

ΤΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ ΣΤΕΦ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ & ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΕ
Η/Υ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2014

ΟΝΟΜΑ

ΧΡΗΣΤΟΣ Π. ΜΑΡΓΕΤΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΛΕΩΝΙΔΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το ηλεκτρικό δίκτυο είναι ένα διασυνδεδεμένο δίκτυο για τη μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας από τους παραγωγούς στους καταναλωτές. Το ηλεκτρικό δίκτυο αποτελείται από την Παραγωγή Ηλεκτρικής Ενέργειας (οι μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας δηλαδή οι οποίες παράγουν ηλεκτρική ενέργεια χρησιμοποιώντας διαφόρων ειδών καύσιμα), τη Μεταφορά Ηλεκτρικής Ενέργειας (πρόκειται για τις γραμμές μεταφοράς οι οποίες μεταφέρουν την ηλεκτρική ενέργεια από τα εργοστάσια στα κέντρα ζήτησης) και την Διανομή Ηλεκτρικής Ενέργειας (εδώ εντάσσονται οι υποσταθμοί, οι μετασχηματιστές υποβιβασμού οι γραμμές διανομής με σκοπό την χρήση από οικιακά δίκτυα).

Το αιτούμενο είναι η ηλεκτρική ενέργεια να μεταφέρεται από τις γραμμές μεταφοράς διατηρώντας σταθερή την τάση και τη συχνότητα με τις λιγότερες δυνατές απώλειες. Κατά την μεταφορά της ενέργειας μέσω των γραμμών μεταφοράς εμφανίζεται πτώση τάσης λόγω της σύνθετης αντίστασης που παρουσιάζουν αυτές (ωμική, επαγωγική, χωρητική). Οι απώλειες εξαρτώνται από την ισχύ που μεταφέρουν αυτές.

Οι γραμμές μεταφοράς παρουσιάζουν ωμική αντίσταση που εξαρτάται από την ειδική αντίσταση του υλικού του αγωγού, το μέγεθος το σχήμα και τη θερμοκρασία του. Επίσης παρουσιάζουν επαγωγική αντίδραση (επαγωγές και αλληλεπαγωγές). Οι δύο τύπου αυτοί αντιστάσεων συνιστούν τη σύνθετη αντίσταση σειράς της γραμμής. Η χωρητική αντίδραση (μαζί με την αγωγιμότητα), νοούνται ως εγκάρσια σύνθετη αντίσταση (ή σύνθετη αγωγιμότητα) της γραμμής.

Στις γραμμές μεταφοράς μεγάλου μήκους τα μεγέθη της τάσεως και του ρεύματος μπορούν να θεωρηθούν ως υπέρθεση προσπίπτοντων και ανακλώμενων κυμάτων, προς και από το πέρας της γραμμής. Ένα μέτρο της ανάκλασης των μεγεθών αυτών είναι ο συντελεστής ανάκλασης (τάσης και ρεύματος αντίστοιχα)

Από τα προηγούμενα γίνεται αντιληπτό τα ζητήματα της πτώσης τάσης πάνω στην σύνθετη αντίσταση της γραμμής και οι ανακλάσεις στο πέρας της γραμμής δημιουργούν αλλοίωση της επιθυμητής τάσης και ισχύος που θέλουμε να φτάσει στον καταναλωτή.

Στην εργασία αυτή γίνεται η αποτίμηση της συμπεριφοράς μιας χαρακτηριστικής γραμμής μεταφοράς για την οποία θεωρούνται τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά μεγέθη αντίδρασης και ανάκλασης και εκτιμάται η απόδοση της σε ισομήκη διαστήματα, κάνοντας χρήση της σχετικής θεωρίας για τα προσπίπτοντα και ανακλώμενα κύματα τάσης και ρεύματος. Τα αποτελέσματά μας επιβεβαιώνουν τη θεωρία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η πτυχιακή εργασία καταπιάνεται με το ζήτημα των χαρακτηριστικών μεγεθών των γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας και φωτίζει το ζήτημα της απώλειας και ανάκλασης της μεταφερόμενης ηλεκτρικής ενέργειας, πάνω στις γραμμές.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια εισαγωγή στις γραμμές μεταφοράς και ορίζονται βασικές έννοιες για την ενέργεια, την ισχύ, και τις απώλειες γραμμής.

Στο Κεφάλαιο 2 αναλύονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη μιας γραμμής μεταφοράς που μας αφορούν ιδιαίτερα στην ανάλυση των απωλειών της. Παρουσιάζονται οι ωμικές, επαγωγικές και χωρητικές αντιδράσεις της γραμμής, και γίνεται λόγος για τις ποσότητες αυτές και στην περίπτωση των πολυφασικών γραμμών, συμμετρικών και ασύμμετρων τριφασικών γραμμών, πολλαπλών αγωγών φάσεων.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται οι εξισώσεις και η κυκλωματική ανάλυση των γραμμών μεταφοράς, η θεωρία γραμμής μεγάλου μήκους, η κυματική προσέγγιση στα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν πάνω στη γραμμή (τάση, ένταση), τα ισοδύναμα κυκλώματα της γραμμής (Τ, Π, ανάλογα με την κυκλωματική θεώρηση της θέσης των κατανεμημένων χαρακτηριστικών της γραμμής), εξηγείται ο τερματισμός της γραμμής. Επίσης με βάση την κλασική θεωρία δικτύων γίνεται μια παρουσίαση της γραμμής μεταφοράς ως δίθυρο δίκτυο.

Καθώς τα ζητήματα που ανακύπτουν στις γραμμές δεν εξαντλούνται στα ηλεκτρικά του μεγέθη αλλά έχουν να κάνουν και με τα μηχανικά, στο Κεφάλαιο 4 γίνεται λόγος για τον υπολογισμό κρίσιμων μηχανικών ποσοτήτων που σχετίζονται με τις γραμμές μεταφοράς, την ανάρτησή τους, την καμπύλη και το «βέλος» των αγωγών, την επίδραση του ανέμου και του πάγου και τα ζητήματα που προκύπτουν από την ανάρτησή του σε κεκλιμένο έδαφος.

Στο Κεφάλαιο 5 βρίσκεται το υπολογιστικό κομμάτι της εργασίας. Θεωρώντας τιμές για την τάση του αγωγού σε ισομήκη μεταξύ τους διαστήματα, και θεωρώντας το προσπίπτον σε, και ανακλώμενο από, το πέρας της γραμμής κύμα τάσης και ρεύματος, ευρίσκονται, μεταξύ άλλων, οι διαφορές φάσης τάσεως και ρεύματος, η σχέση ανακλώμενου και προσπίπτοντος κύματος, και εκ τούτου ο συντελεστής ανάκλασης, και αναπαριστώνται γραφικά οι τιμές σημαντικών μεγεθών συναρτήσει της απόστασης από το σημείο εκκίνησης, ενώ γίνονται γραμμικές προσεγγίσεις των ζευγών τιμών που έχουμε. Τα συνολικά μεγέθη ρεύματος και τάσης θεωρούνται ως αθροίσματα των τιμών που έχουν το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα στην εκάστοτε θέση. Γίνονται υπολογισμοί και για την φαινόμενη ισχύ σε κάθε ένα από τα θεωρούμενα σημεία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....	1
Περίληψη.....	2

Κεφάλαιο 1**ΙΣΧΥΣ ΚΑΙ ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ****Σελίδες:**

1.1	Ενεργός και άεργος ισχύς	9
2.1	Η έννοια της διανυσματικής ισχύος	11
3.1	Εξισώσεις ισχύος γραμμής μεταφοράς	16
4.1	Απώλειες γραμμής μεταφοράς	20

Κεφάλαιο 2**ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ****Σελίδες:**

2.1	Εισαγωγή	23
2.2	Ωμική αντίσταση	25
2.3	Επαγωγή και επαγωγική αντίδραση	29
2.4	Υπολογισμός επαγωγών και αλληλεπαγωγών πολυφασικών γραμμών μεταφοράς.....	30
2.5	Επαγωγή μονοφασικής γραμμής δυο αγωγών	34
2.6	Επαγωγή τριφασικής γραμμής με τριγωνική συμμετρία	35
2.7	Επαγωγή ασύμμετρης τριφασικής γραμμής με αντιμετατιθεμένους αγωγούς	36
2.8	Χωρητικότητα και χωρητική αντίδραση	39
2.9	Υπολογισμός χωρητικότητας πολυφασικών γραμμών	40
2.10	Χωρητικότητα μονοφασικής γραμμής δυο αγωγών	43
2.11	Χωρητικότητα τριφασικής γραμμής με τριγωνική συμμετρία.....	46
2.12	Χωρητικότητα ασύμμετρης τριφασικής γραμμής με αντιμετατεθειμένους αγωγούς.....	47
2.13	Χωρητική αντίδραση και αγωγιμότητα, ρεύμα φορτίσεως της γραμμής	48
2.14	Πολλαπλοί αγωγοί φάσεων.....	50
2.15	Επαγωγή γραμμής μεταφοράς με πολλαπλούς αγωγούς	50
2.16	Χωρητικότητα γραμμής με πολλαπλούς αγωγούς	54

Κεφάλαιο 3**ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ, ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΡΙΦΑΣΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ****Σελίδες:**

3.1	Εισαγωγή	57
-----	----------------	----

3.2	Παράσταση της γραμμής μεταφοράς.....	57
3.3	Γραμμή μεταφοράς μικρού μήκους	58
3.4	Γραμμή μεταφοράς μέσου μήκους	60
3.5	Η θεωρία της γραμμής μεταφοράς μεγάλου μήκους	64
3.6	Κυματική ερμηνεία των εξισώσεων της γραμμής μεταφοράς	67
3.7	Ειδικές περιπτώσεις γραμμών μεταφοράς	70
3.8	Υπερβολική μορφή των εξισώσεων της γραμμής μεταφοράς	73
3.9	Τα ισοδύναμα κυκλώματα Π και Τ μια γραμμής	75
3.10	Τυπικοί τερματισμοί γραμμών μεταφοράς	78
3.11	Γενικευμένες σταθερές και δίθυρα κυκλώματα	83
3.12	Γενικά κυκλώματα γραμμών ηλεκτρικής ενεργείας	85
3.13	Παράμετροι δίθυρων κυκλωμάτων	88
3.14	Διασυνδέσεις δίθυρων κυκλωμάτων	91
3.15	Αντιστάθμιση γραμμής μεταφοράς	98
3.16	Χωρητική αντιστάθμιση σειράς	101
3.17	Εγκάρσια επαγωγική αντιστάθμιση	102
3.18	Γραμμές με κατανεμημένες παραμέτρους	103

Κεφάλαιο 4

ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΕΝΑΕΡΙΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

Σελίδες:

4.1	Υπολογισμός καμπύλης και βέλους αγωγών	110
4.2	Επίδραση ανέμου και πάγου	116
4.3	Ανάρτηση αγωγών σε κεκλιμένο έδαφος	118

Κεφάλαιο 5

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ & ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΕ Η/Υ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Σελίδες:

1.	Υπολογισμός και προσομοίωση, με τη βοήθεια Η/Υ, των παραμέτρων μιας γραμμής μεταφοράς	123
2.	Σχηματική παράσταση των υπολογισμών του Κεφαλαίου 5.1.	152

Κεφάλαιο 6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ & ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Σελίδες:

Συμπεράσματα και προτάσεις.....	197
Πίνακας Συμβόλων.....	198
Βιβλιογραφία.....	200

Ευρετήριο Σχημάτων**Σχήματα:****Σελίδες:**

1. Σχέσεις διανυσματικής ισχύος συναρτήσει των αντιδράσεων επαγωγικού κυκλώματος	14
2. Σχέσεις διανυσματικής ισχύος συναρτήσει των αγωγιμοτήτων επαγωγικού κυκλώματος	15
3. Παράσταση φορτίου $P+iQ$, από σύνθετη εγκάρσια αγωγιμότητα, $Y=G-jB$	16
4. Παράσταση φορτίου $P+iQ$, με σύνθετη αντίσταση σειράς, $Z=R+jX$	16
5. Μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο γραμμής δύο αγωγών.....	24
6. Ομάδα N παράλληλων κυλινδρικών αγωγών.....	31
7. Μονοφασική γραμμή δύο αγωγών	34
8. Τριφασική γραμμή με τριγωνική συμμετρία	35
9. Αντιμετάθεση φάσεως ασύμμετρης τριφασικής γραμμής	36
10. Διάταξη αγωγών γραμμής παραδείγματος 1,2	39
11. Σύστημα N παράλληλων αγωγών, με άθροισμα φορτίων ίσο με το μηδέν.....	40
12. Μονοφασική γραμμή δύο αγωγών	43
13. Χωρητικότητα προς ουδέτερο και μεταξύ φάσεων	44
14. Πολλαπλός αγωγός φάσεως “α” “τριφασικής γραμμής.....	51
15. Μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα τριφασικού κυκλώματος γραμμής μεταφοράς.....	57
16. Ισοδύναμο κύκλωμα γραμμής μεταφοράς μικρού μήκους	59
17. Διάγραμμα φασικών διανυσμάτων μικρής γραμμής για επαγωγικό, ωμικό και χωρητικό φορτίο. Τα μεγέθη των E και I είναι ίσα.....	60
18. Ονομαστικό κύκλωμα T α γραμμής μεταφοράς μέσω μήκους	61
19. Ονομαστικό κύκλωμα II γραμμής μεταφοράς μέσω μήκους	62
20. Σχηματική παράσταση κυκλώματος φάσεως ουδέτερου τριφασικής γραμμής μεταφοράς με κατανομημένες παραμέτρους.....	64
21. Ισοδύναμο κύκλωμα Π μιας γραμμής μεταφοράς.....	77
22. Ισοδύναμο κύκλωμα T μιας γραμμής μεταφοράς	77
23. Παράσταση γενικού κυκλώματος σταθερών ABCD.....	84
24. Πίνακας 2. Τύπος κυκλώματος	87
25. Πίνακας 2. Τύπος κυκλώματος	87
26. Πίνακας 2. Τύπος κυκλώματος	87
27. Πίνακας 2. Τύπος κυκλώματος	87
28. Πίνακας 2. Τύπος κυκλώματος	87
29. Πίνακας 3. Γενικό κύκλωμα ή κύκλωμα ABCD	88
30. Πίνακας 3. Κύκλωμα Π	88
31. Πίνακας 3. Κύκλωμα T	88
32. Διασύνδεση σειράς n δίθυρων κυκλωμάτων	92
33. Διασύνδεση παράλληλη n δίθυρων κυκλωμάτων	94
34. Παράλληλη σύνδεση δύο δίθυρων κυκλωμάτων.....	96
35. Αλυσιδωτή διασύνδεση n δίθυρων κυκλωμάτων	96
36. Αλυσιδωτή σύνδεση δύο κυκλωμάτων δύο διπολικών ζευγών	98
37. Γραμμή μεταφοράς με ανοιχτό πέρας τροφοδοτούμενη από γεννήτρια.....	99
38. Αντιστάθμιση γραμμής με πυκνωτή σειράς.....	101

39.	Αντιστάθμιση γραμμής εγκάρσιο επαγωγικό πηνίο.....	102
40.	Χωρητική αντιστάθμιση σειράς γραμμής μεταφοράς	
	α) φυσική παράσταση.....	104
	β)παράσταση με δίθυρα κυκλώματα.....	104
41.	Εγκάρσια επαγωγική αντιστάθμιση γραμμή μεταφοράς	
	α) φυσική παράσταση.....	107
	β)παράσταση με δίθυρα κυκλώματα.....	107
42.	Καμπύλη αγωγού γραμμής με επίδραση του βάρους του	110
43.	Συνολική δύναμη επί εναέριου αγωγού υπό την επίδραση πάγου και ανέμου	117
44.	Ανάρτηση γραμμής σε κεκλιμένο έδαφος.....	119
45.	Διάταξη παραδείγματος 4.5	121

Ευρετήριο Πινάκων**Πίνακας****Σελίδες:**

1.	Θερμοκρασιακός συντελεστής αντιστάσεως για διαφορετικά υλικά σε διαφορετικές θερμοκρασίες.....	27
2.	Γενικευμένες σταθερές κυκλώματος απλών δικτύων.....	87
3.	Τύποι μετασχηματισμού κυκλωμάτων	88
4.	Σχέσεις μεταξύ παραμέτρων δίθυρων κυκλωμάτων.....	91

Ευρετήριο Γραφικών παραστάσεων**Γραφική Παράσταση:****Σελίδες:**

1. $V_+(x)$ - Μέτρο της ουδέουσας τάσεως της γραμμής στο σημείο x	153
2. $\varphi_{V_+}(x)$ - Φάση της ουδέουσας τάσεως της γραμμής στο σημείο x	155
3. $V_-(x)$ - Μέτρο της ανακλώμενης τάσεως της γραμμής στο σημείο x	158
4. $\varphi_{V_-}(x)$ - Φάση της ανακλώμενης τάσεως της γραμμής στο σημείο x	160
5. $V(x)$ - Μέτρο της τάσεως της γραμμής στο σημείο x	163
6. $\varphi_V(x)$ - Φάση της τάσεως της γραμμής στο σημείο x	165
7. $\rho_V(x)$ - Μέτρο του συντελεστή ανακλάσεως της τάσεως της γραμμής στο σημείο x ..	168
8. $\varphi_{\rho_V}(x)$ -Φάση του συντελεστή ανακλάσεως της τάσεως της γραμμής στο σημείο x ..	170
9. $I_+(x)$ - Μέτρο του οδεύοντος ρεύματος της γραμμής στο σημείο x	173
10. $\varphi_{I_+}(x)$ - Φάση της ουδέουσας τάσεως της γραμμής στο σημείο x	175
11. $I_-(x)$ - Μέτρο του ανακλώμενου ρεύματος της γραμμής στο σημείο x	178
12. $\varphi_{I_-}(x)$ - Φάση του ανακλώμενου ρεύματος της γραμμής στο σημείο x	180
13. $I(x)$ - Μέτρο του ρεύματος της γραμμής στο σημείο x	183
14. $\varphi_I(x)$ - Φάση του ρεύματος της γραμμής στο σημείο x	185
15. $\rho_I(x)$ -Μέτρο του συντελεστή ανακλάσεως του ρεύματος της γραμμής στο σημείο x ..	188
16. $\varphi_{\rho_I}(x)$ -Φάση του συντελεστή ανακλάσεως του ρεύματος της γραμμής στο σημείο x ..	190
17. $S(x)$ - Μέτρο της φαινόμενης ισχύος της γραμμής στο σημείο x	193
18. $\varphi_S(x)$ - Φάση της φαινομένης ισχύος της γραμμής στο σημείο x	195

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ισχύς και απώλειες γραμμής μεταφοράς

1.1 Ενεργός και άεργος ισχύς

Η στιγμιαία ισχύς, την οποία παρέχει ένα [1] μονοφασικό κύκλωμα $E \cdot P$ όταν διαρρέεται από ρεύμα I και βρίσκεται υπό τάση e , είναι:

$$p = ei \quad (1)$$

Εάν

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{2}|E| \sin(\omega t + \varphi_e) \\ i &= \sqrt{2}|I| \sin(\omega t + \varphi_i) \end{aligned} \quad (2)$$

θα είναι,

$$p = 2|E||I| \sin(\omega t + \varphi_e) \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα,

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \quad (4)$$

και θέτοντας $\varphi = \varphi_e - \varphi_i$ η εξίσωση (3) γίνεται:

$$p = |E||I| [\sin\varphi + \sin(2\omega t + \varphi_e + \varphi_i)] \quad (5)$$

Ή ακόμη:

$$p = |E||I| [\sin\varphi + \sin(2\omega t + \varphi + 2\varphi_i)] \quad (6)$$

Ο δεύτερος όρος της παρενθέσεως αναλύεται ως εξής:

$$\sin(2\omega t + \varphi + 2\varphi_i) = \sin\varphi \sin(2\omega t + 2\varphi_i) - \eta\mu\varphi \eta\mu(2\omega t + 2\varphi_i) \quad (7)$$

Βάσει της ταυτότητας (7) η εξ. (6) γίνεται:

$$p = |E||I| \cos\varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)] - |E||I| \eta\mu\varphi \eta\mu(2\omega t + 2\varphi_i) \quad (8)$$

Δηλ. η στιγμιαία ισχύς αναλύθηκε σε δύο συνιστώσες (I και II), εκ των οποίων η πρώτη (I) κυμαίνεται ημιτονοειδώς περί μια μέση τιμή $|E||I| \cos\varphi$, με συχνότητα διπλάσια της συχνότητας τάσεως και ρεύματος, χωρίς να γίνεται ποτέ αρνητική. Η δεύτερη συνιστώσα (II) έχει μηδενική μέση τιμή. Κατόπιν αυτών ορίζονται οι έξης δύο ποσότητες:

Η πραγματική ή ενεργός ισχύς:

$$P \triangleq |E||I| \cos\varphi \quad (9)$$

Η άεργος ισχύς:

$$Q \triangleq |E||I| \eta\mu\varphi \quad (10)$$

Μετά τους ορισμούς (9) και (10) η εξ. (8) γράφεται:

$$p = P[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)] - Q \eta\mu(2\omega t + 2\varphi_i) \quad (11)$$

Αυτές οι δύο νέες έννοιες της ισχύος έχουν τόσο μεγάλη σπουδαιότητα στην τεχνική των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας ώστε κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν τα έξης σχετικά με τη σημασία τους:

α) Η ενεργός ισχύς P ορίζεται ως η μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος p και συνεπώς από φυσικής απόψεως σημαίνει τη χρήσιμη ισχύ η οποία μεταφέρεται (2)

Το μέγεθός της εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το συντελεστή ισχύος $\cos\varphi$.

β) Η άεργος ισχύς Q είναι εξ ορισμού ίση με τη μέγιστη τιμή εκείνης της συνιστώσας της στιγμιαίας ισχύος p η οποία ταξιδεύει εναλλάξ προς την μια και προς την άλλη κατεύθυνση της γραμμής με αποτέλεσμα μηδενική μέση τιμή, και συνεπώς αδυναμία εκτελέσεως χρήσιμου έργου.

Σε ένα μονοφασικό κύκλωμα αποτελούμενο από μία ωμική αντίσταση R , και μια επαγωγική αντίσταση X εν σειρά, θα είναι,

$$|I| = \frac{|E|}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad (12)$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad (13)$$

$$\eta_{\mu\phi} = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad (14)$$

και επομένως οι εξισώσεις (9) και (10) γίνονται:

$$P = \frac{|E|^2 R}{R^2 + X^2} |I|^2 R \quad (15)$$

$$Q = \frac{|E|^2 X}{R^2 + X^2} |I|^2 X \quad (16)$$

Οι P και Q έχουν και οι δύο διαστάσεις Watt, άλλα για να δίνεται έμφαση στο γεγονός ότι η δεύτερη παριστάνει άεργο ισχύ η Q εκφράζεται σε VA (voltampere reactive). Στην τεχνική των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας λέγεται ότι ένα πηνίο ή ένα επαγωγικό φορτίο καταναλίσκει άεργο ισχύ. Αντίθετα, ένας πυκνωτής ή ένα χωρητικό φορτίο απορροφά αρνητική άεργο ισχύ, και ως εκ τούτου λέγεται ότι παράγει άεργο ισχύ. Η αλλαγή σημείου της Q σημαίνει απλώς φασική μετατόπιση της δεύτερης συνιστώσας (I) της ισχύος (8) κατά 180° .

1.2. Η έννοια της διανυσματικής ισχύος

Οι εξισώσεις (6) και (8) δίνουν τη στιγμιαία τιμή της ισχύος p ενός μονοφασικού κυκλώματος, συναρτήσει του χρόνου η ωφέλιμη όμως ισχύς είναι η μέση ισχύς η λαμβανόμενη κατά την διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος μεγαλύτερου μιας περιόδου του ρεύματος ή της τάσεως. Θα προσδιοριστεί και αναλυτικά στη συνέχεια ότι η ενεργός ισχύς, όπως ορίστηκε στο προηγούμενο τμήμα 334, είναι η μέση ισχύς του κυκλώματος. Με βάση τον ορισμό της μέσης ισχύος θα είναι:

$$P = \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} p dt \quad (17)$$

Αντικαθιστώντας την P με την έκφρασή της (5), έχουμε :

$$\begin{aligned} P &= \frac{|E||I|}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} [\cos\phi + \cos(2\omega t + \phi_e + \phi_i)] dt \\ &= \frac{|E||I|}{T_1 - T_0} \cos\phi (T_1 - T_0) + \frac{|E||I|}{T_1 - T_0} \frac{1}{2\omega} [\eta\mu(2\omega t + \phi_e + \phi_i)]_{T_0}^{T_1} \\ &= |E||I| \cos\phi + \frac{|E||I|}{T_1 - T_0} \frac{1}{2\omega} [\eta\mu(2\omega t + \phi_e + \phi_i)]_{T_0}^{T_1} \end{aligned} \quad (18)$$

Εάν το χρονικό διάστημα $T_1 - T_0$ είναι ίσο με ακέραιο αριθμό περιόδων θα είναι,

$$[\eta\mu(2\omega t + \varphi_e + \varphi_i)]_{T_0}^{T_1} = 0$$

όποτε η (18) γίνεται:

$$p = |E||I|\cos\varphi \quad (19)$$

Κατ' αυτό τον τρόπο αποδεικνύεται αναλυτικά η συνέπεια του ορισμού, ότι η μέση ισχύς είναι ίση με την ενεργό ισχύ, όπως η τελευταία ορίστηκε με την (9). Η εξ. (19) γίνεται,

$$P = \frac{|E|e^{j\varphi_e}|I|e^{-j\varphi_i}|E|e^{-j\varphi_e}|I|e^{j\varphi_i}}{2} \quad (20)$$

ή

$$p = \frac{EI^* + E^*I}{2} \quad (21)$$

οπότε,

$$E = |E|e^{j\varphi_e} \quad , \quad E^* = |E|e^{-j\varphi_e} \quad (22)$$

$$I = |I|e^{j\varphi_i} \quad , \quad I^* = |I|e^{-j\varphi_i}$$

Δεδομένου ότι το E^*I είναι το συζυγές του EI^* τα πραγματικά μέρη των δύο αυτών διανυσματικών γινομένων είναι ίδια, και καθένα ίσο με την ενεργό ισχύ P , βάσει της εξισώσεως (21). Τα φανταστικά μέρη εξουδετερώνονται σαν ίσα και αντίθετα, αφήνοντας την ενεργό ισχύ μια πραγματική ποσότητα. Εάν κάθε όρος της εξ. (21) ληφθέν χωριστά θα είναι:

$$EI^* = |E||I|e^{j\varphi} = |E||I|(\cos\varphi + j\eta\mu\varphi) \quad (23)$$

$$E^*I = |E||I|e^{-j\varphi} = |E||I|(\cos\varphi - j\eta\mu\varphi) \quad (24)$$

Παρατηρούμε ότι το φανταστικό μέρος των δύο αυτών εκφράσεων είναι αριθμητικά ίσο με την άεργο ισχύ, όπως η τελευταία ορίστηκε στο τμήμα 1. Συνεπώς οι εξισώσεις (23) και (24) μπορούν να γραφούν:

$$EI^* = P + jQ \quad (25)$$

$$E^*I = P - jQ \quad (26)$$

Ποιά όμως από τις εξισώσεις αυτές περιλαμβάνει το σωστό σημείο πολικότητας της άεργου ισχύος εξαρτάται από το αν η άεργος ισχύς λαμβάνεται θετική, όταν η τάση προπορεύεται του ρεύματος ή αντίστροφα, πράγμα το οποίο αποτελεί θέμα ορισμού. Στο κείμενο αυτό θεωρείται ότι η άεργος ισχύς είναι θετική, όταν η τάση προπορεύεται του ρεύματος, δηλ. όταν η γωνία $\varphi = \varphi_e - \varphi_i$ είναι θετική. Συνεπώς η άεργος ισχύς έχει την πολικότητα της αντιδράσεως του κυκλώματος και είναι θετική σε ένα επαγωγικό κύκλωμα (επαγωγική άεργος ισχύς) και αρνητική σε ένα χωρητικό κύκλωμα (χωρητική άεργος ισχύς). Η επαγωγική άεργος ισχύς καταναλίσκεται ή απορροφάται από το κύκλωμα, ενώ η χωρητική άεργος ισχύς παράγεται από το κύκλωμα.

Χρήσιμη είναι η χάραξη της ενεργού και της άεργου ισχύος ενός κυκλώματος στο ίδιο διάγραμμα, οπότε η ενεργός ισχύς τοποθετείται στον οριζόντιο άξονα και η άεργος στον κάθετο άξονα. Η διανυσματική ισχύς ορίζεται σαν το φασικό διάνυσμα, το οποίο έχει την ενεργό ισχύ P σαν τετμημένη και την άεργο ισχύ Q σαν τεταγμένη. Εάν η διανυσματική ισχύς συμβολισθεί με S θα είναι:

$$S = P + jQ \quad (27)$$

Θεωρώντας την ισχύ ενός μονοφασικού κυκλώματος αποτελούμενου από μια ωμική αντίσταση R και μια επαγωγική αντίδραση X εν σειρά, θα είναι βάσει των εξ. (15) και (16) και της εξ. (27)

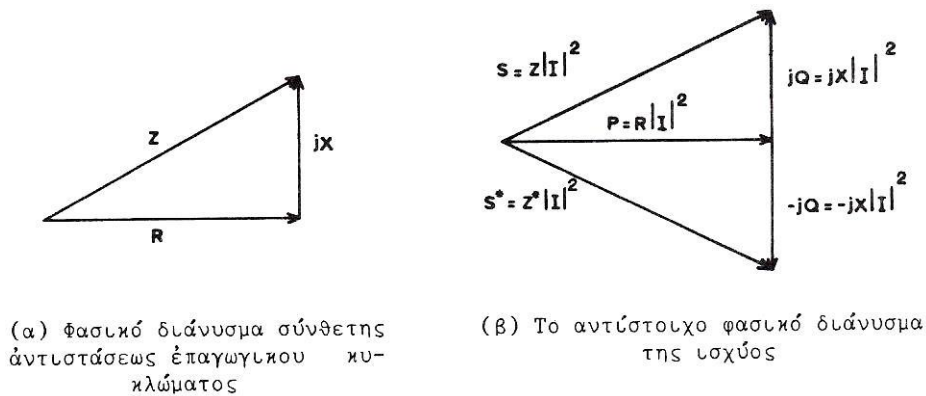
$$\begin{aligned} S &= R|I|^2 + jX|I|^2 \\ &= (R + jX)|I|^2 = Z|I|^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Συνεπώς η διανυσματική ισχύς δίνεται επίσης σαν το γινόμενο της σύνθετης αντιστάσεως Z , εκφραζόμενης σε μορφή φασικού διανύσματος και του τετράγωνου του μεγέθους του ρεύματος, όπως φαίνεται στο σχ.1.

Δεδομένου ότι $|I|^2 = II^*$ και $E = ZI$ η εξ. (28) γράφεται επίσης:

$$S = P + jQ = ZII^* = EI^* \quad (29)$$

Καταυτό τον τρόπο η διανυσματική ισχύς είναι δυνατόν να ορισθεί γενικότερα σαν το γινόμενο του φασικού διανύσματος της τάσεως και του συζυγούς φασικού διανύσματος του ρεύματος. Το πραγματικό μέρος αυτού του γινόμενου θα είναι η ενεργός ισχύς P και το φανταστικό μέρος η άεργος ισχύς Q . Η σχέση (29) θα είναι εξαιρετικά χρήσιμη για τις ανάγκες της αναλύσεως των συστημάτων ηλεκτρικής ενεργείας.



Σχ.1. Σχέσεις διανυσματικής ισχύος συναρτήσει των αντιδράσεων επαγωγικού κυκλώματος.

Η διανυσματική ισχύς μπορεί επίσης να εκφραστεί συναρτήσει της σύνθετης αγωγιμότητας Y του κυκλώματος.

Είναι:

$$Z = \frac{1}{Y}$$

$$I = YE, \text{ και } I^* = Y^*E^*$$

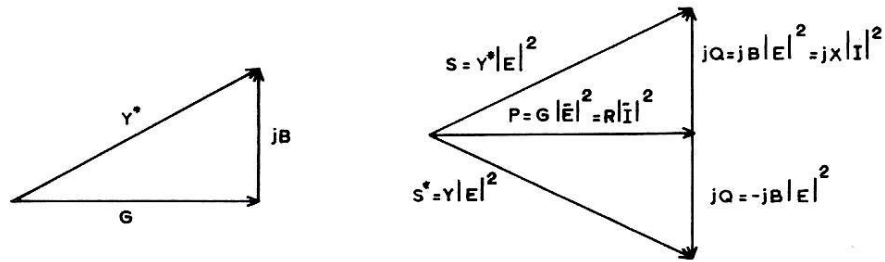
(30)

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των Z, I και I^* , συναρτήσει της Y στην εξ. (29), έχουμε:

$$S = P + jQ = Y^*EE^* = Y^*|E|^2$$

(31)

Δηλ. η διανυσματική ισχύς η αναρροφούμενη από ένα κύκλωμα είναι ίση επίσης με το γινόμενο της συζυγούς σύνθετης αγωγιμότητας και του τετραγώνου του μεγέθους της τάσεως. Οι σχέσεις αυτές απεικονίζονται στο σχ.2. Πρέπει να σημειωθεί ότι, εάν η συζυγής σύνθετη αγωγιμότητα αντικατασταθεί από τη σύνθετη αγωγιμότητα η μόνη μεταβολή στην ισχύ θα ήταν η αλλαγή του σημείου της άεργου ισχύος, ενώ η πραγματική ισχύς θα παραμείνει αμετάβλητη.



(α) Φασικό διάνυσμα συζυγούς σύνθετης αγωγιμότητας επαγωγικού κυκλώματος

(β) Τό αντίστοιχο φασικό διάνυσμα της ισχύος

Σχ.2. Σχέσεις διανυσματικής ισχύος συναρτήσει των αγωγιμοτήτων επαγωγικού κυκλώματος.

Το μέτρο της διανυσματικής ισχύος είναι,

$$|S| = |E||I|$$

(32)

δηλ, είναι ίσο με τη φαινόμενη ισχύ (VA).

Εάν ένα φορτίο ισχύος $P + jQ$ τροφοδοτούμενο από τάση E , παριστάνεται από μια εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα, $Y = G - jB$ (σχ. 44), θα είναι:

$$G = \frac{P}{|E|^2}$$

(33)

$$B = \frac{Q}{|E|^2}$$

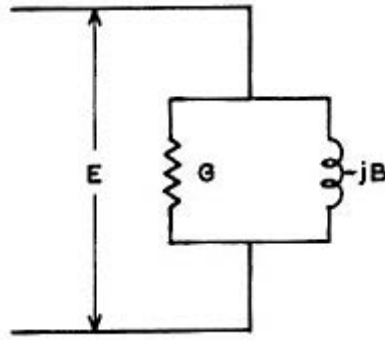
Εάν τώρα το φορτίο παρασταθεί από την αντίστοιχη σύνθετη αντίσταση σειράς (σχ.3),

$$Z = \frac{1}{Y} = R + jX$$

θα είναι:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad , \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

(34)

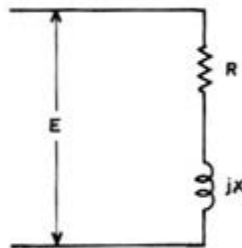


Σχ.3. Παράσταση φορτίου $P+jQ$, από συνθέτη εγκάρσια αγωγιμότητα, $Y=G-jB$.

Εκφράζοντας τα G και B συναρτήσει των P και Q από τις (33) οι (34) γίνονται:

$$R = \frac{P|E|^2}{P^2 + Q^2} \quad , \quad X = \frac{Q|E|^2}{P^2 + Q^2}$$

(35)



Σχ. 4. Παράσταση φορτίου $P+jQ$ με σύνθετη αντίσταση σειράς $Z=R+jX$.

Ο συντελεστής ισχύος του φορτίου είναι:

$$\text{συν}\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{G}{\sqrt{G^2 + B^2}}$$

1.3. Εξισώσεις ισχύος κυκλωμάτων μεταφοράς

Η τάση του άκρου αναχωρήσεως ενός γενικού κυκλώματος ABCD δίνεται από την εξίσωση,

$$E_S = AE_R + BI_R$$

(36)

από την οποία προκύπτει:

$$I_R^* = \frac{E_S^*}{B^*} - \frac{A^* E_R^*}{B^*} \quad (37)$$

Η διανυσματική ισχύς στο άκρο αφίξεως του κυκλώματος είναι,

$$S_R = P_R + jQ_R = E_R I_R^* \quad (38)$$

οπότε P_R η ενεργός και Q_R η άεργος ισχύς στο άκρο αφίξεως.

Αντικαθιστώντας στην (38) το I_R^* με την έκφραση του (37), έχουμε:

$$S_R = \frac{E_S^* E_R}{B^*} - \frac{A^* E_R^* E_R}{B^*} \quad (39)$$

Αλλά $E_R^* E_R = |E_R|^2$, οπότε:

$$S_R = \frac{E_S^* E_R}{B^*} - \frac{A^* |E_R|^2}{B^*} \quad (40)$$

Κατά παρόμοιο τρόπο, από την αντίστοιχη εξίσωση της τάσεως αφίξεως

$$E_R = D E_S - B I_S \quad (41)$$

προκύπτει,

$$I_S^* = \frac{D^* E_S^*}{B^*} - \frac{E_R^*}{B^*} \quad (42)$$

και:

$$\begin{aligned} S_S &= P_S + jQ_S = E_S I_S^* = \\ &= \frac{D^* |E_S|^2}{B^*} - \frac{E_S E_R^*}{B^*} \end{aligned} \quad (43)$$

Τα μεγέθη των τάσεων στα άκρα αναχωρήσεως και αφίξεως ενός κυκλώματος μεταφοράς τηρούνται γενικά σε σταθερές ή σχεδόν σταθερές τιμές και οι μεταβολές της μεταφερόμενης ισχύος επιτυγχάνονται σε μεγάλο βαθμό με μεταβολή της φασικής αποκλίσεως μεταξύ των τάσεων των δύο άκρων. Ως εκ τούτου, οι εξισώσεις (39) και (43), οι οποίες εκφράζουν την ισχύ συναρτήσει των τάσεων και των γενικευμένων σταθερών μόνο και δεν χρειάζεται να βρει κανείς τα ρεύματα κάθε φορά, είναι ιδιαίτερα εξυπηρετικές

για τον υπολογισμό των ισχύων ενός κυκλώματος. Μερικές περαιτέρω απλοποιήσεις μπορούν να γίνουν στις εκφράσεις της ισχύος με τη χρησιμοποίηση των εκθετικών εκφράσεων των τάσεων,

$$E_S = |E_S|e^{j\varphi_S} \quad , \quad E_S^* = |E_S|e^{-j\varphi_S} \quad (44)$$

$$E_R = |E_R|e^{j\varphi_R} \quad , \quad E_R^* = |E_R|e^{-j\varphi_R}$$

ΟΠΟΤΕ:

$$S_R = \frac{|E_S||E_R|e^{-j(\varphi_S-\varphi_R)}}{B^*} - \frac{A^*|E_R|^2}{B^*} \quad (45)$$

$$S_R = \frac{D^*|E_R|^2}{B^*} - \frac{|E_S||E_R|}{B^*}e^{j(\varphi_S-\varphi_R)} \quad (46)$$

Η γωνία ($\varphi_S-\varphi_R$) είναι η φασική απόκλιση μεταξύ τάσεων αναχωρήσεως και πέρατος του κυκλώματος και είναι θετική, όταν η τάση αναχωρήσεως προπορεύεται της τάσεως πέρατος. Εάν $\delta = \varphi_S - \varphi_R$ τότε:

$$S_R = \frac{|E_S||E_R|e^{-j\delta}}{B^*} - \frac{A^*|E_R|^2}{B^*} \quad (47)$$

$$S_S = \frac{D^*|E_S|^2}{B^*} - \frac{|E_S||E_R|e^{j\delta}}{B^*} \quad (48)$$

Τώρα, οι εκφράσεις αυτές δίνουν την ισχύ ανά φάση, υπό την προϋπόθεση ότι έχουν χρησιμοποιηθεί φασικές τάσεις.

Η συνολική ισχύς για ένα συμμετρικό τριφασικό σύστημα θα είναι τότε ίση προς το τριπλάσιο των τιμών αυτών.

Εάν οι τριφασικές ισχύεις και οι πολικές τάσεις υποδηλωθούν με τον πρόσθετο δείκτη 3, θα είναι:

$$P_{R3} = 3P_R Q_{R3} = 3Q_R S_{R3} = 3S_R \quad (49)$$

$$P_{S3} = 3P_S Q_{S3} = 3Q_S S_{S3} = 3S_S \quad (50)$$

$$|E_{S3}| = \sqrt{3}|E_S| \quad , \quad |E_{R3}| = \sqrt{3}|E_R| \quad (51)$$

Κατόπιν αυτών έχουμε,

$$\begin{aligned} S_{R3} = 3S_R &= \frac{\sqrt{3}|E_S|\sqrt{3}|E_R|}{B^*} e^{-j\delta} - \frac{A^*}{B^*} (\sqrt{3}|E_R|)^2 = \\ &= \frac{|E_{S3}||E_{R3}|e^{-j\delta}}{B^*} - \frac{A^*}{B^*} |E_{R3}|^2 \end{aligned} \quad (52)$$

και

$$\begin{aligned} S_{S3} = 3S_R &= \frac{D^*}{B^*} (\sqrt{3}|E_S|)^2 - \frac{\sqrt{3}|E_S|\sqrt{3}|E_R|}{B^*} e^{j\delta} = \\ &= \frac{D^*}{B^*} |E_{S3}|^2 - \frac{|E_{S3}||E_{R3}|}{B^*} e^{j\delta} \end{aligned} \quad (53)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (52) και (53) με τις εξισώσεις (47) και (48) παρατηρούμε ότι οι τριφασικές ισχύς δίνονται από τις ίδιες εξισώσεις, οι οποίες εκφράζουν τις μονοφασικές ισχύς του κυκλώματος εάν στις τελευταίες αντικατασταθούν οι φασικές τάσεις με τις πολικές τάσεις. Αυτή η συνθήκη θα ισχύει γενικά σε όλες τις σχέσεις της ισχύος στις οποίες αυτή θα εκφράζεται συναρτήσει των τάσεων των άκρων ενός κυκλώματος.

