχύτητα του ελευθέρου ρεύματος.
- ρ , η πυκνότητα του ρευστού.
- P , η πίεση που υπολογίζεται από τον κώδικα αεροδυναμικής ανάλυσης.
- γ , ο λόγος θερμικής ικανότητας.
- M , ο αριθμός Mach = $\frac{u}{c}$, u η ταχύτητα του ρευστού και c η ταχύτητα του ήχου στον αέρα.

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρείται πως υπάρχει ένα κοινό σημείο. Για $x/C=0$, ο συντελεστής πίεσης είναι ίσος με την μονάδα. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο ανακοπής (*stagnation point*), βρίσκεται στο σημείο του χείλους προσβολής (*leading edge*) όπου βρίσκεται η ροή του ρευστού για πρώτη φορά την αεροτομή, και ισούται με την μονάδα διότι μόνο σε αυτό το σημείο η δυναμική πίεση ($\frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot U_\infty^2$) ισούται με την διαφορά της στατικής πίεσης μείον την πίεση του ελευθέρου ρεύματος ($P - P_\infty$).

Τα διαγράμματα αυτά παρουσιάζουν τη μεταβολή του συντελεστή πίεσης πάνω στην αεροτομή. Συγκεκριμένα, ξεκινώντας από το σημείο [0,1] οι δυο καμπύλες που σχηματίζουν το συνολικό εκάστοτε διάγραμμα εμφανίζουν την κατανομή του συντελεστή πίεσης στην πάνω και στην κάτω καμπύλη της αεροτομής. Όσο η γωνία προσβολής αυξάνεται τόσο οι καμπύλες αυτές πλησιάζουν μεταξύ τους, αλλά ταυτόχρονα πλησιάζουν την νοητή ευθεία όπου έχουμε συντελεστή πίεσης μηδέν.

Προκειμένου να είναι ακόμα πιο κατανοητά τα διαγράμματα αυτά θα έπρεπε να έχουν σχεδιαστεί συσχετίζοντας τους όρους $-C_p$ και x/C , έτσι ώστε να αναφέρεται η πάνω καμπύλη του διαγράμματος στην αντίστοιχη πάνω καμπύλη της αεροτομής.

Για την περίπτωση όπου έχουμε αριθμό Reynolds = 1,000,000 αν συσχετίσουμε τα διαγράμματα του συντελεστή πίεσης με αυτά του συντελεστή άντωσης, μπορούμε να συμπεράνουμε πως για τις γωνίες μετά την γωνία όπου παρατηρείται STALL ο συντελεστής πίεσης τόσο στην πάνω καμπύλη της αεροτομής όσο και στην κάτω κυμαίνεται από -1° έως 1° (περίπου), δηλαδή δεν αναπτύσσετε πλέον μικρή πίεση πάνω από την αεροτομή και σε ικανό μήκος κατά μήκος αυτής προκειμένου να δημιουργούνται συνθήκες πτήσης. Το αντίθετο ακριβώς συμβαίνει στις γωνίες από 0° έως 7° (περίπου).

Λόγος άντωσης προς οπισθέλκουσα σε συνάρτηση με την γωνία προσβολής α .

Για να είναι μια αεροδυναμική προσομοίωση πλήρης για μια αεροτομή, πρέπει να επιβεβαιώνεται η συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των δυνάμεων άντωσης και οπισθέλκουσας (Lift, Drag) σύμφωνα με την αλλαγή των γωνιών προσβολής α .

Όπως είναι γνωστό οι βασικές δυνάμεις που δρουν σε ένα αεροπλάνο κατά τις συνθήκες πτήσης είναι οι παρακάτω:

1. Βάρος
2. Ώση
3. Άντωση
4. Οπισθέλκουσα

Παρά το γεγονός ότι η δύναμη του βάρους και της ώσης εξαρτώνται καθαρά από το μέγεθος, τα υλικά και το σύστημα προώθησης του αεροπλάνου, οι δυνάμεις της άντωσης και της οπισθέλκουσας είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με τα εξής στοιχεία:

- Σχήμα & βάρος του αεροπλάνου.
- Συνθήκες ρευστού
- Ταχύτητα πτήσης

Δεδομένου λοιπόν ότι οι δύο αυτές δυνάμεις είναι αμιγώς αεροδυναμικά στοιχεία, ο κατάλληλος συνδυασμός και η σχέση αυτών καταδεικνύουν την αεροδυναμική ικανότητα του αεροπλάνου.

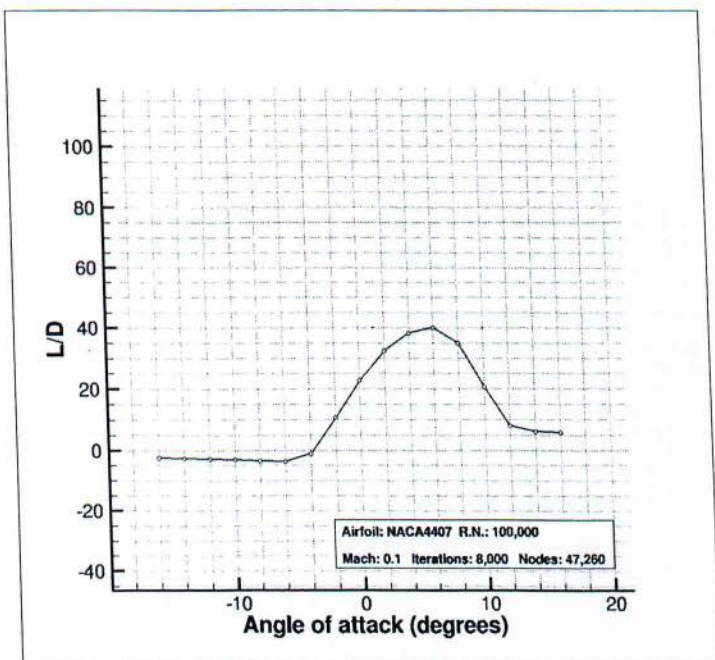
Αντίστοιχα και στην δική μας περίπτωση, ο λόγος L/D δείχνει την αεροδυναμική συμπεριφορά που έχει η αεροτομή σύμφωνα με την αλλαγή των γωνιών προσβολής του ρευστού (αέρας) πάνω σε αυτήν.

Η σχέση που μας δίνει τον λόγο L/D φαίνεται παρακάτω:

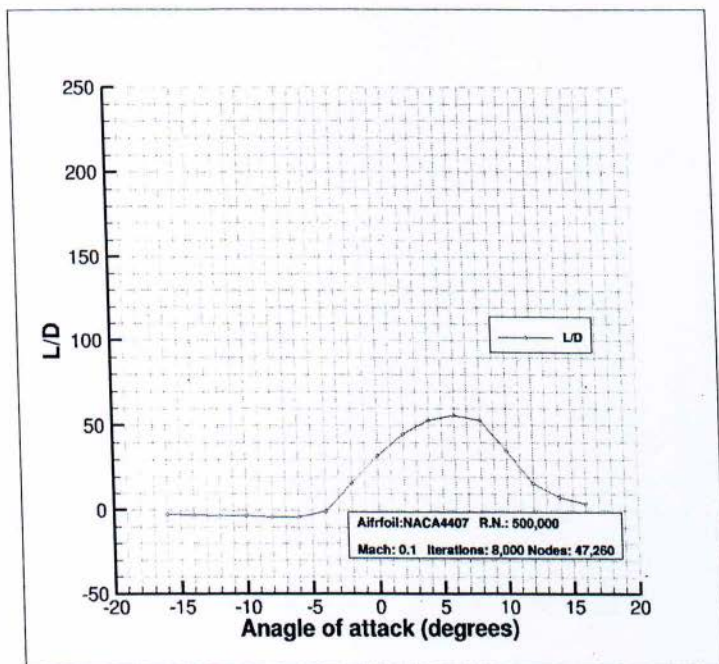
$$\frac{L}{D} = \frac{F_L}{F_D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{1}{\tan(\alpha)} \quad (5.7)$$

όπου, α η γωνία προσβολής.

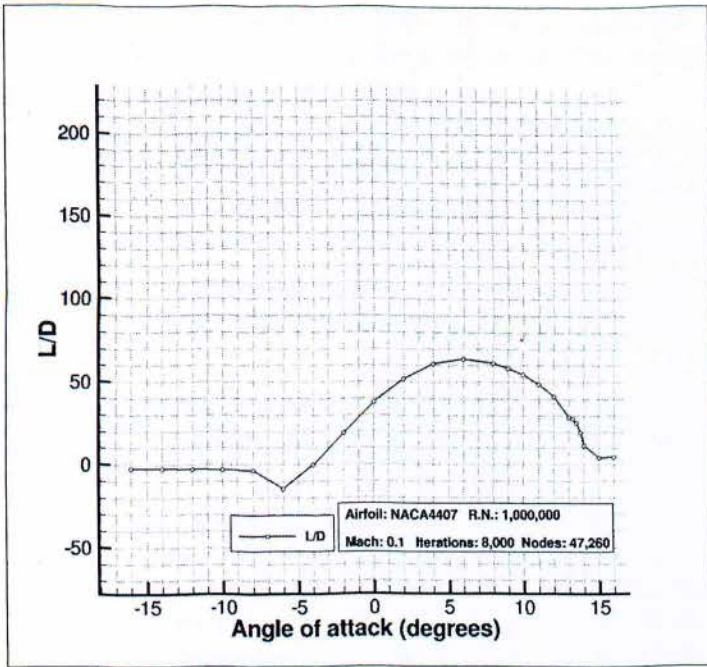
Τα παρακάτω 4 διαγράμματα (Σχ. 5.45 – 5.48) δείχνουν τη συμπεριφορά του λόγου των δυνάμεων άντωσης προς οπισθέλκουσα ως προς την γωνία προσβολής α για τους αριθμούς Reynolds: 10^5 , $5 \cdot 10^5$, 10^6 και $2 \cdot 10^6$.



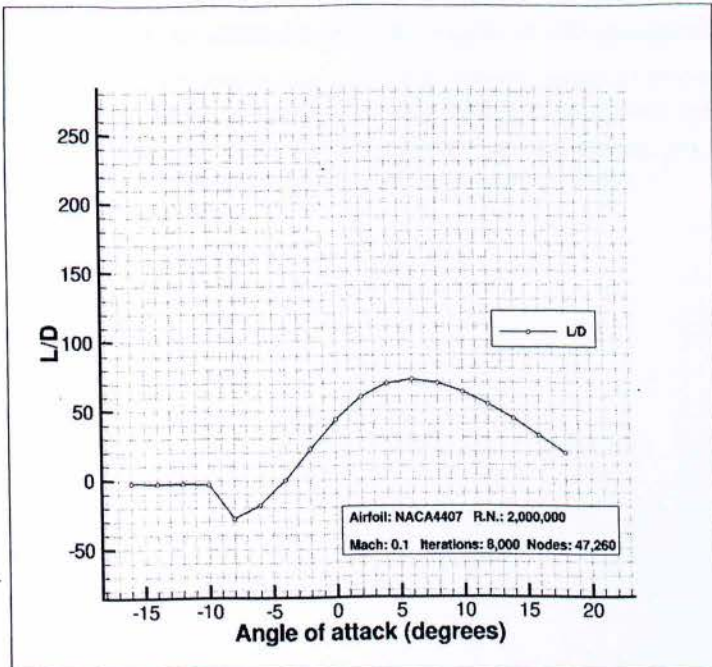
Σχήμα 5.45 Σχέση λόγου L/D με γωνία προσβολής α ($Re = 10^5$)



Σχήμα 5.46 Σχέση λόγου L/D με γωνία προσβολής α ($Re = 5 \cdot 10^5$)



Σχήμα 5.47 Σχέση λόγου L/D με γωνία προσβολής α ($Re = 10^6$)



Σχήμα 5.48 Σχέση λόγου L/D με γωνία προσβολής α ($Re = 2 \cdot 10^6$)

Γενικά, όταν ο λόγος L/D αυξάνεται, αυτό σημαίνει πως η δύναμη της άντωσης είναι λίγο ή αρκετά μεγαλύτερη από την οπισθέλκουσα δηλαδή στην πάνω επιφάνεια της αεροτομής δημιουργείται μικρότερη πίεση λόγω άντωσης.

Σε αντίθετη περίπτωση όπου εμφανίζεται η δύναμη της οπισθέλκουσας να είναι όχι απαραίτητα μικρότερη της δύναμης άντωσης αλλά κοντά σε αυτήν τότε μειώνεται η πίεση στο κάτω μέρος-καμπύλη της αεροτομής και συνεπώς παύει αυτή να βρίσκεται σε συνθήκες πτήσης, κοινώς έχει περάσει πλέον στην περιοχή της ανακοπής της ροής (Stall).

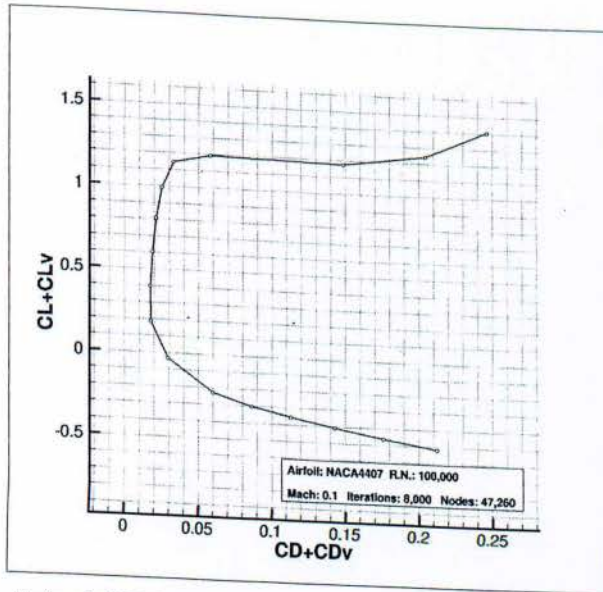
Από τα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται πως η περιοχή των γωνιών προσβολής α -όπως και στα διαγράμματα του συντελεστή άντωσης- όπου ο συντελεστής L/D αυξάνεται είναι μεταξύ -5° και 6° .

Επιπροσθέτως, παρατηρείται από τα διαγράμματα πως για γωνία προσβολής 6° (περίπου) και για όλες τις περιπτώσεις αριθμού Reynolds εμφανίζεται ο μεγαλύτερος λόγος L/D .

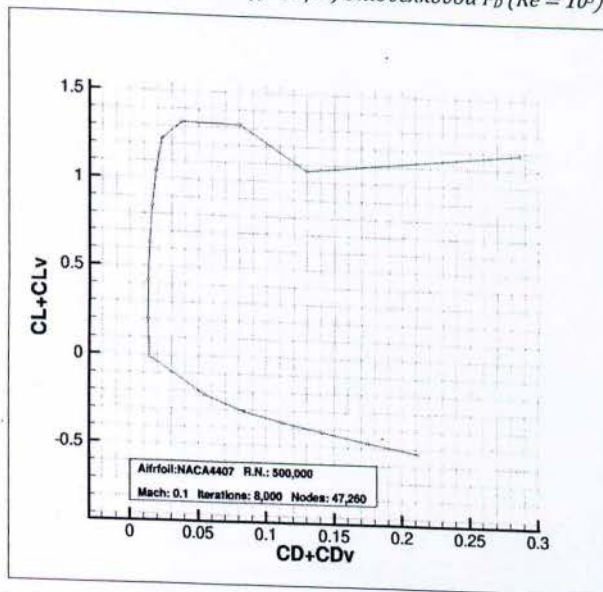
Τέλος, από την συσχέτιση των διαγραμμάτων του λόγου L/D με αυτά του συντελεστή άντωσης ως προς τις γωνίες προσβολής, συμπεραίνουμε ότι παρόλο που ο λόγος L/D σχετίζεται μόνο με την γωνία α (σύμφωνα με την προηγούμενη εξίσωση) όσο αυξάνεται ο αριθμός Reynolds τόσο εμφανίζεται μεγαλύτερος λόγος L/D όταν η αεροτομή έρχεται σε κατάσταση stall. Βέβαια αυτή η θεώρηση δεν ισχύει για $Re=2*10^6$.

Ο συντελεστής άντωσης σε σχέση με τον συντελεστή οπισθέλκουσας ($C_L - C_D$)

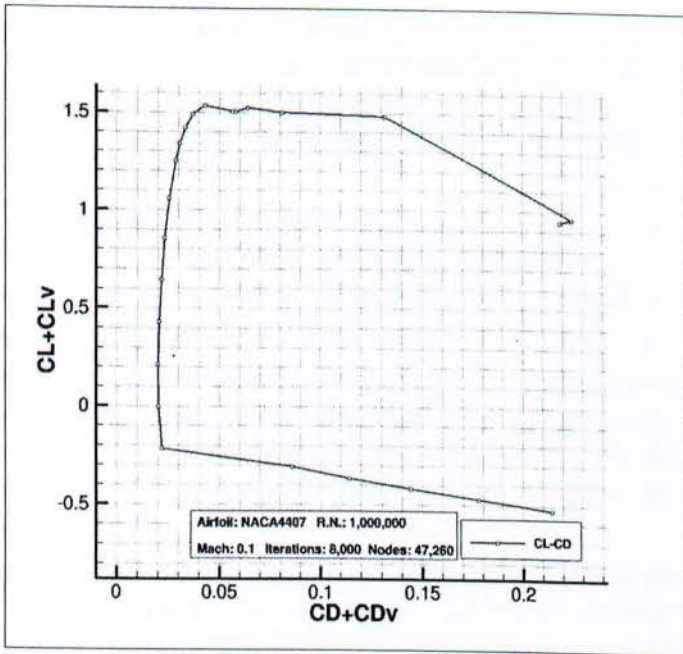
Η παρακάτω ομάδα διαγραμμάτων έχει παραπλήσια έννοια με την προηγούμενη. Πιο συγκεκριμένα τα παρακάτω 4 διαγράμματα (Σχ. 5.49- 5.52) δείχνουν τη συμπεριφορά του συντελεστή άντωσης ως προς τον συντελεστή οπισθέλκουσας για κάθε γωνία προσβολής α και για τους αριθμούς Reynolds: 10^5 , $5*10^5$, 10^6 και $2*10^6$.