Για ένα ονομαστικό κύκλωμα Π, γραμμής μεταφοράς χωρίς απώλειες, με $Z=jX$ και $Y/2=j\omega C/2$ θα είναι:

$$A=D=1-X\omega C/2, B=jX \quad (54)$$

Η αφικνούμενη ισχύς, βάσει του τύπου (47) και των (54) γράφεται,

$$\begin{aligned} S_R &= -\frac{1-X\omega C/2}{-jX} |E_R|^2 + \frac{|E_S||E_R|}{-jX} e^{-j\delta} \\ &= -j\frac{1-X\omega C}{X} |E_R|^2 + j\frac{|E_S||E_R|}{X} \sigma\upsilon\upsilon\delta + \frac{|E_S||E_R|}{X} \eta\mu\delta \end{aligned}$$

και:

$$S_R = \frac{|E_S||E_R|}{X} \eta\mu\delta + j \left(\frac{|E_S||E_R|}{X} \sigma\upsilon\upsilon\delta + \frac{|E_R|^2 \omega C}{2} - \frac{|E_S|^2}{X} \right) \quad (55)$$

είναι,

$$P_R = \frac{|E_S||E_R|}{X} \eta\mu\delta, \quad Q_R = \frac{|E_S||E_R|}{X} \sigma\upsilon\upsilon\delta + \frac{|E_S|^2 \omega C}{2} - \frac{|E_S|^2}{X} \quad (56)$$

παρόμοια, για την ισχύ αναχωρήσεως θα είναι:

$$S_S = \frac{|E_S||E_R|}{X} \eta \mu \delta + j \left(-\frac{|E_S||E_R|}{X} \sigma \nu \nu \delta - \frac{|E_S|^2 \omega C}{2} + \frac{|E_S|^2}{X} \right) \quad (57)$$

και:

$$P_S = \frac{|E_S||E_R|}{X} \eta \mu \delta, \quad Q_S = -\frac{|E_S||E_R|}{X} \sigma \nu \nu \delta - \frac{|E_S|^2 \omega C}{2} + \frac{|E_S|^2}{X} \quad (58)$$

Παρατηρούμε ότι η ενεργός ισχύς αναχωρήσεως είναι ίση με την ενεργό ισχύ αφίξεως πράγμα φυσικό όταν αγνοούνται οι απώλειες.

1.4. Απώλειες γραμμής μεταφοράς

Η διανυσματική ισχύς η απορροφημένη από τη γραμμή είναι φυσικά ίση με τη διαφορά μεταξύ της εισερχόμενης ισχύος στην αναχώρηση της γραμμής S_S και της εξερχομένης ισχύος στο πέρας της γραμμής S_R . Δηλ. χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (47) και (48) έχουμε:

$$\begin{aligned} S_\ell &= S_S - S_R = P_\ell + jQ_\ell \\ &= \frac{1}{B^*} [D^* |E_S|^2 + A^* |E_R|^2 - |E_S||E_R|(e^{j\delta} + e^{-j\delta})] \\ &= \frac{1}{B^*} [D^* |E_S|^2 + A^* |E_R|^2 - 2|E_S||E_R|\sigma \nu \nu \delta] \end{aligned} \quad (59)$$

Το πραγματικό μέρος P_ℓ της διανυσματικής διαφοράς ισχύων S_ℓ αποτελεί τις απώλειες γραμμής. Το φανταστικό μέρος Q_ℓ είναι η άεργος ισχύς η αναρροφούμενη από την γραμμή. Όπως και στο προηγούμενο τμήμα, οι τριφασικές ποσότητες λαμβάνονται με χρησιμοποίηση των πολικών τάσεων της γραμμής.

Αν και η έκφραση των απωλειών είναι ακριβής παρουσιάζεται κάποια δυσκολία στη χρησιμοποίηση της στη πράξη επειδή το αποτέλεσμα είναι η σχετικά μικρή διαφορά μεταξύ δύο μεγάλων ποσοτήτων, όπως είναι οι ισχείς εισόδου και εξόδου της γραμμής. Για να επιτευχθεί ακρίβεια στον υπολογισμό των απωλειών, πρέπει να γίνουν με πολύ μεγάλη ακρίβεια οι ενδιάμεσοι υπολογισμοί, πράγμα το οποίο μπορεί συνήθως να επιτευχθεί με τη χρησιμοποίηση υπολογιστικών μηχανών ή ψηφιακών υπολογιστών.

Άλλες εκφράσεις των απωλειών γραμμής είναι εκείνες οι οποίες δίνουν τις απώλειες συναρτήσει της τάσεως και της διανυσματικής ισχύος του άκρου αφίξεως ή των αντίστοιχων μεγεθών του άκρου αναχωρήσεως. Οι εκφράσεις αυτές προκύπτουν ως έξης:

Είναι ως γνωστό,

$$E_S = AE_R + BI_R \quad (60)$$

$$I_S = CE_R + DI_R$$

Η διανυσματική ισχύς του άκρου αναχωρήσεως είναι :

$$\begin{aligned} S_S &= E_S I_S^* = (AE_R + BI_R)(D^* I_R^* + C^* E_R^*) \\ &= AD^* E_R I_R^* + BC^* E_R^* I_R + AC^* |E_R|^2 + BD^* |I_R|^2 \end{aligned} \quad (61)$$

Είναι επίσης,

$$S_R = E_R I_R^* \quad \text{και} \quad S_R^* = E_R^* I_R \quad (62)$$

και συνεπώς,

$$S_R S_R^* = |S_R|^2 = |E_R|^2 |I_R|^2$$

από την οποία:

$$|I_R|^2 = \frac{|S_R|^2}{|E_R|^2} \quad (63)$$

Επίσης είναι:

$$S_S = S_\ell + S_R \quad (64)$$

Αντικαθιστώντας τα $|I_R|^2$ και S_S στην εξίσωση (59) με τις εκφράσεις τους (63) και (64) έχουμε

$$S_\ell = (AD^* - 1)S_R + BC^* S_R^* + AC^* |E_R|^2 + BD^* \frac{|S_R|^2}{|E_R|^2} \quad (65)$$

δηλ. την έκφραση της διανυσματικής ισχύος απωλειών, συναρτήσει της διανυσματικής ισχύος και του μεγέθους της τάσεως του άκρου αφίξεως.

Κατά παρόμοιο τρόπο προκύπτει η έκφραση της διανυσματικής ισχύος απωλειών, συναρτήσει των αντίστοιχων ποσοτήτων του άκρου αναχωρήσεως, η οποία έκφραση είναι:

$$S_\ell = -(AD^* - 1)S_S - BC^*S_S^* + C^*D|E_S|^2 + A^*B \frac{|S_S|^2}{|E_S|^2}$$

(66)

Οι εκφράσεις αυτές ισχύουν και για τις τριφασικές ισχύεις, εφόσον στις θέσεις των ισχύων και των τάσεων του δεύτερου μέλους χρησιμοποιηθούν οι αντίστοιχες τριφασικές και πολικές τιμές αυτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ηλεκτρικά χαρακτηριστικά γραμμής μεταφοράς

2.1. Εισαγωγή

Μια γραμμή μεταφοράς έχει τέσσερεις παραμέτρους, οι οποίες επηρεάζουν την εκπλήρωση της αποστολής της ως μέρος ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας. Οι παράμετροι αυτές είναι οι εξής κατά σειρά σπουδαιότητας:

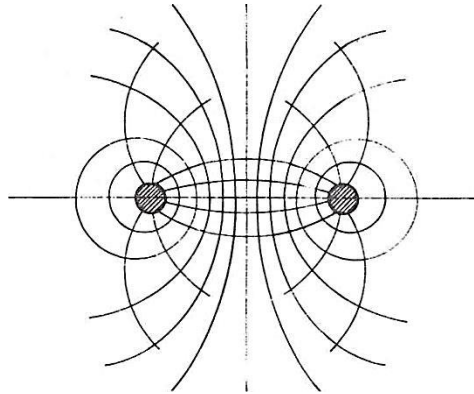
- Αυτεπαγωγή της γραμμής, εκφραζόμενη σε Henry ανά μέτρο μήκους(H/m).
- Εγκάρσια χωρητικότητα της γραμμής εκφραζόμενη σε Farad ανά μέτρο μήκους(F/m).
- Ωμική αντίσταση της γραμμής, εκφραζόμενη σε ohm ανά μέτρο μήκους (Ω/m).
- Εγκάρσια αγωγιμότητα της γραμμής, εκφραζόμενη σε Siemens ανά μέτρο μήκους(S/m).

Οι παράμετροι αυτές θα συμβολίζονται με L,C,R και G αντιστοίχως, και στις περισσότερες περιπτώσεις στην πράξη εκφράζονται ανά μονάδα μήκους (μέτρο η χιλιόμετρο) και ανά φάση της γραμμής. Κατά τη λειτουργία της γραμμής οι παράμετροι αυτές εκδηλώνονται ως ηλεκτρικές αντιστάσεις και αντιδράσεις, καλούνται δε και σταθερές της γραμμής. Όλοι οι αγωγοί παρουσιάζουν κάποια ωμική αντίσταση και η ωμική αντίσταση μιας γραμμής μεταφοράς είναι απλώς εκείνη, την οποία παρουσιάζουν οι αγωγοί της στη διέλευση του εναλλασσόμενου ρεύματος. Κάθε ρεύμα δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο, του οποίου οι γραμμές ροής περιβάλλουν το ρεύμα, από το οποίο προέρχονται. Όταν η τιμή του ρεύματος μεταβάλλεται η ροή η πεπλεγμένη με το κύκλωμα θα μεταβληθεί, παράγοντας σ' αυτό μία τάση εξ επαγωγής. Η παράμετρος, η οποία εκφράζει τη σχέση μεταξύ της πεπλεγμένης ροής και του ρεύματος είναι η επαγωγή L. Στην τεχνική των εναλλασσόμενων ρευμάτων η παράμετρος αυτή εκφράζεται περισσότερο ως επαγωγική αντίδραση X_L , η οποία είναι ίση με $2\pi fL$, όπου f είναι φυσικά η συχνότητα του ρεύματος.

Δύο αγωγοί, χωριζόμενοι από ένα διηλεκτρικό ή μονωτήρα σχηματίζουν ένα πυκνωτή, και οι γραμμές μεταφοράς δεν αποτελούν εξαίρεση στο φαινόμενο αυτό. Κάθε αγωγός είναι, υπό κανονικές συνθήκες, μεμονωμένος από κάθε άλλο αγωγό όπως και από τούς φορείς της γραμμής μέσω αέρα ή μονωτήρων και ο συνδυασμός αυτός των μονώσεων σχηματίζει ένα πυκνωτή, χωρητικότητας C. Στις εναέριες γραμμές η επιφάνεια των αγωγών είναι μικρή σε σύγκριση με το χώρο μεταξύ αγωγών και συνεπώς η χωρητικότητά τους είναι μικρή, εκτός εάν η γραμμή είναι σχετικά μεγάλη. Γενικά για γραμμές μικρότερες των 30 χιλιομέτρων η επίδραση της χωρητικότητας είναι αμελητέα, και μόνο για γραμμές μεγαλύτερες των 150 χιλιομέτρων η επίδραση αυτή είναι πολύ σημαντική. Στα υπόγεια καλώδια εν τούτοις ο χώρος είναι πολύ μικρότερος και για αυτό χρησιμοποιείται για διηλεκτρικό, χαρτί, λάδι ή συνθετικό υλικό μεγαλύτερης διηλεκτρικής σταθεράς από τον αέρα. Ως εκ τούτου η χωρητικότητα είναι πολύ αυξημένη και η επίδραση της είναι σημαντική ακόμη και για μικρά μήκη καλωδίου. Στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος η χωρητικότητα είναι δυνατόν να εκφράζεται υπό μορφή χωρητικής αγωγιμότητας B, ίσης προς $2\pi fC$ ή υπό μορφή χωρητικής αντιδράσεως X' ίσης με $1/2\pi fC$. Επειδή όμως η χωρητικότητα στην πραγματικότητα είναι συνδεδεμένη εν παραλλήλω

προς τη γραμμή, μεταξύ των δύο θεωρούμενων αγωγών, και όχι εν σειρά με αυτή, εκφράζεται συχνότερα ως χωρητική αγωγιμότητα B .

Το σχήμα 5. παρουσιάζει το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο μιας γραμμής δύο αγωγών. Οι γραμμές της μαγνητικής ροής σχηματίζουν κλειστούς βρόχους πλεγμένους με το κύκλωμα, ενώ οι γραμμές της ηλεκτρικής ροής ξεκινούν από τον ένα αγωγό και καταλήγουν στον άλλο.



Σχ. 5. Μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο γραμμής δύο αγωγών.

Δεδομένου ότι κανένα υλικό δεν είναι τέλειος μονωτήρας υπάρχει πάντοτε κάποιο ρεύμα διαρροής μεταξύ αγωγών υπό τάση, παρά τις προσπάθειες αποφυγής του. Εν τούτοις, για όλες τις γραμμές ηλεκτρικής ενέργειας, οι οποίες έχουν σχεδιασθεί σωστά, το ρεύμα διαρροής υπό κανονικές συνθήκες λειτουργίας είναι αμελητέο και δε χρειάζεται να ληφθεί υπόψη. Η θεωρητική ανάλυση όμως των μεγάλων γραμμών μεταφοράς, η οποία θα αναπτυχθεί αργότερα, θα είναι αρκετά γενική, ώστε να περιλαμβάνει και την επίδραση της διαρροής, οπότε, όταν χρειασθεί, η επίδραση αυτή θα είναι δυνατόν να υπολογισθεί απλώς με τη χρησιμοποίηση αντί μηδενός της κατάλληλης αριθμητικής τιμής της αγωγιμότητας.

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτυχθούν οι σχέσεις, οι όποιες διέπουν τις τρεις πρώτες παραμέτρους. Σε μια πολυφασική γραμμή οι αγωγοί των φάσεων είναι κατά κανόνα του ίδιου μεγέθους και υλικού, άλλα η θέση καθενός ως προς τούς άλλους είναι δυνατόν να είναι τέτοια, ώστε η επαγωγή και η χωρητικότητα, οι όποιες εξαρτώνται από τις αποστάσεις και τη διάταξη να είναι διαφορετικές για κάθε αγωγό. Όταν η διαφορά αυτή είναι σημαντική, οι αγωγοί πολλές φορές αντιμετωπίζονται, ώστε ο αγωγός κάθε φάσεως να καταλαμβάνει κάθε θέση της γραμμής για ορισμένο τμήμα αυτής. Κατ' αυτό τον τρόπο οι ανισότητες εξισώνονται σε μεγάλο βαθμό. Πέρα απ' αυτό τα φορτία σε όλες τις φάσεις είναι κανονικά περίπου τα ίδια ώστε τα ρεύματα να είναι επίσης περίπου ίσα σε μέγεθος και το σύστημά τους συμμετρικό. Όταν οι συνθήκες αυτές δεν πληρούνται σε επαρκή βαθμό, το πρόβλημα της επιλύσεως γίνεται πολύπλοκο και αντιμετωπίζεται με άλλες μεθόδους, όπως οι συμμετρικές συνιστώσες, οι οποίες αποτελούν αντικείμενο κεφαλαίου της αναλύσεως των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας.

2.2. Ωμική αντίσταση

Η ωμική αντίσταση ενός αγωγού στη ροή του συνεχούς ρεύματος εξαρτάται από την ειδική αντίσταση του υλικού του αγωγού και το μέγεθος, σχήμα και θερμοκρασία αυτού. Για έναν αγωγό γραμμής μεταφοράς με ομοιογενή διατομή το ρεύμα ρέει κατά μήκος αυτού και η αντίσταση R επομένως είναι:

$$R = \rho \frac{\ell}{s} \quad (67)$$

όπου είναι,

ρ = ειδική αντίσταση του αγωγού στη θεωρούμενη θερμοκρασία,

ℓ = το μήκος του αγωγού,

s = το εμβαδόν της διατομής του αγωγού ή απλώς η διατομή αυτού.

Η ειδική αντίσταση χαλκού αγωγιμότητας 100% και υπό θερμοκρασία 20°C είναι σύμφωνα με τούς σχετικούς διεθνείς κανονισμούς ίση με 0,017241 microhm-meters, ή 1,7241 microhm-centimeters.

Οι αγωγοί χαλκού, οι χρησιμοποιούμενοι στα υπόγεια καλώδια, είναι ανακτημένοι και έχουν αγωγιμότητα περίπου 100%. Οι αγωγοί χαλκού όμως των εναέριων γραμμών είναι σκληρής ολκήσεως και έχουν κατά 2,5% περίπου μικρότερη αγωγιμότητα, δηλ. ειδική αντίσταση 0,017683 microhm-meters ή 1,7683 microhm-centimeters στους 20°C.

Η ελάχιστη αγωγιμότητα του αλουμίνιου των εναέριων γραμμών είναι 61%, άλλα το χρησιμοποιούμενο σήμερα αλουμίνιο έχει μέση αγωγιμότητα περίπου 62%, δηλ. ειδική αντίσταση 2,8080 microhm-centimeters στους 20°C. Στους αγωγούς, οι όποιοι αποτελούνται από κλώνους, το μήκος και βάρος κάθε κλώνου (εκτός του κεντρικού) είναι ελαφρώς αυξημένα, σε σύγκριση με το μήκος του αγωγού, λόγω της συστροφής. Η αύξηση εξαρτάται φυσικά από το βήμα της ελικώσεως και αυτό ποικίλλει κάπως συναρτήσει της σχέσεως της διαμέτρου της στρώσεως προς τη διάμετρο του κλώνου.

Ένας από τους πλέον χρησιμοποιούμενους αγωγούς στις γραμμές μεταφοράς, είναι ο αγωγός αλουμίνιου με ενίσχυση χάλυβα (ACSR). Όταν οι αγωγοί έχουν δύο ή περισσότερα στρώματα κλώνων αλουμίνιου που περιβάλλουν τον πυρήνα, συνεστραμμένα κατ' αντίθετες φορές, ο πυρήνας έχει μικρή επίδραση είτε στην ωμική αντίσταση είτε στην επαγωγική αντίδραση του αγωγού. Όταν όμως υπάρχει μόνο ένα στρώμα κλώνων αλουμίνιου, η συστροφή προκαλεί σημαντική διαμήκη μαγνήτιση του πυρήνα. Όταν αυτοί οι αγωγοί φέρουν εναλλασσόμενο ρεύμα στον πυρήνα, δημιουργούνται απώλειες ενεργού και άεργου ισχύος, οι όποιες αυξάνουν και την ωμική αντίσταση και την επαγωγική αντίδραση του αγωγού, σε σύγκριση με τις τιμές των αντιστάσεων του αλουμίνιου μόνου και οι αυξήσεις αυτές εξαρτώνται από την τιμή του ρεύματος.

Όταν υπάρχουν τρία στρώματα κλώνων αλουμίνιου, ώστε δύο να είναι συνεστραμμένα κατά τη μία κατεύθυνση και ένα κατά την άλλη, υπάρχει μία ελαφριά επίδραση, η οποία είναι αισθητή στις μεγαλύτερες διατομές.

Οι μετρούμενες τιμές της ωμικής αντιστάσεως των αγωγών, οι οποίοι αποτελούνται από κλώνους, είναι συνήθως χαμηλότερες από τις υπολογιζόμενες τιμές λόγω ελαφρών διαρροών μεταξύ κλώνων, λόγω των οποίων μέρος του ρεύματος προχωρεί κατ' ευθείαν εντός του αγωγού αντί να ακολουθήσει την ελικοειδή διαδρομή των κλώνων. Η επίδραση αυτή ποικίλει και με την κατάσταση της επιφάνειας των κλώνων και με την πίεση μεταξύ κλώνων, ώστε να πρέπει να αναμένεται κάποια διακύμανση της αντιστάσεως κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του αγωγού.

Η ωμική αντίσταση μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία, ώστε για θερμοκρασίες διαφορετικές από 20°C πρέπει να γίνει σχετική διόρθωση. Στην περιοχή 10°C έως 100°C η μεταβολή της αντιστάσεως του χαλκού και του αλουμίνιου, μεταξύ ορισμένων σημείων επί του αγωγού, όταν το μήκος του είναι ελεύθερο να μεταβληθεί, βρίσκεται ότι είναι γραμμική συναρτήσει της θερμοκρασίας, κατά τον ακόλουθο τύπο:

$$R_{\theta_2} = R_{\theta_1} [1 + \alpha_{\theta_1} (\theta_2 - \theta_1)] \quad (68)$$

Όπου,

R_{θ_2} = η αντίσταση υπό θερμοκρασία θ_2

R_{θ_1} = η αντίσταση υπό θερμοκρασία θ_1

α_{θ_1} = ο θερμοκρασιακός συντελεστής της αντιστάσεως, υπό θερμοκρασία θ_1 .

Η ανωτέρω σχέση γράφεται επίσης [1]:

$$\frac{R_{\theta_2}}{R_{\theta_1}} = 1 + \alpha_{\theta_1} (\theta_2 - \theta_1) = \frac{T_0 + \theta_2}{T_0 + \theta_1} \quad (69)$$

Όπου,

$$\alpha_{\theta_1} = \frac{1}{T_0 + \theta_1} \quad \text{ή} \quad T_0 = \frac{1}{\alpha_{\theta_1}} - \theta_1 \quad (70)$$

Εύκολα φαίνεται ότι T_0 είναι η θερμοκρασία, στην οποία η αντίσταση του αγωγού θα γινόταν μηδέν, εάν η ίδια γραμμική εξίσωση ίσχυε για όλη την περιοχή των θερμοκρασιών και εάν ίσχυε αυτό, θα αναμένετε ότι η T_0 θα ήταν ίση προς το απόλυτο θερμοκρασιακό μηδέν, δηλ. -273°C. Στην πραγματικότητα, ο θερμοκρασιακός συντελεστής του χαλκού αγωγιμότητας 100% για θερμοκρασία 20°C είναι:

$$\alpha_{20} = 0,00393 \quad (71)$$

ή

$$T_0 = \frac{1}{0,00393} - 20 = 234,5 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (72)$$

Για το αλουμίνιο αγωγιμότητας 62% είναι :

$$\alpha_{20} = 0,00410 \text{ και } T_0 = 224,1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

(73)

Η τιμή του α για το αλουμίνιο μεταβάλλεται επίσης ανάλογα προς την αγωγιμότητα, για μικρές αποκλίσεις από την τιμή 62%.

Μέσα στην περιοχή, στην οποία η αντίσταση μεταβάλλεται γραμμικά με τη θερμοκρασία, η T_0 είναι σταθερή, οπότε ο α πρέπει να έχει διαφορετικές τιμές για διάφορες αρχικές θερμοκρασίες. Επομένως, η σχέση (69) είναι προτιμότερη για υπολογισμούς. Οι τιμές των T_0 και α για διάφορες αρχικές θερμοκρασίες δίνονται στον πίνακα 1.

ΥΛΙΚΟ ΑΓΩΓΟΥ	T ₀ (°C)	ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ						
		α_0	α_{20}	α_{25}	α_{50}	α_{75}	α_{80}	α_{100}
Χαλκός 100%	234,5	0,00427	0,00393	0,00385	0,00352	0,00325	0,00318	0,00299
Χαλκός 97,5%	241,0	0,00415	0,00383	0,00376	0,00316	0,00316	0,00312	0,00293
Αλουμίνιο 62%	224,1	0,00446	0,00410	0,00401	0,00334	0,00334	0,00329	0,00309

Πίνακας 1.Θερμοκρασιακός συντελεστής αντιστάσεως για διαφορετικά υλικά σε διαφορετικές θερμοκρασίες.

Ομοιόμορφη κατανομή του ρεύματος σε όλη τη διατομή του αγωγού υφίσταται μόνο για το συνεχές ρεύμα. Το εναλλασσόμενο ρεύμα προκαλεί ανομοιόμορφη κατανομή του και η ανομοιομορφία αυτή γίνεται εντονότερη όσο αυξάνει η συχνότητα του ρεύματος. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται επιδερμικό φαινόμενο. Η αύξηση της πυκνότητας του ρεύματος γίνεται από το εσωτερικό προς το εξωτερικό του αγωγού, ώστε αυτή να είναι μεγαλύτερη σε μέγεθος κοντά στην επιφάνειά του. Στις περιπτώσεις αυτές η αντίσταση θεωρείται η ποσότητα εκείνη η οποία, όταν πολλαπλασιάζεται με το τετράγωνο της ενδεικνυόμενης τιμής του συνολικού ρεύματος δίνει το μέσο όρο των απωλειών ισχύος. Για ημιτονοειδή ρεύματα είναι ίση με τη συνιστώσα της πτώσεως τάσεως η οποία είναι εν φάση με το συνολικό ρεύμα διαιρεμένη με την ενδεικνυόμενη τιμή του ρεύματος. Η πραγματική ή αποτελεσματική αυτή αντίσταση είναι, όπως θα αναμενόταν, μεγαλύτερη από την αντίσταση συνεχούς ρεύματος και αυξάνει με την αύξηση της συχνότητας.

Σε πολύ υψηλές συχνότητες το επιδερμικό φαινόμενο είναι έντονο, δεδομένου ότι όλο σχεδόν το ρεύμα συγκεντρώνεται κοντά στην επιφάνεια του αγωγού και η αποτελεσματική αντίσταση ενός συμπαγούς αγωγού είναι μέχρι 20 φορές μεγαλύτερη από την αντίσταση συνεχούς ρεύματος.

Μία προσεγγιστική μέθοδος εκτιμήσεως του επιδερμικού φαινομένου είναι εκείνη, με την οποία υπολογίζεται το λεγόμενο βάθος διεισδύσεως, δ :

$$\delta = 22,2r \sqrt{\frac{R_{\Sigma P}}{f}}$$

(74)

όπου

δ = το πάχος τοιχώματος σωληνωτού αγωγού (ίσης εξωτερικής διαμέτρου με του πραγματικού αγωγού) του οποίου η αντίσταση ΣP θα ήταν περίπου ίση με την αντίσταση $E P$ του πραγματικού αγωγού.

r = η ακτίνα του πραγματικού αγωγού

$R_{\Sigma P}$ = η αντίσταση ΣP του αγωγού σε ohm/mile

f = η συχνότητα του ρεύματος

Πρέπει γενικά να σημειωθεί ότι, ενώ το επιδερμικό φαινόμενο μπορεί για μεγάλες διατομές και υψηλές συχνότητες μεταβάλλει σημαντικά την ωμική αντίσταση, η επίδραση του στην επαγωγική αντίδραση είναι συνήθως αμελητέα. Τούτο διότι επηρεάζει μόνο μία δευτερεύουσα συνιστώσα της επαγωγικής αντιστάσεως, η οποία αφορά στην εσωτερική πεπλεγμένη ροή του αγωγού.

Η κατανομή του ρεύματος στο εσωτερικό του αγωγού επηρεάζεται επίσης από τα μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία, τα οποία προκαλούνται από ρεύματα γειτονικών αγωγών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα μερικές επί πλέον απώλειες και αύξηση της αντιστάσεως, αλλά η επίδραση είναι αμελητέα, εκτός αν οι αγωγοί είναι πολύ κοντά ή η συχνότητα πολύ μεγάλη. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό σαν φαινόμενο γειτνιάσεως. Η αύξηση της αντιστάσεως εξαρτάται από τη συχνότητα, την απόσταση μεταξύ αγωγών, το μέγεθος των αγωγών και τη μαγνητική διαπερατότητα. Το φαινόμενο γειτνιάσεως παρουσιάζεται στα τριφασικά όπως και στα μονοφασικά κυκλώματα. Ακόμη και στις πολύ υψηλές συχνότητες, εάν ο λόγος της αποστάσεως μεταξύ αγωγών προς την ακτίνα τους μιας γραμμής δυο αγωγών, είναι μεγαλύτερος από 15 προς 1 η αύξηση της αντιστάσεως λόγω του φαινομένου είναι μόνο 1% περίπου. Για τις συνηθισμένες αποστάσεις μεταξύ αγωγών των εναέριων γραμμών 50Hz, η επίδραση του φαινομένου γειτνιάσεως είναι πολύ μικρότερη από το πιθανό σφάλμα υπολογισμού της αντιστάσεως και παραλείπεται. Για το λόγο αυτό το φαινόμενο γειτνιάσεως θα αγνοηθεί κατά την ανάλυση των παραμέτρων των γραμμών.

Η θερμοκρασία στην οποία ζητείται η ωμική αντίσταση των αγωγών των γραμμών, εξαρτάται φυσικά από τη συγκεκριμένη περίπτωση. Για ελαφρά φορτία και μέτριες καιρικές συνθήκες η θερμοκρασία των αγωγών είναι δυνατόν να είναι κοντά στους 20°C. Με μεγάλα φορτία κατά τη διάρκεια του θέρους η θερμοκρασία των αγωγών πιθανόν να πλησιάζει τους 800C ή 1000C. Για μέσα φορτία και καιρικές συνθήκες η θερμοκρασία των 500C είναι ίσως μία τυπική θερμοκρασία και συνιστάται να χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των παραμέτρων της γραμμής, εάν δεν υπάρχουν πιο συγκεκριμένα σχετικά στοιχεία. Οι πίνακες των παραμέτρων των αγωγών δίνουν συνήθως την ωμική αντίσταση στους 25°C, 50°C και 75°C, ώστε η αντίσταση στους 500C βρίσκεται αμέσως,

ενώ οι τιμές της σε διαφορετικές θερμοκρασίες αυτή της περιοχής μπορούν να βρεθούν με παρεμβολή.

Για τις μεγαλύτερες διατομές αγωγών καταχωρημένων στους πίνακες η παρεμβολή είναι προτιμότερη από τη χρησιμοποίηση των τύπων, που δόθηκαν προηγουμένως, γιατί η διόρθωση του επιδερμικού φαινομένου ποικίλλει με τη θερμοκρασία κατά διαφορετικό τρόπο από την αντίσταση ΣP και επομένως η παρεμβολή είναι ελαφρώς ακριβέστερη.

2.3. Επαγωγή και επαγωγική αντίδραση

Η επαγωγή ενός αγωγού εκφράζεται από την σχέση,

$$L = \frac{d\Phi}{di} \text{ Henry} \quad (75)$$

και ορίζεται, ως ο λόγος της μεταβολής της πεπλεγμένης ροής του μαγνητικού πεδίου του ρεύματος του αγωγού, προς τη μεταβολή του ρεύματος. Εάν το μαγνητικό κύκλωμα έχει σταθερή μαγνητική διαπερατότητα θα είναι,

$$L = \frac{\Phi}{i} \text{ Henry} \quad (76)$$

και χρησιμοποιώντας φασικά διανύσματα:

$$\Phi = LI \quad (77)$$

Δεδομένου ότι τα διανύσματα Φ και I είναι εν φάσει, ο συντελεστής επαγωγής L είναι πραγματικός αριθμός. Η αλληλεπαγωγή μεταξύ δύο κυκλωμάτων ορίζεται ως η πεπλεγμένη με το ένα κύκλωμα ροή, η οφειλόμενη στο ρεύμα του άλλου κυκλώματος, ανά μονάδα ρεύματος του τελευταίου,

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} \text{ Henry} \quad (78)$$

2.4. Υπολογισμός επαγωγών και αλληλεπαγωγών πολυφασικών γραμμών μεταφοράς.

Με εφαρμογή του νόμου του διαρρέυματος προκύπτει ότι η πεπλεγμένη ροή στο εσωτερικό κυλινδρικού αγωγού ακτίνας r , ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I είναι [1]

$$\Phi_{\varepsilon\sigma} = \frac{\mu I}{8\pi} \omega b - t/m \quad (79)$$

το σύμβολο της μονάδας σημαίνει weber-turn ανά μέτρο μήκους του αγωγού. Για χαλκό ή αλουμίνιο είναι $\mu=4\pi \times 10^{-7}$ H/m οπότε,

$$\Phi_{\varepsilon\sigma} = \frac{I}{2} 10^{-7} \omega b - t/m \quad (80)$$

και

$$L_{\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2} 10^{-7} \text{ H/m} \quad (81)$$

Εφαρμόζοντας τον ίδιο νόμο στο εξωτερικό του αγωγού προκύπτει ότι η εξωτερική πεπλεγμένη ροή, η οφειλόμενη στο μαγνητικό πεδίο από την επιφάνεια του αγωγού μέχρι αποστάσεως D_x από το κέντρο του για σχετική μαγνητική διαπερατότητα $\mu_r=1$, δίνεται από τη σχέση.

$$\Phi_{\varepsilon\xi} = 2 \times 10^{-7} I \ell n \frac{D_x}{r} \omega b - t/m \quad (82)$$

Η αντίστοιχη επαγωγή είναι,

$$L_{\varepsilon\xi} = 2 \times 10^{-7} \ell n \frac{D_x}{r} \text{ H/m} \quad (83)$$

ή:

$$L_{\varepsilon\xi} = 0,2 \ell n \frac{D_x}{r} \text{ mH/km} \quad (84)$$

Η συνολική επαγωγή ενός αγωγού μέχρι αποστάσεως D_x από το κέντρο του είναι από τις (81) και (83),

$$L = L_{\varepsilon\sigma} + L_{\varepsilon\xi} = 2 \times 10^{-7} \left(\frac{1}{4} + \ell n \frac{D_x}{r} \right) \text{ H/m} \quad (85)$$

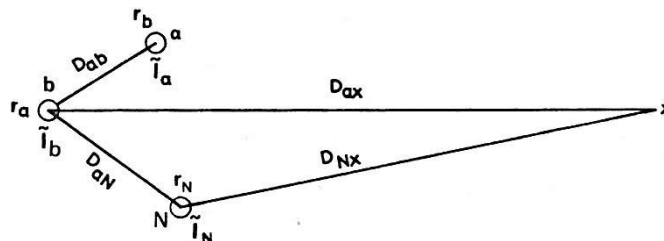
$$= 2 \times 10^{-7} \ell n \frac{D_x}{r} \text{ H/m} \quad (86)$$

$$= 0,2 \ell n \frac{D_x}{r} \text{ mH/km} \quad (87)$$

όπου $r = re^{-1/4} = 0,7788 r$, η ακτίνα υποθετικού αγωγού χωρίς εσωτερική ροή. Προκειμένου περί συμπαγών αγωγών η υποθετική, η ισοδύναμη ακτίνα r καλείται μέση γεωμετρική ακτίνα (GMR).

Για τον υπολογισμό της επαγωγής γραμμής με πολλούς αγωγούς θεωρούμε κατ' αρχήν το κλειστό σύστημα μιας ομάδας N παράλληλων κυλινδρικών αγωγών με ακτίνες r_a, r_b, \dots, r_n και ρεύματα I_a, I_b, \dots, I_N (σχ. 6.). Σαν βασική ιδιότητα του κλειστού συστήματος θεωρούμε ότι το άθροισμα των ρευμάτων είναι ίσο με μηδέν:

$$\vec{I}_a + \vec{I}_b + \dots + \vec{I}_N = 0 \quad (88)$$



Σχ.6. Ομάδα N παράλληλων κυλινδρικών αγωγών.

Υποθέτουμε επίσης ότι οι αποστάσεις μεταξύ αγωγών D_{ab}, D_{bc}, \dots είναι μεγάλες συγκρινόμενες προς τις ακτίνες τους και γενικά ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις ισχύος (85)-(87). Οι παραδοχές αυτές, καθώς και η (88), ισχύουν γενικά για τις εναέριες γραμμές ηλεκτρικής ενέργειας. Με τις προϋποθέσεις αυτές μπορεί να υπολογισθεί η συνολική πεπλεγμένη ροή οποιουδήποτε αγωγού της ομάδας ως το άθροισμα πεπλεγμένων ροών του με τα ρεύματα των υπολοίπων αγωγών της ομάδας.

Θεωρώντας ένα απομακρυσμένο σημείο x , από το οποίο οι αγωγοί της ομάδας απέχουν αποστάσεις $D_{ax}, D_{bx}, \dots, D_{Nx}$ (σχ.6), η πεπλεγμένη ροή του αγωγού a με το ρεύμα I_a μέχρι του σημείου x , θα είναι βάση της (86):

$$\Phi_{\alpha\alpha\chi} = 2 \times 10^{-7} I_{\alpha} \ell n \frac{D_{\alpha\chi}}{r_{\alpha}} w b - t/m \quad (89)$$

Η πεπλεγμένη ροή του αγωγού α με τη ροή του ρεύματος I_b , είναι αυτή που εκτείνεται μεταξύ του αγωγού α και του σημείου x και είναι :

$$\Phi_{abx} = 2 \times 10^{-7} I_b \ell n \frac{D_{bx}}{D_{ab}} w b - t/m \quad (90)$$

Αντίστοιχες εκφράσεις έχει η πεπλεγμένη ροή του αγωγού α με τα υπόλοιπα ρεύματα, οπότε η συνολική πεπλεγμένη ροή του αγωγού α, υπό τη συνθήκη (88), θα είναι:

$$\Phi_{ax} = 2 \times 10^{-7} \left[I_a \ell n \frac{D_{ax}}{r_a} + I_b \ell n \frac{D_{bx}}{D_{ab}} + I_c \ell n \frac{D_{cx}}{D_{ac}} + \dots + I_N \ell n \frac{D_{Nx}}{D_{aN}} \right] w b - t/m \quad (91)$$

Η (91) μπορεί να γραφεί ακόμη ως,

$$\begin{aligned} \Phi_{ax} = 2 \times 10^{-7} \left[I_a \ell n \frac{1}{r_a} + I_b \ell n \frac{1}{D_{ab}} + I_c \ell n \frac{1}{D_{ac}} + \dots + I_N \ell n \frac{1}{D_{aN}} \right] + \\ + 2 \times 10^{-7} [I_a \ell n D_{ax} + I_b \ell n D_{bx} + I_c \ell n D_{cx} + \dots + I_N \ell n D_{Nx}] w b - t/m \end{aligned} \quad (92)$$

Αφήνοντας το σημείο x να απομακρυνθεί προς το άπειρο, οι αποστάσεις D_{ax} , D_{bx} , ... D_{Nx} τείνουν να γίνουν ίσες, άρα ο δεύτερος όρος της (92) τείνει προς το μηδέν, βάσει της (88). Συνεπώς:

$$\Phi_{ax} = 2 \times 10^{-7} \left[I_a \ell n \frac{1}{r_a} + I_b \ell n \frac{1}{D_{ab}} + I_c \ell n \frac{1}{D_{ac}} + \dots + I_N \ell n \frac{1}{D_{aN}} \right] w b - t/m \quad (93)$$

Η (93) σημαίνει ότι η συνολική πεπλεγμένη ροή κάθε αγωγού της ομάδας έχει πεπερασμένη τιμή μόνο εφόσον ισχύει η συνθήκη (88). Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται πραγματικά από όλες τις πολυφασικές γραμμές ηλεκτρικής ενεργείας. Κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκονται οι εκφράσεις της πεπλεγμένης ροής και των άλλων αγωγών:

$$\Phi_b = 2 \times 10^{-7} \left[I_a \ell n \frac{1}{D_{ab}} + I_b \ell n \frac{1}{r_b} + I_c \ell n \frac{1}{D_{bc}} + \dots + I_N \ell n \frac{1}{D_{bN}} \right] w b - t/m \quad (94)$$

$$\Phi_k = 2 \times 10^{-7} \left[I_a \ell n \frac{1}{D_{ka}} + I_b \ell n \frac{1}{D_{kb}} + I_k \ell n \frac{1}{r_k} + \dots + I_N \ell n \frac{1}{D_{bN}} \right] w b - t/m \quad (95)$$

Η φυσική υπόσταση των συντελεστών $2 \times 10^{-7} \ln(1/r_k)$, $2 \times 10^{-7} (1/D_{kp})$ είναι επαγωγή. Ο όρος $2 \times 10^{-7} \ln(1/r_i)$, εξαρτάται μόνο από τις διαστάσεις του κάθε αγωγού και σ' αυτό οφείλεται η γενικότερη ονομασία του, σαν συνιστώσα αγωγού. Ο όρος $2 \times 10^{-7} \ln(1/D_{ij})$, εξαρτάται από τη απόσταση μεταξύ των αγωγών i και j . Για τους λόγους αυτούς, ο πρώτος μπορεί να κληθεί επαγωγή του αγωγού k και ο δεύτερος αλληλεπαγωγή μεταξύ των αγωγών i και j . Εμβαθύνοντας λίγο στους συλλογισμούς αυτούς, βλέπουμε ότι οι παραπάνω όροι δεν είναι ακριβώς οι επαγωγές και οι αλληλεπαγωγές του συστήματος. Οι επαγωγές και οι αλληλεπαγωγές ενός συστήματος ηλεκτρικών κυκλωμάτων, εφ' όσον αυτό δεν περιέχει σιδηρομαγνητικά υλικά, εξαρτώνται μόνο από τις φυσικές διαστάσεις του συστήματος και δεν επηρεάζονται από καμία ορισμένη κατανομή των ρευμάτων στους αγωγούς, όπως είναι εκείνη της εξ. (88). Όπως προκύπτει από την (86), οι πραγματικές επαγωγές και χωρητικότητες του εξεταζόμενου συστήματος θα μπορούσαν να είναι μεγαλύτερες από οποιαδήποτε πεπερασμένη τιμή.

Ότι οι ορισμοί αυτοί των επαγωγών και αλληλεπαγωγών δεν είναι τόσο πραγματικοί, όσο συμβατικοί, φαίνεται και από το ότι ο μαθηματικός διαχωρισμός των λογαριθμικών όρων, στις εξ. (92) έως και (95), έχει φυσική έννοια μόνο εφ' όσον οι ακτίνες r_k των αγωγών και οι αποστάσεις D_{kp} εκφράζονται στις ίδιες μονάδες. Μια φυσική ερμηνεία τότε για τον όρο $2 \times 10^{-7} \ln(1/r_i)$, θα ήταν ότι εκφράζει την αυτεπαγωγή του αγωγού i , πού αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο που εκτείνεται μέχρι 1m από τον αγωγό, εφ' όσον η r_i εκφράζεται επίσης σε m και αντίστοιχα ότι η $2 \times 10^{-7} \ln(1/D_{ij})$, όπου πάλι η D_{ij} εκφράζεται σε m , παριστάνει την αλληλεπαγωγή μεταξύ αγωγών i και j , που αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο που εκτείνεται πέρα από 1m . Γίνεται δηλ. ένας αυθαίρετος διαχωρισμός του χώρου μεταξύ επαγωγών και αλληλεπαγωγών, ανάλογα με την μονάδα στην οποία εκφράζονται τα r_i , D_{ij} . Με τις προϋποθέσεις αυτές, οι παραπάνω ορισμοί και η σχετική ανάλυση μπορούν να εφαρμοστούν χωρίς επιφύλαξη.

Ορίζοντας λοιπόν,

$$L_{ii} = 2 \times 10^{-7} \ell n \frac{1}{r_i} \text{ H/m} \quad (96)$$

$$L_{ij} = 2 \times 10^{-7} \ell n \frac{1}{D_{ij}} \text{ H/m} \quad (97)$$

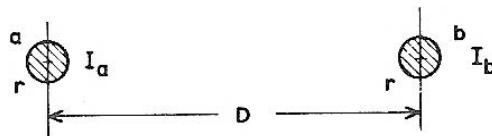
το σύστημα των εξισώσεων (95), γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \vec{\Phi}_a \\ \vec{\Phi}_b \\ \vdots \\ \vec{\Phi}_k \\ \vdots \\ \vec{\Phi}_N \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & \dots & \dots & L_{aN} \\ L_{ba} & L_{bb} & \dots & \dots & L_{bN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{ka} & \dots & L_{kk} & \dots & L_{kN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{Na} & \dots & \dots & \dots & L_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \\ \vdots \\ \vec{I}_k \\ \vdots \\ \vec{I}_N \end{bmatrix} \text{ Wb} - \text{t/m} \quad (98)$$

Η (98) είναι η γενική εξίσωση των πεπλεγμένων ροών ενός συστήματος N παράλληλων αγωγών, με τη συνθήκη (88), είναι $L_{ij}=L_{ji}$ και συνεπώς η μήτρα των αυτεπαγωγών είναι συμμετρική.