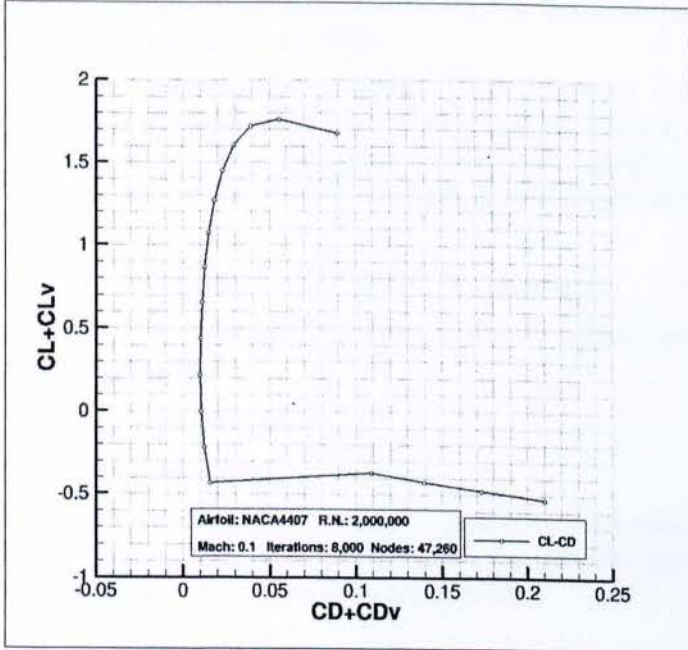
Σχήμα 5.49 Σχέση άντωσης F_L προς Οπισθέλκουσα F_D ($Re = 10^5$)



Σχήμα 5.50 Σχέση άντωσης F_L προς Οπισθέλκουσα F_D ($Re = 5 \cdot 10^5$)



Σχήμα 5.51 Σχέση άντωσης F_L προς Οπισθέλκουσα F_D ($Re = 10^6$)



Σχήμα 5.52 Σχέση άντωσης F_L προς Οπισθέλκουσα F_D ($Re = 2 \cdot 10^6$)

Η διαφορά με την προηγούμενη ομάδα διαγραμμάτων είναι πως εδώ φαίνεται η σχέση που έχει ο συντελεστής άντωσης μπροστά στο συντελεστή οπισθέλκουσας. Μέσω αυτών των διαγραμμάτων μπορούμε να γνωρίζουμε για ποια γωνία και αριθμό Reynolds εμφανίζεται η μεγαλύτερη τιμή της δύναμης άντωσης για τη χαμηλότερη τιμή της οπισθέλκουσας και το αντίστροφο.

Μια από τις σημαντικότερες χρήσεις στις οποίες λαμβάνουν χώρα τα διαγράμματα αυτά είναι όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τη μικρότερη δυνατή δύναμη ώσης για την καλύτερη δυνατή πτητική ικανότητα ενός αεροσκάφους, δηλαδή όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιο «οικονομική» ως προς την κατανάλωση πτήση.

Συνδυαζόμενων, των διαγραμμάτων αυτών με τα διαγράμματα του συντελεστή άντωσης ως προς την γωνία προσβολής σε αυτήν την περίπτωση, ο μεγαλύτερος συντελεστής άντωσης (C_L) σε σχέση με τον μικρότερο συντελεστή οπισθέλκουσας (C_D) δημιουργείται για $Re=2 \cdot 10^6$ και για γωνία προσβολής 14° (περίπου) και η τιμή του είναι $\sim 1,75$.

Σημείωση! Παρόλο που ο πραγματικά μεγαλύτερος συντελεστής άντωσης C_L εμφανίζεται στις 16° , θεωρώ ότι πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι στις 16° η αεροτομή αυτή και για αυτόν τον αριθμό Reynolds εισέρχεται σε περιοχή Stall (δηλαδή τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα εκεί είναι ασταθή). Για αυτό το λόγο, κρίνω σωστότερο να θεωρηθεί μεγαλύτερος συντελεστής C_L αυτός για την αμέσως προηγούμενη γωνία α .

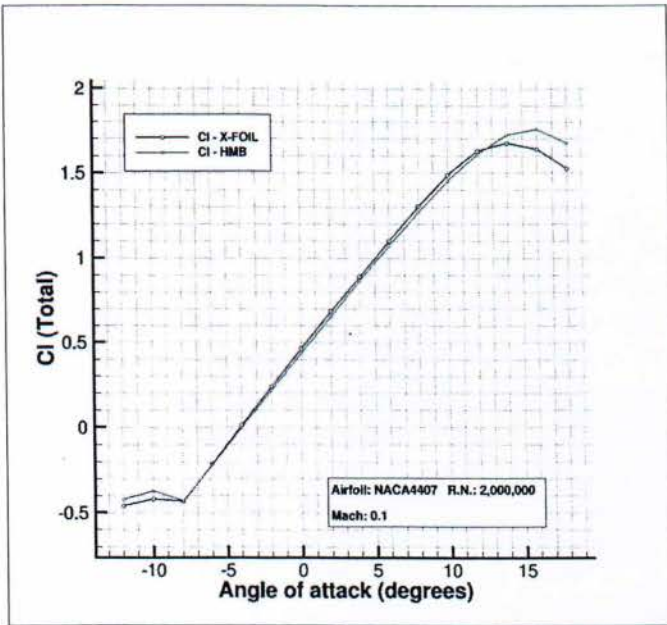
5.4.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων του επιλύτη HMB με αποτελέσματα του επιλύτη του προγράμματος X-FOIL.

Το πρόγραμμα αεροδυναμικής ανάλυσης X-FOIL αποτελεί ένα διαδραστικό πρόγραμμα για το σχεδιασμό και την αεροδυναμική ανάλυση υποχηρικών απομονωμένων αεροτομών. Το πρόγραμμα αυτό είναι γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran από τον καθηγητή ρευστομηχανικής Mark Drela τη δεκαετία του 1980.

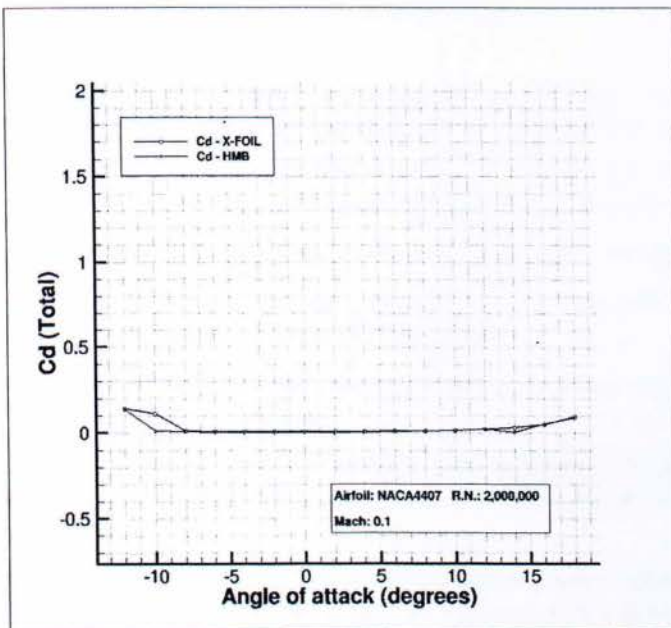
Το πρόγραμμα X-FOIL δέχεται ως μεταβλητές τα εξής στοιχεία:

- Τις συντεταγμένες που προσδιορίζουν το σχήμα μιας διδιάστατης αεροτομής.
- Τον αριθμό Reynolds.
- Τον αριθμό Mach.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω στοιχεία μπορεί να υπολογίσει την κατανομή της πίεσης γύρω από την αεροτομή και ως εκ τούτου τους συντελεστές των δυνάμεων άντωσης και οπισθέλκουσας αλλά και τον συντελεστή ροπής.



Σχήμα 5.53 Σχέση C_l προς την γωνία προσβολής ($Re = 2 \cdot 10^6$ και $Mach = 0.1$) για επιλύτες X-FOIL και HMB



Σχήμα 5.54 Σχέση C_d προς την γωνία προσβολής ($Re = 2 \cdot 10^6$ και $Mach = 0.1$) για επιλύτες X-FOIL και HMB

Τα δυο συγκριτικά διαγράμματα (Σχ. 5.53 & 5.54) παρουσιάζουν τη συσχέτιση του συντελεστή C_l και C_d με την γωνία προσβολής α λαμβάνοντας υπόψη ότι $Re = 2,000,000$ και $Mach = 0.1$.

Παρατηρούμε από τα παραπάνω διαγράμματα πως υπάρχουν αποκλίσεις και ειδικότερα στο διάγραμμα 5.53.

Συγκεκριμένα, παρατηρούμε πως παρά την σχετική ομοιότητα των καμπυλών στο διάγραμμα 5.53 η περιοχή στην οποία η αεροτομή «στολάρει» (εκ του stall) είναι διαφορετική καθώς επίσης διαφορετική είναι και η γωνία όπου παρατηρείται stall. Ενώ σύμφωνα με τον επιλύτη HMB η αεροτομή στολάρει στις 16° , με τον επιλύτη του προγράμματος X-FOIL στολάρει δυο μοίρες πιο πριν ήτοι στις 14° .

Εδώ πρέπει να πούμε πως το πρόγραμμα X-FOIL δημιουργεί ένα πλέγμα διαφορετικό από το πλέγμα που δημιουργήσαμε με το πρόγραμμα ICEMCFD, καθώς επίσης είναι ιδανικό για περιπτώσεις όπου δεν έχουμε περίεργα και ασταθή φαινόμενα όπως αυτά που λαμβάνουν χώρα στην περιοχή όπου μια αεροτομή στολάρει. Αυτό αποδεικνύεται δεδομένου ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση και μετά τις 14° - 16° δύσκολα συγκλίνουν τα αποτελέσματα σε κάποια τιμή.

Δεδομένων των παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε πως είναι φυσιολογικό και αναμενόμενο να έχουμε αποκλίσεις στα αποτελέσματα μεταξύ του κώδικα του HMB και του X-FOIL κυρίως στις περιοχές, όπου τα φαινόμενα είναι ασταθή.

Παρόμοιες αποκλίσεις συναντώνται και στο διάγραμμα 5.54 αλλά και πάλι οι αποκλίσεις αυτές σημειώνονται σε περιοχές όπου η ροή του αέρα γύρω από την αεροτομή έχει αποκολληθεί.

5.4.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων της αεροτομής NACA4407 με τα αποτελέσματα της αεροτομής NACA4412 (με χρήση του επιλύτη HMB).

Η αεροτομή του τύπου NACA4412 ανήκει στην οικογένεια αεροτομών τεσσάρων ψηφίων της NACA. Τα ψηφία 4412 έχουν την εξής κατά σειρά σημασία:

- **4:** Η μέγιστη καμπυλότητα είναι ίση με το 4% του μήκος της χορδής.
- **4:** Η μέγιστη καμπυλότητα βρίσκεται σε απόσταση από το χείλος προσβολής (Leading edge) ίση με το 40% της χορδής.
- **12:** Η μέγιστη τιμή του πάχους που έχει η αεροτομή εκφρασμένη σε ποσοστό επί της χορδής (12% C)

Η διαφορά λοιπόν από την προηγούμενη αεροτομή (NACA4407) έγκειται στο γεγονός ότι η αεροτομή NACA4412 διαθέτει μέγιστο πάχος 5% επί την χορδή C παραπάνω από την NACA4407.

Για την εν λόγω αεροτομή έχει πραγματοποιηθεί αντίστοιχη αεροδυναμική μελέτη, ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως έγινε με την αεροτομή NACA4407. Παρόλα αυτά η σύγκριση μεταξύ των δυο αυτών αεροτομών θα γίνει μόνο με την παρουσία των εξής διαγραμμάτων:

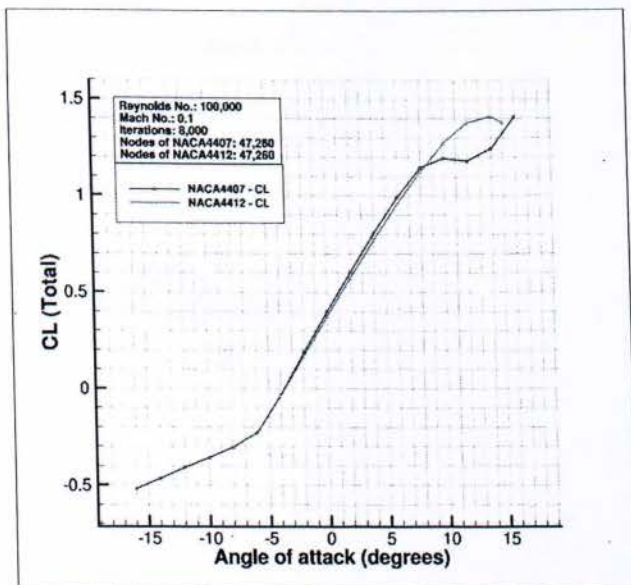
1. Διάγραμμα συντελεστή άντωσης(**Cl**) σε σχέση με την γωνία προσβολής α .
2. Διάγραμμα συντελεστή οπισθέλκουσας(**Cd**) σε σχέση με την γωνία προσβολής α .
3. Διάγραμμα συντελεστή πίεσης(**Cp**) σε σχέση με τον λόγο x/C και για γωνίες προσβολής $\alpha=0^\circ, 6^\circ, 12^\circ$ καθώς επίσης για αριθμό Reynolds ίσο με 1,000,000.

Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή άντωσης (Cl)

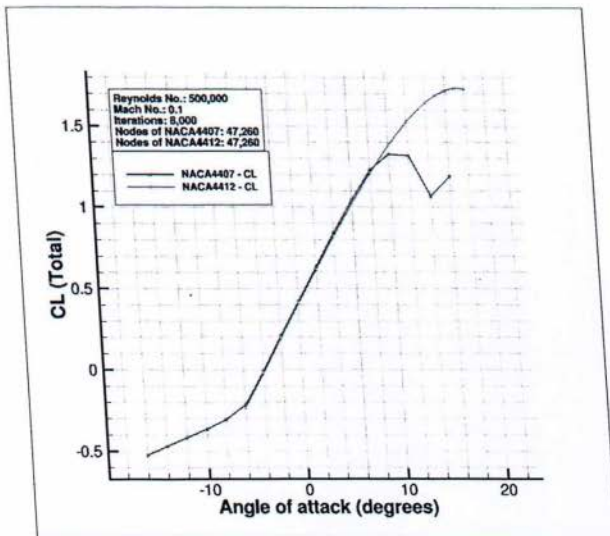
Τα παρακάτω τέσσερα διαγράμματα (Σχ. 5.55 - 5.58) αφορούν την σχέση του συντελεστή άντωσης (**Cl**) με την γωνία προσβολής α .

Σε αυτά τα διαγράμματα παρατηρούμε πως η αεροτομή NACA4412 στολάρει στις γωνίες $14^\circ, 17^\circ, 17^\circ, 19^\circ$ αντίστοιχα κατά σειρά με τους αριθμούς Reynolds εν αντιθέσει με την αεροτομή NACA4407 στην οποία παρατηρείται αποκόλληση της ροής γύρω της στις γωνίες $10^\circ, 10^\circ, 10^\circ, 16^\circ$ αντίστοιχα.

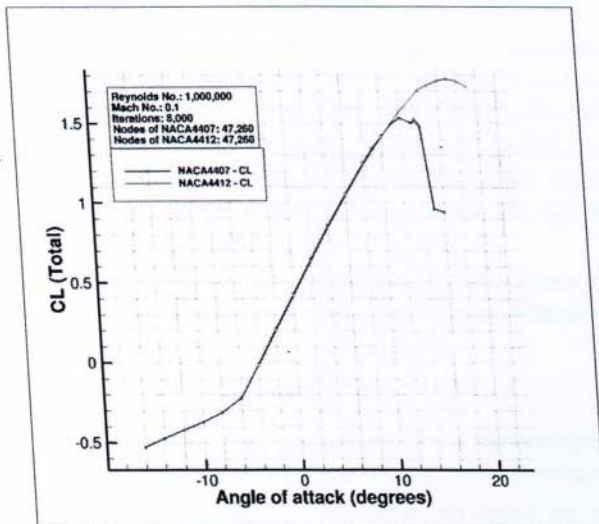
Επίσης παρατηρούμε πως η μόνη ουσιαστική διαφορά έγκειται σε αυτή την περιοχή διότι για τις υπόλοιπες γωνίες προσβολής α τα διαγράμματα ταυριάζουν.