2.5. Επαγωγή μονοφασικής γραμμής δύο αγωγών

Στην περίπτωση της μονοφασικής γραμμής του σχ.7., είναι $r_a=r_b=r$ και $I_b=-I_a$. Η εξίσωση (98), γίνεται:



Σχ. 7. Μονοφασική γραμμή δυο αγωγών.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_a \\ \vec{\Phi}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} \\ L_{ba} & L_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ -I_a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{aa} - L_{ab} & 0 \\ 0 & L_{bb} - L_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ -I_a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(99)

Οι εξισώσεις των πεπλεγμένων ροών έχουν αποζευχθεί, στην περίπτωση αυτή και εύκολα βρίσκουν:

$$L_a = L_b = L_{aa} - L_{ab} = 2 \times 10^{-7} \ell n \frac{D}{r} \text{ H/m} \quad \text{ή} \quad 0,2 \ell n \frac{D}{r} \text{ mH/km}$$

(100)

Η επαγωγή γραμμής είναι:

$$L = L_a + L_b = 4 \times 10^{-7} \ell n \frac{D}{r} \text{ H/m} \quad \text{ή} \quad 0,4 \ell n \frac{D}{r} \text{ mH/km}$$

(101)

Παράδειγμα 3.1.

Να υπολογιστεί: η επαγωγή μονοφασικής γραφής με τα ακόλουθα δεδομένα:

$$r=12 \text{ mm}$$

$$D=5,76 \text{ m}$$

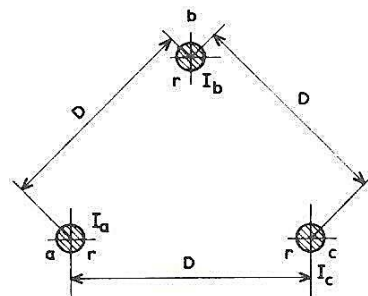
αγωγός: χαλκός, $\mu_r=1$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (101) έχουμε :

$$L = 4 \times 10^{-7} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{5760}{12} \right) = 25,7 \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad \text{ή} \quad 2,57 \text{ mH/km}$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $\omega=314 \text{ sec}^{-1}$ αποκτούμε την αντίστοιχη επαγωγική αντίδραση της γραμμής: $X=\omega L=0,808 \text{ } \Omega/\text{km}$.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι, λόγω της σχετικής "αναισθησίας" της λογαριθμικής συναρτήσεως, μία μεταβολή στις διαστάσεις της γραμμής θα επηρεάσει μόνον ελαφρά την επαγωγή. π.χ. μία αύξηση 100% της αποστάσεως D των αγωγών, στην ανωτέρω περίπτωση, θα επιφέρει αύξηση στην επαγωγική αντίδραση μόνο κατά 11%.



Σχ.8. Τριφασική γραμμή με τριγωνική συμμετρία.

2.6. Επαγωγή τριφασικής γραμμής με τριγωνική συμμετρία

Στην περίπτωση αυτή είναι, $r_a=r_b=r_c=r$ και δεχόμαστε ότι: $I_a+I_b+I_c=0$. Η (98) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \vec{\Phi}_a \\ \vec{\Phi}_b \\ \vec{\Phi}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \\ \vec{I}_c \end{bmatrix}$$

(102)

Λόγω της συμμετρίας, $L_{aa}=L_{bb}=L_{cc}=2 \times 10^{-7} \ln 1/r$ και $L_{ab}=L_{ac}=L_{bc}=2 \times 10^{-7} \ln 1/D$.

Συνεπώς, λόγω και της σχέσεως των ρευμάτων, η (102) αποσυνμπλέκεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \vec{\Phi}_a \\ \vec{\Phi}_b \\ \vec{\Phi}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} - L_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & L_{bb} - L_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & L_{cc} - L_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \\ \vec{I}_c \end{bmatrix}$$

(103)

Η συνιστάμενη αυτεπαγωγή της γραμμής ανά φάση, είναι:

$$L = L_{aa} - L_{ab} = 2 \times 10^{-7} \ell n \frac{D}{r} \text{ H/mή} \quad 0,2 \ell n \frac{D}{r} \text{ mH/km}$$

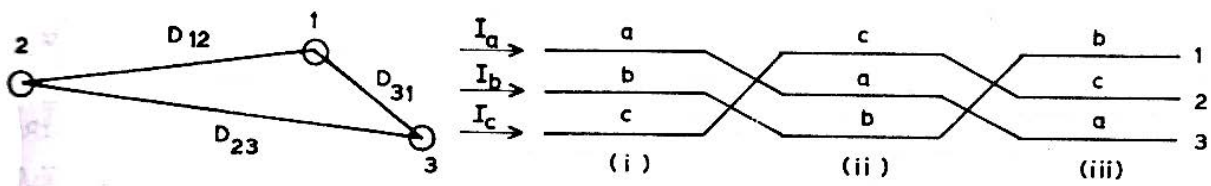
(104)

Λόγω της πλήρους συμμετρίας, η επαγωγή στην εξεταζόμενη περίπτωση είναι ίδια με εκείνη της μονοφασικής γραμμής ανά αγωγό (100).

2.7. Επαγωγή ασύμμετρης τριφασικής γραμμής με αντιμετατιθεμένους αγωγούς

Στη γενική περίπτωση της ασύμμετρης τριφασικής γραμμής οι πεπλεγμένες ροές και οι επαγωγές των τριών φάσεων δεν είναι ίδιες. Λόγω της ασυμμετρίας το συνιστάμενο μαγνητικό πεδίο της τριφασικής γραμμής δεν είναι μηδενικό και επάγει τάσεις σε γειτονικές γραμμές τηλεπικοινωνιών με ανεπιθύμητα αποτελέσματα. Η ασυμμετρία των χαρακτηριστικών στην περίπτωση αυτή μπορεί να αντιμετωπιστεί με τακτικές εναλλαγές των θέσεων των αγωγών κατά μήκος της γραμμής, ώστε κάθε αγωγός να κατέχει και τις τρεις θέσεις επί ίση απόσταση. Η εναλλαγή αυτή των αγωγών καλείται αντιμετάθεση. Ένας κύκλος αντιμεταθέσεως φαίνεται στο σχ.9. Η αντιμετάθεση έχει σαν αποτέλεσμα την ίδια μέση επαγωγή κάθε αγωγού στο μήκος ενός πλήρους κύκλου εναλλαγών.

Χαρακτηρίζοντας με 1, 2 και 3 τις τρεις θέσεις των αγωγών και θεωρώντας τα ρεύμα τα των φάσεων σταθερά σε όλο το μήκος της γραμμής, εφαρμόζουμε τη γενική εξίσωση των αυτεπαγωγών (98) στα τρία τμήματα της γραμμής, (i), (ii), (iii) διαδοχικά.



Σχ.9. Αντιμετάθεση φάσεως ασύμμετρης τριφασικής γραμμής.

$$\begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \end{bmatrix} \underset{(i)}{=} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

(105)

$$\begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \end{bmatrix} \underset{(ii)}{=} \begin{bmatrix} L_{22} & L_{23} & L_{21} \\ L_{32} & L_{33} & L_{31} \\ L_{12} & L_{13} & L_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

(106)

$$\begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \end{bmatrix} \underset{(iii)}{=} \begin{bmatrix} L_{33} & L_{31} & L_{32} \\ L_{13} & L_{11} & L_{12} \\ L_{23} & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

(107)

Θεωρώντας ότι η μέση επαγωγή ανά φάση προκύπτει από το μέσο όρο των πεπλεγμένων ροών κάθε φάσεως, στα τρία τμήματα της γραμμής και με την παραδοχή πάντοτε ότι:

$$I + I_b + I_c = 0$$

(108)

έχουμε, προσθέτοντας τις (104), (105) και (106):

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ai} + \Phi_{aii} + \Phi_{aiii} \\ \Phi_{bi} + \Phi_{bii} + \Phi_{biii} \\ \Phi_{ci} + \Phi_{cii} + \Phi_{ciii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} + L_{22} + L_{33} - L_{21} - L_{32} - L_{13} & 0 & 0 \\ 0 & L_{11} + L_{22} + L_{33} - L_{21} - L_{32} - L_{13} & 0 \\ 0 & 0 & L_{11} + L_{22} + L_{33} - L_{21} - L_{32} - L_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

(109)

Εάν η γραμμή έχει όμοιους αγωγούς θα είναι $r_a=r_b=r_c=r$ και:

$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = 2 \times 10^{-7} \ell n (1/r)$$

(110)

Ενώ

$$-L_{12} = 2 \times 10^{-7} \ell n (D_{12}), \quad L_{23} = 2 \times 10^{-7} \ell n (D_{23}), \quad -L_{31} = 2 \times 10^{-7} \ell n (D_{31})$$

(111)

$$\Phi_{\alpha\mu} = \frac{\Lambda_{ai} + \Lambda_{aii} + \Lambda_{aiii}}{3} = \frac{I_a}{3} 2 \times 10^{-7} \left[3 \ell_n \frac{1}{r} + \ell_n D_{12} + \ell_n D_{23} + \ell_n D_{31} \right]$$

ή

$$\Phi_{\alpha\mu} = 2 \times 10^{-7} I_a \ell_n \frac{\sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{31}}}{r} \text{wb} - \text{t/m} \quad (112)$$

παρόμοιες εκφράσεις βρίσκονται για τις $\Phi_{b\mu}$ και $\Phi_{c\mu}$. Άρα η μέση τιμή της επαγωγής ανά φάση είναι,

$$L = 2 \times 10^{-7} \ell_n \frac{D_{l\sigma}}{r} \text{H/m} \quad (113)$$

ή

$$L = 0,2 \ell_n \frac{D_{l\sigma}}{r} \text{mH/km} \quad (114)$$

όπου

$$D_{l\sigma} = \sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{31}} \quad (115)$$

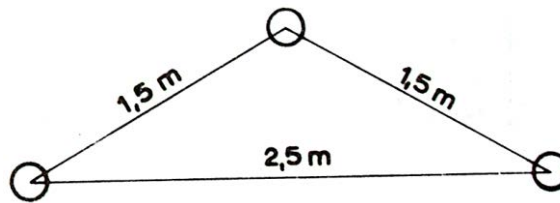
η μέση γεωμετρική απόσταση (GMD) των αγωγών της ασύμμετρης τριφασικής γραμμής. Συγκρίνοντας την (114) με τις (104) και (110), παρατηρούμε ότι η έκφραση της επαγωγής σε όλες τις περιπτώσεις είναι ενιαία. Η $D_{l\sigma}$, της γενικής περιπτώσεως (114), είναι D στις προηγούμενες περιπτώσεις. Η εφαρμοσθείσα ως τώρα μέθοδος μπορεί χρησιμοποιηθεί για γραμμές οποιουδήποτε αριθμού παράλληλων, αρκεί το άθροισμα των ρευμάτων των να είναι μηδέν.

Παρά την εξισορρόπηση των παραμέτρων που συνεπάγεται η αντιμετάθεση των αγωγών, αυτή δεν εφαρμόζεται στις σύγχρονες γραμμές παρά μόνον περιστασιακά. Ο λόγος είναι ότι η ασυμμετρία των διατάξεων είναι πολλές φορές μικρή και δεν δημιουργεί προβλήματα, ενώ η αντιμετάθεση των αγωγών απαιτεί σημαντικό χώρο και δαπάνες.

Παράδειγμα 2.1.

Μία τριφασική γραμμή απλού κυκλώματος έχει την τριγωνική διάταξη αγωγών του σχ. 10. Οι αγωγοί είναι από χαλκό σκληρής ολκήσεως, διαμέτρου 0,258 in (~6,5 mm). Να βρεθεί η

επαγωγή και η επαγωγική αντίδραση της γραμμής για συχνότητα λειτουργίας 50 Hz, ανά km και φάση.



Σχ.10. Διάταξη αγωγών γραμμής παραδείγματος 1.2.

Είναι:

$$r = 3,25 e^{-\frac{1}{4}} = 3,25 \times 0,7788 = 2,53 \text{ mm}$$

$$D_{\text{ισ}} = \sqrt[3]{1,5 \times 1,5 \times 2,5} = \sqrt[3]{5,63} = 1,78 \text{ m} = 1780 \text{ mm}$$

Εφαρμόζοντας την (114) έχουμε:

$$L = 0,2 \ell n \frac{1780}{2,53} = 0,2 \ell n (704) = 1.315 \text{ mH/km και φάση}$$

$$X_L = \omega L = 314 \times 1.315 \times 10^{-3} = 0,414 \text{ } \Omega/\text{km και φάση}$$

2.8. Χωρητικότητα και χωρητική αντίδραση

Η ωμική αντίσταση και η επαγωγική αντίδραση είναι τα στοιχεία τα οποία συνιστούν τη σύνθετη αντίσταση σειράς της γραμμής μεταφοράς. Η χωρητικότητα μαζί με την αγωγιμότητα συνιστούν την εγκάρσια ή παράλληλη σύνθετη αγωγιμότητα της γραμμής.

Τα στοιχεία σειράς, από τα όποια η επαγωγή είναι το σημαντικότερο, θέτουν ένα όριο στο ρεύμα της γραμμής και συνεπώς καθαρίζουν φυσικά τη δυνατότητα μεταφοράς ισχύος της. Τα παράλληλα στοιχεία, από τα όποια η χωρητικότητα είναι το κυριότερο, αντιπροσωπεύουν μια οδό "διαρροής" για τα ρεύματα της γραμμής. Για τάσεις μεταφοράς της τάξεως 300 έως 500 KV και μήκη γραμμών μεγαλύτερα από 300 χιλιόμετρα περίπου, οι επιπτώσεις των παράλληλων αυτών στοιχείων αποτελούν πρόβλημα βασικής σημασίας για τούς μηχανικούς μελετών ή εκμεταλλεύσεως των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας. Σε ένα καλώδιο υψηλής τάσεως, όπου οι μικρές αποστάσεις μεταξύ αγωγών ή μεταξύ αγωγών και περιβλημάτων έχουν σαν αποτέλεσμα πολύ μεγάλη χωρητικότητα ανά χιλιόμετρο, γίνεται πρακτικά αδύνατη η μεταφορά μεγάλων ποσοτήτων ενέργειας, πέρα από 30 ως 50 χιλιόμετρα, χωρίς ειδική αντιστάθμιση του καλωδίου.

Η χωρητικότητα ορίζεται με τη σχέση,

$$C = \frac{dQ}{dV} \text{ Farad} \quad (116)$$

ως ο λόγος της μεταβολής προς τη μεταβολή της τάσης η οποία επιβάλλεται σε ένα αγωγό. Εάν η διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού μέσου είναι σταθερή, τότε:

$$C = \frac{Q}{V} \text{ F} \quad (117)$$

Η παιδιακή διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων 1 και 2 στο χώρο, ο οποίος περιβάλλει ένα μακρύ κυλινδρικό αγωγό με φορτίο Q, ανά μέτρο μήκους, ομοιόμορφα κατανομημένο στην επιφάνεια του, δίνεται από τη σχέση

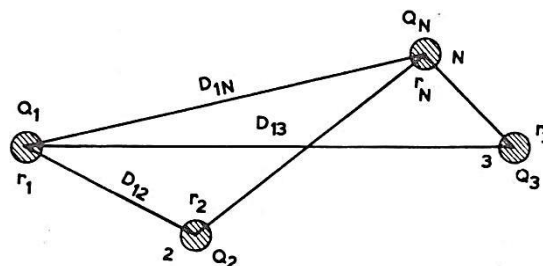
$$V_{12} = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_2}{D_1} \text{ volt/m} \quad (118)$$

όπου D_1, D_2 , οι ακτινικές αποστάσεις των σημείων 1,2 από το κέντρο του αγωγού και ϵ η διηλεκτρική σταθερά του μέσου. Έχουν θεωρηθεί ημιτονοειδή ηλεκτρικά μεγέθη.

2.9. Υπολογισμός χωρητικότητας πολυφασικών γραμμών

Θεωρώντας ένα σύστημα N παράλληλων φορτισμένων αγωγών στο χώρο, τέτοιων ώστε τα φορτία τους να έχουν διανυσματικό άθροισμα ίσο με το μηδέν, το δυναμικό κάθε αγωγού του συστήματος είναι ίσο με το αριθμητικό άθροισμα των δυναμικών του αγωγού των οφειλόμενων στα φορτία όλων των αγωγών του συστήματος.

Υποθέτουμε ότι οι αποστάσεις μεταξύ των αγωγών είναι πολύ μεγάλες σε σχέση με τη διάμετρό τους, ώστε να μπορεί να αγνοηθεί το φαινόμενο γεινιάσεως.



Σχ. 11. Σύστημα N παράλληλων αγωγών, με άθροισμα φορτίων ίσο με το μηδέν.

Εάν V_1 το δυναμικό του αγωγού 1 και $V_{11}, V_{12}, V_{13}, \dots, V_{1N}$ τα δυναμικά του αγωγού 1, τα οφειλόμενα στα φορτία Q_1, Q_2, Q_3, Q_N αντίστοιχα, θα είναι:

$$V_1 = V_{11} + V_{12} + \dots + V_{1N} \quad (119)$$

Εάν τα δυναμικά αναφέρονται σε κάποια μακρινή ισοδυναμική επιφάνεια, απέχουσα απόσταση D_0 από το σύστημα, θα είναι βάσει της (118):

$$V_{11} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{D_0}{r_1}$$

$$V_{12} = \frac{Q_2}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{D_0}{D_{12}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$V_{1N} = \frac{Q_N}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{D_0}{D_{1N}} \quad (120)$$

$$V_{1N} = \frac{Q_N}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{D_0}{D_{1N}} \quad (121)$$

είναι από τον ορισμό του συστήματος,

$$\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \dots + \vec{Q}_N = 0 \quad (122)$$

οπότε, η (119) γίνεται, βάσει των (120):

$$V_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[Q_1 \ell n \frac{D_0}{r_1} + Q_2 \ell n \frac{D_0}{D_{12}} + \dots + Q_N \ell n \frac{D_0}{D_{1N}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[Q_1 \ell n \frac{1}{r_1} + Q_2 \ell n \frac{1}{D_{12}} + \dots + Q_N \ell n \frac{1}{D_{1N}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n D_0 (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N)$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[Q_1 \ell n \frac{1}{r_1} + Q_2 \ell n \frac{1}{D_{12}} + \dots + Q_N \ell n \frac{1}{D_{1N}} \right] V \quad (123)$$

Η γενική εξίσωση του συστήματος είναι αντίστοιχα,

$$V_k = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[Q_1 \ell n \frac{1}{D_{k1}} + Q_2 \ell n \frac{1}{D_{k2}} + \dots + Q_k \ell n \frac{1}{r_k} + \dots + Q_N \ell n \frac{1}{D_{kN}} \right] V \quad (124)$$

$$P_{k1}Q_1 + P_{k2}Q_2 + \dots + P_{kk}Q_k + \dots + P_{kN}Q_N \quad (125)$$

όπου:

$$P_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{1}{r_i} \text{ daraf. meter} \quad (126)$$

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{1}{D_{ij}} \text{ daraf. meter} \quad (127)$$

Οι όροι P_{ii} , P_{ij} , εφ' όσον τα φορτία εκφράζονται σε Cb/m, έχουν διαστάσεις αντίστροφης χωρητικότητας (daraf) και καλούνται συντελεστές δυναμικού ή συντελεστές Maxwell.

Το σύστημα των εξισώσεων (124) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2N} \\ \vdots & & & \\ P_{N1} & & & \\ & \dots & \dots & P_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (128)$$

Είναι $P_{ij}=P_{ji}$ και συνεπώς η μήτρα των συντελεστών δυναμικού είναι συμμετρική. Η αντιστροφή της μήτρας των συντελεστών δυναμικού δίνει τη μήτρα χωρητικότητας του συστήματος, όπως προκύπτει από τους βασικούς ορισμούς (118) και (119), δηλ.,

$$[C] = [P]^{-1} \quad (129)$$

και:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2N} \\ \vdots & & & \\ C_{N1} & & & \\ & C_{N2} & & C_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \text{ Cb/m} \quad (130)$$

Η ισοδυναμική επιφάνεια στην οποία αναφέρονται δυναμικά των αγωγών μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει εξ ορισμού, δυναμικό μηδέν. Συνεπώς, περιλαμβάνει και τον ουδέτερο κόμβο ενός συμμετρικού τριφασικού συστήματος ηλεκτρικών μεγεθών.

Σε πρακτικές μονάδες, οι (126) και (127) γίνονται με $\epsilon = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m.

$$P_{ii} = 17.986 \times 10^6 \ln \frac{1}{r_i} \text{ Km/Farad}$$

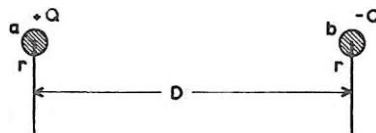
$$P_{ij} = 17.986 \times 10^6 \ln \frac{1}{D_{ij}} \text{ Km/Farad}$$

(131)

Για το διαχωρισμό των λογαριθμικών όρων στις (120) ισχύουν οι προϋποθέσεις και οι παραδοχές που αναφέρθηκαν στην αντίστοιχη ανάλυση της επαγωγής. Οι r_i και D_{ij} εκφράζονται με την ίδια μονάδα μήκους (π.χ. m).

2.10. Χωρητικότητα μονοφασικής γραμμής δύο αγωγών.

Έστω, η μονοφασική γραμμή δύο αγωγών του σχ. 8., όπου r η κοινή ακτίνα των αγωγών. Εάν δεν ληφθεί υπόψη, η επίδραση της γης θα είναι $\vec{Q}_a + \vec{Q}_b = 0$



Σχ.12. Μονοφασική γραμμή δυο αγωγών.

Η γενική εξίσωση (128) γράφεται, για την περίπτωση αυτή,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} \\ P_{ba} & P_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} \\ P_{ba} & P_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{aa} - P_{ab} & 0 \\ 0 & P_{bb} - P_{ba} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(132)

Οι εξισώσεις των συντελεστών δυναμικού έχουν αποζευχθεί στην περίπτωση αυτή και δεδομένου ότι $P_{aa} = P_{bb}$ εύκολα βρίσκουμε:

$$P_a = P_b = P_{aa} - P_{ab} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(\ell n \frac{1}{r} - \ell n \frac{1}{D} \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{D}{r} \quad (133)$$

Η μήτρα [P] έγινε διαγώνια άρα εύκολα αντιστρέφεται και,

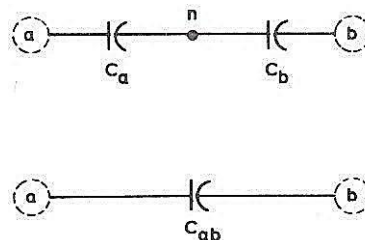
$$\begin{bmatrix} C_a & 0 \\ 0 & C_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/P_a & 0 \\ 0 & 1/P_b \end{bmatrix} = 2\pi\epsilon \begin{bmatrix} 1/\ell n(D/r) & 0 \\ 0 & 1/\ell n(D/r) \end{bmatrix}$$

$$C_a = C_b = \frac{2\pi\epsilon}{\ell n(D/r)} F/m \quad (134)$$

Οι τάσεις V_a , V_b των αγωγών αναφέρονται στην επιφάνεια δυναμικού μηδέν, δηλ. είναι τάσεις προς ουδέτερο. Συνεπώς και οι υπολογισθείσες χωρητικότητες των δύο αγωγών της γραμμής είναι χωρητικότητες προς ουδέτερο (σχ. 13). Η χωρητικότητα μεταξύ φάσεων, δηλ. μεταξύ των αγωγών θα είναι αντίστοιχα,

$$C_{ab} = \frac{C_a}{2} = \frac{\pi\epsilon}{\ell n(D/r)} F/m \quad (135)$$

πράγμα που εξηγείται από ότι η τάση μεταξύ των δυο αγωγών είναι διπλασία των V_a , V_b .



Σχ.13. Χωρητικότητες προς ουδέτερο και μεταξύ φάσεων.

Η (134) για σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r = 1$, δηλ. $\epsilon = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ γίνεται:

$$C = \frac{0,0556}{\ell n(D/r)} \frac{\mu\text{F}}{\text{Km}}, \text{ προς ουδέτερο} \quad (136)$$

Η εξίσωση (136) για τη χωρητικότητα ανά φάση προς ουδέτερο αντιστοιχεί στην εξίσωση (100) για την επαγωγή ανά φάση. Μια διαφορά μεταξύ των δύο, οι οποίες και οι δυο

περιέχουν τον όρο $\ln(D/r)$, είναι ότι η ακτίνα r στην περίπτωση της χωρητικότητας είναι η πραγματική εξωτερική ακτίνα του αγωγού και όχι η μέση γεωμετρική ακτίνα r , όπως στον τύπο της επαγωγής.

Η βασική εξίσωση (118) στηρίζεται στην υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου στην επιφάνεια του αγωγού. Όταν είναι παρόντα και άλλα φορτία, η κατανομή του φορτίου στην επιφάνεια του αγωγού δεν είναι ομοιόμορφη και οι εξισώσεις, που βασίζονται στην (118), δεν είναι απόλυτα ορθές. Η ανομοιόμορφη κατανομή του φορτίου μπορεί να ληφθεί υπόψη μάλλον θεωρώντας τούς αγωγούς ως ισοδυναμικές επιφάνειες, όπως και είναι, παρά ως ομοιόμορφα φορτισμένους αγωγούς. Ακόμη όμως και για τις απλούστερες διατάξεις αγωγών παράλληλων κυκλωμάτων ή τριφασικών γραμμών, η εξίσωση της χωρητικότητας, η οποία να βασίζεται σε πραγματική κατανομή φορτίων, γίνεται πολυσύνθετη και δεν είναι πρακτική. Η παραδοχή ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου συνεπάγεται πολύ μικρά σφάλματα, εάν οι αποστάσεις μεταξύ αγωγών είναι πολύ μεγάλες σε σύγκριση με τις διαμέτρους τους όπως και πραγματικά συμβαίνει στις εναέριες γραμμές μεταφοράς. Πολύ μικρό σφάλμα συνεπάγεται επίσης η χρησιμοποίηση της εξίσωσης (102), η οποία πρόεκυψε για ένα συμπαγή κυλινδρικό αγωγό ακτίνας r , για τον υπολογισμό της χωρητικότητας πολύκλωνου αγωγού, στην επιφάνεια του οποίου η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι διαφορετική από εκείνη του συμπαγούς κυλινδρικού αγωγού. Η ακτίνα που χρησιμοποιείται στην περίπτωση του πολύκλωνου αγωγού για τον υπολογισμό της χωρητικότητας είναι η εξωτερική του ακτίνα

Παράδειγμα 2.2

Να υπολογιστεί η χωρητικότητα μονοφασικής γραμμής δύο αγωγών με τα ακόλουθα δεδομένα:

$$r=12 \text{ mm}$$

$$D=5,76 \text{ m}$$

$$\epsilon = 1$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (136) βρίσκουμε τη χωρητικότητα κάθε αγωγού της γραμμής προς ουδέτερο:

$$C = \frac{0,0556}{\ln(5760/12)} = 0.009 \text{ } \mu\text{F/Km}$$

Η χωρητική αντίδραση κάθε αγωγού προς τον ουδέτερο για $f=50 \text{ Hz}$

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{314 \times 0.009} = 0.353 \times 10^6 \text{ } \text{ohm} \cdot \text{Km}$$

Η χωρητική αγωγιμότητα κάθε αγωγού προς τον ουδέτερο είναι:

$$B = \frac{1}{X_c} = \frac{1}{3.353 \times 10^6} = 2.826 \times 10^{-6} \text{ S/Km}$$

2.11. Χωρητικότητα τριφασικής γραμμής με τριγωνική συμμετρία

Στην περίπτωση αυτή είναι, $r_a=r_b=r_c=r$ (βλ.σχ.4) και δεχόμαστε ότι:

$$\vec{Q}_a + \vec{Q}_b + \vec{Q}_c = 0 \quad (137)$$

Η (128) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} \\ P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} \\ P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{bmatrix} \quad (138)$$

Λόγω της συμμετρίας,

$$P_{aa} = P_{bb} = P_{cc} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n(1/r) \quad (139)$$

και:

$$P_{ab} = P_{bc} = P_{ca} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n(1/D) \quad (140)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (139), (140) και τη σχέση των φορτίων (137), η (138) γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa} - P_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & P_{aa} - P_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & P_{aa} - P_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{bmatrix} \quad (141)$$

Αντιστρέφοντας τη μήτρα των συντελεστών δυναμικού, έχουμε τη μήτρα των χωρητικότητων, επίσης διαγώνια:

$$\begin{bmatrix} C_a & 0 & 0 \\ 0 & C_b & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{P_{aa} - P_{ab}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{P_{aa} - P_{ab}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{P_{aa} - P_{ab}} \end{bmatrix} \quad (142)$$

Άρα,

$$C_a = C_b = C_c = \frac{1}{P_{aa} - P_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ell \ln(D/R)} \text{ F/m} \quad (143)$$

δηλαδή η χωρητικότητα ανά φάση προς ουδέτερο της γραμμής για $\epsilon_r = 1$ είναι:

$$C = \frac{0.0556}{\ell \ln(D/r)} \mu\text{F/Km} \quad (144)$$

2.12. Χωρητικότητα ασύμμετρης τριφασικής γραμμής με αντιμετατεθειμένους αγωγούς

Στη γενική περίπτωση της ασύμμετρης τριφασικής γραμμής ισχύουν όσα αναφέρθηκαν γενικά στο αντίστοιχο εδάφιο της επαγωγής 2.7. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως εκεί, με αντίστοιχα μεγέθη τις τάσεις αντί πεπλεγμένες ροές, φόρτια αντί ρεύματα και συντελεστές δυναμικού αντί επαγωγές καταλήγουμε, με το ίδιο σκεπτικό και της παραδοχής ότι το φορτίο κάθε φάσεως είναι ίδιο στις τρεις θέσεις του κύκλου αντιμεταθέσεως, σε τρεις εξισώσεις $[V]=[P].[Q]$, αντίστοιχες προς τις (105), (106), (107). Θεωρώντας επίσης αντίστοιχα, ότι η μέση χωρητικότητα ανά φάση προς ουδέτερο, προκύπτει από το μέσο ορό των τάσεων κάθε φάσεως, στα τρία τμήματα της γραμμής, για καθένα από τα οποία,

$$\vec{Q}_a + \vec{Q}_b + \vec{Q}_c = 0 \quad (145)$$

έχουμε προσθέτοντας τις τρεις ανωτέρω εξισώσεις, όπως στην περίπτωση της αυτεπαγωγής, αναφερόμενος πάλι στο σχ.9.

$$\begin{bmatrix} V_{ai} + V_{aai} + V_{aaii} \\ V_{bi} + V_{bii} + V_{biii} \\ V_{ci} + V_{cii} + V_{ciii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} + P_{22} + P_{33} - P_{21} - P_{32} - P_{13} & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} + P_{22} + P_{33} - P_{21} - P_{23} - P_{31} & 0 \\ 0 & 0 & P_{11} + P_{22} + P_{33} - P_{21} - P_{23} - P_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{bmatrix} \quad (146)$$

Εάν, $r_a = r_b = r_c = r$ θα είναι,

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (147)$$

και:

$$P_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{1}{D_{12}}, P_{23} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{1}{D_{23}}, P_{31} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{1}{D_{31}} \quad (148)$$

Η μέση τάση της φάσεως "a" κατά μήκος της γραμμής, θα είναι :

$$V_{a\mu} = \frac{V_{ai} + V_{aii} + V_{aiii}}{3} = \frac{Q_a}{3} \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[3\ell n \frac{1}{r} + \ell n D_{12} + \ell n D_{23} + \ell n D_{31} \right] = \frac{Q_a}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{\sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}}{r} \quad (149)$$

Παρόμοιες εκφράσεις βρίσκονται και για τις $V_{b\mu}$, $V_{c\mu}$. Άρα η μέση τιμή της χωρητικότητας ανά φάση προς ουδέτερο είναι,

$$C = \frac{Q_a}{V_{a\mu}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ell n (D_{1\sigma}/r)} = \frac{0.0556}{\ell n (D_{1\sigma}/r)} \mu F/Km \quad (150)$$

όπου $D_{1\sigma} = \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}$, η μέση γεωμετρική απόσταση των αγωγών της γραμμής. Παρατηρούμε ότι και για τη χωρητικότητα η έκφραση είναι ενιαία για όλες τις περιπτώσεις [τύποι (136), (144), (150)].

2.13. Χωρητική αντίδραση και αγωγιμότητα, ρεύμα φορτίσεως της γραμμής

Η χωρητική αντίδραση της γραμμής είναι,

$$X' = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{4\pi^2 f \epsilon} \ell n \left(\frac{D_{1\sigma}}{r} \right) Km/s \quad \text{ανά φάση προς ουδέτερο} \quad (151)$$

και για $f=50$ Hz και $\epsilon_r=1$, είναι:

$$X' = 0.0573 \cdot 10^6 \ell n \left(\frac{D_{1\sigma}}{r} \right) Km/s \quad \text{ανά φάση προς ουδέτερο} \quad (152)$$

Η χωρητική αγωγιμότητα της γραμμής θα είναι:

$$B = 2\pi fC = \frac{17.452 \cdot 10^{-6}}{\ln(D_{\sigma}/r)} \text{ S/km}$$

ανά φάση προς ουδέτερο (153)

Το ρεύμα, το οποίο προκαλείται από την εναλλασσόμενη φόρτιση και εκφόρτωση της γραμμής, την οφειλόμενη σε μια εναλλασσόμενη τάση, καλείται ρεύμα φορτίσεως της γραμμής ή χωρητικό ρεύμα της γραμμής. Ρεύμα φορτίσεως ρέει σε μια γραμμή μεταφοράς ακόμη και όταν αυτή βρίσκεται σε κενή λειτουργία.

Το χωρητικό ρεύμα ή ρεύμα φορτίσεως της γραμμής είναι,

$$I_{\varphi\rho} = jBV = 2\pi fCVA/\text{km}$$

ανά φάση (154)

όπου V η φασική τάση της γραμμής. Βάσει της (153), η έκφραση του ρεύματος φορτίσεως γίνεται,

$$I_{\varphi\rho} = 17,452 \cdot 10^{-6} \frac{V}{\ln(D_{\sigma}/r)} \text{ A/km}$$

ανά φάση (155)

με την τάση εκπεφρασμένη σε volt.

Παράδειγμα 2.3.

Να βρεθεί η χωρητικότητα και η χωρητική αντίδραση ανά km μήκους, της γραμμής του Παραδείγματος 3.2. Εάν η γραμμή λειτουργεί υπό τάση 22.000 volt να βρεθεί επίσης το ρεύμα φορτίσεως της ανά km μήκους.

$$r=3,25 \text{ mm}$$

$$D_{\sigma}=1780 \text{ mm}$$

Εφαρμόζοντας την εξ. (150)

$$C_n = \frac{0.0556}{\ln(1780/3.25)} = 0.0088 \text{ }\mu\text{F/km}$$

προς ουδέτερο

$$X_c = \frac{10^6}{2\pi \times 50 \times 0,0088} = 0,3615 \times 10^6 \text{ Ohm} \cdot \text{Km}$$

προς τον ουδέτερο

Το μέγεθος του ρεύματος φορτίσεως είναι :

$$I_{\varphi\rho} = 2\pi \times 50 \times 0,008 \times 10^{-6} \times 22.000/\sqrt{3} = 35,2 \times 10^{-3} \text{ A/km}$$

2.14. Πολλαπλοί αγωγοί φάσεων

Η κατεύθυνση προς όλο και υψηλότερες τάσεις μεταφοράς έχει σαν αποτέλεσμα το αρχικό ενδιαφέρον και την καθιέρωση στη συνέχεια της τεχνικής της χρησιμοποίησης δύο ή περισσότερων αγωγών ανά φάση, σε μικρή απόσταση τον ένα από τον άλλο, σχετικά με τις αποστάσεις μεταξύ φάσεων. Μια τέτοια γραμμή λέγεται ότι αποτελείται από πολλαπλούς αγωγούς ή από δέσμες αγωγών ανά φάση. Συνήθως τα διαστήματα μεταξύ των αγωγών μιας δέσμης είναι δέκα φορές περίπου μεγαλύτερα από τη διάμετρο του ενός αγωγού. Οι γραμμές μεταφοράς 400 KV του ελληνικού συστήματος έχουν δύο αγωγούς ανά φάση, με διάστημα 30 cm μεταξύ των αγωγών κάθε φάσεως.

Οι επί μέρους αγωγοί κάθε δέσμης τηρούνται στην προκαθορισμένη απόσταση μεταξύ τους στα σημεία στηρίξεως τους στους μονωτήρες αναρτήσεως, καθώς επίσης, προκειμένου για μεγάλα ανοίγματα γραμμής, σε ενδιάμεσα σημεία με κατάλληλους διαχωριστήρες. Όπου χρησιμοποιούνται δύο αγωγοί ανά φάση αυτοί έχουν οριζόντια διάταξη, οι τρεις αγωγοί ισόπλευρη τριγωνική διάταξη και οι τέσσερις διατάσσονται στις κορυφές τετράγωνου, με οριζόντιες και κατακόρυφες πλευρές. Οι επί μέρους αγωγοί μιας δέσμης έχουν μικρότερη διατομή από την ισοδύναμη διατομή ενός μοναδικού αγωγού με αποτέλεσμα ευχερέστερους χειρισμούς και εγκατάστασή τους. Λόγω αλληλεπιδράσεως των ηλεκτρικών πεδίων, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια κάθε αγωγού είναι σημαντικά μειωμένη και συνεπώς και οι εκκενώσεις Corona και οι τηλεπικοινωνιακές παρενοχλήσεις είναι αντίστοιχα μειωμένες σε σύγκριση με την περίπτωση ενός ισοδύναμου αγωγού ανά φάση. Οι πολλαπλοί αγωγοί μειώνουν επίσης την επαγωγική αντίδραση ανά φάση, βελτιώνοντάς έτσι τη συμπεριφορά της γραμμής. Τα πλεονεκτήματα αυτά συντέλεσαν στην καθιέρωση των πολλαπλών αγωγών στις γραμμές μεταφοράς υπερύψηλης τάσεως.

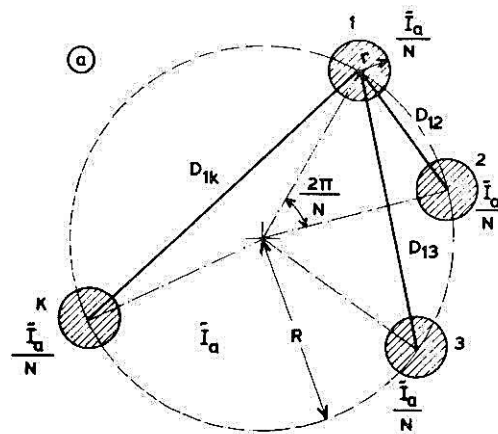
Οι μέθοδοι, οι όποιες αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο αυτό, μπορούν να επεκταθούν, ώστε να δώσουν ακριβείς εκφράσεις των επαγωγικών και χωρητικών αντιδράσεων των γραμμών με πολλαπλούς αγωγούς, εφ' όσον οι βασικές συνθήκες, δηλ. τα αθροίσματα ρευμάτων και φορτίων όλων των αγωγών της γραμμής είναι πάντα ίσα προς το μηδέν. Η ωμική αντίσταση του πολλαπλού αγωγού προκύπτει σαν υποπολλαπλάσιο της ωμικής αντιστάσεως ενός αγωγού μέλους της δέσμης.

2.15. Επαγωγή γραμμής μεταφοράς με πολλαπλούς αγωγούς

Οι αγωγοί της δέσμης, η οποία αποτελεί τον πολλαπλό αγωγό μιας φάσεως, βρίσκονται κατά κανόνα τοποθετημένοι στις κορυφές κανονικού πολυγώνου και είναι όμοιοι, δηλ. έχουν την ίδια ακτίνα. Το ρεύμα δεν θα κατανεμηθεί εξ ίσου μεταξύ των αγωγών μελών της δέσμης, εκτός αν γίνει αντιμετάθεση των αγωγών της δέσμης κατά μήκος της γραμμής. Οι διαφορές όμως που προκύπτουν με την παραδοχή της ομοιόμορφης

κατανομής, είναι πολύ μικρές πρακτικά για την απαιτούμενη ακρίβεια υπολογισμού των παραμέτρων και θεωρούμε ότι υφίσταται σε κάθε περίπτωση ισοκατανομή του ρεύματος στους αγωγούς μέλη της δέσμης.

Στο σχ.14 παριστάνεται ένας πολλαπλός αγωγός φάσεως, της φάσεως "α" τριφασικής γραμμής, με N αγωγούς μέλη ακτίνας r τοποθετημένους συμμετρικά στην περιφέρεια κύκλου με ακτίνα R. Η τριφασική γραμμή αποτελείται από τρεις όμοιους συμμετρικούς πολλαπλούς αγωγούς φάσεων, σε ασύμμετρη διάταξη.



Σχ.14. Πολλαπλός αγωγός φάσεως "α" τριφασικής γραμμής.

θεωρώντας, ότι το άθροισμα των ρευμάτων στο σύστημα των 3N αγωγών της τριφασικής γραμμής, είναι ίσο με το μηδέν, οπότε ισχύει η εξίσωση (98), γράφουμε την εξίσωση της πεπλεγμένης ροής του αγωγού 1, του πολλαπλού αγωγού της φάσεως "α", με τα ρεύματα των αγωγών της ίδιας φάσεως και των άλλων δύο φάσεων:

$$\Phi_{\alpha 1} = 2 \times 10^{-7} \left[\frac{I_{\alpha}}{N} \left(\ell n \frac{1}{r} + \ell n \frac{1}{D_{12}} + \ell n \frac{1}{D_{13}} + \dots + \ell n \frac{1}{D_{1N}} \right) + I_b \ell n \frac{1}{D_{ab}} + I_c \ell n \frac{1}{D_{ac}} \right] \text{wb} - \text{t/m} \quad (156)$$

$$= 2 \times 10^{-7} \left[\frac{I_{\alpha}}{N} \left(\ell n \frac{1}{r D_{12} D_{13} \dots D_{1N}} \right) + I_b \ell n \frac{1}{D_{ab}} + I_c \ell n \frac{1}{D_{ac}} \right] \text{wb} - \text{t/m} \quad (157)$$

Η πεπλεγμένη ροή του αγωγού 1 της φάσεως "α" με τη δέσμη "b" ή τη δέσμη "c" συνίσταται στην πεπλεγμένη ροή του αγωγού αυτού με όλο το ρεύμα της φάσεως "b" ή της "c" και θα μπορούσε να είναι ο μέσος όρος της πεπλεγμένης ροής του αγωγού αυτού με καθένα αγωγό της δέσμης "b" ή "c", δεδομένου ότι οι αγωγοί μιας δέσμης είναι συνδεδεμένοι εν παραλλήλω. Επειδή όμως οι αποστάσεις μεταξύ φάσεων είναι πολύ μεγαλύτερες από τις εσωτερικές αποστάσεις D_{12} , D_{23} , ... μιας δέσμης υποθέτουμε ότι οι αποστάσεις μεταξύ αγωγών που ανήκουν σε διαφορετικές δέσμες είναι περίπου ίσες με την απόσταση των γεωμετρικών κέντρων των δεσμών και αυτό έχει εφαρμοστεί στην (156).