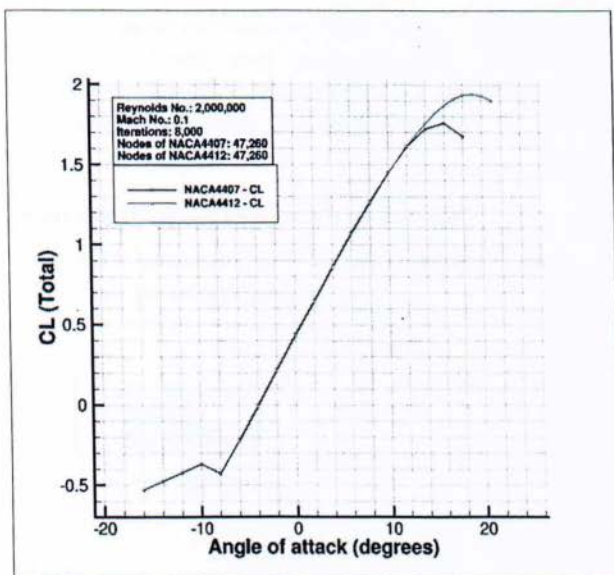
Σχήμα 5.55 Σχέση του συντελεστή άντωσης (**Cl**) με την γωνία προσβολής α , για $Re = 10^5$, στις αεροτομές NACA4412 και NACA4407



Σχήμα 5.56 Σχέση του συντελεστή άντωσης (C_L) με την γωνία προσβολής α , για $Re = 5 \cdot 10^5$, στις αεροτομές NACA4412 και NACA4407



Σχήμα 5.57 Σχέση του συντελεστή άντωσης (C_L) με την γωνία προσβολής α , για $Re = 10^6$, στις αεροτομές NACA4412 και NACA4407



Σχήμα 5.58 Σχέση του συντελεστή άντωσης (C_L) με την γωνία προσβολής α , για $Re = 2 \cdot 10^6$, στις αεροτομές NACA4412 και NACA4407

Σημαντική επίσης είναι η διαφορά στην μέγιστη τιμή του συντελεστή άντωσης (C_L) που έχει η κάθε μια αεροτομή. Συγκεκριμένα για την αεροτομή NACA4407 ο μέγιστος συντελεστής άντωσης είναι ~ 1.75 ενώ για την αεροτομή NACA4412 είναι ~ 1.935 .

Το γεγονός ότι αναπτύσσεται μεγαλύτερος συντελεστής άντωσης στην αεροτομή NACA44012 από ότι στην NACA4407 σημαίνει πως η διαφορά πίεσης που αναπτύσσεται πάνω και κάτω από την αεροτομή NACA4412 είναι μεγαλύτερη από την διαφορά πίεσης που αναπτύσσεται στην αεροτομή NACA4407.

Από την παρακάτω εξίσωση την οποία είδαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο βλέπουμε την σχέση που συνδέει την ακτίνα της εκάστοτε καμπυλότητας της αεροτομής με την πίεση.

$$\frac{dp}{dR} = \rho \cdot \frac{u^2}{R} \quad (5.8)$$

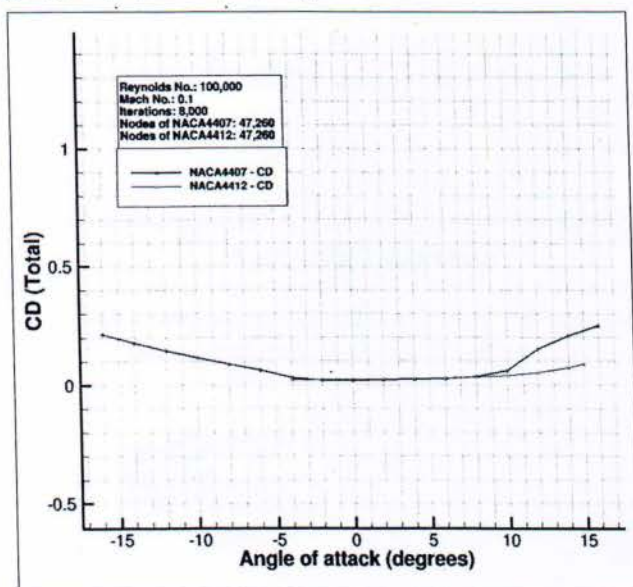
Έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε πως όσο μικραίνει η καμπυλότητα της αεροτομής (δηλαδή μικραίνει το R) τόσο μεγαλώνει η πίεση που αναπτύσσεται πάνω σε αυτήν.

Άρα, δεδομένου ότι όσο μεγαλώνει το πάχος (thickness) της αεροτομής τόσο μικραίνει η ακτίνα της κάτω καμπυλότητας και αντίστοιχα τόσο μεγαλώνει η ακτίνα της πάνω καμπυλότητας της αεροτομής, μπορούμε να καταλήξουμε στην θεώρηση πως η διαφορά πίεσης μεγαλώνει. Τελικά, όσο μεγαλώνει το πάχος σε μία αεροτομή, τόσο η διαφορά πίεσης πάνω και κάτω από αυτήν μεγαλώνει και συνεπώς αυξάνεται η μέγιστη τιμή του συντελεστή άντωσης.

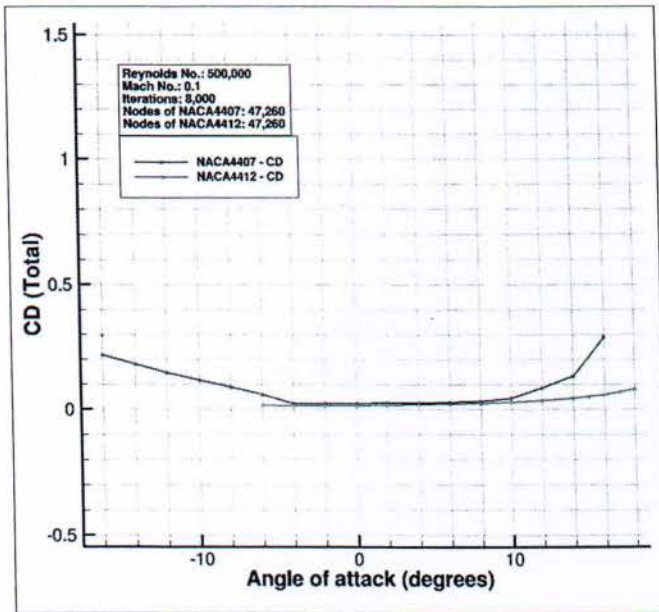
Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι η αεροτομή NACA4412 στολάρει σε μεγαλύτερη γωνία προσβολής από ότι η NACA4407 είναι απόλυτα λογικό, καθώς η τιμή του συντελεστή άντωσης της NACA4412 είναι μεγαλύτερη από αυτήν της NACA4407 είναι αναμενόμενο να βρίσκεται για μεγαλύτερη γωνία προσβολής α .

Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή οπισθέλκουσας (Cd)

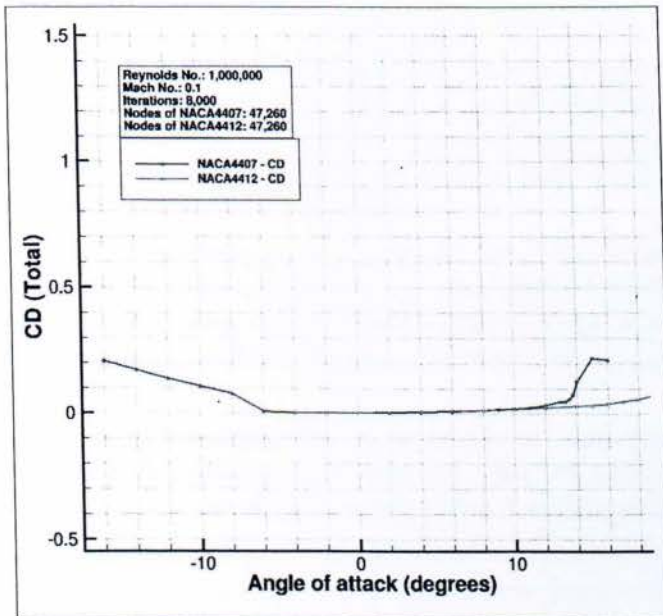
Τα παρακάτω τέσσερα διαγράμματα (Σχ. 5.59 - 5.62) αφορούν τη σχέση του συντελεστή οπισθέλκουσας (Cd) με την γωνία προσβολής α .