Από το σχ.14 προκύπτουν οι εξής εκφράσεις για τις αποστάσεις μεταξύ αγωγών:

$$D_{12} = 2R \eta \mu \left(\frac{\pi}{N} \right)$$

$$D_{13} = 2R \eta \mu \left(\frac{2\pi}{N} \right)$$

.....

(158)

.....

$$D_{1k} = 2R \eta \mu \frac{(K-1)\pi}{N}$$

.....

$$D_{1N} = 2R \eta \mu \frac{(N-1)\pi}{N}$$

(159)

βάση των (157), ή (158) γίνεται:

$$\Lambda_{\alpha 1} = 2 \times 10^{-7} \left[\frac{I_{\alpha}}{N} \ell n \frac{1}{rR^{(N-1)} \left(2\eta \mu \frac{\pi}{N} \right) \left(2\eta \mu \frac{2\pi}{N} \right) \dots \left(2\eta \mu \frac{(N-1)\pi}{N} \right)} + I_b \ell n \frac{1}{D_{ab}} + I_c \ell n \frac{1}{D_{ac}} \right] \text{wb t/m}$$

(160)

είναι όμως,

$$\left[2\eta \mu \left(\frac{\pi}{N} \right) \right] \left[2\eta \mu \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right] \dots \left[2\eta \mu \left(\frac{(N-1)\pi}{N} \right) \right] = N, \text{ για } N > 1$$

(161)

ΟΠΟΤΕ:

$$\Phi_{\alpha 1} = 2 \times 10^{-7} \left[I_{\alpha} \ell n \frac{1}{[rNR^{(N-1)}]^{1/N}} - I_b \ell n D_{ab} - I_c \ell n D_{ac} \right] \text{wb} - \text{t/m}$$

(162)

Η αντίστοιχη επαγωγή του αγωγού 1 της δέσμης "α" θα είναι,

$$L_{\alpha 1} = \frac{\Phi_{\alpha 1}}{I_{\alpha}/N} = \frac{2 \times 10^{-7}}{I_{\alpha}} N \left[I_{\alpha} \ell n \frac{1}{[rNR^{(N-1)}]^{1/N}} - I_b \ell n D_{ab} - I_c \ell n D_{ac} \right] \text{H/m}$$

(163)

Λόγω της συμμετρίας των αγωγών της δέσμης και της ισοκατανομής του ρεύματος I_{α} στους αγωγούς, οι αντίστοιχες επαγωγές των άλλων αγωγών θα είναι ίσες με την $L_{\alpha 1}$ και συνεπώς η συνολική επαγωγή του πολλαπλού αγωγού "α", θα είναι:

$$L_{\alpha} = \frac{L_{\alpha l}}{N} = \frac{2 \times 10^{-7}}{I_{\alpha}} \left[I_{\alpha} \ell n \frac{1}{[rNR^{(N-1)}]^{1/N}} - I_b \ell n D_{ab} - I_c \ell n D_{ac} \right] \text{H/m}$$
(164)

Η συνολική άρα πεπλεγμένη ροή της δέσμης "α" με όλα τα ρεύματα της γραμμής,

$$\Lambda_{\alpha} = L_{\alpha\alpha}I_{\alpha} + L_{\alpha b}I_b + L_{\alpha c}I_c$$
(165)

$$= 2 \times 10^{-7} \left[I_{\alpha} \ell n \frac{1}{[rNR^{(N-1)}]^{1/N}} - I_b \ell n D_{ab} - I_c \ell n D_{ac} \right] \text{wb} - \text{t/m}$$
(166)

Παρόμοιες εκφράσεις βρίσκονται κατά τον ίδιο τρόπο για τις Λ_b και Λ_c :

$$\Lambda_b = L_{b\alpha}I_{\alpha} + L_{bb}I_b + L_{bc}I_c$$

$$\Lambda_c = L_{c\alpha}I_{\alpha} + L_{cb}I_b + L_{cc}I_c$$
(167)

$$\begin{bmatrix} \Lambda_a \\ \Lambda_b \\ \Lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \text{wb} - \text{t/m}$$
(168)

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της αντιμεταθέσεως των τριών φάσεων, όπως στην περίπτωση των απλών αγωγών και θεωρώντας τη συνθήκη,

$$\vec{I}_a + \vec{I}_b + \vec{I}_c = 0$$

καταλήγουμε στη μέση επαγωγή ανά φάση της ασύμμετρης τριφασικής γραμμής με πολλαπλούς αγωγούς:

$$L = 2 \times 10^{-7} \ell n \frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{ca}D_{bc}}}{[rNR^{(N-1)}]^{1/N}} \text{H/m}$$
(169)

ή

$$L = 2 \times 10^{-7} \ell n \frac{D_{l\sigma}}{r_{l\sigma}} \text{H/m}$$
(170)

όπου $D_{l\sigma}$ η μέση γεωμετρική απόσταση των πολλαπλών αγωγών και

$$r_{l\sigma} = [rNR^{(N-1)}]^{1/N}$$
(171)

η ισοδύναμη ακτίνα των πολλαπλών αγωγών. Η (170) γράφεται ακόμη:

$$L = 0,2 \ell n \frac{D_{l\sigma}}{r_{l\sigma}} \text{ mH/Km} \quad (172)$$

2.16. Χωρητικότητα γραμμής με πολλαπλούς αγωγούς

Θεωρούμε πάλι μια ασύμμετρη τριφασική γραμμή με συμμετρικούς πολλαπλούς αγωγούς φάσεων, όπως του σχ.13 και υποθέτουμε ότι το άθροισμα των ηλεκτρικών φορτίων του συστήματος είναι ίσο με το μηδέν. Υποθέτοντας πάλι ότι το φορτίο κάθε φάσεως είναι ισοκατανομημένο μεταξύ των επί μέρους αγωγών της δέσμης, γραφούμε την εξίσωση του δυναμικού προς ουδέτερο του αγωγού 1 της ίδιας δέσμης και των δεσμών των άλλων δύο φάσεων,

$$V_{\alpha l} = \frac{Q_{\alpha}/N}{2\pi\epsilon} \left[\ell n \frac{1}{r} + \ell n \frac{1}{D_{12}} + \dots + \ell n \frac{1}{D_{1N}} \right] + \frac{Q_b}{2\pi\epsilon} + \ell n \frac{1}{D_{ab}} + \frac{Q_c}{2\pi\epsilon} + \ell n \frac{1}{D_{ac}} V \quad \text{προς ουδέτερο} \quad (173)$$

και σύμφωνα με τις εξισώσεις (157) και (161) θα είναι:

$$V_{\alpha l} = \frac{Q_o}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{1}{[rNR^{(N-1)}]^{1/N}} + \frac{Q_b}{2\pi\epsilon} + \ell n \frac{1}{D_{ab}} + \frac{Q_c}{2\pi\epsilon} + \ell n \frac{1}{D_{ac}} V \quad \text{προς ουδέτερο} \quad (174)$$

$$= V_{\alpha 1\alpha} + V_{\alpha 1b} + V_{\alpha 1c} \quad (175)$$

Η τάση προς τον ουδέτερο του αγωγού 1 της δέσμης "α", λόγω του φορτίου Q_b της δέσμης "b" είναι όση με τη μέση τιμή της τάσης που αναπτύσσεται στον αγωγό 1 της "α" από την επίδραση του φορτίου κάθε αγωγού της "b". Θεωρώντας και εδώ ότι οι αποστάσεις μεταξύ αγωγών μιας δέσμης και των αγωγών μιας άλλης δέσμης είναι περίπου ίσες με την απόσταση μεταξύ των γεωμετρικών κέντρων των δεσμών, η τάση κάθε αγωγού μιας δέσμης λόγω του φορτίου μιας άλλης δέσμης, προκύπτει όπως στην εξίσωση (173) βάσει της απόστασης αυτής και του συνολικού φορτίου της άλλης.

Λόγω της συμμετρίας της δέσμης και της ισοκατανομής του φορτίου Q_{α} στους N αγωγούς της οι τάσεις και των άλλων αγωγών της δέσμης θα είναι ίδιες με την (176). Επομένως η συνολική τάση της δέσμης "α" η οφειλόμενη σε τα φορτία της γραμμής θα έχει την ίδια έκφραση, δηλ.

$$\Lambda_{\alpha l} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[Q_{\alpha} \ell n \frac{1}{[rNR^{(N-1)}]^{1/N}} - Q_b \ell n \frac{1}{D_{\alpha b}} + Q_c \ell n \frac{1}{D_{\alpha c}} \right] \quad \text{προς ουδέτερο} \quad (176)$$

$$= V_{\alpha\alpha} + V_{\alpha b} + V_{\alpha c} \quad (177)$$

οι αντίστοιχοι συντελεστές δυναμικού της δέσμης "α" είναι,

$$P_{aa} = \frac{V_{aa}}{Q_a} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{1}{[rNR^{(N-1)}]^{1/N}} df \cdot m$$

$$P_{ab} = \frac{V_{ab}}{Q_b} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{1}{D_{ab}} df \cdot m$$

$$P_{ac} = \frac{V_{ac}}{Q_c} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{1}{D_{ac}} df \cdot m \quad (178)$$

όποτε η (177) γράφεται:

$$V_a = P_{aa}Q_a + P_{ab}Q_b + P_{ac}Q_c \quad (179)$$

αντίστοιχα θα είναι:

$$V_b = P_{ba}Q_a + P_{bb}Q_b + P_{bc}Q_c$$

$$V_c = P_{ca}Q_a + P_{cb}Q_b + P_aQ_c \quad (180)$$

Εφαρμόζοντας και εδώ τη μέθοδο της αντιμεταθέσεως των τριών φάσεων και δεδομένου ότι, $\vec{Q}_a + \vec{Q}_b + \vec{Q}_c = 0$, καταλήγουμε στην έκφραση της μέσης χωρητικότητας ανά φάση προς τον ουδέτερο μιας ασύμμετρης τριφασικής γραμμής με πολλαπλούς αγωγούς.

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ell n(\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ac}} / [rNR^{(N-1)}]^{1/N})} = \frac{2\pi\epsilon}{\ell n(D_{i\sigma}/r_{i\sigma})} F/m$$

προς τον ουδέτερο (181)

H

$$C = \frac{0,0556}{\ell n(D_{i\sigma}/r_{i\sigma})} \mu F/Km$$

προς τον ουδέτερο

$$(182)$$

όπου:

$$D_{\iota\sigma} = \sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ac}} \text{ και } r_{\iota\sigma} = [rNR^{(N-1)}]^{1/N} \quad (183)$$

η μέση γεωμετρική απόσταση της γραμμής και η ισοδύναμη ακτίνα των πολλαπλών αγωγών της αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**Παρασκευή, εξίσωση και ανάλυση τριφασικής γραμμής μεταφοράς****3.1. Εισαγωγή**

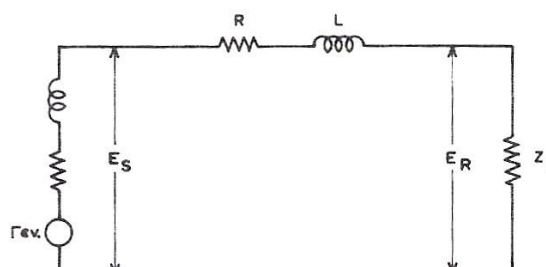
Μια βασική απαίτηση κατά τη σχεδίαση και τη λειτουργία ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας είναι η γνώση της τιμής της τάσεως και του ρεύματος σε διάφορα σημεία.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθούν εξισώσεις και τύποι με τους οποίους είναι δυνατός ο υπολογισμός της τάσεως του ρεύματος και του συντελεστή ισχύος σε οποιοδήποτε σημείο μιας γραμμής μεταφοράς, με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστές οι τιμές αυτές σε ένα άλλο σημείο. Οι εξισώσεις αυτές δείχνουν την επίδραση των διαφόρων παραμέτρων μιας γραμμής μεταφοράς στην πτώση τάσεως κατά μήκος της για διάφορα φορτία και χρησιμεύουν στον υπολογισμό της απόδοσης καθώς και στον υπολογισμό των ορίων ροής ισχύος μιας γραμμής μεταφοράς τόσο υπό συνθήκες μόνιμης λειτουργίας, όσο και υπό μεταβατικές συνθήκες.

3.2. Παράσταση της γραμμής μεταφοράς

Βασική προϋπόθεση μονοφασικής παράστασης ενός τριφασικού κυκλώματος είναι η τριφασική συμμετρία τόσο του κυκλώματος, όσο των ηλεκτρικών μεγεθών (τάσεων και ρευμάτων) που επιβάλλονται σ' αυτό.

Οι γραμμές μεταφοράς λειτουργούν υπό κανονικές συνθήκες με συμμετρική φόρτιση και είτε έχουν αντιμεταπιθεμένους αγωγούς φάσεων ή όχι κατά μήκος της γραμμής, η ασυμμετρία των φάσεων είναι μικρή και οι γραμμές θεωρούνται συμμετρικές. Το μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα, στην περίπτωση αυτή, περιέχει τα στοιχεία μιας φάσεως και παριστάνεται στο σχ.15.



Σχ.15. Μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα τριφασικού κυκλώματος γραμμής μεταφοράς.

Οι υπολογισμοί, οι οποίοι γίνονται για το κύκλωμα αυτό επεκτείνονται σε όλο το τριφασικό κύκλωμα, δεδομένου ότι τα ρεύματα των δυο άλλων φάσεων είναι ίσα σε μέγεθος με το ρεύμα της υπολογισθείσας φάσεως και σε φασικές αποκλίσεις 120° και 240° από αυτό. Δεν έχει σημασία αν το φορτίο καθορισμένο από την τάση, ισχύ και συντελεστή ισχύος του είναι συνδεδεμένο κατά τρίγωνο ή αστέρα, δεδομένου ότι το τρίγωνο είναι πάντοτε δυνατό να αντικατασταθεί από τον ισοδύναμο αστέρα του για λόγους επιλύσεως του κυκλώματος.

Όσων αφορά τα ισοδύναμα κυκλώματα οι γραμμές διακρίνονται σε μικρές, μεσαίες και μεγάλες με βάση το μήκος τους.

Η κατάταξη των γραμμών μεταφοράς, ανάλογα με το μήκος τους, εξαρτάται από τις προσεγγίσεις, οι οποίες δικαιολογούνται όσον αφορά στη θεώρηση των παραμέτρων της γραμμής. Η αντίσταση, η επαγωγή και η χωρητικότητα είναι κατανεμημένες κατά μήκος της γραμμής και το γεγονός αυτό πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στους ακριβείς υπολογισμούς των μακρών γραμμών. Για τις γραμμές μέσου μήκους η εγκάρσια χωρητικότητα της γραμμής μπορεί να θεωρηθεί μοιρασμένη σε δύο ίσα μέρη συγκεντρωμένα στα δύο άκρα της, χωρίς αξιοσημείωτο σφάλμα στον υπολογισμό των τάσεων και εντάσεων. Για γραμμές μικρού μήκους η συνολική χωρητική αγωγιμότητα είναι τόσο μικρή, ώστε μπορεί να παραλειφθεί. Δεδομένου ότι το ρεύμα της εγκάρσιας αγωγιμότητας είναι συνήθως μικρό σε σχέση με το χωρητικό ρεύμα της γραμμής είναι αυτονόητο ότι η εγκάρσια αγωγιμότητα μπορεί επίσης να αγνοηθεί. Όσον αφορά τη χωρητικότητα, εναέριες γραμμές μεταφοράς μήκους μέχρι 80 περίπου χιλιομέτρων θεωρούνται μικρές γραμμές. Γραμμές μέσου μήκους θεωρούνται οι γραμμές με μήκος μεταξύ 80 και 240 περίπου χιλιομέτρων. Γραμμές μήκους μεγαλύτερου από 240 χιλιόμετρα θεωρούνται γραμμές μεγάλου μήκους και απαιτούν υπολογισμούς με κατανεμημένες παραμέτρους για την τήρηση παραδεκτής ακρίβειας αποτελεσμάτων.

Προκειμένου κατά την ανάπτυξη των εξισώσεων των γραμμών να γίνεται διάκριση μεταξύ συνολικής σύνθετης αντιστάσεως και σύνθετης αντιστάσεως ανά μονάδα μήκους μιας γραμμής, θα χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος συμβολισμός:

z = σύνθετη αντίσταση σειράς, ανά μονάδα μήκους, ανά φάση.

y = εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους, ανά φάση προς ουδέτερο.

ℓ = μήκος γραμμής .

Z = $z\ell$ = συνολική σύνθετη αντίσταση σειράς ανά φάση.

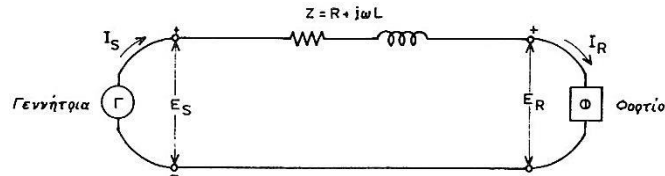
Y = $y\ell$ = συνολική σύνθετη εγκάρσια αγωγιμότητα ανά φάση, προς ουδέτερο.

3.3. Γραμμή μεταφοράς μικρού μήκους

Το ισοδύναμο κύκλωμα μικρού μήκους φαίνεται στο σχ.16, όπου I_S και I_R είναι τα φασικά ρεύματα και E_S και E_R οι φασικές τάσεις αναχωρήσεως και αφίξεως της γραμμής αντίστοιχα.

Διακύμανση τάσεως μιας γραμμής μεταφοράς είναι η εκατοστιαία διαφορά τάσεως του άκρου αφίξεως της γραμμής σε κενή λειτουργία και με πλήρες φορτίο από ορισμένο συντελεστή ισχύος και σταθερή τάση αναχωρήσεως, ανοιγμένη στην τάση πλήρους φορτίου:

$$\Delta V\% = \frac{|E_{R0}| - |E_{R1}|}{|E_{R1}|} 100\%$$



Σχ. 16. Ισοδύναμο κύκλωμα γραμμής μεταφοράς μικρού μήκους

Οι δείκτες 01 της τάσεως αφίξεως (E_{R0}, E_{R1}) αναφέρονται στην κενή λειτουργία και το πλήρες φορτίο. Για τις φορές των ρευμάτων του σχήματος 16, η στιγμιαία τιμή της τάσεως προς ουδέτερο θεωρείται θετική, όταν ο ακροδέκτης με το σημείο + βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό από τον ακροδέκτη με το σημείο -. Όταν ο ακροδέκτης με το + είναι σε χαμηλότερο δυναμικό από τον άλλο ακροδέκτη, τότε η στιγμιαία τιμή της τάσεως προς ουδέτερο είναι αρνητική.

Το κύκλωμα επιλύεται όπως ένα απλό κύκλωμα ΕΡ σειράς. Εφόσον δεν υπάρχουν εγκάρσιοι κλάδοι, το ρεύμα είναι το ίδιο στα άκρα αναχωρήσεως και αφίξεως της γραμμής, δηλαδή:

$$I_S = I_R$$

(184)

Η τάση στο άκρο αφίξεως είναι

$$E_S = E_R + I_R Z$$

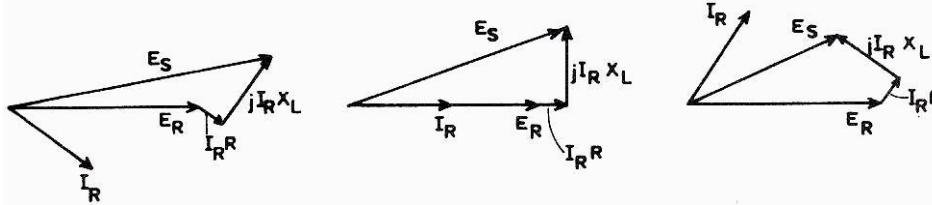
(185)

όπου $Z = z\ell$ είναι η συνολική σύνθετη αντίσταση της γραμμής.

Η έννοια της διακύμανσης της τάσεως μιας γραμμής και η επίδραση της μεταβολής του συντελεστή ισχύος του φορτίου στη διακύμανση της τάσεως μιας γραμμής είναι σαφέστερη στην περίπτωση μικρής γραμμής γιατί και θα εξετασθεί εδώ.

Μετά την απομάκρυνση του φορτίου μιας μικρής γραμμής η οποία παριστάνεται από το κύκλωμα του σχ. 16, η τάση αφίξεως είναι ίση με την τάση αναχωρήσεως της γραμμής. Στο σχ.16 με το φορτίο συνδεδεμένο η τάση αφίξεως παριστάνεται με E_R και η τάση αναχωρήσεως με E_S . Είναι $|E_S| = |E_{R0}|$. Τα διαγράμματα των φασικών διανυσμάτων του σχ. 17 έχουν σχεδιαστεί για τα ίδια μεγέθη ρεύματος και τάσεως αφίξεως και δείχνουν ότι για να διατηρηθεί μια δεδομένη τάση αφίξεως, απαιτείται μεγαλύτερη τιμή της τάσεως αναχωρήσεως, όταν το ρεύμα αφίξεως επισωρεύεται της τάσεως από ότι όταν ρεύμα και τάση είναι εν φύσει. Μια ακόμη μικρότερη τάση αναχωρήσεως απαιτείται για να διατηρηθεί

τη δεδομένη τάση αφίξεως όταν το ρεύμα αφίξεως προπορεύεται της τάσεως. Η πτώση τάσεως στη σύνθετη αντίσταση της γραμμής έχει το ίδιο μέγεθος σε όλες τις περιπτώσεις,



(α) συντελεστής ισχύος φορτίου,

(β) συντελεστής ισχύος φορτίου,

(γ) συντελεστής ισχύος

σ.ι.=70% επαγωγικό

σ.ι.=100%.

σ.ι.=70%χωρητικός.

Σχ.17. Διάγραμμα φασικών διανυσμάτων μικρής γραμμής, για επαγωγικό ωμικό και χωρητικό φορτίο. Τα μεγέθη όλων των E και I είναι ίσα.

αλλά λόγω των διαφορετικών συντελεστών ισχύος η πτώση τάσεως προστίθεται στην τάση αφίξεως υπό διαφορετική γωνία κάθε φορά. Η διακύμανση είναι πιο μεγάλη για επαγωγικούς συντελεστές φορτίου και πιο μικρή ή ακόμη και αρνητική για χωρητικούς συντελεστές φορτίου. Η επαγωγική αντίδραση μιας γραμμής μεταφοράς είναι μεγαλύτερη από την ωμική αντίσταση της και η αρχή της διακύμανσης της τάσεως η οποία εικονίζεται στο σχ.17, ισχύει για κάθε φορτίο τροφοδοτούμενο από κυρίως επαγωγικό κύκλωμα. Η σχέση μεταξύ συντελεστή ισχύος και διακυμάνσεως για τις μικρές γραμμές είναι παρόμοια με αυτή των μικρών γραμμών, αλλά όχι και τόσο προφανής.

3.4. Γραμμή μεταφοράς μέσου μήκους

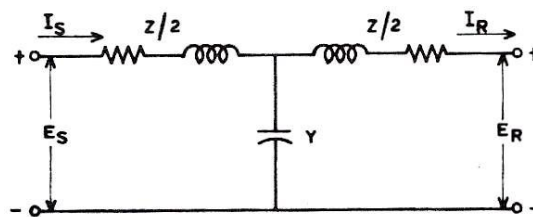
Στους υπολογισμούς των γραμμών μέσου μήκους λαμβάνεται υπόψη και η εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα η οποία γενικά θεωρείται ότι αποτελείται μόνο από τη χωρητικότητα.

Στην πραγματικότητα, όπως ήδη αναφέρθηκε, η χωρητικότητα είναι κατανομημένη ομοιόμορφα κατά μήκος της γραμμής. Το ίδιο περίπου συμβαίνει και με την αγωγιμότητα της γραμμής η οποία είναι δυνατό να ισχύει για τις θεωρούμενες γραμμές μέσου μήκους, οι ποσότητες αυτές μπορούν να θεωρηθούν συγκεντρωμένες σε ορισμένα σημεία κατά μήκος της γραμμής. Οι δύο συνηθέστερες διατάξεις είναι το ονομαστικό κύκλωμα T και το

ονομαστικό κύκλωμα Π καλούμενες έτσι λόγω της ομοιότητάς τους προς τα γράμματα T και Π .

Εάν όλη η εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα θεωρηθεί συγκεντρωμένη στο μέσο του κυκλώματος, το οποίο παριστάνει τη γραμμή, προκύπτει το ονομαστικό κύκλωμα T . Ένα τέτοιο κύκλωμα παριστάνεται στο σχ. 18, στο οποίο Z (όση προς $z\ell$) είναι η συνολική σύνθετη αντίσταση ανά φάση της γραμμής και Y (ίση προς $y\ell$) η συνολική εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα ανά φάση προς το ουδέτερο αυτής.

Εύκολα προκύπτει από το κύκλωμα ότι οι εξισώσεις τάσεων και ρευμάτων του ονομαστικού κυκλώματος T είναι,



Σχ.18. Ονομαστικό κύκλωμα T γραμμής μεταφοράς μέσου μήκους.

$$E_S = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) E_R + \left(1 + \frac{ZY}{4}\right) Z I_R \quad (186)$$

$$I_S = Y E_R + \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) I_R \quad (187)$$

ή εισάγοντας τη μήτρα των παραμέτρων,

$$\begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{ZY}{2} + 1\right) & \left(\frac{ZY}{4} + 1\right) Z \\ Y & \left(\frac{ZY}{2} + 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

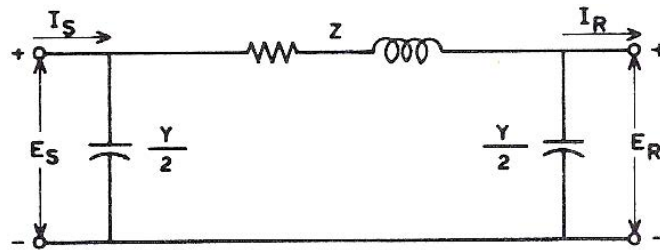
(188)

Επιλύοντας τις (188) ως προς E_R και I_R έχουμε τις εξισώσεις τάσεως και ρεύματος αφίξεως συναρτήσεις των αντίστοιχων μεγεθών του άκρου αναχωρήσεως της γραμμής.

$$\begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{ZY}{2} + 1\right) & -\left(\frac{ZY}{4} + 1\right)Z \\ -Y & (ZY/2 + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix}$$

(189)

Το ονομαστικό κύκλωμα Π, το οποίο απεικονίζεται στο σχ. 19 χρησιμοποιείται συχνότερα για την παράσταση γραμμών μέσου μήκους από το ονομαστικό κύκλωμα Τ. Στο ονομαστικό κύκλωμα Π η συνολική εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα της γραμμής μοιράζεται σε δυο ίσα μέρη τοποθετημένα στα δυο άκρα του κυκλώματος, το οποίο παριστάνει τη γραμμή.



Σχ.19. Ονομαστικό κύκλωμα Π γραμμής μεταφοράς μέσου μήκους.

Οι εξισώσεις τάσεως και ρεύματος αναχωρήσεως, εν συναρτήσει των τάσεως και ρεύματος αφίξεως της γραμμής για το ονομαστικό κύκλωμα Π είναι :

$$\begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{ZY}{2} + 1\right) & Z \\ \left(\frac{ZY}{4} + 1\right)Y & \left(\frac{ZY}{2} + 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

(190)

Επιλύοντας τις (190) ως προς E_R και I_R έχουμε τις εξισώσεις τάσεως και ρεύματος αφίξεως συναρτήσει των τάσεως και ρεύματος αναχωρήσεως της γραμμής:

$$\begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{ZY}{2} + 1\right) & -Z \\ -\left(\frac{ZY}{4} + 1\right)Y & \left(\frac{ZY}{2} + 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix}$$

(191)

Η σύγκριση της εξίσωσης (188) με τις εξισώσεις (184) και (185) δείχνει τη συμβολή της εγκάρσιας σύνθετης αγωγιμότητας στους υπολογισμούς της τάσεως και της εντάσεως αναχωρήσεως της γραμμής. Εάν η γραμμή είναι μικρού μήκους, η συνολική σύνθετη αγωγιμότητα Y είναι μικρή και όσο ελαττώνεται, τόσο οι εξισώσεις της γραμμής μέσου μήκους προσεγγίζουν εκείνες της μικρής γραμμής.

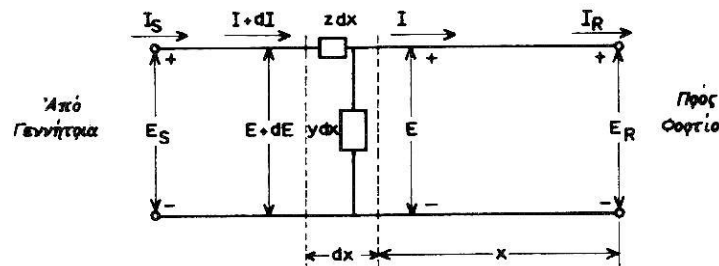
Τα κυκλώματα ονομαστικό T και ονομαστικό Π δεν είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, όπως είναι δυνατό να διαπιστωθεί με εφαρμογή των εξισώσεων μετασχηματισμού Y - Δ σε ένα από αυτά. Η σύγκριση των εξισώσεων (188) και (189) με τις αντίστοιχες εξισώσεις (190) και (191) δείχνει τη σχέση μεταξύ των λύσεων T και Π . Παρατηρούμε ότι οι διαφορές των εκφράσεων δεν είναι μεγάλες και εξαρτώνται από τον όρο $ZY/4$. Για γραμμές μέσου μήκους ο όρος αυτός είναι αριθμητικά μικρός και επομένως οι αριθμητικές διαφορές είναι μικρές. Τα ονομαστικά κυκλώματα T και Π πλησιάζουν περισσότερο μεταξύ τους και προς το ακριβές ισοδύναμο κύκλωμα της γραμμής, εάν η γραμμή χωρίσει σε δύο ή περισσότερα τμήματα καθένα από τα οποία παριστάνεται από το ονομαστικό του κύκλωμα T ή Π . Η απαιτούμενη όμως υπολογιστική αριθμητική εργασία είναι περισσότερη από όση χρειάζεται η χρησιμοποίηση απ' την αρχή του ισοδύναμου κυκλώματος της γραμμής.

Κατά την επίλυση πολύπλοκων δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας η αριθμητική εργασία είναι συχνά επίπονη. Για το λόγο αυτόν έχουν αναπτυχθεί τα ομοιώματα δικτύου τα οποία περιλαμβάνουν ρυθμιζόμενα στοιχεία κυκλώματος ωμικής αντιστάσεως, επαγωγής, χωρητικότητας και αγωγιμότητας, στα όποια δίνονται τιμές ανάλογες προς τις αντίστοιχες παραμέτρους των πραγματικών κυκλωμάτων, που παριστάνουν. Τάσεις ανάλογες προς τις πραγματικές, αλλά πολύ μικρότερες από αυτές, εισάγονται στις αντίστοιχες θέσεις των γεννητριών ή των σύγχρονων κινητήρων και τα παραγόμενα ρεύματα είναι ανάλογα προς τα ρεύματα τα όποια θα υπήρχαν στο πραγματικό σύστημα κάτω από τις εξεταζόμενες συνθήκες. Τέτοια ομοιώματα δικτύου είναι επίσης γνωστά σαν υπολογιστές δικτύου. Για την παράσταση κυκλωμάτων μεταφοράς σε τέτοια ομοιώματα η χρησιμοποίηση των ονομαστικών κυκλωμάτων T και Π είναι πολύ περισσότερο εξυπηρετική από τη χρησιμοποίηση άλλων στοιχείων κυκλώματος με κατανομημένα χαρακτηριστικά της πραγματικής γραμμής. Όταν χρειαστεί, τα κυκλώματα T και Π είναι δυνατόν θεωρητικώς να διορθωθούν, ώστε να δίνουν ένα ακριβές ισοδύναμο του κυκλώματος μεταφοράς, στην πράξη όμως η ακριβής παράσταση σπάνια μπορεί να επιτευχθεί, διότι οι διορθωμένες σταθερές περιέχουν συνήθως μικρές τιμές αρνητικής αντιστάσεως οι όποιες, αν και δεν παρουσιάζουν μαθηματικές δυσκολίες, είναι δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να επιτευχθούν στο ομοίωμα του δικτύου. Στα ομοιώματα δικτύου είναι συνήθως πιο εξυπηρετική η χρησιμοποίηση της διατάξεως Π για την παράσταση των γραμμών από την διάταξη T .

3.5. Η Θεωρία της γραμμής μεταφοράς μεγάλου μήκους

Ο ακριβής υπολογισμός κάθε γραμμής μεταφοράς απαιτεί να λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι οι παράμετροι της γραμμής δεν είναι συγκεντρωμένες, αλλά κατανεμημένες ομοιόμορφα κατά μήκος όλης της γραμμής.

Στο σχ. 20. παριστάνεται το μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα ενός τμήματος μιας τριφασικής γραμμής με κατανεμημένες παραμέτρους. Αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες τμήμα της γραμμής μήκους dx του οποίου η απόσταση από το πέρασμα της γραμμής είναι x , η σύνθετη αντίσταση σειράς του στοιχειώδους μήκους της γραμμής θα είναι zdx και η εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα του yd .



Σχ.20. Σχηματική παράσταση κυκλώματος φάσεως-ουδέτερου τριφασικής γραμμής μεταφοράς με κατανεμημένες παραμέτρους.

Το φασικό της τάσεως προς ουδέτερο στο προς φορτίο άκρο του στοιχείου της γραμμής είναι E . Το μέγεθος και η φασική γωνία της τάσεως μεταβάλλονται με την απόσταση κατά μήκος της γραμμής. Εφόσον οι τάσεις και οι εντάσεις δεν χρησιμοποιούνται με τις στιγμιαίες τιμές τους, αλλά με τα φασικά τους διανύσματα τα οποία είναι ανεξάρτητα του χρόνου, τα μεγέθη αυτά υπό τις εξεταζόμενες συνθήκες μόνιμης καταστάσεως λειτουργίας θεωρούνται εδώ ότι μεταβάλλονται μόνο με την απόσταση κατά μήκος της γραμμής. Η τάση στο προς γεννήτρια άκρο του στοιχείου είναι $E+dE$. Η ανύψωση της τάσεως dE είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ της τάσεως του άκρου προς γεννήτρια και της τάσεως του άκρου προς φορτίο. Η ανύψωση αυτή είναι επίσης ίση με το γινόμενο $Izdx$ του ρεύματος του στοιχείου και της σύνθετης αντιστάσεως του στοιχείου, δηλ.:

$$dE = Izdx$$

ή

$$\frac{dE}{dx} = Iz$$

(192)

Κατά παρόμοιο τρόπο το μέγεθος και η φασική γωνία του ρεύματος I της γραμμής στο άκρο του στοιχείου προς φορτίο μεταβάλλονται με την απόσταση κατά μήκος της γραμμής λόγω της κατανομημένης εγκάρσιας σύνθετης αγωγιμότητας. Το ρεύμα το οποίο εισέρχεται στο στοιχείο στο προς γεννήτρια άκρο του, $I + dI$, είναι μεγαλύτερο από το ρεύμα το οποίο εγκαταλείπει το στοιχείο στο προς φορτίο άκρο του κατά dI . Η διαφορά αυτή των δύο ρευμάτων είναι το ρεύμα $Eydx$ το οποίο ρέει στην εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα του στοιχείου. Είναι συνεπώς,

$$dI = Eydx$$

ή

$$\frac{dI}{dx} = Ey$$

(193)

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (192) ως προς x έχουμε,

$$\frac{d^2E}{dx^2} = z \frac{dI}{dx}$$

(194)

αντικαθιστώντας την έκφραση dI / dx από την εξίσωση (193) έχουμε,

$$\frac{d^2E}{dx^2} = yzE$$

(195)

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορεί να καταλήξουμε στην αντίστοιχη εξίσωση για το ρεύμα:

$$\frac{d^2I}{dx^2} = yzI$$

(196)

Οι εξισώσεις (195) και (196) είναι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών είναι της μορφής:

$$E(x) = Ae^{\sqrt{zyx}} + Be^{-\sqrt{zyx}}$$

(197)

$$I(x) = Ce^{\sqrt{zyx}} + De^{-\sqrt{zyx}}$$

(198)

όπου, A, B, C και D είναι οι σταθερές ολοκληρώσεως οι οποίες θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες. Θεωρώντας μόνο την (197) παρατηρούμε ότι αυτή εύκολα επαληθεύει την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση (195).

Αντικαθιστώντας τώρα στην (192) την E με την έκφραση της από την (197) και επιλύοντας ως προς I λαμβάνουμε:

$$I = \frac{1}{\sqrt{z/y}} A e^{\sqrt{yz} x} - \frac{1}{\sqrt{z/y}} B e^{-\sqrt{yz} x} \quad (199)$$

Οι τιμές των σταθερών A και B μπορούν να υπολογισθούν με χρησιμοποίηση των οριακών τιμών της τάσεως και εντάσεως στο άκρο αφίξεως της γραμμής. Δηλαδή για $x=0$, $E=E_R$ και $I=I_R$. Αντικαθιστώντας, με τις τιμές αυτές, τα x , E και I στις εξισώσεις (197) και (199) καταλήγουμε στις σχέσεις,

$$E_R = A + B \quad (200)$$

$$I_R = \frac{1}{\sqrt{z/y}} (A - B)$$

από όπου προκύπτει,

$$A = \frac{E_R + I_R Z_C}{2}$$

$$B = \frac{E_R - I_R Z_C}{2}$$

(201)

Όπου $Z_C = \sqrt{z/y}$ αντικαθιστώντας τώρα τις σταθερές A και B στις εξισώσεις (197) και (199) με τις τιμές τους από τις (201) και θέτοντας

$$\gamma = \sqrt{yz},$$

έχουμε:

$$E = \frac{E_R + I_R Z_C}{2} e^{\gamma x} + \frac{E_R - I_R Z_C}{2} e^{-\gamma x} \quad (202)$$

$$I = \frac{E_R / I_R Z_C}{2} e^{\gamma x} - \frac{E_R / I_R Z_C}{2} e^{-\gamma x} \quad (203)$$

Η $Z_C = \sqrt{z/y}$ καλείται χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής και η $\gamma = \sqrt{zy}$ καλείται σταθερά μεταδόσεως αυτής.

Οι εξισώσεις (202) και (203) δίνουν τις τιμές και τις φασικές αποκλίσεις των E και I σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σημείο κατά μήκος της γραμμής συναρτήσει της αποστάσεως αυτοί x από το άκρο αφίξεως υπό την προϋπόθεση ότι τα E_R , I_R και οι παράμετροι της γραμμής είναι γνωστά.

3.6. Κυματική ερμηνεία των εξισώσεων της γραμμής μεταφοράς

Το γινόμενο \sqrt{zy} έχει διαστάσεις αντίστροφου μήκους. Δεδομένου ότι,

$$\sqrt{zy} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (204)$$

η ποσότητα αυτή είναι γενικά μιγαδική. Η πραγματική και η φανταστική συνιστώσα της, συμβολίζονται με α και β αντίστοιχα όπου,

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (205)$$

και ονομάζονται η α , σταθερά αποσβέσεως, μετρούμενη σε neper ανά μονάδα μήκους, (nr/Km) και η β σταθερά φάσεως, μετρούμενη σε ακτίνια ανά μονάδα μήκους, (rad/Km).

Εισάγοντας τις σταθερές αυτές, οι εξισώσεις (202) και (203) γίνονται:

$$E_x(x) = \frac{E_R + I_R Z_C}{2} e^{\alpha x} e^{j\beta x} + \frac{E_R - I_R Z_C}{2} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad (206)$$

$$I_x(x) = \frac{E_R/Z_C I_R}{2} e^{\alpha x} e^{j\beta x} - \frac{E_R/Z_C - I_R}{2} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad (207)$$

Ο όρος $e^{\alpha x}$ μεταβάλλεται σε μέγεθος συναρτήσεως του χρόνου x , ενώ ο όρος $e^{j\beta x}$, ο οποίος είναι ίσιος με $\cos \beta x + j \sin \beta x$, έχει πάντοτε μέγεθος ίσο προς 1 και προκαλεί μεταβολή της φασικής γωνίας κατά β ακτίνια ανά μονάδα μήκους της γραμμής.

Ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της εξίσωσης (206) δηλαδή $[(E_R + I_R Z_C)/2] e^{\alpha x} e^{j\beta x}$, αυξάνεται σε μέγεθος και προχωρεί σε γωνία με την αύξηση της αποστάσεως από το άκρο αφίξεως της γραμμής, ή ελαττώνεται σε μέγεθος και καθυστερεί σε γωνία από το άκρο αναχωρήσεως προς το άκρο αφίξεως. Αυτό είναι χαρακτηριστικό ενός οδεύοντος κύματος το οποίο μεταβάλλεται σε μέγεθος συναρτήσεως του χρόνου σε κάθε σημείο, ενώ καθυστερεί σε φασική γωνία και η μεγίστη τιμή του ελαττώνεται με την απόσταση από την αφετηρία. Ο πρώτος αυτός όρος του δεύτερου μέλους της εξ. (206) καλείται προσπίπτουσα τάση.

Ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέλους της (206), δηλαδή $[(E_R - I_R Z_C)/2] e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$, ελαττώνεται σε μέγεθος και καθυστερεί σε γωνία όταν αυξάνει η απόσταση από το άκρο αφίξεως και καλείται ανακλώμενη τάση.

Δεδομένου ότι η εξίσωση για το ρεύμα είναι όμοια με την εξίσωση για την τάση, το ρεύμα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από προσπίπτον και ανακλώμενο ρεύμα. Παρατηρούμε ότι το ανακλώμενο ρεύμα είναι αρνητικό σε σχέση με το προσπίπτον ρεύμα.

Ο λόγος της ανακλώμενης τάσεως προς την προσπίπτουσα τάση στο πέρας της γραμμής είναι γνωστός ως συντελεστής ανακλάσεως τάσεως και συμβολίζεται με ρ . Αυτός υπολογίζεται εύκολα από την έκφραση (206) της τάσεως για $x=0$ και προκύπτει ίσος με:

$$\rho = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \quad (208)$$

όπου, $E_R = I_R Z_L$. Ο λόγος του ανακλώμενου ρεύματος προς το προσπίπτον ρεύμα στο πέρας της γραμμής λέγεται συντελεστής ανακλάσεως ρεύματος. Αυτός υπολογίζεται κατά παρόμοιο τρόπο με τον συντελεστή ανακλάσεως τάσεως και προκύπτει ίσος με:

$$\rho' = \frac{Z_C - Z_L}{Z_C + Z_L} = -\rho \quad (209)$$

Οι συντελεστές ανακλάσεως είναι γενικά μιγαδικοί και επηρεάζουν τόσο τα μεγέθη όσο και τις φασικές γωνίες των ανακλώμενων κυμάτων. Όταν χρησιμοποιείται ο όρος συντελεστής ανακλάσεως χωρίς να γίνεται μνεία ρεύματος ή τάσεως εννοείται πάντοτε ο συντελεστής ανακλάσεως της τάσεως.

Εάν μια γραμμή τερματίζει στη χαρακτηριστική της αντίσταση Z_C ο συντελεστής ανακλάσεως μηδενίζεται και συνεπώς δεν υπάρχει ανακλώμενο κύμα, τάσεως ή εντάσεως. Μια γραμμή η οποία τερματίζει στη χαρακτηριστική της αντίσταση ονομάζεται επίπεδη γραμμή ή άπειρη γραμμή. Η τελευταία ονομασία πηγάζει από το γεγονός ότι μια γραμμή άπειρου μήκους δεν είναι δυνατό να έχει ανακλώμενο κύμα. Οι γραμμές ηλεκτρικής ενέργειας δεν τερματίζουν συνήθως στη χαρακτηριστική τους αντίσταση, οι τηλεπικοινωνιακές όμως γραμμές τερματίζουν κατ' αυτόν τον τρόπο για να εξαλείφονται τα ανακλώμενα κύματα. Οι τιμές της Z_C ποικίλλουν μεταξύ 220 και 450 Ω για τις γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Η τιμή της Z_C μειώνεται με την αύξηση των αγωγών ανά φάση και η φασική γωνία της είναι συνήθως μεταξύ 0 και -15° .

Στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας η χαρακτηριστική αντίσταση ονομάζεται και κρουστική αντίσταση. Ο όρος αυτός εν τούτοις χρησιμοποιείται συνήθως στην ειδική περίπτωση γραμμής χωρίς απώλειες. Στην τελευταία περίπτωση η χαρακτηριστική αντίσταση γίνεται $\sqrt{L/C}$, δηλαδή σκέτη ωμική αντίσταση. Η φόρτιση κρουστικής αντιστάσεως P_ϕ μιας γραμμής είναι η ισχύς, την οποία αποδίδει η γραμμή σε ένα καθαρά ωμικό φορτίο ίσο με την κρουστική της αντίσταση. Η ισχύς την οποία παρέχει στο φορτίο η γραμμή στην περίπτωση αυτή είναι:

$$P_\phi = \frac{E_R^2}{Z_C} \text{ watt} \quad (210)$$

όπου E_R η πολική τάση αφίξεως της γραμμής.

Η φόρτιση κρουστικής αντιστάσεως καλείται και φυσική ισχύς της γραμμής. Όταν η γραμμή φορτίζεται με τη φυσική ισχύ της, οι άεργες απώλειες της γραμμής εξουδετερώνονται, δηλαδή οι επαγωγικές απώλειες εξισώνονται με την παραγόμενη από τη γραμμή χωρητική ισχύ.

Πολλές φορές η φόρτιση κρουστικής αντιστάσεως ή φυσική ισχύς της γραμμής θεωρείται ως ισχύς αναφοράς ή μοναδιαία ισχύς για τη γραμμή και η μεταφερόμενη ισχύς της γραμμής εκφράζεται ως ποσοστό της φυσικής ισχύος.

Εάν δεν υπάρχει φορτίο στη γραμμή το I_R είναι μηδέν και όπως προκύπτει από τις εξ. (206) και (207) η προσπίπτουσα και ανακλώμενη τάσεις είναι ίσες κατά μέγεθος και γωνία στο πέρας της γραμμής. Οι δύο συνιστώσες όμως του ρεύματος στο πέρας της γραμμής είναι ίσες σε μέγεθος αλλά 180° έκτος φάσεως μεταξύ τους. Κατ' αυτό τον τρόπο τα προσπίπτοντα και ανακλώμενα ρεύματα εξουδετερώνονται μεταξύ τους στο πέρας μιας ανοικτής γραμμής, αλλά όχι σε άλλο σημείο της γραμμής έκτος αν αυτή είναι χωρίς απώλειες και η σταθερά αποσβέσεως α είναι μηδέν.

Το μήκος κύματος λ είναι η απόσταση κατά μήκος της γραμμής μεταξύ δύο σημείων ενός κύματος τα οποία διαφέρουν σε φασική γωνία κατά 360° ή 2π ακτίνια. Εάν β είναι η φασική απόκλιση σε ακτίνια ανά χιλιόμετρο το μήκος κύματος είναι:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \text{ km} \quad (211)$$

Στη συχνότητα των 50 περιόδων το μήκος κύματος μιας γραμμής μεταφοράς είναι περίπου 6000 km.

Η ταχύτητα μεταδόσεως ενός κύματος επί μιας γραμμής σε χιλιόμετρα ανά δευτερόλεπτο είναι ίση προς το γινόμενο του μήκους κύματος σε km και της συχνότητας σε περιόδους ανά sec, ή:

$$v = f \lambda \text{ km/sec} \quad (212)$$

$$= \frac{2\pi f}{\beta} \text{ km/sec}$$

Ο χρόνος οδεύσεως ενός κύματος σε ολόκληρο το μήκος ℓ μιας γραμμής σε δευτερόλεπτα είναι $t = \ell/v$. Από τις (211) και (212) προκύπτει ότι:

$$\tau = \frac{\ell\beta}{\omega} \text{ (sec)} \quad (213)$$

Ο χρόνος οδεύσεως μιας γραμμής μετρούμενος σε διαφορά φασικής γωνίας μεταξύ των δύο άκρων της γραμμής αποτελεί την ηλεκτρική γωνία της γραμμής $\Delta = \tau\omega$, η οποία είναι ίση με,

$$\Delta = \ell\beta \text{ (rad)} \quad (214)$$

$$\Delta = \ell\beta \frac{360}{2\pi} \text{ (μοίρες)} \quad (215)$$

η έκφραση της Δ γίνεται ακόμη,

$$\Delta = \ell \frac{360}{2\pi/\beta} = \ell \frac{360}{\lambda} (^\circ)$$
(216)

και για $f=50$ Hz, οπότε, $\lambda \approx 6000$ km η ηλεκτρική γωνία μιας γραμμής ανά μονάδα μήκους γίνεται,

$$\Delta = 0,06^\circ / \text{km}$$
(217)

3.7. Ειδικές περιπτώσεις γραμμών μεταφοράς

Σε μια γραμμή χωρίς απώλειες είναι $R=G=0$, και $Z=jX$, $Y=jB$. Τότε $\gamma = \sqrt{ZY} = j\omega\sqrt{LC}$. Συνεπώς επειδή $\gamma=\alpha+j\beta$, θα είναι $\alpha = 0$ και $\beta = \omega\sqrt{LC}$. Επομένως η ταχύτητα μεταδόσεως γίνεται:

$$v = \frac{2\pi f}{2\pi f\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ km/sec}$$
(218)

Η επαγωγή της γραμμής δίνεται από την εξίσωση (114) ως:

$$L_\alpha = 0,2 \ell n \frac{D_{10}}{r} \text{ mH/km}$$

Η χωρητικότητα της γραμμής δίνεται από την εξίσωση (150) ως:

$$C_n = \frac{0,0556}{\ell n(D_{10}/r)} \mu\text{F/km}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (218) τις αντίστοιχες εκφράσεις των L και C έχουμε.

$$v = \frac{1}{\sqrt{0,2 \times 10^{-3} \times \ell n(D_{10}/r') \times 0,0556 \times 10^{-6} / \ell n(D_{10}/r)}} \text{ km/sec}$$

Λαμβάνοντας αντί της μέσης γεωμετρικής ακτίνας r του αγωγού την πραγματική του ακτίνα r στο λογαριθμικό όρο της αυτεπαγωγής βρίσκουμε με πολύ μεγάλη προσέγγιση

$$v = \frac{10^5}{\sqrt{2 \times 0,0556}}$$

ή

$$v = 299.880 \text{ km/sec}$$

(219)

η οποία είναι με πολύ μεγάλη προσέγγιση η ταχύτητα του φωτός στον ελεύθερο χώρο. Επομένως, όταν παραλείπονται οι απώλειες, τα κύματα της τάσεως και της εντάσεως μεταδίδονται επί των αγωγών μιας εναέριας γραμμής με την ταχύτητα του φωτός. Όταν λαμβάνονται υπόψη και οι απώλειες της γραμμής, η ταχύτητα μεταδόσεως μειώνεται κάπως, όπως διαπιστώνεται στο παράδειγμα, το οποίο ακολουθεί, αλλά πάντοτε πλησιάζει πολύ την ταχύτητα του φωτός. Τα ανωτέρω ισχύουν φυσικά μόνο για τις εναέριες γραμμές, ενώ για τα καλώδια τα πράγματα είναι διαφορετικά. Εκεί επειδή η μόνωση έχει μια διηλεκτρική σταθερά σημαντικά μεγαλύτερη από τη μονάδα και οι αποστάσεις μεταξύ αγωγών είναι μικρές, τα L και C έχουν διαφορετικές τιμές και η ταχύτητα μεταδόσεως είναι συνήθως κλάσμα της ταχύτητας του φωτός.

Στη γραμμή χωρίς απώλειες είναι $Z_c = \sqrt{L/C}$ και $\gamma x = j\omega x \sqrt{LC} = j\omega x/v = j\omega(\ell/v - \tau_x) = j\omega(\ell/v) - j\tau_x$ όπου $\tau_x = \frac{\ell-x}{v}$ ο χρόνος οδεύσεως του κύματος μέχρι το σημείο x της γραμμής και δx η αντίστοιχη ηλεκτρική γωνία. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (202) και (203) είναι δυνατόν να γραφούν,

$$E = \frac{E_R + I_R Z_c}{2} e^{j(\omega\ell/v - \delta_x)} + \frac{E_R + I_R Z_c}{2} e^{-j(\omega\ell/v - \delta_x)}$$

(220)

$$I = \frac{E_R/Z_c + I_R}{2} e^{j(\omega\ell/v - \delta_x)} - \frac{E_R/Z_c - I_R}{2} e^{-j(\omega\ell/v - \delta_x)}$$

(221)

Παρατηρούμε φυσικά ότι στη γραμμή χωρίς απώλειες η σταθερά αποσβέσεως είναι μηδέν.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση γραμμής είναι η γραμμή Heavyside ή γραμμή χωρίς παραμόρφωση στην οποία $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$. Στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \left[\left(\frac{R}{j\omega L} + 1 \right) \left(\frac{G}{j\omega C} + 1 \right) \right]^{1/2}$$

Εάν

$$\zeta = \frac{R}{\omega L} = \frac{G}{\omega C}$$

είναι:

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \left(1 + \frac{\zeta}{j} \right) = j\omega\sqrt{LC}(1 - j\zeta) = \omega\zeta\sqrt{LC} + j\omega\sqrt{LC}$$

(222)

Η σταθερά φάσεως είναι ίδια με τη σταθερά φάσεως της γραμμής χωρίς απώλειες, ενώ εδώ υπάρχει και απόσβεση με σταθερά $\alpha = \omega\zeta\sqrt{LC}$ η τελευταία γίνεται,

$$\alpha = \omega\sqrt{LC} \frac{R}{\omega L} = \frac{R}{Z_c} \quad (223)$$

και συνεπώς ο εκθετικός όρος αποσβέσεως των εξισώσεων της γραμμής είναι $e^{R_x Z_c}$. Η χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής είναι,

$$z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{R/L + j\omega}{G/C + j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (224)$$

δηλαδή ίση με τη χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής χωρίς απώλειες.

Η ταχύτητα μεταδόσεως των κυμάτων επί της γραμμής είναι από τις σχέσεις (211) και (212) :

$$v = \frac{2\pi f}{\beta} \quad (225)$$

Αντικαθιστώντας το β με την τιμή του $\omega = \sqrt{LC}$ έχουμε:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (226)$$

Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση της γραμμής Heavyside η ταχύτητα μεταδόσεως είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα των κυμάτων. Η γραμμή έχει σταθερά αποσβέσεως η οποία όμως, όπως φαίνεται από την σχέση (223) είναι επίσης ανεξάρτητη της συχνότητας. Συνεπώς η γραμμή θα είναι χωρίς παραμόρφωση, δηλαδή η μορφή του κύματος θα είναι ίδια στο πέρας της γραμμής με τη μορφή στην αναχώρηση της γραμμής, αλλά το εύρος του θα είναι μικρότερο. Για το λόγο αυτό η γραμμή Heavyside λέγεται και γραμμή χωρίς παραμόρφωση.

Σε μια γραμμή $G=0$ και $R \ll \omega L$ θα είναι :

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C} = j\omega\sqrt{LC} \sqrt{1 + R/j\omega L} \approx j\omega\sqrt{LC}(1 + R/2j\omega L)$$

ή

$$\gamma \approx R\sqrt{LC}/2L + j\omega\sqrt{LC} = R/2Z_c + j\omega\sqrt{LC} \quad (227)$$

και

$$\alpha = R/2Z_c \quad (228)$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

(229)

Συνεπώς, η σταθερά αποσβέσεως είναι ίση με τη μισή σταθερά αποσβέσεως της γραμμής Heavyside, ενώ η σταθερά φάσεως είναι ίδια με τη σταθερά φάσεως της γραμμής Heavyside. Η χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής είναι,

$$Z_c = \sqrt{(R + j\omega L)/j\omega C} = \sqrt{L/C}\sqrt{1 + R/j\omega L}$$

$$Z_c \approx \sqrt{L/C}(1 - jR/2\omega L)$$

(230)

3.8. Υπερβολική μορφή των εξισώσεων της γραμμής μεταφοράς

Η εκθετική μορφή των εξισώσεων της γραμμής, η οποία χρησιμοποιήθηκε ως τώρα, είναι κατάλληλη για πολλές περιπτώσεις υπολογισμού. Υπάρχουν όμως και άλλες ισοδύναμες μορφές των εξισώσεων της γραμμής, όπως η υπερβολική και τα ισοδύναμα T και Π , οι οποίες είναι πιο κατάλληλες για άλλες περιπτώσεις αναλύσεως και οι οποίες μορφές θα αναπτυχθούν στο κεφάλαιο αυτό.

Τα προσπίπτοντα και ανακλώμενα κύματα της τάσεως σπανίως βρίσκονται κατά τους υπολογισμούς της τάσεως μιας γραμμής ηλεκτρικής ενέργειας. Ο λόγος για τον οποίο εξετάστηκαν οι συνιστώσες αυτές της τάσεως είναι για να βοηθήσουν στην πληρέστερη κατανόηση ορισμένων φαινομένων των γραμμών μεταφοράς. Οπωσδήποτε η ανάλυση αυτή εξυπηρετεί τη μελέτη της μεταβατικής συμπεριφοράς των γραμμών μεταφοράς. Για τη μελέτη της μόνιμης λειτουργίας των γραμμών μια πιο κατάλληλη μορφή των εξισώσεων υπολογισμού του ρεύματος και της τάσεως μιας γραμμής ηλεκτρικής ενέργειας βρίσκεται με την εισαγωγή υπερβολικών συναρτήσεων σε αυτές.

Η υπερβολική μορφή των εξισώσεων η οποία προκύπτει με ανακατάταξη των όρων των εξισώσεων (202) και (203), ώστε να σχηματίσουν οι εκφράσεις (231) των υπερβολικών συναρτήσεων,

$$\sinh \gamma x = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}$$

$$\cosh \gamma x = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}$$

(231)

είναι

$$E = E_R \cosh \gamma x + I_R Z_C \sinh \gamma x \quad (232)$$

$$I = I_R \cosh \gamma x + \frac{E_R}{Z_C} \sinh \gamma x \quad (233)$$

Θέτοντας $x=\ell$ βρίσκουμε την τάση και το ρεύμα στο άκρο αναχωρήσεως της γραμμής, δηλαδή έχουμε

$$E_S = E_R \cosh(\gamma \ell) + I_R Z_C \sinh(\gamma \ell) \quad (234)$$

$$I_S = I_R \cosh(\gamma \ell) + E_R / Z_C \sinh(\gamma \ell) \quad (235)$$

ή σε μορφή μητρών:

$$\begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma \ell) & Z_C \sinh(\gamma \ell) \\ \frac{\sinh(\gamma \ell)}{Z_C} & \cosh(\gamma \ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (236)$$

Επιλύοντας τις εξισώσεις (234) και (235) ως προς E_R και I_R βρίσκουμε την τάση και το ρεύμα στο άκρο αφίξεως της γραμμής, δηλαδή

$$E_S = E_S \cosh(\gamma \ell) - I_R Z_C \sinh(\gamma \ell) \quad (237)$$

$$I_R = I_R \cosh(\gamma \ell) - \frac{E_R}{Z_C} \sinh(\gamma \ell) \quad (238)$$

ή αντιστρέφοντας την (236)

$$\begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma \ell) & -Z_C \sinh(\gamma \ell) \\ -\frac{\sinh(\gamma \ell)}{Z_C} & \cosh(\gamma \ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix} \quad (239)$$

Οι εξισώσεις (234) έως και (239) είναι οι υπερβολικές εξισώσεις μιας γραμμής μεταφοράς. Οι συντελεστές των εξισώσεων είναι υπερβολικές συναρτήσεις των παραμέτρων του κυκλώματος και τα ηλεκτρικά μεγέθη, οι φασικές τάσεις και τα ρεύματα της γραμμής. Δεδομένου ότι το $\gamma \ell$ είναι συνήθως μιγαδικός αριθμός, οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι επίσης μιγαδικές και δεν μπορούν να βρεθούν απευθείας από συνήθεις πίνακες, παρά μόνον από ειδικούς πίνακες υπερβολικών συναρτήσεων μιγαδικών μεταβλητών.

Αναλυτικά, οι υπερβολικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής μπορούν να υπολογιστούν κατά διάφορους τρόπους, όπως οι ακόλουθες εκφράσεις συναρτήσεων τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων πραγματικών μεταβλητών:

$$\cosh(\alpha\ell + j\beta\ell) = \cosh(\alpha\ell) \cos(\beta\ell) + j\sinh(\alpha\ell) \eta\mu(\beta\ell) \quad (240)$$

$$\sinh(\alpha\ell + j\beta\ell) = \sinh(\alpha\ell) \cos(\beta\ell) + jcosh(\alpha\ell) \eta\mu(\beta\ell) \quad (241)$$

Η σωστή μαθηματική μονάδα για το $\beta\ell$ είναι το ακτίνιο και σε ακτίνια υπολογίζεται το $\beta\ell$ ως συνιστώσα του $\gamma\ell$.

Μια υπερβολική συνάρτηση μπορεί να υπολογιστεί και από το ανάπτυγμα της σε σειρά, όπως σε σειρά Maclaurin:

$$\cosh\theta = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (242)$$

$$\sinh\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (243)$$

Οι σειρές αυτές συγκλίνουν γρήγορα για τις τιμές του $\gamma\ell$, οι οποίες συναντώνται στους υπολογισμούς των εναέριων γραμμών, και επαρκής ακρίβεια επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό μόνο των λίγων πρώτων όρων.

3.9. Τα ισοδύναμα κυκλώματα Π και Τ μιας γραμμής μεταφοράς.

Όπως αναφέρθηκε ήδη στο εδάφιο 3.4 τα ονομαστικά κυκλώματα Τ και Π αποτελούν προσεγγιστικά μοντέλα μιας γραμμής, η ακρίβεια των οποίων μειώνεται με την αύξηση του μήκους της γραμμής. Η ακριβής ή ισοδύναμη παράσταση μιας μεγάλης γραμμής με κυκλώματα Τ και Π, δηλ. κυκλώματα με συγκεντρωμένες παραμέτρους, μπορεί εύκολα να γίνει βάσει των υπερβολικών εξισώσεων (236). Συγκεκριμένα, οι εκφράσεις των παραμέτρων σειράς και των εγκαρσίων παραμέτρων των ισοδυνάμων αυτών κυκλωμάτων προκύπτουν από την σύγκριση των στοιχείων των μητρών ενός κυκλώματος Τ ή Π με τα αντίστοιχα στοιχεία της μήτρας συντελεστών των υπερβολικών εξισώσεων (236), δηλ.,

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{Z'Y'}{2}\right) & Z' \\ \left(1 + \frac{Z'Y'}{4}\right)Y' & \left(1 + \frac{Z'Y'}{2}\right) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \cosh \gamma \ell & Z_c \sinh \gamma \ell \\ \frac{\sinh \gamma \ell}{Z_c} & \cosh \gamma \ell \end{bmatrix}$$

(244)

όπου, Z, Y οι παράμετροι του ισοδύναμου κυκλώματος Π, και,

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{Z''Y''}{2}\right) & \left(1 + \frac{Z''Y''}{4}\right)Z'' \\ Z' & \left(1 + \frac{Z''Y''}{2}\right) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \cosh \gamma \ell & Z_c \sinh \gamma \ell \\ \frac{\sinh \gamma \ell}{Z_c} & \cosh \gamma \ell \end{bmatrix}$$

(245)

όπου Z'', Y'' οι παράμετροι του ισοδύναμου κυκλώματος Τ.

Οι εκφράσεις των παραμέτρων των ισοδύναμων κυκλωμάτων Π και Τ, που προκύπτουν από τις ανωτέρω εξισώσεις είναι οι έξης:

Ισοδύναμο κύκλωμα ΙΠ

$$Z = Z_c \sinh \gamma \ell \quad \text{και} \quad \frac{Y}{2} = \frac{1}{Z_c} \frac{\cosh \gamma \ell - 1}{\sinh \gamma \ell}$$

(246)

Τροποποιώντας τις εκφράσεις αυτές, ώστε να εμφανιστούν οι παράμετροι Z και Y/2, του ονομαστικού κυκλώματος Π, έχουμε :

$$Z' = Z \frac{\sinh \gamma \ell}{\gamma \ell} \quad \text{και} \quad \frac{Y'}{2} = \frac{Y}{2} \frac{\tanh(\gamma \ell / 2)}{\gamma \ell / 2}$$

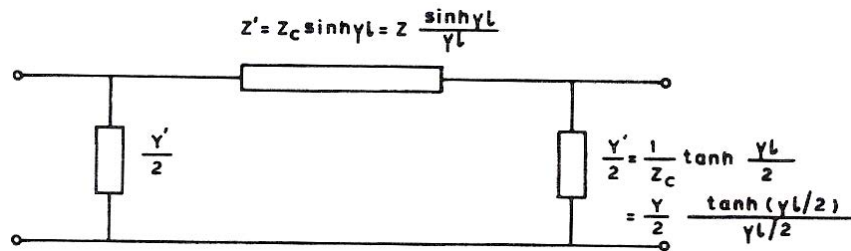
(247)

Οι παραστάσεις,

$$\frac{\sinh \gamma \ell}{\gamma \ell} \quad \text{και} \quad \frac{\tanh(\gamma \ell / 2)}{\gamma \ell / 2}$$

(248)

μπορούν να θεωρηθούν σαν συντελεστές διορθώσεως των παραμέτρων Z και Y/2, του ονομαστικού κυκλώματος Π, ώστε να προκύψει η ακριβής παράσταση του ισοδύναμου κυκλώματος Π.

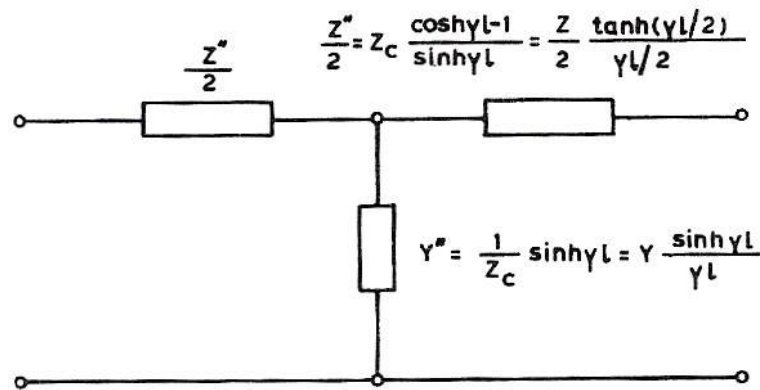


Σχ. 21. Ισοδύναμο κύκλωμα Π μιας γραμμής μεταφοράς
ισοδύναμο κύκλωμα T.

$$Y'' = \frac{\sinh \gamma \ell}{Z_c} \text{ και } \frac{Z''}{2} = Z_c \frac{\cosh \gamma \ell - 1}{\sinh \gamma \ell} \quad (249)$$

Εισάγοντας επίσης, τις παραμέτρους Y και $Z/2$ του ονομαστικού κυκλώματος T, οι παράμετροι του ισοδύναμου κυκλώματος T γίνονται:

$$Y'' = Y \frac{\sinh \gamma \ell}{\gamma \ell}, \quad \frac{Z''}{2} = \frac{Z}{2} \frac{\tanh(\gamma \ell / 2)}{\gamma \ell} \quad (250)$$



Σχ. 22. Ισοδύναμο κύκλωμα T μιας γραμμής μεταφοράς.

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις (247) με τις αντίστοιχες (250) παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διορθώσεως του ισοδύναμου κυκλώματος T είναι ίδιοι με τους αντίστοιχους συντελεστές διορθώσεως του ισοδύναμου κυκλώματος Π, με τη διαφορά ότι έχουν εναλλαγεί. Δηλαδή, ο συντελεστής διορθώσεως της σύνθετης αγωγιμότητας του κυκλώματος Π είναι ο συντελεστής διορθώσεως της σύνθετης αντιστάσεως του κυκλώματος T και αντίστροφα. Συνεπώς μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας οι ίδιες μέθοδοι υπολογισμού.

Κάθε γραμμή μεταφοράς είναι δυνατόν να παρασταθεί επακριβώς, όσον αφορά στις συνθήκες στα άκρα της, από το ισοδύναμό της κύκλωμα Π ή T. Τα αποτελέσματα των

υπολογισμών οι οποίοι θα γίνουν στο ισοδύναμο κύκλωμα, θα είναι ίδια με εκείνα, τα οποία θα βρεθούν από τις εξισώσεις της γραμμής μεγάλου μήκους. Η παράσταση μιας γραμμής μεταφοράς με ισοδύναμο κύκλωμα είναι προτιμότερη από τις εξισώσεις της γραμμής, όταν κατά τούς υπολογισμούς είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη και ο εξοπλισμός, ο εγκατεστημένος στα τέρματα της γραμμής.

3.10. Τυπικοί τερματισμοί γραμμής μεταφοράς

Οι εξής τρεις τυπικές περιπτώσεις τερματισμού μιας γραμμής παρουσιάζουν ενδιαφέρον και θα εξετασθούν ιδιαίτερα:

Ανοικτή γραμμή

Βραχυκυκλωμένη γραμμή

Γραμμή με τερματική αντίσταση ίση με τη χαρακτηριστική της αντίσταση.

(α) Ανοικτή γραμμή.

Ανοικτή γραμμή σημαίνει μια γραμμή με ανοικτό πέρας, δηλαδή μια γραμμή, η οποία βρίσκεται σε κενή λειτουργία. Επομένως, η ουσιώδης συνθήκη για μια τέτοια γραμμή είναι:

$$I_R = 0 \quad (251)$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (234) και (235) το I_B με τη μηδενική του τιμή βάσει της (251) έχουμε:

$$E_S = E_R \cosh \gamma \ell \quad (252)$$

$$I_S = \frac{E_R}{Z_C} \sinh \gamma \ell \quad (253)$$

Η εξίσωση (252) δίνει τη σχέση μεταξύ των τάσεων αφίξεως και αναχωρήσεως μιας ανοικτής γραμμής, δηλαδή

$$\frac{E_R}{E_S} = \frac{1}{\cosh \gamma \ell} \quad (254)$$

Για γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες η (254) γίνεται:

$$\frac{E_R}{E_S} = \frac{1}{\text{συν}(\omega\ell\sqrt{LC})} = \frac{1}{\text{συν}\Delta}$$

(255)

όπου $\Delta = \omega\ell\sqrt{LC}$ η ηλεκτρική γωνία της γραμμής χωρίς απώλειες.

Η διαίρεση των εξισώσεων (252) και (253) κατά μέλη δίνει τη σύνθετη αντίσταση ανοικτού κυκλώματος στην αναχώρηση της γραμμής, η οποία καλείται και σύνθετη αντίσταση εισόδου της γραμμής:

$$Z_S = \frac{E_S}{I_S} = \frac{Z_C}{\tanh\gamma\ell}$$

(256)

Η εξίσωση (256) γράφεται και,

$$Z_S = Z_C \frac{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}}$$

(257)

από την οποία φαίνεται ότι, εάν η γραμμή γίνεται πολύ μεγάλη, ($\ell \rightarrow \infty$) τότε:

$$Z_S \rightarrow Z_C$$

(258)

Επομένως μια δυνατή ερμηνεία της χαρακτηριστικής αντιστάσεως της γραμμής είναι ότι παριστάνει την αντίσταση εισόδου μιας απείρως μεγάλης γραμμής. Η Z_S είναι δυνατόν να θεωρηθεί και σαν η σύνθετη αντίσταση της γραμμής, την οποία βλέπει η αναχώρηση της μέχρις ότου επιστρέψουν σε αυτή τα πρώτα ανακλώμενα κύματα τάσεως και εντάσεως, τα οποία εξαρτώνται από το πέρασ της γραμμής.

Όταν τεθούν αριθμητικές τιμές στην εξίσωση (254) ή την (255), για τις συνήθεις γραμμές μεταφοράς βρίσκεται κατά κανόνα ότι η E_R είναι μεγαλύτερη σε μέγεθος από την E_S . Από φυσική άποψη το φαινόμενο αυτό είναι περισσότερο κατανοητό, αν θεωρηθεί το ονομαστικό ή το ισοδύναμο κύκλωμα Π της γραμμής, όπως π.χ. του σχ. 21. Εάν το ρεύμα του άκρου αφίξεως είναι μηδενικό το κύκλωμα αυτό καταλήγει να είναι δύο κλάδοι παράλληλοι από τους οποίους ο ένας αποτελείται από την ωμική και την επαγωγική αντίσταση της γραμμής εν σειρά με τη χωρητικότητα του άκρου αφίξεως. Είναι γνωστό ότι σε ένα τέτοιο κύκλωμα λόγω μερικού συντονισμού μεταξύ επαγωγής και χωρητικότητας η τάση η οποία εμφανίζεται στο άκρο της χωρητικότητας δηλαδή στην περίπτωση μας στο πέρασ της γραμμής είναι μεγαλύτερη από τη τάση η οποία επιβάλλεται σε ολόκληρο το κύκλωμα. Όπως φαίνεται σαφέστερα από την εξίσωση (256), αν αγνοηθούν οι απώλειες της γραμμής η E_R γίνεται άπειρα μεγάλη όταν το $\omega\ell\sqrt{LC}$ τείνει προς $\pi/2$ ή το μήκος της γραμμής προς $\pi/2$ δηλαδή προς το τέταρτο του μήκους κύματος αυτής. Καθώς όμως η χωρητικότητα στην πραγματικότητα είναι κατανεμημένη κατά μήκος της γραμμής, το φαινόμενο αλλάζει κάπως, αλλά η βασική αρχή του εφαρμόζεται. Το χωρητικό ρεύμα ή ρεύμα φορτίσεως της γραμμής, ρέον διά μέσου της επαγωγικής αντιστάσεως, προκαλεί ανύψωση της τάσεως της γραμμής, η οποία μεγαλώνει με την απόσταση από την αναχώρηση και παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της στο πέρασ της γραμμής. Το φαινόμενο

αυτό καλείται φαινόμενο Ferranti και είναι χαρακτηριστικό των μεγάλων γραμμών και πολλές φορές δημιουργεί προβλήματα στην πράξη. Εάν στο άκρο αναχωρήσεως η τάση διατηρείται σε κανονική τιμή, στο πέρας της γραμμής είναι δυνατόν να ανυψωθεί σε μη κανονικές τιμές καθώς το φορτίο πλησιάζει στο μηδέν, θέτοντας σε κίνδυνο τη μόνωση της γραμμής ή του εξοπλισμού ή προκαλώντας πολύ υψηλά ρεύματα μαγνητίσεως και απώλειες στους μετασχηματιστές οι οποίοι συνδέονται πιθανόν με το άκρο αυτό της γραμμής. Υπό κανονικές συνθήκες βέβαια η υπέρταση αυτή δεν είναι τόσο υψηλή ώστε να είναι επικίνδυνη, κυρίως εάν η διάρκειά της δεν είναι σημαντική. Συνήθη μέτρα τα οποία λαμβάνονται για τη μείωση της τάσεως αυτής του τέρματος αφόρτιστης γραμμής είναι η σχετική μείωση της τάσεως αναχωρήσεως της γραμμής, η επαγωγική αντιστάθμιση αυτής, δηλαδή ή σύνδεση επαγωγικών πηγών ισχύος στο ανοικτό πέρας της γραμμής.

(β) Βραχυκυκλωμένη γραμμή. Στην εξεταζόμενη περίπτωση με τον όρο βραχυκυκλωμένη γραμμή εννοούμε μια συμμετρική γραμμή, της οποίας και οι τρεις φάσεις στο πέρας της είναι συνδεδεμένες προς την Γή, όποτε οι τάσεις αφίξεως και των τριών φάσεων είναι μηδέν, δηλ.

$$E_R = 0 \quad (259)$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (234) και (235) την E_R με τη μηδενική της τιμή από την (259) έχουμε:

$$E_S = I_R Z_C \sinh(\gamma \ell) \quad (260)$$

$$I_S = I_R \cosh(\gamma \ell) \quad (261)$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις (260) και (261) κατά μέλη λαμβάνουμε τη σύνθετη αντίσταση της βραχυκυκλωμένης γραμμής, όπως φαίνεται από την αναχώρηση της γραμμής δηλαδή,

$$Z_S = \frac{E_S}{I_S} = Z_C \tanh(\gamma \ell) \quad (262)$$

Η εξίσωση (262) γράφεται ακόμη:

$$Z_S = Z_C \frac{e^{\gamma \ell} - e^{-\gamma \ell}}{e^{\gamma \ell} + e^{-\gamma \ell}} \quad (263)$$

Παρατηρούμε ότι, όπως και στην περίπτωση της ανοικτής γραμμής όταν το μήκος γίνεται πολύ μεγάλο,

$$Z_S \rightarrow Z_C \quad (264)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι φυσικό, διότι δεν έχει καμιά σημασία για μια γραμμή με άπειρο μήκος, αν το πέρας της είναι ανοικτό ή βραχυκυκλωμένο. Το ρεύμα στο πέρας της

γραμμής βρίσκεται συναρτήσει της τάσεως και του ρεύματος αναχωρήσεως της γραμμής, από τις εξισώσεις (260) και (261), δηλαδή

$$I_R = \frac{I_S}{\cosh(\gamma \ell)} = I_S \operatorname{sech}(\gamma \ell) \quad (265)$$

$$I_R = \frac{E_S}{Z_C \sinh(\gamma \ell)} = \frac{E_S}{Z_C} \operatorname{sech}(\gamma \ell) \quad (266)$$

Είναι επίσης:

$$\frac{I_R}{I_S} = \frac{1}{\cosh(\gamma \ell)} \quad (267)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (254) και (267) παρατηρούμε ότι η σχέση του I_R προς το I_S στη βραχυκυκλωμένη γραμμή είναι ίδια με τη σχέση της E_R προς την E_S στην ανοικτή γραμμή. Για γραμμές μεταφοράς συνήθους μήκους το ρεύμα βραχυκυκλώσεως στο άκρο αφίξεως επιπορεύεται της τάσεως του άκρου αναχωρήσεως της γραμμής με μεγάλη διαφορά φάσεως. Το ρεύμα φορτίσεως, το οποίο οφείλεται στη χωρητικότητα της γραμμής, προπορεύεται της τάσεως αναχωρήσεως. Για τους λόγους αυτούς το διανυσματικό άθροισμα του ρεύματος βραχυκυκλώσεως και του ρεύματος φορτίσεως της γραμμής, τα όποια μαζί αποτελούν το ρεύμα του άκρου αναχωρήσεως αυτής, είναι δυνατόν να είναι μικρότερο από το ρεύμα του άκρου αφίξεως της γραμμής μόνο. Συμβαίνει δηλαδή με τα ρεύματα στην βραχυκυκλωμένη γραμμή, ότι με τις τάσεις στην ανοικτή γραμμή.

(γ) Γραμμή με τερματική αντίσταση όση με τη χαρακτηριστική αντίσταση. Όταν στο άκρο αφίξεως της γραμμής συνδέεται ένα φορτίο, ο λόγος της τάσεως αφίξεως προς το ρεύμα αφίξεως μπορεί να θεωρηθεί σαν μια σύνθετη αντίσταση Z_L . Ένας τέτοιος γενικός τερματισμός μιας γραμμής μεταφοράς σε μια σύνθετη αντίσταση Z θεωρήθηκε στο κεφάλαιο 3.5. Εάν το φορτίο αποτελείται μόνο από σταθερές αντιστάσεις, επαγωγές και χωρητικότητες, η Z είναι πραγματική σύνθετη αντίσταση του φορτίου στη χρησιμοποιούμενη συχνότητα, αλλά εάν το φορτίο περιέχει πηγές $H_{E\Delta}$ ή Z_L είναι μόνο η φαινόμενη σύνθετη αντίσταση η προερχόμενη από τη σχέση τάσεως ρεύματος. Όσο η τάση και το ρεύμα παραμένουν αμετάβλητα δεν έχει σημασία για τη μελέτη της γραμμής αν η Z_L είναι πραγματική ή φαινόμενη σύνθετη αντίσταση.

Όταν η τιμή της Z_L είναι ίση με Z_C , η γραμμή παρουσιάζει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Στην περίπτωση αυτή είναι:

$$E_R = Z_L I_R = Z_C I_R \quad (268)$$

Η εξίσωση αυτή είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί για την απαλοιφή είτε του E_R ή του I_R από τις εξισώσεις της γραμμής.

Εδώ θα χρησιμοποιηθεί για την απαλοιφή του I_R . Από την εξίσωση (268) είναι:

$$I_R = \frac{E_R}{Z_C} \quad (269)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή του I_R στις εξισώσεις (232) και (233), οι οποίες δίνουν την τάση και την ένταση της γραμμής σε οποιοδήποτε σημείο της συναρτήσει της αποστάσεως x από το άκρο αφίξεως της γραμμής, έχουμε:

$$E_x = E_R [\cosh(\gamma x) \sinh(\gamma x)] \quad (270)$$

$$I_x = \frac{E_R}{Z_C} [\cosh(\gamma x) \sinh(\gamma x)] \quad (271)$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις αυτές κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{E_x}{I_x} = Z_C = Z \quad (272)$$

Δηλαδή όταν η γραμμή τερματίζει σε μια σύνθετη αντίσταση ίση με τη χαρακτηριστική της, η τάση και το ρεύμα διατηρούν μια σταθερή σχέση κατά μήκος όλης της γραμμής και η μεταβολή της τάσεως κατά μήκος της γραμμής συνοδεύεται από μια ακριβώς όμοια μεταβολή του ρεύματος. Η φασική απόκλιση μεταξύ τάσεως και ρεύματος παραμένει σταθερή κατά μήκος της γραμμής και συνεπώς το ίδιο συμβαίνει και με το συντελεστή ισχύος. Περαιτέρω, είναι σημαντικό ότι η φαινόμενη σύνθετη αντίσταση της γραμμής, η οποία δίνεται από το λόγο της τάσεως προς το ρεύμα, είναι η ίδια ανεξάρτητα από το σημείο της γραμμής στο οποίο μετρούνται η τάση και το ρεύμα.

Φαίνεται παράδοξο ότι μετά τη σύνδεση μιας σύνθετης αντιστάσεως Z_C στο τέλος της γραμμής η αντίσταση εισόδου της γραμμής, δηλαδή η αντίσταση της στο άκρο αναχωρήσεως της, η οποία περιλαμβάνει και τη σύνθετη αντίσταση του τέρματος και τη σύνθετη αντίσταση της γραμμής, πρέπει να είναι πάλι Z_C . Η ίδια γραμμή φαίνεται σαν να μη προσθέτει τίποτα. Μια γραμμή άπειρου μήκους, ανεξάρτητα από τον τερματισμό της, θα παρουσίαζε παρόμοιες ιδιότητες. Σε κάθε πεπερασμένο σημείο της γραμμής η φαινόμενη σύνθετη αντίσταση, η οποία προσδιορίζεται από μετρήσεις της τάσεως και του ρεύματος, θα έχει απαραίτητα την ίδια τιμή, διότι το μήκος της γραμμής πέρα από το σημείο μετρήσεως παραμένει άπειρο. Η τιμή αυτή αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι ίση με Z_C , όπως και η αντίσταση εισόδου. Για το λόγο αυτό μια γραμμή η οποία τερματίζει στη χαρακτηριστική της αντίσταση, λέγεται συχνά ότι συμπεριφέρεται σαν γραμμή απείρου μήκους, πράγμα το οποίο ερμηνεύει και το παράδοξο, το οποίο αναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου. Για το λόγο αυτό η γραμμή η οποία τερματίζει στη χαρακτηριστική της αντίσταση, ονομάζεται και άπειρη γραμμή.