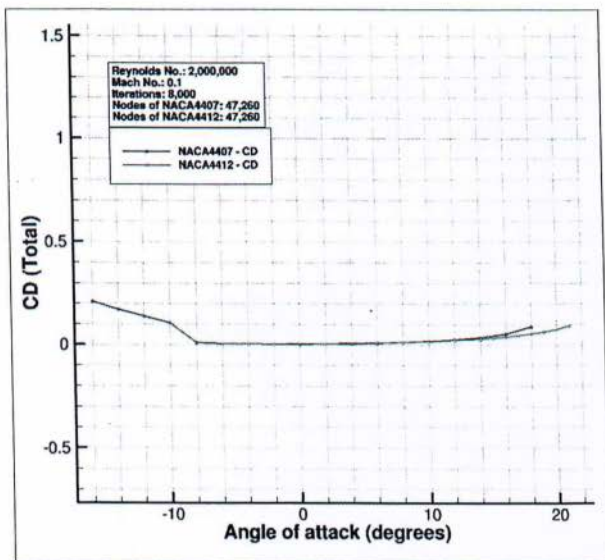
Σχήμα 5.59 Σχέση του συντελεστή οπισθέλκουσας (Cd) με την γωνία προσβολής α , για $Re = 10^5$, στις αεροτομές NACA4412 και NACA4407



Σχήμα 5.60 Σχέση του συντελεστή οπισθέλκουσας (C_d) με την γωνία προσβολής α , για $Re = 5 \cdot 10^5$, στις αεροτομές NACA4412 και NACA4407



Σχήμα 5.61 Σχέση του συντελεστή οπισθέλκουσας (C_d) με την γωνία προσβολής α , για $Re = 10^6$, στις αεροτομές NACA4412 και NACA4407



Σχήμα 5.62 Σχέση του συντελεστή οπισθέλκουσας (C_d) με την γωνία προσβολής α , για $Re = 2 \cdot 10^6$, στις αεροτομές NACA4412 και NACA4407

Σε αυτά τα διαγράμματα του συντελεστή οπισθέλκουσας παρατηρούμε πως ο συντελεστής αυτός για την αεροτομή NACA4407 είναι σχετικά μεγαλύτερος από αυτόν στην NACA4412, ενώ θεωρητικά μια αεροτομή με μεγαλύτερο πάχος (NACA4412), εμφανίζει μεγαλύτερη επιφάνεια πρόσκρουσης του ρευστού πάνω της και άρα η δύναμη της οπισθέλκουσας θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερη.

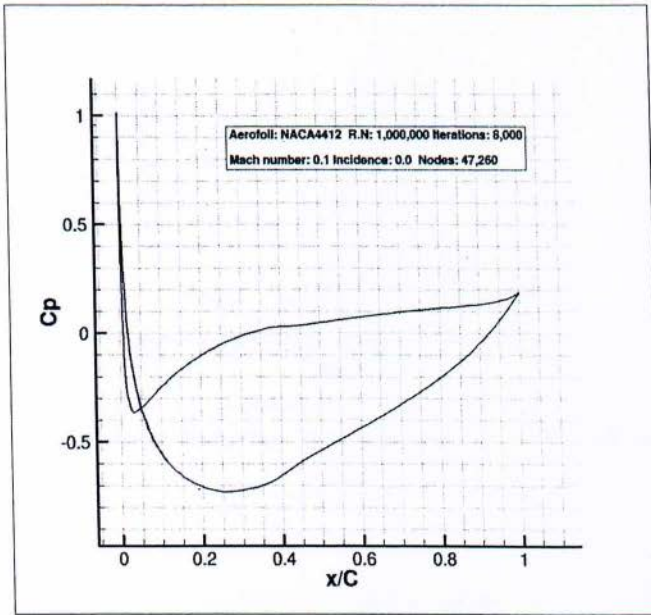
Στην περίπτωση μας το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται διότι υπεισέρχονται σφάλματα ακριβείας στον κώδικα του επιλύτη. Δεδομένου ότι ο συντελεστής οπισθέλκουσας τόσο λόγω πίεσης όσο και λόγω ιξώδους είναι μια αρκετά μικρή ποσότητα, είναι αναμενόμενο τα μικρά σφάλματα ακριβείας που έχει ο κώδικας του επιλύτη HMB να επηρεάζουν εύκολα την τιμή του συντελεστή.

Επίσης, όπως έχουμε ξανατονίσει στο εύρος γωνιών στο οποίο παρατηρούμε stall τα φαινόμενα απατούν καθότι είναι ασταθή. Συνεπώς, τα σφάλματα ακριβείας του κώδικα θα επηρεάζουν ακόμη περισσότερο τις τιμές του συντελεστή οπισθέλκουσας (C_d).

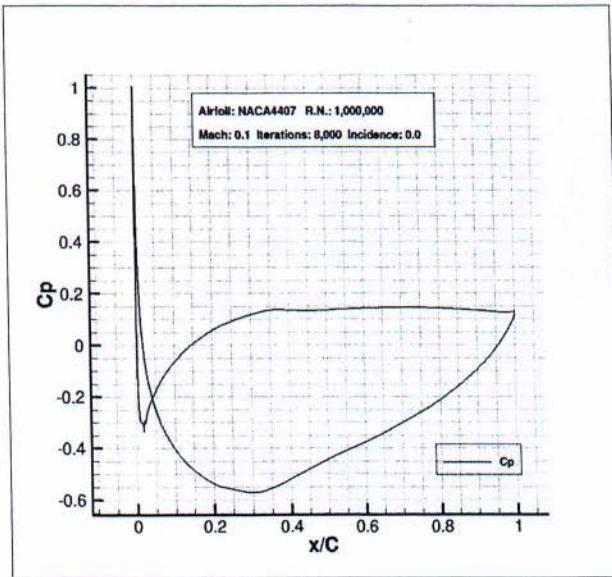
Τέλος, πρέπει να πούμε εδώ πως σε όλους τους παραπάνω λόγους προστίθεται και το γεγονός ότι συγκρίνουμε δυο αεροτομές οι οποίες έχουν μεταξύ τους πολύ μικρές γεωμετρικές διαφορές και συνεπώς αν δεν είχαμε σφάλματα ακριβείας του κώδικα πάλι τα αποτελέσματα για τον συγκεκριμένο συντελεστή θα ήταν παραπλήσια.

Διαγράμματα συντελεστή πίεσης (C_p)

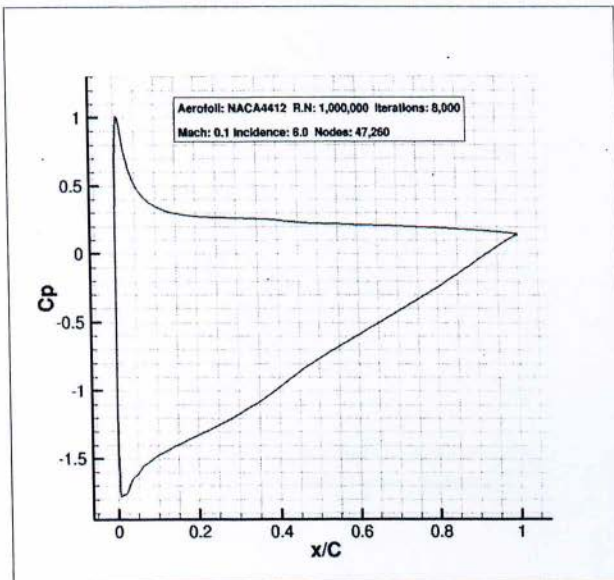
Τα παρακάτω έξι διάγραμμα (Σχ. 5.63 - 5.68) παρουσιάζουν τη σχέση του συντελεστή πίεσης(C_p) με τον λόγο x/C για τις γωνίες προσβολής $\alpha=0^\circ, 6^\circ, 12^\circ$ καθώς επίσης για αριθμό Reynolds ίσο με $1,000,000$ ξεχωριστά για τις αεροτομές NACA4412 και NACA4407.



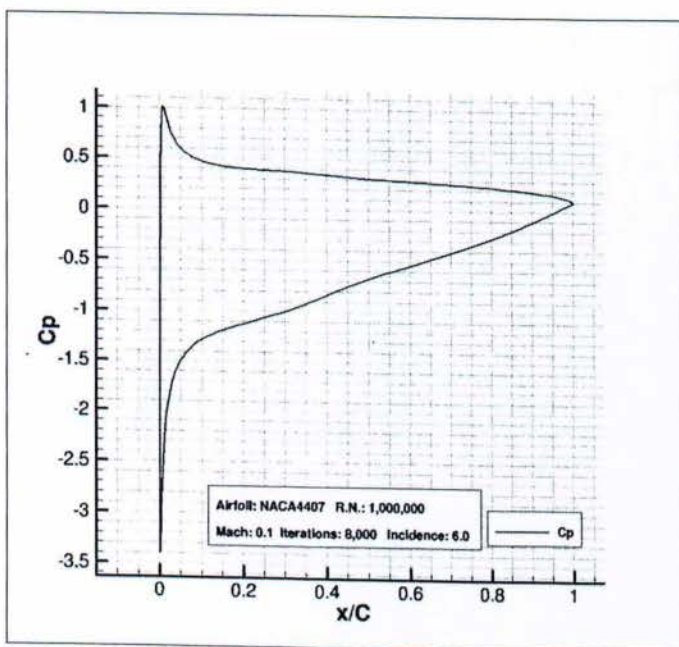
Σχήμα 5.63 Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=0^\circ$ και $Re = 10^6$ για την αεροτομή NACA4412