(δ) Συζήτηση των ειδικών περιπτώσεων. Η σύνθετη αντίσταση της γραμμής, μετρούμενη στο άκρο αναχωρήσεως της για τους τρεις τύπους τερματισμού του πέρατος της γραμμής, δίνεται από τους τύπους (256), (262) και (272), δηλ.

$$Z_{S(\text{av.})} = \frac{z_C}{\tanh(\gamma \ell)} \quad (\text{ανοικτή γραμμή})$$

$$Z_{S(\beta\rho.)} = z_C \tanh(\gamma \ell) \quad (\text{βραχυκυκλωμένη γραμμή})$$

$$Z_{S(\chi\alpha\rho.)} = z_C \quad (\text{τερματισμός με χαρακτηριστική αντίσταση})$$

Από τις δύο πρώτες προκύπτει εύκολα,

$$Z_{S(\chi\alpha\rho.)} = \sqrt{Z_{S(\text{av.})} Z_{S(\beta\rho.)}}$$

(273)

δηλαδή η χαρακτηριστική αντίσταση είναι δυνατό να υπολογισθεί από τις μετρήσεις της ανοικτής και της βραχυκυκλωμένης γραμμής. Όταν είναι γνωστή η Z_C μπορούν να υπολογισθούν η $\tanh \gamma \ell$ και συνεπώς το $\gamma \ell$, από τα οποία βρίσκονται οι Z και Y της γραμμής, δεδομένου ότι είναι:

$$Z = Z_C (\gamma \ell)$$

(274)

Εάν η γραμμή είναι εξαιρετικά μεγάλου μήκους ή η συχνότητα υψηλή, οπότε το $\gamma \ell$ είναι μεγάλο, η τιμή του $\gamma \ell$ πλησιάζει το 1 και το $\gamma \ell$ δεν μπορεί να υπολογισθεί με ακρίβεια. Εν τούτοις για τις συνήθεις γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας το $\gamma \ell$ είναι αρκετά μικρό, ώστε από τις δοκιμές ανοικτής και βραχυκυκλωμένης γραμμής να προσδιορίζονται με ικανοποιητική ακρίβεια το Z και Y .

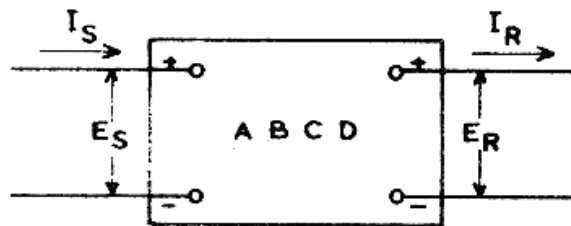
Το γεγονός ότι η $\tanh \gamma \ell$ πλησιάζει τη μονάδα για πολύ μεγάλες τιμές του $\gamma \ell$ είναι μια απόδειξη ότι η μετρούμενη σύνθετη αντίσταση μιας γραμμής άπειρου μήκους θα ήταν Z_C δεδομένου ότι οι σύνθετες αντιστάσεις μιας γραμμής μετρούμενες με το πέρασ της ανοικτό, βραχυκυκλωμένο ή τερματιζόμενο με την χαρακτηριστική του αντίσταση, όλες προσεγγίζουν την τιμή αυτή όταν η γραμμή είναι πολύ μεγάλη και το $\gamma \ell$ γίνεται και αυτό πολύ μεγάλο.

3.11. Γενικευμένες σταθερές και δίθυρα κυκλώματα

Η γενική ομοιότητα των εξισώσεων τάσεων και εντάσεων για τις διάφορες παραστάσεις μιας γραμμής ηλεκτρικής ενέργειας (μικρού, μεσαίου και μεγάλου μήκους) επιτρέπει τη χρησιμοποίηση μιας γενικευμένης μορφής εξισώσεων και αντίστοιχα, ενός γενικευμένου μοντέλου για την παράσταση των γραμμών. Η γενικευμένη μορφή των εξισώσεων είναι,

$$E_S = AE_R + BI_R, \quad I_S = CE_R + DI_R \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (275)$$

όπου, οι συντελεστές A,B,C,D είναι γνωστοί σαν γενικευμένες σταθερές του κυκλώματος, ή απλά σταθερές ABCD του κυκλώματος. Η γενική αυτή παράσταση ισχύει για κάθε παθητικό, γραμμικό και αμφίπλευρο κύκλωμα με δύο ζεύγη ακροδεκτών, το οποίο χαρακτηρίζεται σαν δίθυρο κύκλωμα αλλά για πρώτη φορά εφαρμόστηκε στις γραμμές ηλεκτρικής ενέργειας από τους EVANS και SELS, κατά το 1921. Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία των κυκλωμάτων, βασική προϋπόθεση για το χαρακτηρισμό ενός γενικού μονοφασικού κυκλώματος σαν δίθυρου, είναι το ρεύμα το οποίο εισέρχεται στον ένα πόλο κάθε ζεύγους, να είναι ίσο με το ρεύμα που εγκαταλείπει τον άλλο πόλο, πράγμα που ισχύει για όλα τα ισοδύναμα κυκλώματα των γραμμών ηλεκτρικής ενεργείας, που αναπτύχτηκαν ως τώρα. Η διάταξη ενός γενικού κυκλώματος δίνεται στο σχ. 23.



Σχ. 23. Παράσταση γενικού κυκλώματος σταθερών ABCD.

Επιλύοντας το σύστημα (275) ως προς E_R και I_R με αντιστροφή της μήτρας των σταθερών ABCD βρίσκουμε:

$$\begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix} \quad (276)$$

$$E_R = DE_S - BI_S \quad (277)$$

$$I_R = -CE_S + AI_S \quad (278)$$

Συνήθως οι σταθερές ABCD είναι μιγαδικές και όπως είναι γνωστό, συνδέονται με τη σχέση $AD - BC = 1$.

Οι γενικευμένες σταθερές έχουν διαφορετικές τιμές για διαφορετικά κυκλώματα και για τα απλά κυκλώματα, δίνονται στον Πίνακα 2.

3.12. Γενικά κυκλώματα γραμμών ηλεκτρικής ενεργείας

Οι εξισώσεις (275) είναι εξαιρετικά χρήσιμες για την παράσταση γραμμών και άλλων κυκλωμάτων ηλεκτρικής ενεργείας, διότι μπορούν βάσει αυτών να αναπτυχθούν γενικές σχέσεις, οι οποίες να αφορούν τη μέγιστη ισχύ μεταφοράς και άλλες ιδιότητες ενός κυκλώματος, όπως είναι οι εξισώσεις των κυκλικών διαγραμμάτων ρεύματος και ισχύος μιας γραμμής και να εφαρμοστούν κατόπιν σε γενικά κυκλώματα με απλή αντικατάσταση των κατάλληλων τιμών των γενικευμένων σταθερών.

Γενικά η εφαρμογή των δίθυρων κυκλωμάτων εξυπηρετεί πολύ την ανάλυση των συστημάτων ηλεκτρικής ενεργείας.

Θέτοντας $I_R=0$ στην πρώτη από τις εξ. (275) βλέπουμε ότι η σταθερά A είναι ο λόγος της τάσεως αναχωρήσεως προς την τάση αφίξεως, όταν το πέρας της γραμμής είναι ανοικτό. Η σταθερά A είναι διαστατή, αφού είναι λόγος δύο τάσεων. Εκτός από την περίπτωση να είναι οι τάσεις εν φύσει η A είναι μιγαδικός αριθμός και η γωνία της είναι η φασική απόκλιση μεταξύ των τάσεων.

Εάν θέσουμε $E_R=0$ στην πρώτη πάλι από τις εξ. (275) βρίσκουμε ότι το B είναι ο λόγος της τάσεως αναχωρήσεως προς το ρεύμα αφίξεως με το πέρας της γραμμής βραχυκυκλωμένο. Σαν λόγος τάσεως προς ρεύμα η σταθερά B έχει διαστάσεις σύνθετης αντιστάσεως και προδιαγράφεται σε ohm.

Παρόμοια, θέτοντας $I_R =0$ στην εξίσωση (275) βλέπουμε ότι η σταθερά C είναι ο λόγος του ρεύματος αναχωρήσεως προς την τάση αφίξεως του δικτύου με το πέρας της γραμμής ανοικτό. Σαν λόγος ρεύματος προς τάση η σταθερά C έχει διαστάσεις σύνθετης αγωγιμότητας και μετριέται σε s.

Οι γενικευμένες σταθερές για κάθε μοντέλο γραμμής που αναπτύχθηκε ως τώρα μπορεί να προσδιοριστούν με σύγκριση των αντίστοιχων εξισώσεων του μοντέλου με τις γενικές εξισώσεις (275). Έτσι βρίσκεται ότι οι γενικευμένες σταθερές του ονομαστικού κυκλώματος Π, του σχ. 19., είναι

$$A = 1 + \frac{ZY}{2} \quad C = \left(1 + \frac{ZY}{4}\right)Y$$

$$B = Z \quad D = 1 + \frac{ZY}{2}$$

(279)

Στην περίπτωση του ονομαστικού κυκλώματος T είναι:

$$A = 1 + \frac{ZY}{2} \quad C = Y$$

$$B = \left(1 + \frac{ZY}{4}\right)Z \quad D = 1 + \frac{ZY}{2}$$

(280)

Οι γενικότερες περιπτώσεις μη συμμετρικών κυκλωμάτων Π και Τ δίνονται στον Πίνακα 2.

Εξισώσεις αντίστοιχες με τις (279) ή (280) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των σταθερών ABCD μεγάλων γραμμών μεταφοράς από τις τιμές των σύνθετων αντιστάσεων και αγωγιμοτήτων του ισοδύναμου κυκλώματος Π και ισοδύναμου κυκλώματος Τ. Δεδομένου ότι οι κλάδοι των ισοδύναμων κυκλωμάτων εκφράζονται συναρτήσει των υπερβολικών συναρτήσεων της γραμμής, είναι απλούστερο να εκφραστούν και οι σταθερές ABCD συναρτήσει των ιδίων υπερβολικών συναρτήσεων κατευθείαν από τις εξισώσεις της γραμμής (234) και (235), οπότε είναι:

$$A = \cosh \gamma \ell \quad C = \frac{\sinh \gamma \ell}{Z_c}$$

$$B = Z_c \sinh \gamma \ell \quad D = \cosh \gamma \ell$$

(281)

Σε όλα τα συμμετρικά δίθυρα κυκλώματα δηλαδή τα κυκλώματα, τα όποια είναι τα ίδια από οποιοδήποτε άκρο τους και αναθεωρούνται, οι σταθερές A και D είναι πάντοτε ίσες. Σε ένα μη συμμετρικό κύκλωμα η A δεν είναι ποτέ ίση με την D.

Όταν το δίκτυο παριστάνεται με γενικά κυκλώματα Τ και Π ισοδύναμα μεταξύ τους, παρίσταται πολλές φορές η ανάγκη μετατροπής από τη μια μορφή στην άλλη. Η μετατροπή αυτή είναι απλώς θέμα προσδιορισμού των παραμέτρων της μιας παραστάσεως συναρτήσει των παραμέτρων της άλλης, πράγμα που γίνεται εύκολα με εξίσωση των εκφράσεων των ABCD που αντιστοιχούν στα γενικά κυκλώματα Τ και Π (Πίνακας 3.). Οι εκφράσεις μετασχηματισμού δίνονται στον Πίνακα 2.

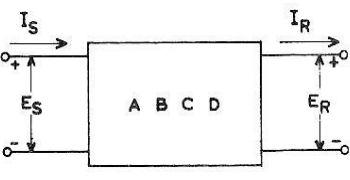
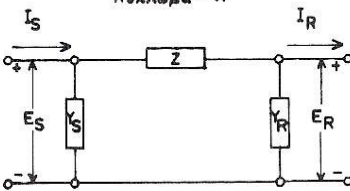
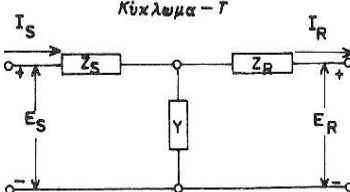
Πίνακας 2. Γενικευμένες σταθερές κυκλώματος απλών δικτύων.

ΤΥΠΟΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ	A	B	C	D
	1	Z	0	1
	1	0	Y	1
	$1+Z_S Y$	$Z_S+Z_R+Z_S Z_R Y$	Y	$1+Z_R Y$
	$1+Z Y_R$	Z	$Y_S+Y_R+Z Y_S Y_R$	$1+Z Y_S$
	$\cosh \gamma \ell$	$Z_C \sinh \gamma \ell$	$\frac{\sinh \gamma \ell}{Z_C}$	$\cosh \gamma \ell$

Γραμμή με κατανομισμένες παραμέτρους

*Στο κείμενο αναφέρονται και σαν σχήματα 24-28.

Πίνακας 3. Τύποι μετασχηματισμού κυκλωμάτων.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΠΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΙΣ	ΣΤΑ-ΘΕΡΑ	ΓΕΝΙΚΟΝ ΚΥΚΛΩΜΑ	ΚΥΚΛΩΜΑ-Π	ΚΥΚΛΩΜΑ-Τ
<p>Γενικόν κύκλωμα ή κύκλωμα ABCD</p>  <p>AD-BC=1</p>	<p>A =</p> <p>B =</p> <p>C =</p> <p>D =</p>	<p>ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</p> <p>$E_S = AE_R + BI_R$</p> <p>$I_S = CE_R + DI_R$</p> <p>$E_R = DE_S - BI_S$</p> <p>$I_R = -CE_S + AI_S$</p>	<p>$1 + ZY_R$</p> <p>Z</p> <p>$Y_S + Y_R + ZY_S Y_R$</p> <p>$1 + ZY_S$</p>	<p>$1 + YZ_S$</p> <p>$Z_S + Z_R + YZ_S Z_R$</p> <p>Y</p> <p>$1 + YZ_R$</p>
<p>Κύκλωμα - Π</p> 	<p>Z =</p> <p>$Y_S =$</p> <p>$Y_R =$</p>	<p>B</p> <p>$\frac{D-1}{B}$</p> <p>$\frac{A-1}{B}$</p>		<p>$Z_S + Z_R + YZ_S Z_R$</p> <p>$\frac{Z_R Y}{Z_S + Z_R + YZ_S Z_R}$</p> <p>$\frac{Z_S Y}{Z_S + Z_R + YZ_S Z_R}$</p>
<p>Κύκλωμα - Τ</p> 	<p>$Z_S =$</p> <p>$Z_R =$</p> <p>Y =</p>	<p>$\frac{A-1}{C}$</p> <p>$\frac{D-1}{C}$</p> <p>C</p>	<p>$\frac{ZY_R}{Y_S + Y_R + ZY_S Y_R}$</p> <p>$\frac{ZY_S}{Y_S + Y_R + ZY_S Y_R}$</p> <p>$Y_S + Y_R + ZY_S Y_R$</p>	

*Στο κείμενο αναφέρονται και σαν σχήματα 29-31.

3.13. Παράμετροι δίθυρων κυκλωμάτων.

Αναφερόμενοι στο σχ. 24, παραθέτουμε στο εδάφιο αυτό τις κυριότερες μορφές των εξισώσεων και των παραμέτρων ενός δίθυρου κυκλώματος.

(α) Παράμετροι Y (συνθέτης αγωγιμότητας)

$$I_1 = y_{11}E_1 + y_{12}E_2$$

$$I_2 = y_{21}E_1 + y_{22}E_2$$

(282)

ή σε μορφή μητρώων:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \text{ και συμβολικά: } [I] = [Y][E] \quad (283)$$

Οι παράμετροι Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} και Y_{22} ονομάζονται παράμετροι Y ή παράμετροι συνθέτης αγωγιμότητας και η μήτρα $[Y]$ μήτρα σύνθετων αγωγιμοτήτων.

(β) Παράμετροι Z (συνθέτης αντιστάσεως)

Από την εξίσωση (283) με αντιστροφή της μήτρας των παραμέτρων προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \text{ ή } [E] = [z][I]$$

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = [Y]^{-1} \quad (284)$$

Η μήτρα σύνθετων αντιστάσεων. Είναι

$$[z] = \frac{1}{|Y|} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix} \quad (285)$$

(γ) Παράμετροι ABDC(μεταφοράς)

Πρόκειται για τις γνωστές γενικευμένες σταθερές σχετικές εξισώσεις του δίθρου, είναι:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \text{ ή } [U_1] = [\alpha][U_2] \quad (286)$$

Όπου:

$$[U_i] = \begin{bmatrix} E_i \\ I_i \end{bmatrix}$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Η μήτρα των παραμέτρων μεταφοράς

(δ) Παράμετροι Γ (αντίστροφης μεταφοράς)

Από την εξίσωση (286) με αντίστροφη της μήτρας των παραμέτρων μεταφοράς προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \text{ ή } [U_2] = [\gamma][U_1]$$

όπου

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} [\alpha]^{-1} \quad (287)$$

η μήτρα των παραμέτρων αντίστροφης μεταφοράς ή χαρακτηριστική μήτρα.

Οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων παραμέτρων ενός δίθυρου προκύπτουν από τη συσχέτιση των διαφόρων μορφών των δυο εξισώσεων του δίθυρου, και δίνονται στο πίνακα 4.

Από τη συσχέτιση των παραμέτρων μεταφοράς και αντίστροφης μεταφοράς ενός δίθυρου προκύπτει:

$$|\gamma| = \frac{AD}{|\alpha||\alpha|} - \frac{BC}{|\alpha||\alpha|} \quad (288)$$

αλλά

$$|\alpha| = AD - BC = 1$$

οπότε και

$$|\gamma| = 1 \quad (289)$$

Σε ένα συμμετρικό δίθυρο προκύπτει ότι είναι :

$$D = A \quad (290)$$

Πίνακας 4. Σχέσεις μεταξύ παραμέτρων δίθυρων κυκλωμάτων.

	$[y]$	$[z]$	$[a]$	$[\gamma]$
$[y]$	y_{11} y_{12} y_{21} y_{22}	$\frac{z_{22}}{ z }$ $\frac{-z_{12}}{ z }$ $\frac{-z_{21}}{ z }$ $\frac{z_{11}}{ z }$	$\frac{D}{B}$ $\frac{- a }{B}$ $\frac{1}{B}$ $\frac{-A}{B}$	$\frac{-D}{B}$ $\frac{1}{B}$ $\frac{- \gamma }{B}$ $\frac{A}{B}$
$[z]$	$\frac{y_{22}}{ \gamma }$ $\frac{-y_{12}}{ \gamma }$ $\frac{-y_{21}}{ \gamma }$ y_{11}	z_{11} z_{12} z_{21} z_{22}	$\frac{A}{C}$ $\frac{- a }{C}$ $\frac{1}{C}$ $\frac{-D}{C}$	$\frac{-A}{C}$ $\frac{1}{C}$ $\frac{- \gamma }{C}$ $\frac{D}{C}$
$[a]$	$\frac{-y_{22}}{y_{21}}$ $\frac{1}{y_{21}}$ $\frac{- \gamma }{y_{21}}$ $\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$ $\frac{- z }{z_{21}}$ $\frac{1}{z_{21}}$ $\frac{-z_{22}}{z_{21}}$	A B C D	$\frac{A}{ \gamma }$ $\frac{-B}{ \gamma }$ $\frac{-C}{ \gamma }$ $\frac{D}{ \gamma }$
$[\gamma]$	$\frac{-y_{11}}{y_{12}}$ $\frac{1}{y_{12}}$ $\frac{- \gamma }{y_{12}}$ $\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$ $\frac{- z }{z_{12}}$ $\frac{1}{z_{12}}$ $\frac{-z_{11}}{z_{12}}$	$\frac{D}{ a }$ $\frac{-B}{ a }$ $\frac{-C}{ a }$ $\frac{A}{ a }$	D B C A

3.14. Διασυνδέσεις δίθυρων κυκλωμάτων

Τα δίθυρα κυκλώματα είναι δυνατό να συνδεθούν μεταξύ τους κατά διάφορους τρόπους για να σχηματίσουν μεγαλύτερα και πολυπλοκότερα συστήματα. Οι βασικότεροι τρόποι διασυνδέσεων δίθυρων κυκλωμάτων είναι οι ακόλουθοι τρεις :

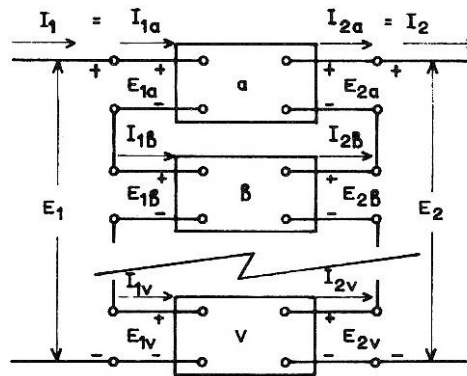
- (α) διασύνδεση σειράς,
- (β) διασύνδεση παράλληλα και
- (γ) αλυσωτή διασύνδεση

Ας θεωρήσουμε μια ομάδα n δίθυρων κυκλωμάτων, $\alpha, \beta, \dots, \nu$, τα όποια είναι συνδεδεμένα σε σειρά όπως στο σχ.32.

$$[E_k] = \begin{bmatrix} E_{1k} \\ E_{2k} \end{bmatrix} \quad (291)$$

$$[I_k] = \begin{bmatrix} I_{1k} \\ I_{2k} \end{bmatrix} \quad (292)$$

$$[Z_k] = \begin{bmatrix} Z_{11k} & Z_{12k} \\ Z_{21k} & Z_{22k} \end{bmatrix} \quad (293)$$



Σχ. 32. Διασύνδεση σειράς ν διθυρων κυκλωμάτων.

όπου: $k = \alpha, \beta, \dots, v$

Τότε γράφουμε και κάθε δίθυρο:

$$[E_k] = [z_k][I_k] \quad k = \alpha, \beta, \dots, v \quad (294)$$

Έστω τώρα,

$$[E] = [z][I] \quad (295)$$

η εξίσωση του συνιστάμενου διασυνδεδεμένου δίθυρου, όπου,

$$[E] = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (296)$$

και όπου η μήτρα,

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \quad (297)$$

εκφράζει τη σχέση μεταξύ των "εξωτερικών" μεγεθών $[E]$ και $[I]$. Από το είδος της διασυνδέσεως αυτής προκύπτει:

$$[E] = [E_\alpha] + [E_\beta] + \dots + [E_\nu] \quad (298)$$

$$[I] = [I_\alpha] = [I_\beta] = \dots = [I_\nu] \quad (299)$$

Από τις (294), (295), (298) και (299) προκύπτει:

$$\begin{aligned} [E] &= [E_\alpha] + [E_\beta] + \dots + [E_\nu] \\ &= [z_\alpha] + [I_\alpha] + [z_\beta][I_\beta] + \dots + [z_\nu][I_\nu] \\ &= ([z_\alpha][z_\beta] + \dots + [z_\nu])[I] \end{aligned} \quad (300)$$

Από τις εξισώσεις (295) και (300) προκύπτει:

$$[Z] = [Z_\alpha] + [Z_\beta] + \dots + [Z_\nu] \quad (301)$$

Από την εξίσωση (301) φαίνεται ότι οι παράμετροι Z οποιουδήποτε αριθμού δίθυρων κυκλωμάτων συνδεδεμένων σε σειρά μπορούν να βρεθούν εύκολα, βρίσκοντας πρώτα τις παραμέτρους Z των συνιστούντων δίθυρων και προσθέτοντας τις μήτρες τους.

Για n ίδια δίθυρα προκύπτει από την εξίσωση (301):

$$[z] = n[z_\alpha] \quad (302)$$

(β) Διασύνδεση παράλληλη

Ας θεωρήσουμε μια ομάδα n δίθυρων κυκλωμάτων $\alpha, \beta, \dots, \nu$, συνδεδεμένων εν παράλληλω, όπως στο σχ. 33. Ορίζουμε πάλι τις τάσεις και τα ρεύματα των δίθυρων σύμφωνα με τις εξισώσεις (291) και (292). Για την παράλληλη διασύνδεση όμως δεν χρησιμοποιούμε τις παραμέτρους Z , αλλά τις παραμέτρους Y . Ορίζουμε:

$$[y_k] = \begin{bmatrix} Y_{11k} & Y_{12k} \\ Y_{21k} & Y_{22k} \end{bmatrix} \quad k = \alpha, \beta, \dots, \nu \quad (303)$$

Για κάθε δίθυρο της ομάδας είναι:

$$[I_k] = [Y_k][E_k] \quad k = \alpha, \beta, \dots, v \quad (304)$$

Ορίζοντας πάλι τις τάσεις και εντάσεις του συνιστάμενου δικτύου σύμφωνα με τις εξισώσεις (295) και (296) μπορούμε να γράψουμε,

$$[I] = [Y][E] \quad (305)$$

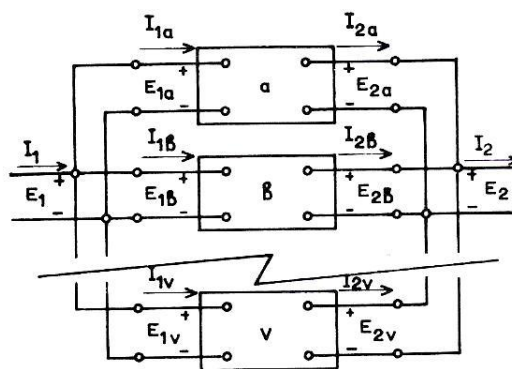
οπότε η μήτρα

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (306)$$

εκφράζει την σχέση μεταξύ $[E]$ και $[I]$. Για την παράλληλη διασύνδεση παρατηρούμε ότι:

$$[I] = [I_\alpha] + [I_\beta] + \dots + [I_v] \quad (307)$$

$$[E] = [E_\alpha] = [E_\beta] = \dots = [E_v] \quad (308)$$



Σχ.33. Διασύνδεση παράλληλη v δίθυρων κυκλωμάτων.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (307) και (304) με την εξίσωση (308) έχουμε:

$$[I] = [I_\alpha] + [I_\beta] + \dots + [I_v]$$

$$\begin{aligned}
 &= [y_\alpha][E_\alpha] + [y_\beta][E_\beta] + \dots + [y_\nu][E_\nu] \\
 &= ([y_\alpha] + [y_\beta] + \dots + [y_\nu])[E]
 \end{aligned}
 \tag{309}$$

Από την σύγκριση των εξισώσεων (305) και (309) προκύπτει:

$$[y] = [y_\alpha] + [y_\beta] + \dots [y_\nu] \tag{310}$$

Από την εξίσωση (310) φαίνεται ότι οι παράμετροι Y του συνιστάμενου δικτύου οποιοδήποτε αριθμού δίθυρων κυκλωμάτων συνδεδεμένων εν παραλλήλω βρίσκεται εύκολα προσθέτοντας τις αντίστοιχες παραμέτρους των συνιστούντων δίθυρων. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι παράμετροι Z δεν εξυπηρετούν στην παράλληλη διασύνδεση. Εάν είναι γνωστές οι παράμετροι Z των συνιστούντων δίθυρων, πρέπει αυτές να μετατραπούν πρώτα σε παραμέτρους Y , και να εφαρμοστεί η εξίσωση (310).

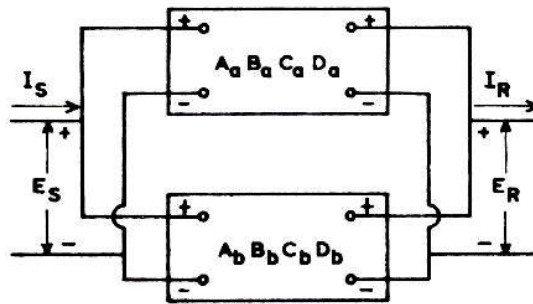
Για n ίδια δίθυρα προκύπτει από την εξίσωση (310):

$$[y] = n[y_\alpha] \tag{311}$$

Σε περίπτωση δύο δίθυρων κυκλωμάτων συνδεδεμένων παράλληλα, όπως στο σχ. 34, θα είναι:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{A_a B_b + A_b B_a}{B_a + B_b} \\
 B &= \frac{B_a B_b}{B_a + B_b}
 \end{aligned}
 \tag{312}$$

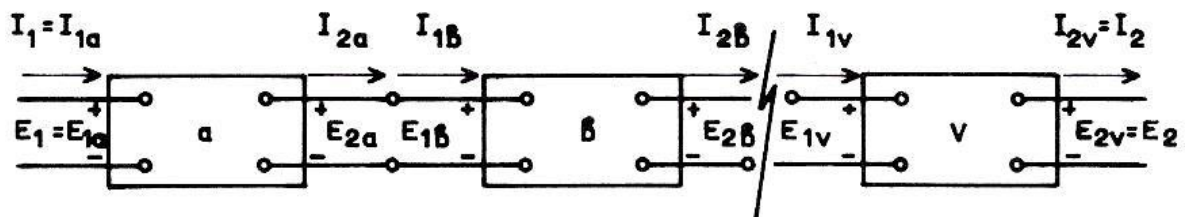
$$\begin{aligned}
 D &= \frac{B_b D_a + B_a D_b}{B_a + B_b} \\
 C &= C_a + C_b + \frac{(A_a - A_b) + (D_b - D_a)}{B_a + B_b}
 \end{aligned}
 \tag{313}$$



Σχ. 34. Παράλληλη σύνδεση δύο δίθυρων κυκλωμάτων

(γ) Αλυσωτή διασύνδεση

Θεωρούμε τέλος την ομάδα των v δίθυρων σε αλυσωτή σύνδεση, όπως φαίνεται στο σχ. 35. Για την ανάλυση της διασυνδέσεως αυτής κατάλληλες είναι οι παράμετροι μεταφοράς ABCD,



Σχ. 35. Αλυσωτή διασύνδεση v δίθυρων κυκλωμάτων.

Ορίζουμε,

$$[\alpha_k] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad k = \alpha, \beta, \dots, v \tag{314}$$

οπότε για κάθε δίθυρο της ομάδας είναι βάσει της εξισώσεως (286):

$$[U_{1k}] = [a_k][U_{2k}] \tag{315}$$

$$\begin{bmatrix} E_{1k} \\ I_{1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2k} \\ I_{2k} \end{bmatrix} \quad (316)$$

Για την εξεταζόμενη διασύνδεση παρατηρούμε ότι είναι:

$$[U_1] = [U_{1\alpha}], [U_{2\alpha}] = [U_{1\beta}], \dots [U_{2\nu}] = [U_2] \quad (317)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (315) και (317) έχουμε:

$$[U_1] = [a_\alpha][U_{2\alpha}] = [\alpha_\alpha][\alpha_\beta][U_{2\beta}] \quad (318)$$

$$= [a_\alpha][\alpha_\beta][\alpha_\nu][U_2]$$

Ορίζοντας την εξίσωση του συνιστάμενου δικτύου,

$$[U_1] = [\alpha][U_2] \quad (319)$$

και

$$[a] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (320)$$

έχουμε από τη σύγκριση των εξισώσεων (318) και (319)

$$[\alpha] = [\alpha_\alpha] [\alpha_\beta] \dots [\alpha_\nu] \quad (321)$$

Παρατηρούμε ότι στην αλυσωτή διασύνδεση δίθυρων κυκλωμάτων η μήτρα των παραμέτρων μεταφοράς του συνιστάμενου δίθυρου κυκλώματος είναι ίση με το γινόμενο των μητρών μεταφοράς των διασυνδεόμενων δίθυρων. Χρησιμοποιώντας τις σταθερές ABCD των κυκλωμάτων η εξίσωση (321) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\alpha & B_\alpha \\ C_\alpha & D_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\beta & B_\beta \\ C_\beta & D_\beta \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} A_\nu & B_\nu \\ C_\nu & D_\nu \end{bmatrix} \quad (322)$$

Για ν ίδια δίθυρα προκύπτει από την (321):

$$[\alpha] = [\alpha_\alpha]^\nu \quad (323)$$

Σε περίπτωση δύο κυκλωμάτων συνδεδεμένων αλυσωτά, όπως στο σχ. 36, θα είναι:

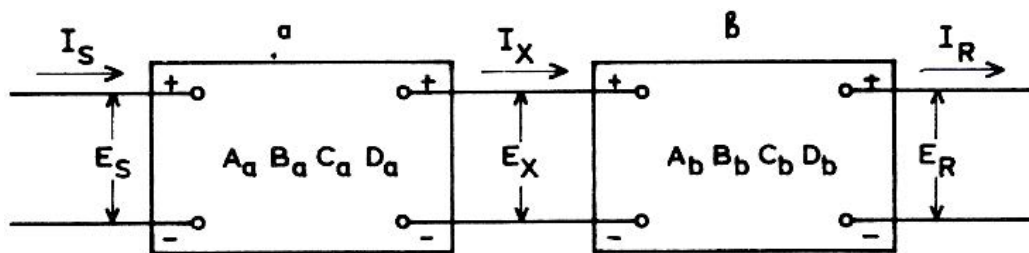
$$A = A_{\alpha}A_{\beta} + B_{\alpha}C_{\beta}$$

$$B = A_{\alpha}B_{\beta} + B_{\alpha}D_{\beta}$$

(324)

$$C = C_{\alpha}A_{\beta} + D_{\alpha}C_{\beta}$$

$$D = C_{\alpha}B_{\beta} + D_{\alpha}C_{\beta}$$



Σχ.36. Αλυσωτή σύνδεση δυο κυκλωμάτων δυο διπολικών ζευγών.

Με ανάλογο τρόπο αναλύσεως προκύπτει επίσης για την αλυσωτή διασύνδεση η σχέση:

$$[\gamma] = [\gamma_{\nu}] [\gamma_{\mu}] \dots [\gamma_{\beta}] [\gamma_{\alpha}]$$

(325)

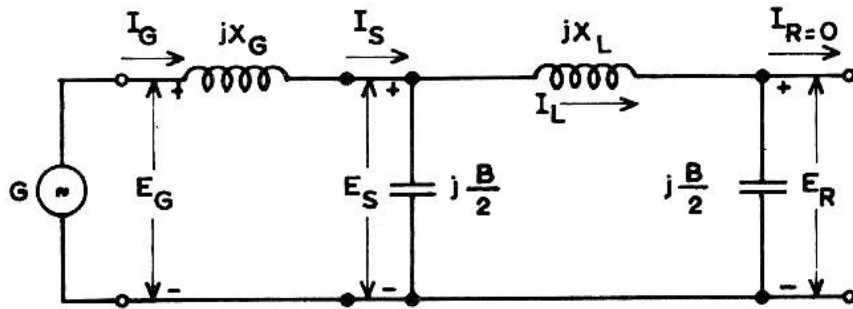
Για ν ίδια, δίθρα η σχέση (325) γίνεται:

$$[\gamma] = [\gamma_{\alpha}]^{\nu}$$

(326)

3.15. Αντιστάθμιση γραμμής μεταφοράς

Η αντιστάθμιση μιας γραμμής μεταφοράς έχει σκοπό την εξουδετέρωση της ανυψώσεως της τάσεως κατά μήκος της, λόγω αποτελέσματος Ferranti κατά την κενή κυρίως λειτουργία της γραμμής.



Σχ.37. Γραμμή μεταφοράς με ανοιχτό πέρας τροφοδοτούμενη από γεννήτρια.

Εάν για λόγους απλοστεύσεως του προβλήματος θεωρηθεί γραμμή χωρίς απώλειες, παρισταμένη με κύκλωμα Π και τροφοδοτούμενη από γεννήτρια G (σχ. 37), οι σταθερές ABCD των κυκλωμάτων της γεννήτριας και της γραμμής θα είναι από τον πίνακα 2.:

$$A_G = D_G = 1, B_G = jX_G, C_G = 0 \quad (327)$$

$$A_L = D_L = 1 + (jX_L) \left(j\frac{B}{2} \right) = 1 - \frac{X_L B}{2} \quad (328)$$

$$B_L = jX_L \quad (329)$$

$$C_L = jB + (jX_L) \left(j\frac{B}{2} \right) \left(j\frac{B}{2} \right) = jB \left(1 - \frac{X_L B}{4} \right) \quad (330)$$

Οι σταθερές του συνιστάμενου κυκλώματος των δύο συνδεδεμένων αλυσωτά κυκλωμάτων της γεννήτριας και της γραμμής είναι από τις εξισώσεις (324):

$$\begin{aligned} A &= A_G A_L + B_G C_L \\ &= 1 - \frac{X_L B}{2} + (jX_G) jB \left(1 - \frac{X_L B}{4} \right) \\ &= 1 - X_G B - \frac{X_L B}{2} \left(1 - \frac{X_G B}{2} \right) \end{aligned} \quad (331)$$

$$B = A_G B_L + B_G D_L$$

$$\begin{aligned}
 &= jX_L + jX_G \left(1 - \frac{X_L B}{2}\right) \\
 &= j \left[X_L + X_G \left(1 - \frac{X_L B}{2}\right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{332}$$

$$\begin{aligned}
 C &= A_L C_G + C_L D_G \\
 &= jB \left(1 - \frac{X_L B}{4}\right)
 \end{aligned}
 \tag{333}$$

$$\begin{aligned}
 D &= B_L C_G + D_G D_L \\
 &= 1 - \frac{X_L B}{2}
 \end{aligned}
 \tag{334}$$

Από την πρώτη εξίσωση ενός γενικού κυκλώματος δύο διπολικών ζευγών,

$$E_S = A E_R + B I_R$$

έχουμε για $I_R = 0$ (ανοικτό πέρας γραμμής):

$$E_G = A E_R \tag{335}$$

Η εξίσωση (335) εκφράζει το φαινόμενο Ferranti σε κύκλωμα γενικευμένων σταθερών. Εφαρμόζοντας την εξ. (335) στο ισοδύναμο κύκλωμα ABCD του συνδυασμού γεννήτριας – γραμμής έχουμε βάσει της (331)

$$E_G = \left[1 - X_G B - \frac{X_L B}{2} \left(1 - \frac{X_G B}{2}\right) \right] E_R \tag{336}$$

$$E_R = \frac{E_G}{1 - X_G B - (X_L B/2)(1 - X_G B/2)} \tag{303}$$

Τα γινόμενα X_{GB} και $X_{LB}/2$ είναι αριθμοί μικρότεροι από τη μονάδα, οπότε η τάση του άκρου αφίξεως της γραμμής E_R προκύπτει μεγαλύτερη από την τάση της γεννήτριας.

Από τη δεύτερη εξίσωση του γενικού κυκλώματος ABCD προκύπτει:

$$I_G = I_S = C E_R \tag{337}$$

ή

$$I_S = \frac{CE_G}{1 - X_GB - (X_L B/2)(1 - X_GB/2)} = \quad (338)$$

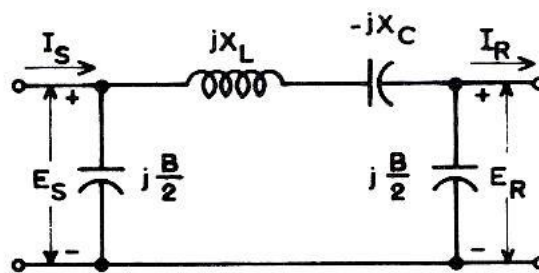
$$= \frac{jB(1 - X_L B/4)E_G}{1 - X_GB - (X_L B/2)(1 - X_GB/2)}$$

Για το κύκλωμα της γραμμής μόνο θα είναι :

$$\frac{E_R}{E_S} = \frac{1}{A_L} = \frac{1}{1 - X_L B/2} \quad (339)$$

3.16. Χωρητική αντιστάθμιση σειράς

Η χωρητική αντιστάθμιση σειράς πραγματοποιείται με την παρεμβολή της χωρητικότητας ενός πυκνωτή εν σειρά προς τη γραμμή, με σκοπό τη μείωση της επαγωγικής της αντιδράσεως, στην όποια οφείλεται κατά ένα μέρος η ανύψωση της τάσεως της γραμμής. Το κύκλωμα της γραμμής στην περίπτωση αυτή γίνεται όπως στο σχ. 38. Η σύνθετη αντίσταση σειράς της γραμμής είναι:



Σχ.38. Αντιστάθμιση γραμμής με πυκνωτή σειράς.

τώρα.:

$$Z = j(X_L - X_C) \quad (340)$$

Αντικαθιστώντας την X_L με τη $X_L - X_C$ στη σχέση (339) η τελευταία γίνεται:

$$\frac{E_R}{E_S} = \frac{1}{1 - (X_L - X_C)B/2}$$

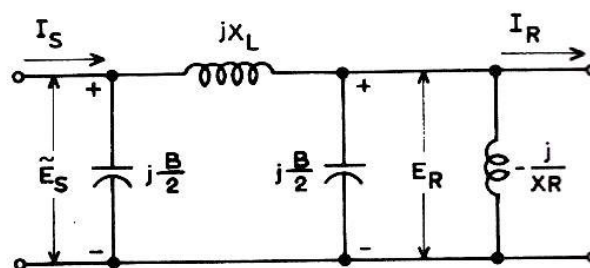
(341)

Από τη σύγκριση των σχέσεων (339) και (341) παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής σειράς μειώνει το λόγο E_R/E_S δηλαδή την ανύψωση της τάσεως λόγω φαινομένου Ferranti.

Έάν $X_L = X_C$, έχουμε αντιστάθμιση της επαγωγικής αντιδράσεως κατά 100%. Εάν $X_C = 0,5 X_L$ έχουμε αντιστάθμιση 50% κ.ο.κ.

3.17. Εγκάρσια επαγωγική αντιστάθμιση

Η εγκάρσια αντιστάθμιση συνίσταται στη σύνδεση ενός επαγωγικού πηνίου παράλληλα προς τη γραμμή στο πέρας της με σκοπό τη μερική ή πλήρη εξουδετέρωση του χωρητικού ρεύματος της γραμμής το οποίο αποτελεί την άλλη αιτία της ανυψώσεως της τάσεως. Το κύκλωμα της γραμμής με το επαγωγικό πηνίο τοποθετημένο στο πέρας της εικονίζεται στο σχ. 39. Το κύκλωμα του πηνίου οποίο μπορεί να θεωρηθεί συνδεδεμένο αλυσωτά προς το κύκλωμα της γραμμής, έχει από τον πίνακα 2. τις εξής σταθερές ABCD:



Σχ. 39. Αντιστάθμιση γραμμής με εγκάρσιο επαγωγικό πηνίο.

$$A_R = D_R = 1$$

$$B_R = 0$$

$$C_R = Y = -\frac{j}{X_R}$$
(342)

Το ισοδύναμο κύκλωμα των δύο συνδεδεμένων κυκλωμάτων έχει την έξης σταθερή A, βάσει των εξισώσεων (324):

$$A = 1 - \frac{X_L B}{2} + jX_L \left(-\frac{j}{X_R}\right) = 1 - X_L \left(\frac{B}{2} - \frac{1}{X_R}\right)$$
(343)

Εφαρμόζοντας την πρώτη εξίσωση ενός γενικού κυκλώματος με ανοικτό πέρας, έχουμε:

$$E_S = \left[1 - X_L \left(\frac{B}{2} - \frac{1}{X_R}\right)\right] E_R$$
(344)

$$\frac{E_R}{E_S} = \frac{1}{1 - X_L(B/2 - 1/X_R)}$$
(345)

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (345) και (339) παρατηρούμε ότι το πηνίο μειώνει την ανύψωση της τάσεως στο πέρας της γραμμής. Παρατηρούμε ότι, όπως και στην περίπτωση της χωρητικής αντισταθμίσεως σειράς, είναι δυνατόν να επιτευχθούν διάφοροι βαθμοί αντισταθμίσεως της χωρητικότητας της γραμμής. Πλήρης αντιστάθμιση στην περίπτωση χρησιμοποίησεως επαγωγικού πηνίου επιτυγχάνεται όταν $X_R = 2/B$ ή $X_R = 2X_C$.

3.18. Γραμμές με κατανεμημένες παραμέτρους

Η μήτρα των παραμέτρων μεταφοράς ή σταθερών ABCD γραμμής μεγάλου μήκους είναι

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma \ell) & Z_C \sinh(\gamma \ell) \\ \sinh(\gamma \ell)/Z_C & \cosh(\gamma \ell) \end{bmatrix}$$
(346)

Για γραμμή χωρίς απώλειες είναι:

$$\cosh(\gamma \ell) = \cosh(j\omega \ell \sqrt{LC}) = \text{cun}\Delta$$
(347)

$$\sinh(\gamma \ell) = \sinh(j\omega \ell \sqrt{LC}) = j\eta\mu\Delta$$

$$\text{όπου } \Delta = \omega \ell \sqrt{LC}$$

(348)

Η ηλεκτρική γωνία της γραμμής (217), χωρίς απώλειες η οποία είναι 6° ανά 100 km. Εάν για λόγους απλουστεύσεως του προβλήματος θεωρήσουμε γραμμή χωρίς απώλειες θα είναι:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \cosh\Delta & jZ_C\eta\mu\Delta \\ j\eta\mu\Delta/Z_C & \cosh\Delta \end{bmatrix}$$

(349)

Από τη σχέση (255) έχουμε:

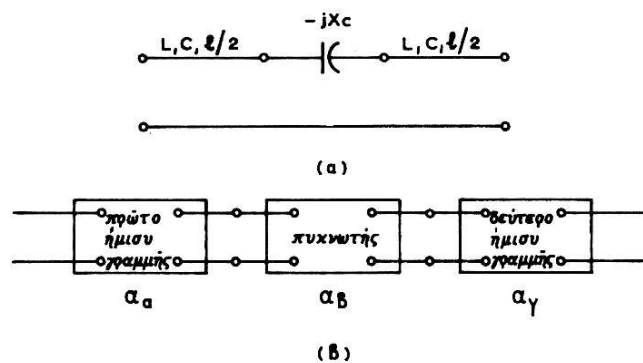
$$\frac{E_R}{E_S} = \frac{1}{\cosh\Delta}$$

(350)

(α) χωρητική αντιστάθμιση σειράς.

Ας θεωρήσουμε γραμμή μεταφοράς μεγάλου μήκους, στην οποία επιδιώκεται βελτίωση του λόγου των τάσεων E_R/E_S με πυκνωτή συνδεδεμένο στο μέσο της γραμμής, όπως δείχνει το σχ.40. Για κάθε ένα από τα δύο ίσα τμήματα της γραμμής η ηλεκτρική γωνία είναι $\Delta/2$, και επομένως η μήτρα των παραμέτρων μεταφοράς θα είναι:

$$[\alpha_\alpha] = [\alpha_\gamma] =$$



Σχ. 40. Χωρητική αντιστάθμιση σειράς γραμμής μεταφοράς. (α) φυσική παράσταση (β) παράσταση με δίθυρα κυκλώματα.

$$= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Delta}{2}\right) & jZ_C\eta\mu\left(\frac{\Delta}{2}\right) \\ j\eta\mu\left(\frac{\Delta}{2}\right)/Z_C & \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Delta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (351)$$

Για τον πυκνωτή σειράς, ο οποίος έχει χωρητική αντίδραση X_C , οι σχετικές εξισώσεις θα είναι,

$$E_1 = E_2 - jX_C I_2 \quad (352)$$

$$I_1 = I_2$$

και συνεπώς η μήτρα των παραμέτρων μεταφοράς είναι:

$$[\alpha_\beta] = \begin{bmatrix} 1 & -jX_C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (353)$$

Τα δύο ίσα τμήματα της γραμμής και ο πυκνωτής σειράς αποτελούν τρία διθυρα συνδεδεμένα αλυσωτά και συνεπώς η μήτρα $[\alpha]$ του συνιστάμενου δικτύου σύμφωνα με την εξίσωση (321) θα είναι:

$$[\alpha] = [\alpha_\alpha] [\alpha_\beta][\alpha_\gamma] \quad (354)$$

$$\begin{aligned} [\alpha_\alpha][\alpha_\beta] &= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\Delta/2) & jZ_C\eta\mu(\Delta/2) \\ j\eta\mu(\Delta/2)/Z_C & \sigma\upsilon\nu(\Delta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -jX_C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\Delta/2) & jZ_C\eta\mu(\Delta/2) - jX_C\sigma\upsilon\nu(\Delta/2) \\ j\eta\mu(\Delta/2)/Z_C & \sigma\upsilon\nu(\Delta/2) + X_C\eta\mu(\Delta/2)/Z_C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (355)$$

και:

$$\begin{aligned} [\alpha] &= [\alpha_\alpha] [\alpha_\beta][\alpha_\gamma] = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\Delta/2) & jZ_C\eta\mu(\Delta/2) - jX_C\sigma\upsilon\nu(\Delta/2) \\ j\eta\mu(\Delta/2)/Z_C & \sigma\upsilon\nu(\Delta/2) + X_C\eta\mu(\Delta/2)/Z_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\Delta/2) & jZ_C\eta\mu(\Delta/2) \\ j\eta\mu(\Delta/2)/Z_C & \sigma\upsilon\nu(\Delta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\Delta + \frac{X_C}{2Z_C}\eta\mu\Delta & j\left(Z_C\eta\mu\Delta - \frac{X_C}{2}\sigma\upsilon\nu\Delta - \frac{X_C}{2}\right) \\ \frac{j}{Z_C}\left(\eta\mu\Delta - \frac{X_C}{2Z_C}\sigma\upsilon\nu\Delta + \frac{X_C}{2Z_C}\right) & \sigma\upsilon\nu\Delta + \frac{X_C}{2Z_C}\eta\mu\Delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (356)$$

είναι συνεπώς:

$$A = \sigma\upsilon\nu\Delta + \frac{X_C}{2Z_C} \eta\mu\Delta \quad (357)$$

$$B = j \left(Z_C \eta\mu\Delta - \frac{X_C}{2} \sigma\upsilon\nu\Delta - \frac{X_C}{2} \right) \quad (358)$$

$$C = \frac{J}{Z_C} \left(\eta\mu\Delta - \frac{X_C}{2Z_C} \sigma\upsilon\nu\Delta + \frac{X_C}{2Z_C} \right) \quad (359)$$

$$D = \sigma\upsilon\nu\Delta + \frac{X_C}{2Z_C} \eta\mu\Delta \quad (360)$$

είναι,

$$\frac{E_R}{E_S} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\Delta + \frac{X_C}{2Z_C} \eta\mu\Delta} \quad (361)$$

δηλαδή ο λόγος των τάσεων μειώθηκε με την τοποθέτηση του πυκνωτή σειράς (χωρίς τον πυκνωτή ήταν $1/\sigma\upsilon\nu\Delta$).

Η σχέση (361) είναι αντίστοιχη με την (341) η οποία ισχύει, όταν η γραμμή παρασταθεί με κύκλωμα Π.

Παρατήρηση

Εάν ο πυκνωτής τοποθετηθεί στο τέλος αντί στο μέσο της γραμμής, θα έχουμε δύο δίθυρα σε αλυσωτή σύνδεση, από τα οποία το πρώτο θα είναι ολόκληρης της γραμμής, και το δεύτερο του πυκνωτή. Θα είναι επομένως:

$$\begin{aligned} [\alpha] &= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\Delta & jZ_C \eta\mu\Delta \\ j(\eta\mu\Delta)/Z_C & \sigma\upsilon\nu\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -jX_C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\Delta & jZ_C(\eta\mu\Delta - X_C \sigma\upsilon\nu\Delta) \\ j(\eta\mu\Delta)/Z_C & \sigma\upsilon\nu\Delta + X_C(\eta\mu\Delta)/Z_C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (362)$$

δηλαδή στην περίπτωση αυτή,

$$\frac{E_R}{E_S} = \frac{1}{\sigma\mu\Delta}$$

(363)

και συνεπώς με τον πυκνωτή σειράς στο τέλος της γραμμής δεν προκύπτει μείωση της τάσεως αφίξεως της γραμμής. Προκαλείται όμως αύξηση της μεγίστης ισχύος μεταφοράς της γραμμής.

(β) εγκάρσια επαγωγική αντιστάθμιση

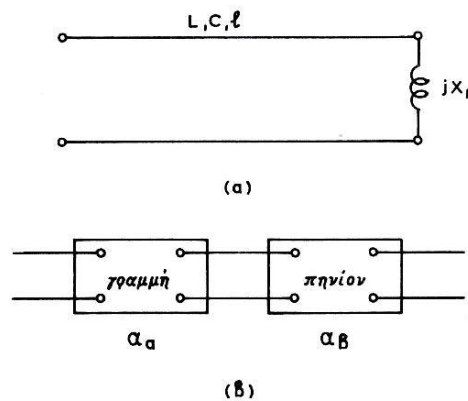
Εναλλακτικός τρόπος αντισταθμίσεως μιας γραμμής μεταφοράς επιτυγχάνεται, με την τοποθέτηση επαγωγικού πηνίου στο τέλος της γραμμής και παράλληλα με αυτήν (σχ.41). Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο δίθυρα κυκλώματα, της γραμμής και του πηνίου, σε αλυσωτή σύνδεση (σχ.41β).

Για τη γραμμή είναι:

$$[\alpha_\alpha] = \begin{bmatrix} \sigma\mu\Delta & jZ_C\eta\mu\Delta \\ j(\eta\mu\Delta)Z_C & \sigma\mu\Delta \end{bmatrix}$$

(364)

Για το επαγωγικό πηνίο είναι,



Σχ.41. Εγκάρσια επαγωγική αντιστάθμιση γραμμής μεταφοράς.

(α) Φυσική παράσταση.

(β) παράσταση με δίθυρα κυκλώματα

$$E_1 = E_2$$

$$I_1 = E_1/jX_R + I_2$$

(365)

και συνεπώς:

$$[\alpha_\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -j/X_R & 1 \end{bmatrix} \quad (366)$$

επομένως για το συνιστάμενο κύκλωμα θα είναι,

$$\begin{aligned} [\alpha] &= [\alpha_\alpha] [\alpha_\beta] \\ &= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\Delta & jZ_C\eta\mu\Delta \\ j\eta\mu\Delta/Z_C & \sigma\upsilon\nu\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -j/X_R & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\Delta + \frac{Z_C}{X_R}\eta\mu\Delta & jZ_C\eta\mu\Delta \\ j\left(\frac{1}{Z_C}\eta\mu\Delta - \frac{1}{X_R}\sigma\upsilon\nu\Delta\right) & \sigma\upsilon\nu\Delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (367)$$

$$A = \sigma\upsilon\nu\Delta + \frac{Z_C}{X_R}\eta\mu\Delta \quad (368)$$

$$B = jZ_C\eta\mu\Delta \quad (369)$$

$$C = j\left(\frac{1}{Z_C}\eta\mu\Delta - \frac{1}{X_R}\sigma\upsilon\nu\Delta\right) \quad (370)$$

$$D = \sigma\upsilon\nu\Delta \quad (371)$$

Ο λόγος των τάσεων γίνεται,

$$\frac{E_R}{E_S} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\Delta + \frac{Z_C}{X_R}\eta\mu\Delta} \quad (372)$$

δηλαδή μικρότερος από ότι ήταν χωρίς την τοποθέτηση του πηνίου.

Παρατήρηση

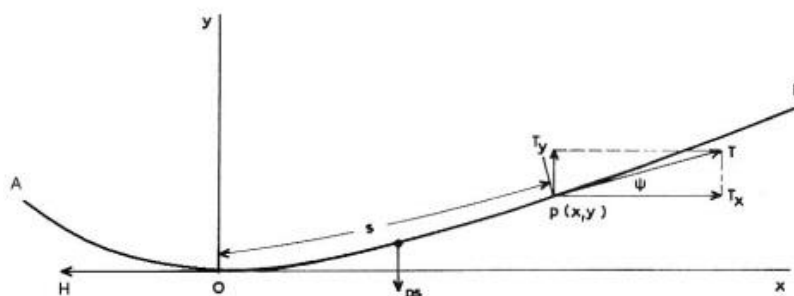
Αν το επαγωγικό πηνίο τοποθετηθεί στην αναχώρηση της γραμμής, η σειρά συνδέσεως των δίθυρων αντιστρέφεται και διαπιστώνεται εύκολα ότι $E_R/E_S=1/\sigma\mu\Delta$. Δηλαδή αντιστάθμιση της ανυψώσεως της τάσεως δεν επιτυγχάνεται στην περίπτωση αυτή. Συμβαίνει δηλαδή με την τοποθέτηση του εγκάρσιου πηνίου στην αναχώρηση της γραμμής ότι με την τοποθέτηση του πυκνωτή σειράς στο τέλος της γραμμής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΕΝΑΕΡΙΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ**

Η μηχανική σχεδίαση των εναέριων γραμμών ηλεκτρικής ενέργειας υπόκειται σε ορισμένους κανόνες, οι οποίοι εξασφαλίζουν το απρόσιτο των αγωγών για το κοινό, αποβλέποντας στην ασφάλεια του. Οι βασικότερες απαιτήσεις της μηχανικής σχεδίασεως των γραμμών αφορούν στις ελάχιστες αποστάσεις των αγωγών από το έδαφος και από γειτονικά κτίσματα και τη μηχανική αντοχή των αγωγών, των μονωτήρων και των φορέων μηχανικές δυνάμεις, οι οποίες καταπονούν τις γραμμές, είναι το βάρος των αγωγών, η δύναμη του ανέμου και πιθανώς το βάρος του πάγου, ο οποίος σχηματίζεται από το χιόνι. Βάση των δυνάμεων αυτών υπολογίζεται τόσο η καταπόνηση και συνεπώς η μηχανική αντοχή αγωγών και στηριγμάτων, όσο και η καμπύλη των αγωγών στο χώρο και οι αποστάσεις τους από το έδαφος.

4.1. Υπολογισμός καμπύλης και βέλους αγωγών

Ας υποθέσουμε ότι αγωγός γραμμής βάρους ρ ανά μονάδα μήκους αναρτάται από τα σημεία A και B και έστω O το κατώτατο σημείο του αγωγού δηλαδή το σημείο στο οποίο η καμπύλη γίνεται οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχ. 42. Έστω ένα σημείο P του αγωγού με συντεταγμένες x και y στο σύστημα αξόνων του σχ. 42, το οποίο ορίζει ένα τμήμα OP μήκους s κατά μήκος της καμπύλης του αγωγού και ψ η γωνία, την οποία σχηματίζει η εφαπτόμενη της καμπύλης με την οριζόντια στο σημείο P. Οι δυνάμεις οι οποίες δρουν στο τμήμα OP είναι η οριζόντια τάση H στο O, η τάση T στο σημείο P, κατά την εφαπτόμενη της καμπύλης με T_y και T_x επίσης το βάρος PS του τμήματος OP, το οποίο



Σχ.42. Καμπύλη αγωγού γραμμής με επίδραση του βάρους του.

εφαρμόζεται κατακόρυφα στο κέντρο βάρους του τμήματος O_P . Δεδομένου ότι το τμήμα του αγωγού βρίσκεται σε ισορροπία τόσο οι οριζόντιες, όσο και οι κατακόρυφες συνιστώσες των δυνάμεων είναι ίσες μεταξύ των, δηλ:

$$H = T_x \quad (373)$$

$$T_y = ps \quad (374)$$

Η σχέση (373) δείχνει ότι η οριζόντια συνιστώσα της τάσεως T_x , είναι σταθερή σε όλο το μήκος της γραμμής. Θα είναι επίσης:

$$\frac{T_y}{T_x} = \varepsilon \varphi \psi \quad (375)$$

είναι όμως,

$$\varepsilon \varphi \psi = \frac{dy}{dx}$$

οπότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_y}{T_x} = \frac{ps}{H} \quad (376)$$

Το στοιχειώδες μήκος της καμπύλης στο σημείο P είναι,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

οπότε,

$$\frac{ds}{dx} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{p^2 s^2}{H^2}}$$

ή

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + p^2 s^2 / H^2}} \quad (377)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της εξ. (377) παίρνουμε

$$x + C = \frac{H}{p} \sinh^{-1} \left(\frac{ps}{H} \right) \quad (378)$$

όπου C η σταθερά της ολοκλήρωσης. Είναι όμως για $s=0, x=0$

οπότε $C=0$ και από την εξ. (378) επιλύοντας ως προς s έχουμε:

$$s = \frac{H}{p} \sinh\left(\frac{px}{H}\right) \quad (379)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (376) το s με την τιμή του (379) έχουμε,

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{px}{H}\right)$$

ή

$$y = \int \sinh\left(\frac{px}{H}\right) dx$$

ή ακόμη,

$$y = \frac{H}{p} \cosh\left(\frac{px}{H}\right) + D \quad (380)$$

οπότε D μία άλλη σταθερά ολοκλήρωσης. Στο σημείο O είναι $x=0$ και $y=0$, οπότε για το σημείο αυτό η εξ. (380) γίνεται:

$$0 = \frac{H}{p} + D$$

από την οποία:

$$D = -\frac{H}{p} \quad (381)$$

Επομένως η εξίσωση της καμπύλης της γραμμής είναι :

$$y = \frac{H}{p} \left[\cosh\left(\frac{px}{H}\right) - 1 \right] \quad (382)$$

Η καμπύλη αυτή καλείται αλυσοειδής. Η συνολική τάση T στο σημείο P είναι βάσει των εξισώσεων (373), (374) και (379),

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \\ &= \sqrt{H^2 + H^2 \sinh^2\left(\frac{px}{H}\right)} \\ &= \sqrt{H^2 \cosh^2\left(\frac{px}{H}\right)} \end{aligned}$$

δηλ.

$$T = H \cosh\left(\frac{px}{H}\right) \quad (383)$$

Εάν τα σημεία αναρτήσεως της γραμμής A, B βρίσκονται στο ίδιο ύψος και η μεταξύ τους οριζόντια απόσταση είναι 2ℓ τότε στα σημεία αυτά, στα όποια $x=\pm\ell$ θα είναι:

$$T = H \cosh\left(\frac{p\ell}{H}\right) \quad (384)$$

Η τάση του αγωγού στα σημεία αναρτήσεως, στα όποια αυτή είναι και μεγαλύτερη από κάθε άλλο σημείο της γραμμής, καλείται τάση των αγωγών. Βέλος της γραμμής καλείται η τιμή του y στα σημεία A ή B και δίνεται από την εξίσωση (382) για $x = \ell$:

$$d = \frac{H}{p} \left[\cosh\left(\frac{p\ell}{H}\right) - 1 \right] \quad (385)$$

Το συνολικό μήκος του αγωγού προκύπτει από την εξίσωση (379) και είναι:

$$s = 2 \left(\frac{H}{p}\right) \sinh\left(\frac{p\ell}{H}\right) \quad (386)$$

Παράδειγμα 4.1.

Να υπολογίσει το μέγιστο βέλος αγωγού γραμμής με άνοιγμα 200 m βάρος 0,72 kg/m και μέγιστη επιτρεπόμενη τάση αγωγού 1500 kg. Είναι $\ell=100$ m, και $p=0,72$ kg/m. Από την εξ. (384) έχουμε:

$$1500 = H \cosh\left(\frac{100 \times 0,72}{H}\right) = H \cosh\left(\frac{72}{H}\right)$$

Το H μπορεί να υπολογιστεί με διαδοχικές προσεγγίσεις από πίνακα coshz. Στη συνέχεια από την εξ. (385) υπολογίζεται το ζητούμενο βέλος. Μια ταχύτερη μέθοδος βασίζεται στην παρατήρηση ότι η H είναι σχεδόν ίση με την τάση T και πολύ μεγαλύτερη από το βάρος $p\ell$. Αναπτύσσοντας το υπερβολικό συνημίτονο της εξ. (384) έχουμε,

$$\frac{T}{H} = \cosh\frac{p\ell}{H} = 1 + \frac{p^2\ell^2}{2H^2} + \frac{p^4\ell^4}{24H^4} + \dots$$

ή κατά προσέγγιση,

$$\frac{T}{H} = 1 + \frac{p^2\ell^2}{2H^2} \quad (387)$$

δεδομένου ότι οι οροί δυνάμεις μεγαλύτερης του τετραγώνου γίνονται πολύ μικροί. Ο τύπος (387) δίνει μια εξίσωση δεύτερου βαθμού ως προς H , δηλ.

$$H^2 - HT + \frac{1}{2}p^2\ell^2 = 0 \quad (388)$$

Επιλύοντας ως προς H έχουμε,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\sqrt{T^2 - \frac{4p^2\ell^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2}T \left[1 + \sqrt{1 - 2\frac{p^2\ell^2}{T^2}} \right] \\ &\simeq \frac{1}{2}T \left[1 + 1 - \frac{p^2\ell^2}{T^2} \right] \end{aligned}$$

δηλ:

$$H \simeq T - \frac{p^2\ell^2}{2T} \quad (389)$$

Στην περίπτωση αυτή είναι:

$$H = 1500 - \frac{72^2}{2 \times 1500} = 1500 - 1,73 = 1498,27 \text{ Kg}$$

Ένας έλεγχος μπορεί να γίνει δοκιμάζοντας αν ικανοποιείται η εξ.(384).

$$\begin{aligned} T &= H \cosh\left(\frac{72}{H}\right) = 1498,27 \cosh\left(\frac{72}{1498,27}\right) \\ &= 1498,27 \cosh(0,048) \\ &= 1498,27 \times 1,0012 \\ &= 1500,068 \text{ kg} \end{aligned}$$

Από την (385) το βέλος της γραμμής είναι:

$$d = \frac{1498}{0,72} (1,0012 - 1) = 2,50 \text{ m}$$

Προσεγγιστικοί τύποι. Εάν η ποσότητα $p^2\ell^2/2H^2$ είναι μικρή σε σύγκριση με τη μονάδα, η T είναι σχεδόν ίση με την H . Η εξίσωση της αλυσοειδούς (382) μπορεί να αναπτυχθεί ως εξής,

$$y = \frac{H}{P} \left(1 + \frac{p^2 x^2}{2H^2} + \frac{p^4 x^4}{24H^4} + \dots - 1 \right)$$

$$\simeq \frac{px^2}{2H}$$

θεωρώντας,

$$T \simeq H$$

(390)

έχουμε:

$$y \simeq \frac{px^2}{2T}$$

(391)

Επομένως το βέλος είναι:

$$d \simeq \frac{p\ell^2}{2T}$$

(392)

Το μήκος του τόξου s προκύπτει από την εξ.(379) κατά παρόμοιο τρόπο,

$$s = \left(\frac{H}{p} \right) \left(\frac{px}{H} + \frac{p^3 x^3}{6H^3} + \dots \right)$$

(393)

δηλ.

$$s \simeq \left(x + \frac{p^2 x^3}{6T^2} \right)$$

Το συνολικό μήκος του αγωγού είναι βάσει της (393):

$$S \simeq 2 \left(\ell + \frac{p^2 \ell^3}{6T^2} \right)$$

(394)

Οι προσεγγιστικοί τύποι (390) έως και (394) δίνουν ικανοποιητική ακρίβεια για το πλείστο των περιπτώσεων της πράξεως, στις οποίες το βέλος είναι λιγότερο από 10% του ανοίγματος της γραμμής.

Παράδειγμα 4.2.

Να υπολογίσει το βέλος στην περίπτωση του παραδείγματος 4.1 με τον προσεγγιστικό τύπο.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (392) έχουμε:

$$d = \frac{p\ell^2}{2T} = \frac{0,72 \times 100^2}{2 \times 1500} = 2,40 \text{ m}$$

Το σφάλμα λόγω χρησιμοποίησεως του προσεγγιστικού τύπου είναι 4%.

4.2. Επίδραση ανέμου και πάγου

Σε περιοχές στις οποίες η θερμοκρασία του περιβάλλοντος πέφτει κάτω από 0° C, σχηματίζονται συχνά στρώματα πάγου επάνω στους αγωγούς των γραμμών, τα όποια πολλές φορές έχουν σημαντικό πάχος και επιφάνεια. Η εξωτερική επιφάνεια, την οποία προβάλλει ο αγωγός με το στρώμα του πάγου είναι αυξημένη και επομένως, εκτός από το πρόσθετο βάρος του πάγου ο αγωγός υφίσταται και αυξημένη δύναμη ανέμου. Κατά τον υπολογισμό του βέλους και της τανύσεως της γραμμής πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι πρόσθετες αυτές εξωτερικές καταπονήσεις.

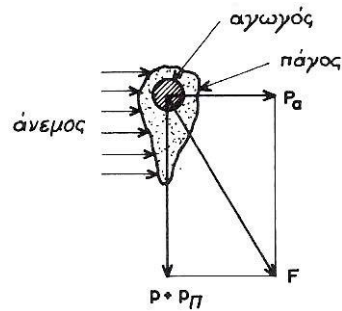
Εάν το βάρος του πάγου είναι $p\pi$ ανά μέτρο, το συνολικό βάρος του αγωγού είναι $p+p\pi$ ανά μέτρο. Εάν επίσης είναι p_h η δύναμη του ανέμου ανά τρέχον μέτρο αγωγού, η οποία υποτίθεται ότι δρα οριζόντια, τότε η συνολική δύναμη επί ενός μέτρου αγωγού θα είναι

$$F = \sqrt{(p + p_\pi)^2 + p_h^2}$$

(395)

και θα δρα υπό γωνία ως προς την κατακόρυφο, όπως φαίνεται και από το σχ.43. Ο αγωγός υπό την επίδραση της συνολικής δυνάμεως F τίθεται στο κεκλιμένο επίπεδο της δυνάμεως αυτής, αλλά διατηρεί το σχήμα αλυσοειδούς καμπύλης με την σταθερά F στην θέση της p .

Εάν η συνολική διάμετρος του αγωγού είναι D cm και υποτεθεί ότι το στρώμα του πάγου έχει ομοιόμορφο ακτινικό πάχος K cm γύρω από τον αγωγό, τότε δεδομένου ότι το βάρος του πάγου είναι περίπου 914 Kg/m³ το βάρος του πάγου ανά μετρώ αγωγού θα είναι:



Σχ.43. Συνολική δύναμη επί εναερίου αγωγού υπό την επίδραση πάγου και ανέμου.

$$\begin{aligned}
 p_{\pi} &= 914 \times \pi \left[\left(\frac{D}{2} + K \right)^2 - \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right] \times 10^{-4} \\
 &= 0,287 K(D + K) \text{ Kg/m}
 \end{aligned}
 \tag{396}$$

Η δύναμη του ανέμου ανά τρέχον μετρό αγωγού, για πίεση ανέμου u kg/m, είναι:

$$p_{\alpha} = u(D + 2K) \times 10^{-2} \text{ kg/m}
 \tag{397}$$

Παράδειγμα 4.3.

Αγωγός γραμμής έχει διάμετρο 1,88 cm και βάρος 783 kg ανά km. Να βρεθεί ή πρόσθετη φόρτιση του αγωγού λόγω πάγου ακτινικού πάχους 12,5 mm, και οριζόντιου ανέμου πίεσεως 39 kg/m², όπως επίσης και η συνολική δύναμη επί του αγωγού ανά τρέχον μέτρο αυτού.

$$D = 1,88 \text{ cm} \quad , \quad K = 1,25 \text{ cm}$$

Από τις σχέσεις (396) και (397) έχουμε:

$$p_{\pi} = 0,287 \times 1,25 \times (1,88 + 1,25) = 1,12 \text{ kg/m}$$

$$p_{\alpha} = 39 \times (1,88 + 2 \times 1,25) \times 10^{-2} = 1,71 \text{ kg/m}$$

Η συνολική δύναμη επί του αγωγού προκύπτει από τη σχέση (395) όση προς:

$$\begin{aligned}
 F &= \sqrt{(0,783 + 1,12)^2 + (1,71)^2} \\
 &= \sqrt{3,62 + 2,92} \\
 &= 2,56 \text{ Kg/m}
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.4.

Ο αγωγός του προηγούμενου παραδείγματος έχει μέγιστη μηχανική αντοχή 7736 kg. Να υπολογίσει το ύψος επάνω από το έδαφος, στο οποίο πρέπει να αναρτηθεί ο αγωγός με άνοιγμα 300 m, ώστε η τάνυση του να μην υπερβεί το ήμισυ της μηχανικής αντοχής με πάχος πάγου 12,5 mm και οριζόντια πίεση άνεμου 39kg ανά m² προβαλλόμενης επιφάνειας. Η απαιτούμενη ελάχιστη απόσταση αγωγού από το έδαφος είναι 6,70 m. Βάρος πάγου 914 kg/m³.

Η συνολική δύναμη επί του αγωγού είναι από το προηγούμενο παράδειγμα: F=2,56 kg/m

Η μέγιστη επιτρεπόμενη τάνυση είναι: T=-1/2x7736=3868kg

Ο προσεγγιστικός τύπος (392) δίνει για το βέλος:

$$d = \frac{F\ell^2}{2T} = \frac{2,56 \times (150)^2}{7736} = 7,45 \text{ m}$$

Η ακριβέστερη μέθοδος δίνει:

$$H = T - \frac{F^2\ell^2}{2T} = 3868 - \frac{2,56^2 \times 150^2}{7736} = 3868 - 19,06 = 3849 \text{ kg}$$

$$\frac{F\ell}{H} = \frac{2,56 \times 150}{3849} = 0,10$$

Το βέλος από τον τύπο (385) είναι:

$$d = \frac{H}{F} \left[\cosh\left(\frac{F\ell}{H}\right) - 1 \right]$$

$$\frac{3849}{2,56} [\cosh(0,10) - 1]$$

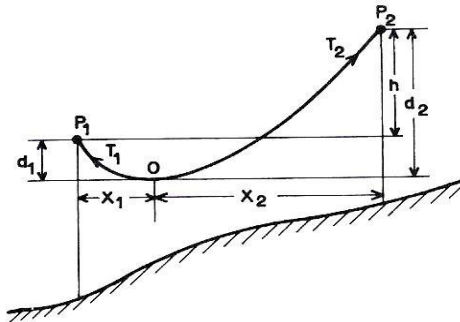
$$= 1504 \times 0,005 = 7,51 \text{ m}$$

Επομένως το ύψος αναρτήσεως του αγωγού πρέπει να υπερβαίνει τα 6,70+7,51=14,21m.

4.3. Ανάρτηση αγωγών σε κεκλιμένο έδαφος

Το σχ.44. παριστάνει γραμμή αναρτημένη σε δύο σημεία P₁ και P₂ διαφορετικών υψομέτρων, των όποιων η υψομετρική διαφορά είναι h. Εάν το έδαφος δεν είναι πολύ απότομο, θα υπάρξει ένα σημείο στο οποίο ο αγωγός θα είναι οριζόντιος. Τότε η

καμπύλη OP_1 είναι μία αλυσοειδής ημίσεως ανοίγματος x_1 , και η OP_2 αλυσοειδής ημίσεως ανοίγματος x_2 . Οι εξισώσεις (384), (385) και (386) ισχύουν για κάθε μία πλευρά, οπότε είναι:



Σχ. 44. Ανάρτηση γραμμής σε κεκλιμένο έδαφος.

$$d_1 = \frac{H}{p} \left[\cosh\left(\frac{px_1}{H}\right) - 1 \right] \quad (398)$$

$$d_2 = \frac{H}{p} \left[\cosh\left(\frac{px_2}{H}\right) - 1 \right] \quad (399)$$

$$T_1 = H \cosh\left(\frac{px_1}{H}\right) \quad (400)$$

$$T_2 = H \cosh\left(\frac{px_2}{H}\right) \quad (401)$$

Προφανώς η μέγιστη τάση εφαρμόζεται στο υψηλότερο στήριγμα P_2 στο σχ. 3. Δεδομένου ότι το x_2 είναι μεγαλύτερο του x_1 .

Γνωστά μεγέθη είναι τα p , h και η οριζόντια απόσταση μεταξύ των σημείων αναρτήσεως $x_1 + x_2$. Είναι συνεπώς,

$$d_2 - d_1 = \frac{H}{p} \left[\cosh\left(\frac{px_2}{H}\right) - \cosh\left(\frac{px_1}{H}\right) \right] h$$

$$x_1 + x_2 = m$$

(402)

και,

$$T = T_2 = H \cosh\left(\frac{px_2}{H}\right)$$

η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της τανύσεως.

Οι τρεις εξισώσεις (402) είναι αρκετές για τον προσδιορισμό των άγνωστων x_1, x_2 και H από τα όποια μπορούν να βρεθούν το βέλος και η τάση. Αναλυτικά οι εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, και είναι χρήσιμη η εύρεση μιας προσεγγιστικής λύσεως, υποθέτοντας ότι η καμπύλη είναι παραβολή [τύπος (390)]. Η προσεγγιστική λύση βρίσκεται ως ακολούθως:

Είναι,

$$d_1 = \frac{px_1^2}{2T}, d_2 = \frac{px_2^2}{2T}, T = H$$

$$d_2 - d_1 = h = \left(\frac{p}{2T}\right)(x_2^2 - x_1^2)$$

$$= \left(\frac{p}{2T}\right)(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

(403)

$$= \left(\frac{pm}{2T}\right)(x_2 - x_1)$$

οπότε,

$$x_2 - x_1 = \frac{2Th}{pm}$$

και συνεπώς:

$$x_2 = \frac{1}{2}m + \frac{Th}{pm}$$

(404)

$$x_1 = \frac{1}{2}m - \frac{Th}{pm}$$

Έχοντας υπολογίσει x_1, x_2 από τις εξισώσεις (404) υπολογίζονται τα d_1 και d_2 από τις εξισώσεις (403).

Παράδειγμα 4.5.

Μία εναέρια γραμμή διέρχεται επάνω από ένα ποταμό στηριζόμενη σε δύο πύργους με ύψη 50m και 100m από την επιφάνεια του εδάφους και οριζόντια απόσταση μεταξύ τους

350m. Εάν η μέγιστη τάνυση είναι 1950kg και το βάρος των αγωγών 0,783 kg/m, να βρεθεί η απόσταση των αγωγών από την επιφάνεια του ύδατος στο μέσο της αποστάσεως των δυο πύργων.

Κατ αρχήν υπολογίζουμε την προσεγγιστική λύση.

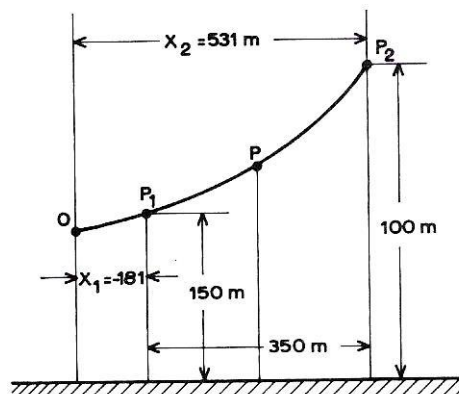
Από τις εξισώσεις (404) έχουμε:

$$x_2 = \frac{350}{2} + \frac{1950 \times 50}{0,783 \times 350} = 175 + 356 = 531\text{m}$$

$$x_1 = 175 - 356 = -181\text{ m}$$

Το αρνητικό σημείο του x_1 σημαίνει ότι το P_1 βρίσκεται στην ίδια πλευρά με το P_2 σε σχέση με το 0, όπως φαίνεται στο σχ. 45. Το σημείο P, το οποίο βρίσκεται στο μέσο της αποστάσεως μεταξύ των πύργων απέχει από το 0 απόσταση,

$$X = \frac{1}{2}(531 + 181) = 356\text{ m}$$



Σχ.45. Διάταξη παραδείγματος 1.5

και συνεπώς το ύψος του σημείου P_1 υπεράνω του 0 είναι:

$$d_1 = \frac{px^2}{2T} = \frac{0,783 \times 356^2}{2 \times 1950} = 25,44\text{ m}$$

Το ύψος του σημείου P_2 υπεράνω του 0 είναι,

$$d_2 = \frac{px_2^2}{2T} = \frac{0,783 \times (531)^2}{2 \times 1950} = 56,61\text{ m}$$

και συνεπώς το σημείο P βρίσκεται χαμηλότερα από το P_2 κατά $56,61 - 25,44 = 31,17\text{m}$, δηλ. σε ύψος $150 - 31,17 = 118,83\text{m}$ από την επιφάνεια του ύδατος. Για έλεγχο βρίσκουμε ότι $d_1 = 6,58\text{m}$, δηλ. περίπου 50m κάτω από το P_2 , όπως και θα 'πρεπε.

Για να επιτευχτεί η ακριβής λύση μπορούμε να γράφουμε την πρώτη από τις εξισώσεις (402) υπό την εξής μορφή,

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 = h &= \frac{H}{p} \left[\cosh \frac{px_2}{H} - \cosh \frac{px_1}{H} \right] \\ &= \frac{2H}{p} \sinh \frac{p(x_2 - x_1)}{2H} \sinh \frac{p(x_2 + x_1)}{2H} \end{aligned}$$

δηλ.

$$h = \frac{2H}{p} \sinh \frac{pm}{2H} \sinh \frac{p(x_2 - x_1)}{2H}$$

(405)

και να εφαρμόσουμε στη συνέχεια την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων κατά τον ακόλουθο τρόπο. Τοποθετούμε την τιμή του x_2 , η οποία υπολογίστηκε με την προσεγγιστική μέθοδο, στην τρίτη των εξισώσεων (402), την οποία επιλύουμε ως προς H , για να έχουμε την πρώτη προσέγγιση του H . Την τιμή αυτή του H στη συνέχεια τοποθετούμε στην εξ. (405), από την οποία προκύπτει το x_2 , δηλαδή η δεύτερη προσέγγιση του x_2 . Χρησιμοποιούμε ακολούθως τη δεύτερη αυτή τιμή του x_2 όπως και προηγουμένως, για να βρούμε δεύτερη προσέγγιση για το H , κ.ο.κ., μέχρις ότου οι δύο τελευταίες διαδοχικές τιμές του H δεν θα παρουσιάζουν μεγάλη διαφορά μεταξύ τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1. Υπολογισμός και προσομοίωση, με τη βοήθεια Η/Υ, των παραμέτρων μιας γραμμής μεταφοράς.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε πράξη την θεωρία παίρνοντας μια γραμμή μεταφοράς υπό κανονικές συνθήκες, μήκους 360 km με τα εξής στοιχεία:

$$f = 50 \text{ Hz} \quad \ell = 360 \text{ km} \quad P_r = 125 \text{ MW} \quad V_r = 200 \text{ kV} \quad \text{συνφ}_r = 1 \quad G = 0 \quad R = 0,107 \text{ } \Omega/\text{km}$$
$$L = 1,362 \text{ mH/km} \quad C = 0,0085 \text{ } \mu\text{F/km}$$

Στις επόμενες σελίδες αναπτύσσονται οι τύποι με τους οποίους βρήκαμε τα ποσά των πινάκων σε μετρήσεις που έγιναν στο μήκος της γραμμής σε σημεία ανά 10 km.

Μέσω αυτών υπολογίσαμε το μέτρο της τάσης (ουδεύουσας και ανακλώμενης) και του ρεύματος (οδεύοντος και ανακλώμενου), το μετρό του συντελεστή ανακλάσεως της τάσης και του ρεύματος το μέτρο της φαινόμενης ισχύος και τις γωνίες όλων αυτών. Παρακάτω στο κεφάλαιο 5.2 θα τα αποδώσουμε με γραφικές παραστάσεις σαν οπτικό βοήθημα κατανόησης της εργασίας.