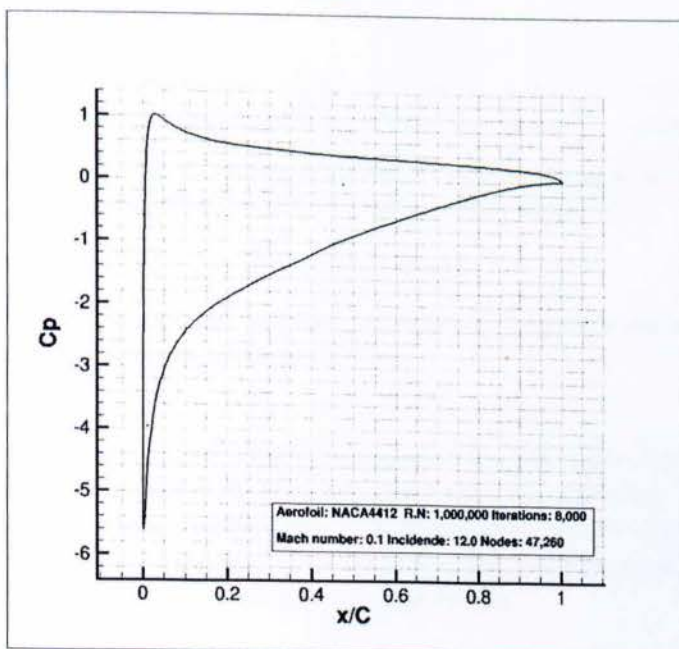
Σχήμα 5.64 Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=0^\circ$ και $Re = 10^6$ για την αεροτομή NACA4407



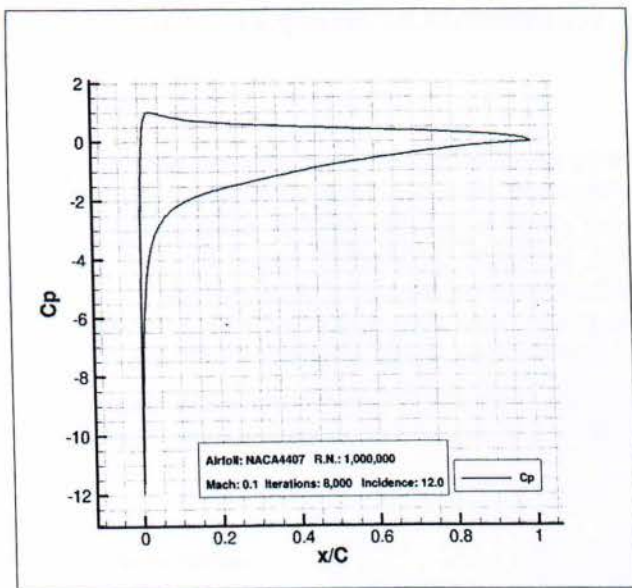
Σχήμα 5.65 Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=6^\circ$ και $Re = 10^6$ για την αεροτομή NACA4412



Σχήμα 5.66 Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=6^\circ$ και $Re = 10^6$ για την αεροτομή NACA4407



Σχήμα 5.67 Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=12^\circ$ και $Re = 10^6$ για την αεροτομή NACA4412



Σχήμα 5.68 Σχέση συντελεστή πίεσης C_p με τον λόγο x/C για $\alpha=12^\circ$ και $Re = 10^6$ για την αεροτομή NACA4407

Τα παραπάνω διαγράμματα πίεσης μας δείχνουν πως η διαφορά πίεσης που ασκείται στην αεροτομή NACA4412 είναι μεγαλύτερη από ότι στην αεροτομή NACA4407.

Αυτό προκύπτει από τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την έμμεση σχέση μεταξύ των γραμμών ροής (*curved streamlines*) και της διαφοράς πίεσης:

$$\frac{dp}{dR} = \rho \cdot \frac{u^2}{R} \quad (5.8)$$

Όπως εξηγήσαμε και πιο πριν όσο η ακτίνα της εκάστοτε καμπυλότητας αυξάνεται τόσο μειώνεται η πίεση που ασκείται πάνω σε αυτήν.

Σημείωση: Το γεγονός ότι στην περιοχή κοντά στο 5% της χορδής C εμφανίζεται μεγαλύτερη πίεση στην αεροτομή NACA4407 από ότι στην αεροτομή NACA4412 δεν πρέπει να το λάβουμε υπόψη, καθότι στην περιοχή εκείνη το ρευστό «βλέπει» μικρότερη επιφάνεια (αφού έχει μικρότερο πάχος και άρα μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας) και ως εκ τούτου η αναπτυσσόμενη πίεση είναι σαφώς μεγαλύτερη.

6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

6.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία έγινε μια προσπάθεια να μελετηθούν και να συγκριθούν τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά δυο αεροτομών (NACA4407 & NACA4412) που ανήκουν στην οικογένεια NACA τεσσάρων ψηφίων με χρήση του μη εμπορικού προγράμματος-επιλύτη HMB (Helicopter Multi-Block) επιλύοντας υπολογιστικά τις εξισώσεις Navier-Stokes σε δύο διαστάσεις. Επίσης, για την αεροτομή NACA4407 έγινε σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων που διεξήχθησαν από τον επιλύτη HMB και αυτών που διεξήχθησαν από τον επιλύτη του ελεύθερου προγράμματος X-FOIL.

Από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα τρία κεφάλαια της εργασίας αυτής μπορούμε να καταλήξουμε στα συμπεράσματα που αναφέρονται παρακάτω.

6.1.1 Πλέγμα μοντελοποίησης.

Όσον αφορά το πλέγμα (Grid) μοντελοποίησης ενός υπολογιστικού χώρου, καταλήγουμε στα κάτωθι συμπεράσματα:

1. Η τοπολογία αυτού πρέπει να ακολουθεί την γεωμετρία του μοντέλου (της αεροτομής εν προκειμένω) ούτως ώστε τα αποτελέσματα να ανταποκρίνονται στην μορφολογία του μοντέλου προσομοίωσης.
2. Η πυκνότητα των κελιών και κατ'επέκταση των κόμβων αυτού πρέπει να αλλάζει τόσο με τον ρυθμό αλλαγής της γεωμετρίας της αεροτομής, όσο και με την ανάγκη για λεπτομερή αποτελέσματα.

6.1.2 Συντελεστές - Αποτελέσματα μελέτης.

Μετά την επεξεργασία και σύμφωνα με τα αποτελέσματα που εξήχθησαν στα προηγούμενα εδάφια συμπεραίνουμε τα εξής:

1. Ο συντελεστής άντωσης εξαρτάται τόσο από το πάχος της αεροτομής όσο και από την καμπυλότητα αυτής. Γενικά όσο πιο μεγάλο πάχος έχει μια αεροτομή NACA τεσσάρων ψηφίων (4-digit) τόσο πιο μεγάλος θα είναι ο μέγιστος συντελεστής άντωσης που θα δημιουργείται και κατ'επέκταση τόσο πιο μεγάλη θα είναι η γωνία προσβολής στην οποία θα στολάρει.
2. Σε ακολουθία με το προηγούμενο συμπέρασμα καταλήγουμε στο γεγονός ότι, όσο πιο μεγάλο το πάχος της αεροτομής, τόσο πιο μεγάλη θα είναι και η διαφορά πίεσης που δημιουργείται στο πάνω και στο κάτω μέρος της αεροτομής. Από αυτά προκύπτει ότι οι αεροτομές που διαθέτουν μεγαλύτερο πάχος κρίνονται καταλληλότερες για περιπτώσεις όπου απαιτείται μεγαλύτερη δύναμη άντωσης. Από την άλλη μεριά για να επιτευχθεί μεγαλύτερος συντελεστής άντωσης και αντίστοιχα μεγαλύτερη διαφορά πίεσης σε μια αεροτομή με μικρό πάχος και

μεγάλες καμπυλότητες, πρέπει να επιτευχθεί μεγαλύτερη ταχύτητα ρευστού πάνω σε αυτήν (δηλαδή μεγαλύτερος αριθμός Reynolds).

3. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας (C_d) ο οποίος μεταβάλλεται αντίστοιχα με τον συντελεστή άντωσης (αλλά όχι με τον ίδιο ρυθμό), δηλαδή η μεταβολή του με το πάχος της αεροτομής δεν είναι τόσο έκδηλη όπως αυτή του συντελεστή άντωσης.
4. Σύμφωνα με την μεταβολή του λόγου δυνάμεων άντωσης προς οπισθέλκουσα συμπεραίνουμε πως για πετύχουμε καλύτερη αεροδυναμική συμπεριφορά σε μια αεροτομή πρέπει εκτός των άλλων να αναπτυχθεί και μεγάλη ταχύτητα πάνω σε αυτήν.
5. Από το εύρος των γωνιών προσβολής στο οποίο μια αεροτομή βρίσκεται σε πτήση συμπεραίνουμε πως στις μικρότερες θετικές γωνίες δεν αναπτύσσονται μεγάλες δυνάμεις ιξώδους. Αυτό σημαίνει πως δεν αναπτύσσονται μεγάλες δυνάμεις τριβής και άρα η αεροτομή κρίνεται πιο αεροδυναμική.
6. Συμπεραίνουμε επίσης πως ο συντελεστής ροπής μικραίνει για μεγάλους αριθμούς Reynolds.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, μπορούμε να ισχυριστούμε πως οι συμβατικές αεροτομές που κρίνονται ως πιο «αεροδυναμικές» είναι αυτές που διαθέτουν πιο μικρό πάχος και επιπλέον η αεροδυναμικότητα αυτή ενισχύεται με την αύξηση της ταχύτητας ροής του αέρα γύρω από την αεροτομή.

6.2 Προτάσεις για μελλοντική εργασία

Φυσικά μια αεροδυναμική μελέτη αεροτομών δεν είναι ανάγκη να μείνει σε ένα πρώιμο στάδιο όπως είναι αυτό της παρούσας πτυχιακής. Ήδη παρατηρούνται μελέτες για τρισδιάστατες αεροτομές όπως για παράδειγμα πτερύγια ανεμογεννητριών, αεροσκαφών, κλπ. Ως εκ τούτου, χρήσιμο είναι να γνωρίζει κανείς την συμπεριφορά των αεροτομών-πτερυγίων, όπως αυτά είναι στην πραγματικότητα δηλαδή τρισδιάστατα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Moran, Jack (2003). *An introduction to theoretical and computational aerodynamics*. Dover. p. 7. ISBN 0-486-42879-6.
2. Marzocca, Pier. "The NACA airfoil series" (PDF). Clarkson University. Retrieved 07-03-2009.
3. Blazek, J.: "Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications", Alstom Power Ltd., Baden-Daettwil, Switzerland, 2001.
4. Menter, F. R.: "Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications", AIAA Journal, Vol. 32, No. 8, pp. 1598-1605, August 1994.
5. John D. Anderson, "Fundamentals of Aerodynamics", 4th, Mc Graw Hill, 2000.
6. "Bakker A. (2012) The Colorful Fluid Mixing Gallery, <http://www.bakker.org/cfm>."
7. Διακάκης Κωνσταντίνος, «Αεροδυναμική Ανάλυση μη Συμβατικών Αεροτομών για Πτερύγια Ανεμογεννητριών», Ε.Μ.Π., Διπλωματική Εργασία, 2012.
8. Barth T. J. – Aspects of Unstructured Grids and Finite-Volume Solvers for the Euler and Navier-Stokes Equations – AGARD Report 787, Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows, 1992
9. P. Wesseling – Principles of Computational Fluid Dynamics – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001
10. Γ. Μπεργελές – Υπολογιστική Ρευστομηχανική – Εκδόσεις Συμewών, 1993.
11. Aerospaceweb.org | Ask Us - NACA Airfoil Series
12. <http://www.fges.demon.co.uk/cfd/naca.html#07>

Παράρτημα Α

Πρόγραμμα γένεσης συντεταγμένων των σημείων των αεροτομών NACA-4Digits.

Παρακάτω παρουσιάζεται το πρόγραμμα που έχει δημιουργηθεί σε γλώσσα προγραμματισμού C. Το πρόγραμμα αυτό υπολογίζει τις συντεταγμένες 100 σημείων για κάθε αεροτομή τύπου NACA τεσσάρων ψηφίων (NACA-4Digits).

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main()
{
float m; //maximum camber
float p; //position
float t; //thickness
float s=50; //points
int z=50; //points
int c=1; //chord_legth
int x;
int q;

printf("Enter the (%) maximum camber: ");
scanf("%f", &m);
if (m<0 || m>9)
{
printf("You gave wrong number for maximum camber. (0-9)");
}
else{
printf("Enter the (%) position of the maximum camber: ");
scanf("%f", &p);
if (p<10 || p>90)
{
```

```

printf("You gave wrong number for the posotion of maximum camber. (0-90)");
}
else{
printf("Enter the (%) maximum thickness: ");
scanf("%f", &t);
if (t<0 || t>99)
{
printf("You gave wrong number for maximum thickness. (0-99)" );
}
else{
m=m/100;
p=p/100;
t=t/100;

int w; // for 0x<=position
w=s*p;
float yc1[w];
float yc2[z-w];
float yt1[w];
float yt2[z-w];
float th1[w];
float th2[z-w];
float xu1[w];
float xu2[z-w];
float yu1[w];
float yu2[z-w];
float xl1[w];
float xl2[z-w];
float yl1[w];
float yl2[z-w];
float radians= 57.295779513082321;

// -----0<=x<=w-----

```

```

for(x=0; x<=w; x=x++)
{
yc1[x]=m/p/p*(2*p*x/s-x*x/s/s);
yt1[x]=t/0.2*(0.2969000*sqrt(x/s)-0.1260000*x/s-0.35160000*pow((x/s),
2)+0.28430000*pow((x/s), 3)-0.10360000*pow((x/s), 4));
th1[x]= atan(m/p/p*(2*p-2*x/s));
xu1[x]=x/s-yt1[x]*sin(th1[x]);
yu1[x]=yc1[x]+yt1[x]*cos(th1[x]);
printf(" %2.9f %2.9f\n", xu1[x], yu1[x]);
}
// -----w+1<=x<=s-----
for(x=w+1; x<=s; x=x++)
{
yc2[x]=m/(1-p)/(1-p)*(1-2*p+2*p*x/s-x*x/s/s);
yt2[x]=t/0.2*(0.2969000*pow((x/s), 0.5)-0.1260000*x/s-0.35160000*pow((x/s),
2)+0.28430000*pow((x/s), 3)-0.10360000*pow((x/s), 4));
th2[x]= atan(m/(1-p)/(1-p)*(2*p-2*x/s));
xu2[x]=x/s-yt2[x]*sin(th2[x]);
yu2[x]=yc2[x]+yt2[x]*cos(th2[x]);
printf(" %2.9f %2.9f\n", xu2[x], yu2[x]);
}
for(x=0; x<=w; x=x++)
{
yc1[x]=m/p/p*(2*p*x/s-x*x/s/s);
yt1[x]=t/0.2*(0.2969000*sqrt(x/s)-0.1260000*x/s-0.35160000*pow((x/s),
2)+0.28430000*pow((x/s), 3)-0.10360000*pow((x/s), 4));
th1[x]= atan(m/p/p*(2*p-2*x/s));
xl1[x]=x/s+yt1[x]*sin(th1[x]);
yl1[x]=yc1[x]-yt1[x]*cos(th1[x]);
printf(" %2.9f %2.9f\n", xl1[x], yl1[x]);
}
// -----w+1<=x<=s-----

```

```

for(x=w+1; x<=s; x=x++)
{
yc2[x]=m/(1-p)/(1-p)*(1-2*p+2*p*x/s-x/s/s*s*x);
yt2[x]=t/0.2*(0.2969000*pow((x/s), 0.5)-0.1260000*x/s-0.35160000*pow((x/s),
2)+0.28430000*pow((x/s), 3)-0.10360000*pow((x/s), 4));
th2[x]= atan(m/(1-p)/(1-p)*(2*p-2*x/s));
xl2[x]=x/s+yt2[x]*sin(th2[x]);
yl2[x]=yc2[x]-yt2[x]*cos(th2[x]);
printf(" %2.9f %2.9f\n", xl2[x], yl2[x]);
}

}

}

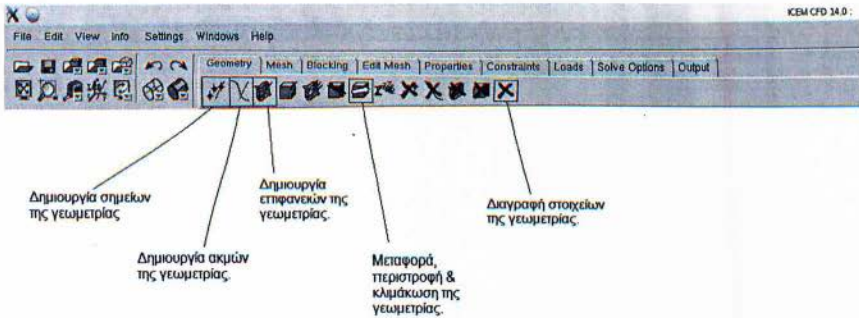
}

}

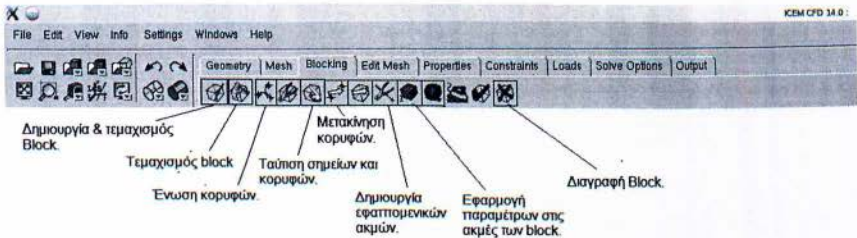
```

Παράρτημα Β

Εργαλεία του προγράμματος γέννησης πλεγμάτων ICEMCFD που χρησιμοποιήθηκαν.



Σχήμα Β.1 Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη δημιουργία της γεωμετρίας της αεροτομής NACA4407.



Σχήμα Β.2 Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για την δημιουργία των block της αεροτομής NACA4407.