α/α	X (km)	V(x) (Volt)	$\varphi V(x)$ ($^{\circ}$)	I(x) (A)	$\varphi I(x)$ ($^{\circ}$)	S (V.A.)	$\varphi S(x)$ ($^{\circ}$)
1	0	115470,0538	0	360,8439182	0	125000000	0
2	10	115859,8554	0,764372254	360,836507	0,49042527	125419396,6	0,273946982
3	20	116256,944	1,525202138	360,8143937	0,9825279	125841536,3	0,542674234
4	30	116661,1523	2,282437433	360,7777626	1,47634796	126266248,5	0,806089471
5	40	117072,3102	3,036030015	360,726804	1,97192529	126693360,9	1,064104725
6	50	117490,2453	3,785935805	360,6617134	2,46929951	127122699,6	1,316636295
7	60	117914,7828	4,532114709	360,5826918	2,96851001	127554089,3	1,563604703
8	70	118345,7457	5,27453056	360,4899458	3,46959593	127987354,4	1,804934634
9	80	118782,9552	6,013151048	360,3836876	3,97259617	128422318,3	2,04055488
10	90	119226,2308	6,747947645	360,2641346	4,47754937	128858804,6	2,270398274
11	100	119675,3903	7,478895528	360,1315098	4,98449391	129296637	2,494401621
12	110	120130,2502	8,205973494	359,9860417	5,49346787	129735639,8	2,712505627
13	120	120590,6258	8,929163881	359,8279641	6,00450905	130175638,1	2,924654826
14	130	121056,3312	9,64845247	359,6575162	6,51765497	130616458,1	3,1307975
15	140	121527,1797	10,3638284	359,4749426	7,0329428	131057927,8	3,3308856
16	150	122002,9838	11,07528407	359,2804933	7,5504094	131499876,6	3,524874667
17	160	122483,5556	11,78281503	359,0744236	8,07009128	131942136,4	3,712723751
18	170	122968,7066	12,48641993	358,8569941	8,5920246	132384541,3	3,894395324
19	180	123458,2479	13,18610035	358,6284705	9,11624515	132826927,9	4,069855198
20	190	123951,9907	13,88186075	358,389124	9,6427883	133269136,1	4,239072445
21	200	124449,7459	14,57370836	358,1392308	10,171689	133711008,8	4,402019311
22	210	124951,3246	15,26165306	357,8790723	10,7029819	134152392,4	4,558671133
23	220	125456,5383	15,94570733	357,6089351	11,2367011	134593137,2	4,70900626
24	230	125965,1985	16,62588606	357,3291108	11,7728801	135033097,1	4,853005969
25	240	126477,1173	17,30220655	357,0398961	12,3115522	135472130,5	4,990654392
26	250	126992,1075	17,97468832	356,7415925	12,8527499	135910100	5,12193843
27	260	127509,9823	18,6433531	356,4345068	13,3965054	136346873	5,246847687
28	270	128030,556	19,30822465	356,1189502	13,9428503	136782321,6	5,365374391
29	280	128553,6434	19,96932874	355,7952391	14,4918154	137216322,8	5,477513323
30	290	129079,0604	20,62669297	355,4636945	15,0434312	137648759	5,583261753
31	300	129606,624	21,28034677	355,1246421	15,5977274	138079517,8	5,68261937
32	310	130136,1522	21,93032124	354,7784123	16,154733	138508492,4	5,775588218
33	320	130667,4643	22,57664911	354,42534	16,7144765	138935581,4	5,862172641
34	330	131200,3809	23,21936461	354,0657647	17,2769854	139360689,6	5,942379221
35	340	131734,7238	23,85850341	353,70003	17,8422867	139783727,3	6,016216724
36	350	132270,3162	24,49410254	353,3284841	18,4104065	140204611	6,08369605
37	360	132806,983	25,1262003	352,9514794	18,9813701	140623263,4	6,144830186

α/α	X (km)	V+ (Volts)	$\varphi V+(x)$ (°)	V- (volts)	$\varphi V-(x)$ (°)	$\rho V(x)$	$\varphi \rho V(x)$ (°)
1	0	130818,013	-3,928012156	17507,95834	149,212921	0,133834462	153,1409331
2	10	130991,6381	-3,310865582	17484,75212	148,5957744	0,13347991	151,90664
3	20	131165,4936	-2,693719008	17461,57666	147,9786278	0,133126299	150,6723469
4	30	131339,5799	-2,076572434	17438,43192	147,3614813	0,132773623	149,4380537
5	40	131513,8972	-1,45942586	17415,31785	146,7443347	0,132421883	148,2037606
6	50	131688,4459	-0,842279286	17392,23442	146,1271881	0,132071074	146,9694674
7	60	131863,2262	-0,225132712	17369,18159	145,5100415	0,131721194	145,7351743
8	70	132038,2385	0,392013862	17346,15931	144,892895	0,131372241	144,5008811
9	80	132213,4832	1,009160436	17323,16755	144,2757484	0,131024213	143,266588
10	90	132388,9603	1,62630701	17300,20627	143,6586018	0,130677106	142,0322948
11	100	132564,6704	2,243453584	17277,27541	143,0414553	0,13033092	140,7980017
12	110	132740,6137	2,860600158	17254,37496	142,4243087	0,12998565	139,5637085
13	120	132916,7906	3,477746732	17231,50485	141,8071621	0,129641295	138,3294154
14	130	133093,2012	4,094893306	17208,66506	141,1900155	0,129297852	137,0951222
15	140	133269,846	4,71203988	17185,85554	140,572869	0,128955319	135,8608291
16	150	133446,7252	5,329186454	17163,07626	139,9557224	0,128613694	134,6265359
17	160	133623,8392	5,946333028	17140,32717	139,3385758	0,128272973	133,3922428
18	170	133801,1882	6,563479602	17117,60823	138,7214292	0,127933156	132,1579496
19	180	133978,7727	7,180626177	17094,91941	138,1042827	0,127594238	130,9236565
20	190	134156,5928	7,797772751	17072,26066	137,4871361	0,127256218	129,6893633
21	200	134334,649	8,414919325	17049,63194	136,8699895	0,126919094	128,4550702
22	210	134512,9414	9,032065899	17027,03322	136,2528429	0,126582863	127,220777
23	220	134691,4705	9,649212473	17004,46445	135,6356964	0,126247522	125,9864839
24	230	134870,2366	10,26635905	16981,92559	135,0185498	0,12591307	124,7521907
25	240	135049,2399	10,88350562	16959,41661	134,4014032	0,125579504	123,5178976
26	250	135228,4807	11,50065219	16936,93746	133,7842566	0,125246822	122,2836044
27	260	135407,9595	12,11779877	16914,48811	133,1671101	0,124915021	121,0493113
28	270	135587,6765	12,73494534	16892,06852	132,5499635	0,124584099	119,8150182
29	280	135767,632	13,35209192	16869,67864	131,9328169	0,124254054	118,580725
30	290	135947,8264	13,96923849	16847,31843	131,3156703	0,123924883	117,3464319
31	300	136128,2599	14,58638506	16824,98787	130,6985238	0,123596584	116,1121387
32	310	136308,9329	15,20353164	16802,6869	130,0813772	0,123269154	114,8778456
33	320	136489,8457	15,82067821	16780,4155	129,4642306	0,122942593	113,6435524
34	330	136670,9986	16,43782479	16758,17361	128,8470841	0,122616896	112,4092593
35	340	136852,3919	17,05497136	16735,96121	128,2299375	0,122292062	111,1749661
36	350	137034,026	17,67211794	16713,77824	127,6127909	0,121968089	109,940673
37	360	137215,9011	18,28926451	16691,62468	126,9956443	0,121644974	108,7063798

α/α	X (km)	I+(x) (A)	$\phi I+(x)$ (°)	I-(x) (A)	$\phi I-(x)$ (°)	$\rho I(x)$	$\phi \rho I(x)$ (°)
1	0	321,887	3,09192	43,0795	-23,76714	0,13383	-26,859
2	10	322,314	3,70907	43,0224	-24,38429	0,13348	-28,093
3	20	322,742	4,32622	42,9654	-25,00144	0,13313	-29,328
4	30	323,17	4,94336	42,9084	-25,61858	0,13277	-30,562
5	40	323,599	5,56051	42,8516	-26,23573	0,13242	-31,796
6	50	324,028	6,17766	42,7948	-26,85288	0,13207	-33,031
7	60	324,458	6,7948	42,738	-27,47002	0,13172	-34,265
8	70	324,889	7,41195	42,6814	-28,08717	0,13137	-35,499
9	80	325,32	8,0291	42,6248	-28,70432	0,13102	-36,733
10	90	325,752	8,64624	42,5683	-29,32146	0,13068	-37,968
11	100	326,184	9,26339	42,5119	-29,93861	0,13033	-39,202
12	110	326,617	9,88053	42,4555	-30,55576	0,12999	-40,436
13	120	327,051	10,4977	42,3993	-31,1729	0,12964	-41,671
14	130	327,485	11,1148	42,3431	-31,79005	0,1293	-42,905
15	140	327,919	11,732	42,287	-32,4072	0,12896	-44,139
16	150	328,355	12,3491	42,2309	-33,02434	0,12861	-45,373
17	160	328,79	12,9663	42,1749	-33,64149	0,12827	-46,608
18	170	329,227	13,5834	42,119	-34,25864	0,12793	-47,842
19	180	329,664	14,2006	42,0632	-34,87578	0,12759	-49,076
20	190	330,101	14,8177	42,0074	-35,49293	0,12726	-50,311
21	200	330,539	15,4349	41,9518	-36,11008	0,12692	-51,545
22	210	330,978	16,052	41,8962	-36,72722	0,12658	-52,779
23	220	331,417	16,6691	41,8406	-37,34437	0,12625	-54,014
24	230	331,857	17,2863	41,7852	-37,96152	0,12591	-55,248
25	240	332,298	17,9034	41,7298	-38,57866	0,12558	-56,482
26	250	332,739	18,5206	41,6745	-39,19581	0,12525	-57,716
27	260	333,18	19,1377	41,6192	-39,81296	0,12492	-58,951
28	270	333,623	19,7549	41,5641	-40,4301	0,12458	-60,185
29	280	334,065	20,372	41,509	-41,04725	0,12425	-61,419
30	290	334,509	20,9892	41,454	-41,6644	0,12392	-62,654
31	300	334,953	21,6063	41,399	-42,28154	0,1236	-63,888
32	310	335,397	22,2235	41,3441	-42,89869	0,12327	-65,122
33	320	335,842	22,8406	41,2893	-43,51583	0,12294	-66,356
34	330	336,288	23,4578	41,2346	-44,13298	0,12262	-67,591
35	340	336,735	24,0749	41,18	-44,75013	0,12229	-68,825
36	350	337,181	24,6921	41,1254	-45,36727	0,12197	-70,059
37	360	337,629	25,3092	41,0709	-45,98442	0,12164	-71,294

z	$=$	$R + j\omega L$	$=$	$0,107 + j0,42788491941893j$	$=$	$0,441060658$	$=$	$1,325754382$	$=$	$0,441060658$	$=$	$75,96013075$	Ω/km
y	$=$	$G + j\omega C$	$=$	$2,67035375555132E-06j$	$=$	$2,67035E-06$	$=$	$1,570796327$	$=$	$2,67035E-06$	$=$	90	S/km
yz	$=$	$\sqrt{z \cdot y}$	$=$	$-1,14260410151411E-06 + j2,85727851843991E-07j$	$=$	$1,17779E-06$	$=$	$2,896550709$	$=$	$1,17779E-06$	$=$	$165,9601307$	$/\text{km}^2$
y	$=$	$\sqrt{z \cdot y}$	$=$	$0,000132634617842877 + j0,00107712396842909j$	$=$	$0,001085259$	$=$	$1,448275354$	$=$	$0,001085259$	$=$	$82,98006537$	$/\text{km}$
β	$=$	$\beta = 0,00107712396842909 \text{ rad}/\text{km}$	$=$	$0,0477484624234357 + j0,387764628634472j$	$=$	$0,390693387$	$=$	$1,448275354$	$=$	$0,390693387$	$=$	$82,98006537$	
α	$=$	$\alpha = 0,0477484624234357 \text{ neper}/\text{km}$	$=$	$403,363773878233 - j49,6693060112903j$	$=$	$406,4103518$	$=$	$-0,122520972$	$=$	$406,4103518$	$=$	$-7,019934626$	Ω
$Vr\phi$	$=$	$\frac{V_R}{\sqrt{3}}$	$=$	$115470,0538$	$=$	$115470,0538$	$=$	0	$=$	0	$=$	0	V
I_r	$=$	$\frac{125MW}{\sqrt{3} \cdot 200kv \cdot \cos\varphi}$	$=$	$360,8439182$	$=$	$360,8439182$	$=$	0	$=$	0	$=$	0	A
$I_r \cdot Z_c$	$=$		$=$	$145551,364643713 - j17922,8669975502j$	$=$	$17922,8669975502j$	$=$	$261021,418481638$	$=$	$17922,8669975502j$	$=$	0	V
$Vr + I_r \cdot Z_c$	$=$		$=$	$130510,709240819 - j8961,4334987751j$	$=$	$130818,013$	$=$	$-0,068556745$	$=$	$130818,013$	$=$	$-3,928012156$	V
$Vr - I_r \cdot Z_c$	$=$		$=$	$30081,310805788 + j17922,8669975502j$	$=$	$30081,310805788$	$=$	$17922,8669975502j$	$=$	$30081,310805788$	$=$	$17922,8669975502j$	V
$Vr \cdot \rho \cdot$	$=$	$\frac{V_R - I_R \cdot Z_C}{2} e^{-\alpha_0} e^{j\beta_0} = \frac{V_R - I_R \cdot Z_C}{2}$	$=$	$15040,655402894 + j8961,4334987751j$	$=$	$17507,95834$	$=$	$2,604256758$	$=$	$17507,95834$	$=$	$149,212921$	V
$Vs+$	$=$	$\frac{V_R + I_R \cdot Z_C}{2} e^{+\gamma l} = V_R^+ e^{+\gamma l}$	$=$	$130284,3429290996 + j30660,3472059817j$	$=$	$137215,9011$	$=$	$0,319207883$	$=$	$137215,9011$	$=$	$18,28926451$	V
$(-Vl)$	$=$		$=$	$-0,0477484624234357 - j0,387764628634472j$	$=$	$-0,0477484624234357$	$=$	$0,387764628634472j$	$=$	$-0,0477484624234357$	$=$	$0,387764628634472j$	
$Vs-$	$=$	$\frac{V_R - I_R \cdot Z_C}{2} e^{-\gamma l} = V_R^- e^{-\gamma l}$	$=$	$10044,2570675702 - j13331,2878019107j$	$=$	$16691,62468$	$=$	$2,216492129$	$=$	$16691,62468$	$=$	$126,9956443$	V
Vr	$=$	$V_R^+ + V_R^-$	$=$	$115470,053837925$	$=$	$115470,0538$	$=$	0	$=$	$115470,0538$	$=$	0	V
Vs	$=$	$V_S^+ + V_S^-$	$=$	$120240,085861426 + j56391,6350078924j$	$=$	$132806,983$	$=$	$0,438534924$	$=$	$132806,983$	$=$	$25,1262003$	V
$V3$	$=$		$=$	$1,73205080756888$	$=$	$1,73205080756888$	$=$	0	$=$	$1,73205080756888$	$=$	0	

V_s	$=$	$\sqrt{3}V_s$	$=$	230028,442242431	$=$	230028,4422	V
λ	$=$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$=$	5833,2982008962			km
u	$=$	$\lambda \cdot \delta$	$=$	291664,91004481			km/sec
τ	$=$	$\frac{\ell}{v}$	$=$	1,23429314806739			msec
Δ	$=$	$360^\circ \cdot \frac{\ell}{\lambda}$	$=$	0,0617146574033694			μίλιες/ km
Δl	$=$	22,212°	$=$	22,217276665213			μίλιες
$\rho_{Vx=0}$	$=$	$\frac{V_R^-}{V_R^+}$	$=$	0,119396470820914+0,05046607 = 21823499i	$=$	0,133834462 = 2,672813503	153,1409331
$\rho_{Vx=l}$	$=$	$\frac{V_s^-}{V_s^+}$	$=$	0,0390137885579116+0,1152190 = 2590555i	$=$	0,121644974 = 1,897284246	108,7063798
V_r/Z_c	$=$		$=$	281,991967079643+34,7238552707331i			
$(V_r/Z_c)+I_r$	$=$		$=$	642,835885323159+34,7238552707331i			
I_r^+	$=$	$\frac{V_R/Z_c + I_R}{2} e^{-\gamma l} = \frac{V_R/Z_c + I_R}{2}$	$=$	321,41794266158+17,3619276353665i	$=$	321,8865179 = 0,053964227	3,09192247
$I_r^-(V_r/Z_c)$	$=$		$=$	78,8519511638725-34,7238552707331i			
I_r^-	$=$	$-\frac{V_R/Z_c - I_R}{2} e^{-\gamma \cdot 0} = -\frac{V_R/Z_c - I_R}{2}$	$=$	39,4259755819362-17,3619276353665i	$=$	43,07950884 = -0,414814923	43,07950884
$e(\gamma l)$	$=$		$=$	0,971032387974519+0,39661258204076i	$=$	1,048906783 = 0,387764629	22,21727667
I_s^+	$=$	$\frac{V_R/Z_c + I_R}{2} e^{\gamma l} = I_R^+ e^{\gamma l}$	$=$	305,221273451864+144,337394204849i	$=$	337,6289519 = 0,441728856	25,30919913
$e(-\gamma l)$	$=$		$=$	0,882591881291464-0,360489566838635i	$=$	0,953373566 = -0,387764629	0,953373566
I_s^-	$=$	$-\frac{V_R/Z_c - I_R}{2} e^{-\gamma l} = I_R^- e^{-\gamma l}$	$=$	28,5382521878554-29,5361492342677i	$=$	41,07086497 = -0,802579552	41,07086497
I_r	$=$	$I_R^+ + I_R^-$	$=$	360,843918243516	$=$	360,8439182	

I_s	=	$I_s^* + I_s$	=	333,759525639719+114,8012449 70582i	=	352,9514794	=	0,331287405	=	352,9514794	=	18,98137011	A
$p_{ix=0}$	=	$\frac{I_R}{I_s}$	=	0,119396470820914- 0,0604660721823494i	=	0,133834462	=	-0,468779151	=	0,133834462	=	-26,859066685	
$p_{ix=l}$	=	$\frac{I_s}{I_s^*}$	=	0,0390137885579112- 0,115219025905549i	=	0,121644974	=	-1,244308408	=	0,121644974	=	-71,29362018	
I_s^*	=	$3V_s \cdot I_s$	=	333,759525639719- 114,801244970582i	=	352,9514794	=	-0,331287405	=	352,9514794	=	-18,98137011	A
$P_s(Ss)$	=		=	139815311,774464+15052601,39 40629i	=	140623263,4	=	0,107247519	=	140623263,4	=	6,144830186	VA
$P_s = 139815311,8 \text{ W}$		$Q_s = 15052601,39 \text{ Var}$											
I_r^*	=	$3V_R \cdot I_R$	=	360,843918243516	=	360,8439182	=	0	=	360,8439182	=	0	A
$P_r(Sr)$	=		=	125000000	=	125000000	=	0	=	125000000	=	0	VA
$P_r = 125000000 \text{ W}$		$Q_r = 0 \text{ Var}$											
$\text{Cosh}(\gamma l)$	=	$\text{cosh}(\alpha + j\beta) = \cosh \alpha \cdot \cosh \beta + j \sinh \alpha \cdot \sinh \beta$	=	0,926812134632992+0,01806150 76010627i	=	0,926988107	=	0,01948531	=	0,926988107	=	1,116426022	
$\text{Sinh}(\gamma l)$	=	$\sinh(\alpha + j\beta) = \sinh \alpha \cdot \cosh \beta + j \cosh \alpha \cdot \sinh \beta$	=	0,0442202533415276+0,37855510 74439698i	=	0,381125106	=	1,454508857	=	0,381125106	=	83,33721878	V
$V_r \cdot \text{Cos}(\gamma l)$	=		=	107019,047083714+2085,563255 0888i	=		=		=		=		V
$I_r \cdot Z_c \cdot \text{Sinh}(\gamma l)$	=		=	13221,038777124+54306,07175 28036i	=		=		=		=		V
V_s	=	$V_R \cdot \cosh \gamma x + I_R \cdot Z_c \cdot \sinh \gamma x$	=	120240,085861426+56391,63500 78924i	=	132806,983	=	0,438534924	=	132806,983	=	25,1262003	V
$I_r \cdot \text{Cosh}(\gamma l)$	=		=	334,434522136605+6,517385172 1525i	=		=		=		=		A
V_r / Z_c	=		=	281,991967079643+34,72385527 07331i	=		=		=		=		A
$(V_r / Z_c) \cdot \text{Sinh}(\gamma l)$	=		=	0,67499649688706+108,2838597 98429i	=		=		=		=		A
I_s	=	$I_R \cdot \cosh \gamma x + V_R / Z_c \cdot \sinh \gamma x$	=	333,759525639718+114,8012449 70582i	=	352,9514794	=	0,331287405	=	352,9514794	=	18,98137011	A
I_s^*	=		=	333,759525639718- 114,801244970582i	=	352,9514794	=	-0,331287405	=	352,9514794	=	-18,98137011	A
S_s	=		=	139815311,774464+15052601,39 40627i	=	140623263,4	=	0,107247519	=	140623263,4	=	6,144830186	VA
$P_s = 139815311,8 \text{ w}$		$Q_s = 15052601,39 \text{ Var}$											
Z_A	=	$Z_c \cdot \sinh \gamma l$	=	36,6392174269382+150,4974006 96539i	=	154,8931886	=	1,331987885	=	154,8931886	=	76,31728416	Ω

$\text{Cosh}(\gamma l)-1$	=	$0,0731878653670081+0,0180615$ $076010627i$	=	$0,197792175$	=	$1,445135355$	=	$0,197792175$	=	$82,80015664$	Ω
$\text{Tanh}(\gamma l/2)$	=	$0,0247893964051904+0,1962325$ $92566746i$	=	$0,197792175$	=	$1,445135355$	=	$0,197792175$	=	$82,80015664$	Ω
$\text{ZB} = \text{Zl}$	=	$6,45185431825554-$ $2054,72409567664i$	=	$2054,734225$	=	$-1,567656327$	=	$2054,734225$	=	$-89,82009127$	Ω
$\gamma l/2$	=	$0,0238742312117179+0,1938823$ $14317236i$	=	$0,975509489$	=	$0,006233503$	=	$0,975509489$	=	$0,357153408$	Ω
$\sigma\pi\delta 1$	=	$0,975490536187525+0,00608080$ $18470975i$	=	$0,975509489$	=	$0,006233503$	=	$0,975509489$	=	$0,357153408$	Ω
$\sigma\pi\delta 2$	=	$1,01251368221157-$ $0,00317930314177607i$	=	$1,012518674$	=	$-0,00314$	=	$1,012518674$	=	$-0,179908732$	Ω
$\text{ZA}=\text{ZB}$	=	$19,7458811757477+77,92184697$ $97478i$	=	$80,38478749$	=	$1,322614382$	=	$80,38478749$	=	$75,78022202$	Ω
Zl	=	$-6,64701342874725-$ $1066,32297132819i$	=	$1066,343688$	=	$-1,57702983$	=	$1066,343688$	=	$-90,35715341$	Ω
$\sigma\pi\delta 1$	=	$1,01251368221157+0,003179303$ $14177607i$	=	$1,012518674$	=	$0,00314$	=	$1,012518674$	=	$0,179908732$	Ω
$\sigma\pi\delta 2$	=	$0,975490536187525+0,00608080$ $18470975i$	=	$0,975509489$	=	$0,006233503$	=	$0,975509489$	=	$0,357153408$	Ω
$\text{Tanh}(\gamma l)$	=	$0,0556507432512249+0,4073597$ $26970952i$	=	$0,411143469$	=	$1,435023547$	=	$0,411143469$	=	$82,22079276$	Ω
$\text{Zs}(\alpha\gamma)$	=	$13,0988677470007-$ $988,401124348441i$	=	$988,4879175$	=	$-1,55754452$	=	$988,4879175$	=	$-89,24072739$	Ω
$\text{Zs}(\beta\rho)$	=	$42,688076875253386+161,5500230$ $00709i$	=	$167,092962$	=	$1,312502575$	=	$167,092962$	=	$75,20085813$	Ω
Zc	=	$403,363773878233-$ $49,6693060112904i$	=	$406,4103518$	=	$-0,122520972$	=	$406,4103518$	=	$-7,019934626$	Ω
$\text{tanh}(\gamma l)$	=	$0,055650743251225+0,40735972$ $6970952i$	=	$0,411143469$	=	$1,435023547$	=	$0,411143469$	=	$82,22079276$	Ω
$\text{tanh}(\gamma l)$	=	$0,0556507432512249+0,4073597$ $26970952i$	=	$0,411143469$	=	$1,435023547$	=	$0,411143469$	=	$82,22079276$	Ω
$(\text{tanh}(\gamma l))^3$	=	$-0,0275320274450777-$ $0,0638132806793149i$	=	$0,411143469$	=	$1,435023547$	=	$0,411143469$	=	$82,22079276$	Ω

$(\tanh(\gamma l))^3/3$	=	$\frac{\tanh(\gamma l)^3}{3}$	=	$\frac{-0,00917734248169257 - 0,0212710935597716i}{3}$	=	$-0,0030592481514259 - 0,00709031262570i$	=	$0,0030592481514259 - 0,00709031262570i$	=	$0,0030592481514259 - 0,00709031262570i$
0,046473401	0,386088633									
γl	=	$(0,0555638 + j0,4074185) + (-0,009178 - j0,021281)$								
$\sinh(\gamma l)$	=	$\sinh(\gamma l) = \sinh(0,04646 + j0,3861375) = \sinh(0,04646) \cdot \cosh(j0,3861375) + j \cosh(0,04646) \cdot \eta\mu(0,3861375)$								
$\cosh(\gamma l)$	=	$\cosh(\gamma l) = \cosh(0,04646 + j0,3861375) = \cosh(0,04646) \cdot \cosh(j0,3861375) + j \sinh(0,04646) \cdot \eta\mu(0,3861375)$								
$\tanh(\gamma l)$	=	$\tanh \gamma l = \frac{\sinh \gamma l}{\cosh \gamma l}$								
$(\tanh(\gamma l))^5$	=	$37493396112i$								
$(\tanh(\gamma l))^5/5$	=	$7498679222i$								
0,47948747	0,387917308									
γl	=	$(0,04646 + j0,3861375) + (0,001476 + j0,00183)$								
$\sinh(\gamma l)$	=	$\sinh(\gamma l) = \sinh(0,047936 + j0,3879675) = \sinh(0,047936) \cdot \cosh(j0,3879675) + j \cosh(0,047936) \cdot \eta\mu(0,3879675)$								
$\cosh(\gamma l)$	=	$\cosh(\gamma l) = \cosh(0,047936 + j0,3879675) = \cosh(0,047936) \cdot \cosh(j0,3879675) + j \sinh(0,047936) \cdot \eta\mu(0,3879675)$								
$\tanh(\gamma l)$	=	$\tanh \gamma l = \frac{\sinh \gamma l}{\cosh \gamma l}$								
Z	=	$Z_c \cdot (\gamma l)$								
z	=	$\frac{Z_c}{\ell}$								
R = 0,107245475 Ω/km	ωL = 0,428028357 Ω/km	ωL = 0,428028357 Ω/km	1,36245657582616 mH/km							
Y	=	$\frac{(\gamma l)}{Z_c}$								

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{Y}{\beta} = \frac{1,23112486753031E-09 + 2,67156E-06i}{2,67156E-06} = 2,67156E-06 + 1,5703355i = 2,67156E-06 + 1,5703355i \text{ S/km} \\
 G = 1,23112E-09 \text{ S/km} \quad \omega C = 2,6156E-06 \text{ S/km} \quad 8,50382937013976E-09 \text{ f/km} \\
 \text{ανοικτή γραμμή} &= \frac{V_R}{V_S} = \frac{1}{\cosh \gamma \ell} = \frac{1,07855770699609-0,0210186913778473i}{1,078762491} = 1,078762491 - 0,01948531i = 1,078762491 - 1,116426022i \\
 \text{βραχυκυκλωμένη γραμμή} &= \frac{I_R}{I_S} = \frac{1}{\cosh \gamma \ell} = \frac{1,07855770699609-0,0210186913778473i}{1,078762491} = 1,078762491 - 0,01948531i = 1,078762491 - 1,116426022i
 \end{aligned}$$

x=0	cosh(yx)	=	1	=	0	=	1	=	0	V
	sinh(yx)	=	0	=	0	=	0	=	0	
	Vr.Cosh(yx)	=	115470,053837925	=	115470,0538	=	115470,0538	=	115470,0538	
	Ir.Zc.Sinh(yx)	=	0	=	0	=	0	=	0	
	V(x)	=	115470,053837925	=	115470,0538	=	115470,0538	=	115470,0538	
	Ir.Cosh(yx)	=	360,843918243516	=	360,8439182	=	360,8439182	=	360,8439182	
	(Vr.Sin(yx))/Zc	=	0	=	0	=	0	=	0	
	I(x)	=	360,843918243516	=	360,8439182	=	360,8439182	=	360,8439182	
	I*(x)	=	360,843918243516	=	360,8439182	=	360,8439182	=	360,8439182	
	S(x)=V(x),I*(x)	=	125000000	=	125000000	=	125000000	=	125000000	
	V(x)+	=	130510,709240819-8961,4334987751i	=	130818,013	=	130818,013	=	130818,013	
V(x)-	=	-15040,655402894+8961,4334987751i	=	17507,95834	=	17507,95834	=	17507,95834		
pV(x)	=	-0,119396470820914+0,0604660721823499i	=	0,133834462	=	0,133834462	=	0,133834462		
I(x)+	=	321,41794266158+17,3619276353665i	=	321,8865179	=	321,8865179	=	321,8865179		
I(x)-	=	39,4259755819362-17,3619276353665i	=	43,07950884	=	43,07950884	=	43,07950884		
pI(x)	=	0,119396470820914-0,0604660721823494i	=	0,133834462	=	0,133834462	=	0,133834462		
x=10km	cosh(yx)	=	0,999942870304883+0,0000142861205322086i	=	1,42869E-05	=	0,99994287	=	0,99994287	V
	sinh(yx)	=	0,00132626962695413+0,0107710408805074i	=	1,448280116	=	0,010852387	=	0,010852387	
	Vr.Cosh(yx)	=	115463,457068954+1,64961910698921i	=	115463,4571	=	115463,4571	=	115463,4571	
	Ir.Zc.Sinh(yx)	=	386,088287215192+1543,96914466428i	=	1,325759144	=	1591,510253	=	1591,510253	
	V(x)	=	115849,545356169+1545,61876377127i	=	115859,8554	=	115859,8554	=	115859,8554	
	Ir.Cosh(yx)	=	360,823303340481+0,00515505970934129i	=	360,8233034	=	360,8233034	=	360,8233034	
	(Vr.Sin(yx))/Zc	=	-0,0000146836671095566+3,08340019996585i	=	1,570801089	=	3,0834002	=	3,0834002	
	I(x)	=	360,823288656814+3,0885525967519i	=	360,836507	=	360,836507	=	360,836507	
	I*(x)	=	360,823288656814-3,0885525967519i	=	-0,008559536	=	-0,008559536	=	-0,008559536	
	S(x)=V(x),I*(x)	=	125417963,0211316+599662,568138562i	=	0,004781277	=	125419396,6	=	125419396,6	
	V(x)+	=	130772,997584132-7565,20613557509i	=	-0,057785505	=	130991,6381	=	130991,6381	
V(x)-	=	-14923,452227962+9110,82489934633i	=	2,593485518	=	17484,75212	=	17484,75212		
pV(x)	=	-0,11775500385879+0,062856977216688i	=	0,13347991	=	0,13347991	=	0,13347991		
I(x)+	=	321,638612940506+20,8505599666288i	=	322,3137341	=	322,3137341	=	322,3137341		
I(x)-	=	39,1846757163101-17,7620047069535i	=	43,02240837	=	43,02240837	=	43,02240837		
pI(x)	=	0,11775500385879-0,062856977216684i	=	-0,49032163	=	-0,49032163	=	-0,49032163		

x=20km	20	$\cosh(yx)$	=	0,999771489	5,71543E-05	=	0,999771489	0,003274699
		$\sinh(yx)$	=	0,021703535	1,448294403	=	0,021703535	82,98115681
		$Vr.Cosh(yx)$	=	115443,6677	5,71543E-05	=	115443,6677	0,003274699
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	3182,838661	1,325773431	=	3182,838661	75,96122218
		$V(x)$	=	116256,944	0,026619799	=	116256,944	1,525202138
		$Ir.Cosh(yx)$	=	360,7614614	5,71543E-05	=	360,7614614	0,003274699
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	6,166448093	1,570815376	=	6,166448093	90,00109143
		$I(x)$	=	360,8143937	0,017148347	=	360,8143937	0,982527904
		$I^*(x)$	=	360,8143937	-0,017148347	=	360,8143937	-0,982527904
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	125841536,3	0,009471452	=	125841536,3	0,542674234
		$V(x)+$	=	131165,4936	-0,047014266	=	131165,4936	-2,693719008
		$V(x)-$	=	17461,57666	2,582714278	=	17461,57666	147,9786278
		$\rho V(x)$	=	0,133126299	2,629728544	=	0,133126299	150,6723469
		$I(x)+$	=	322,7415173	0,075506707	=	322,7415173	4,326215618
		$I(x)-$	=	42,96538359	-0,436357403	=	42,96538359	-25,00143753
		$\rho I(x)$	=	0,133126299	-0,511864109	=	0,133126299	-29,32765315
		$\cosh(yx)$	=	0,999485878	0,000128622	=	0,999485878	0,007369476
		$\sinh(yx)$	=	0,032552202	1,448318216	=	0,032552202	82,98252119
		$Vr.Cosh(yx)$	=	115410,6881	0,000128622	=	115410,6881	0,007369476
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	4773,803402	1,325797244	=	4773,803402	75,96258657
		$V(x)$	=	116661,1523	0,039836048	=	116661,1523	2,282437433
		$Ir.Cosh(yx)$	=	360,6584003	0,000128622	=	360,6584003	0,007369476
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	9,248791415	1,570839189	=	9,248791415	90,00245582
		$I(x)$	=	360,7777626	0,025767133	=	360,7777626	1,476347962
		$I^*(x)$	=	360,7777626	-0,025767133	=	360,7777626	-1,476347962
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	126266248,5	0,014068915	=	126266248,5	0,806089471
		$V(x)+$	=	131339,5799	-0,036243026	=	131339,5799	-2,076572434
		$V(x)-$	=	17438,43192	2,571943039	=	17438,43192	147,3614813
		$\rho V(x)$	=	0,132773623	2,608186065	=	0,132773623	149,4380537
		$I(x)+$	=	323,1698683	0,086277946	=	323,1698683	4,943362192
		$I(x)-$	=	42,90843439	-0,447128642	=	42,90843439	-25,6185841
		$\rho I(x)$	=	0,132773623	-0,533406589	=	0,132773623	-30,56194629
		$\cosh(yx)$	=	0,999485869459842+0,000128555497456689i		=	0,999485878	
		$\sinh(yx)$	=	0,00397697180128001+0,0323083515724166i		=	0,032552202	
		$Vr.Cosh(yx)$	=	115410,687156773+14,8443102124851i		=	115410,6881	
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	1157,91196096839+4631,24592410674i		=	4773,803402	
		$V(x)$	=	116568,599117741+4646,09023431922i		=	116661,1523	
		$Ir.Cosh(yx)$	=	360,658397364916+0,0463884694140159i		=	360,6584003	
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,00039642277335848+9,24879140624986i		=	9,248791415	
		$I(x)$	=	360,658000942143+9,29517987566387i		=	360,7777626	
		$I^*(x)$	=	360,658000942143-9,29517987566387i		=	360,7777626	
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	126253752,524631+1776370,55835848i		=	126266248,5	
		$V(x)+$	=	131253,328295409-4759,10177318574i		=	131339,5799	
		$V(x)-$	=	-14684,7291776674+9405,19200750498i		=	17438,43192	
		$\rho V(x)$	=	-0,114328701475961+0,067511355305298i		=	0,132773623	
		$I(x)+$	=	321,967794742231+27,8478531714584i		=	323,1698683	
		$I(x)-$	=	38,6902061999124-18,5526732957945i		=	42,90843439	
		$\rho I(x)$	=	0,114328701475961-0,067511355305295i		=	0,132773623	

x=40km	40	$\cosh(yx)$	=	0,999086073	=	0,999086073	=	0,000228722	=	0,999086073	=	0,999086073	=	0,013104787
		$\sinh(yx)$	=	0,00530048611180466+0,0430722362803331i	=	0,043397151	=	1,448351558	=	0,043397151	=	0,043397151	=	82,98443151
		$Vr.Cosh(yx)$	=	115364,51966602+26,38636683898i	=	115364,5227	=	0,000228722	=	115364,5227	=	115364,5227	=	0,013104787
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	1543,47094898768+6174,22286125469i	=	6364,222695	=	1,325830585	=	6364,222695	=	6364,222695	=	75,96449688
		$V(x)$	=	116907,990615008+6200,609222809367i	=	117072,3102	=	0,05298872	=	117072,3102	=	117072,3102	=	3,036030015
		$Ir.Cosh(yx)$	=	360,514123956311+0,0824573963718124i	=	360,5141334	=	0,000228722	=	360,5141334	=	360,5141334	=	0,013104787
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,000939593638982482+12,3300779478211i	=	12,33007798	=	1,57087253	=	12,33007798	=	12,33007798	=	90,00436613
		$I(x)$	=	360,513184362672+12,4125353441929i	=	360,726804	=	0,034416589	=	360,726804	=	360,726804	=	1,971925291
		$I^*(x)$	=	360,513184362672-12,4125353441929i	=	360,726804	=	-0,034416589	=	360,726804	=	360,726804	=	-1,971925291
		$S(x)=V(x),I^*(x)$	=	126671511,765772+2352830,43684378i	=	126693360,9	=	0,018572131	=	126693360,9	=	126693360,9	=	1,064104725
		$V(x)+$	=	131471,23560439-3349,531673645i	=	131513,8972	=	-0,025471786	=	131513,8972	=	131513,8972	=	-1,45942586
		$V(x)-$	=	-14563,244989383+9550,14090173867i	=	17415,31785	=	2,561171799	=	17415,31785	=	17415,31785	=	146,7443347
		$pV(x)$	=	-0,112548970134505+0,0697730915760156i	=	0,132421883	=	2,586643586	=	0,132421883	=	0,132421883	=	148,2037606
		$I(x)+$	=	322,076068724573+31,3557239440328i	=	323,5987878	=	0,097049186	=	323,5987878	=	323,5987878	=	5,560508766
		$I(x)-$	=	38,4371156380998-18,9431885998398i	=	42,85156068	=	-0,457899882	=	42,85156068	=	42,85156068	=	-26,23573068
		$pI(x)$	=	0,112548970134504-0,0697730915760149i	=	0,132421883	=	-0,554949068	=	0,132421883	=	0,132421883	=	-31,79623944
x=50km	50	$\cosh(yx)$	=	0,998572063571738+0,000356989800137503i	=	0,998572127	=	0,0003575	=	0,998572127	=	0,998572127	=	0,020483257
		$\sinh(yx)$	=	0,0062216412170004+0,0538313510275631i	=	0,054237141	=	1,44839443	=	0,054237141	=	0,054237141	=	82,98688792
		$Vr.Cosh(yx)$	=	115305,169941676+41,2216314414676i	=	115305,1773	=	0,0003575	=	115305,1773	=	115305,1773	=	0,020483257
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	1928,67716957353+7716,53843588737i	=	7953,914826	=	1,325873458	=	7953,914826	=	7953,914826	=	75,9669533
		$V(x)$	=	117233,84711125+7757,76006732884i	=	117490,2453	=	0,066077045	=	117490,2453	=	117490,2453	=	3,785935805
		$Ir.Cosh(yx)$	=	360,328656067739+0,128817598254586i	=	360,3286791	=	0,0003575	=	360,3286791	=	360,3286791	=	0,020483257
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,00183495510670142+15,4099556353582i	=	15,40995574	=	1,570915403	=	15,40995574	=	15,40995574	=	90,00682255
		$I(x)$	=	360,326821112632+15,5387732336128i	=	360,6617134	=	0,043097407	=	360,6617134	=	360,6617134	=	2,46929951
		$I^*(x)$	=	360,326821112632-15,5387732336128i	=	360,6617134	=	-0,043097407	=	360,6617134	=	360,6617134	=	-2,46929951
		$S(x)=V(x),I^*(x)$	=	127089136,592664+2920976,57534812i	=	127122699,6	=	0,022979638	=	127122699,6	=	127122699,6	=	1,316636295
		$V(x)+$	=	131674,216793785-1935,82243082093i	=	131688,4459	=	-0,014700547	=	131688,4459	=	131688,4459	=	-0,842279286
		$V(x)-$	=	-14440,3696825343+9693,58249814975i	=	17392,23442	=	2,550400559	=	17392,23442	=	17392,23442	=	146,1271881
		$pV(x)$	=	-0,11072577490252+0,0719900774064892i	=	0,132071074	=	2,565101106	=	0,132071074	=	0,132071074	=	146,9694674
		$I(x)+$	=	322,14664658839+34,8692144657856i	=	324,0282766	=	0,107820426	=	324,0282766	=	324,0282766	=	6,17765534
		$I(x)-$	=	38,1801745242433-19,3304412321728i	=	42,79476235	=	-0,468671122	=	42,79476235	=	42,79476235	=	-26,85287725
		$pI(x)$	=	0,110725774902521-0,0719900774064891i	=	0,132071074	=	-0,576491547	=	0,132071074	=	0,132071074	=	-33,03053259

x=60km	60	$\cosh(yx)$	=	0,997944106	=	0,997944106	=	0,000515016	=	0,997944106	=	0,029508269
		$\sinh(yx)$	=	0,065070933	=	0,065070933	=	1,448446838	=	0,065070933	=	82,98989067
		$Vr.Cosh(yx)$	=	115232,644341131+59,3467131970293i	=	115232,6596	=	0,000515016	=	115232,6596	=	0,029508269
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	2313,44254188564+9258,02743017267i	=	9542,698166	=	1,325925886	=	9542,698166	=	75,96995604
		$V(x)$	=	117546,086883017+9317,3741433697i	=	117914,7828	=	0,079100324	=	117914,7828	=	4,532114709
		$Ir.Cosh(yx)$	=	360,102013566033+0,185458478740716i	=	360,1020613	=	0,000515016	=	360,1020613	=	0,029508269
		$(Vr.Sin(yx))/Zc$	=	-0,00317040388077208+18,4880725383321i	=	18,48807281	=	1,570967811	=	18,48807281	=	90,00982529
		$I(x)$	=	360,098843162152+18,6735310170728i	=	360,5826918	=	0,051810273	=	360,5826918	=	2,968510006
		$I^*(x)$	=	360,098843162152-18,6735310170728i	=	360,5826918	=	-0,051810273	=	360,5826918	=	-2,968510006
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	127506594,539628+3480525,45297246i	=	127554089,3	=	0,02729005	=	127554089,3	=	1,563604703
		$V(x)+$	=	131862,208278244-518,129774642122i	=	131863,2262	=	-0,003929307	=	131863,2262	=	-0,225132712
		$V(x)-$	=	-14316,1213952269+9835,50391801176i	=	17369,18159	=	2,53962932	=	17369,18159	=	145,5100415
		$pV(x)$	=	-0,108860202388936+0,0741615079374789i	=	0,131721194	=	2,543558627	=	0,131721194	=	145,7351743
		$I(x)+$	=	322,179419881201+38,3879253040001i	=	324,4583354	=	0,118591665	=	324,4583354	=	6,794801914
		$I(x)-$	=	37,9194232809532-19,7143942869272i	=	42,73803931	=	-0,479442361	=	42,73803931	=	-27,47002382
		$pI(x)$	=	0,108860202388935-0,0741615079374787i	=	0,131721194	=	-0,598034027	=	0,131721194	=	-34,26482574
x=70km	70	$\cosh(yx)$	=	0,997202089	=	0,997202089	=	0,000701343	=	0,997202089	=	0,040183968
		$\sinh(yx)$	=	0,00925817796755649+0,0753305049892074i	=	0,075897291	=	1,448508786	=	0,075897291	=	82,99344002
		$Vr.Cosh(yx)$	=	115146,950633238+80,7574689259337i	=	115146,979	=	0,000701343	=	115146,979	=	0,040183968
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	2697,67905907206+10798,524708127i	=	11130,3912	=	1,325987813	=	11130,3912	=	75,97350539
		$V(x)$	=	117844,62969231+10879,2821770529i	=	118345,7457	=	0,092057925	=	118345,7457	=	5,27453056
		$Ir.Cosh(yx)$	=	359,83422072887+0,252367090393543i	=	359,8343092	=	0,000701343	=	359,8343092	=	0,040183968
		$(Vr.Sin(yx))/Zc$	=	-0,00503373607181043+21,5640769148256i	=	21,5640775	=	1,571029758	=	21,5640775	=	90,01337464
		$I(x)$	=	359,829186992798+21,8164440052191i	=	360,4899458	=	0,060555873	=	360,4899458	=	3,469595927
		$I^*(x)$	=	359,829186992798-21,8164440052191i	=	360,4899458	=	-0,060555873	=	360,4899458	=	-3,469595927
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	127923853,632252+4031197,48750836i	=	127987354,4	=	0,031502052	=	127987354,4	=	1,804934634
		$V(x)+$	=	132035,148071318+903,389681531075i	=	132038,2385	=	0,006841933	=	132038,2385	=	0,392013862
		$V(x)-$	=	-14190,5183790072+9975,89249552184i	=	17346,15931	=	2,52885808	=	17346,15931	=	144,892895
		$pV(x)$	=	-0,10695335363998+0,0762866039724166i	=	0,131372241	=	2,522016147	=	0,131372241	=	144,5008811
		$I(x)+$	=	322,174284320892+41,9114553493277i	=	324,888965	=	0,129362905	=	324,888965	=	7,411948488
		$I(x)-$	=	37,6549026719071-20,0950113441085i	=	42,68139145	=	-0,490213601	=	42,68139145	=	-28,0871704
		$pI(x)$	=	0,10695335363997-0,0762866039724163i	=	0,131372241	=	-0,619576506	=	0,131372241	=	-35,49911889

x=80km	80	cosh(yx)	=	0,996346174	=	0,996346174	=	0,000916564	=	0,996346174	=	0,996346174	0,052515263
		sinh(yx)	=	0,086714978	=	0,086714978	=	1,448580279	=	0,086714978	=	0,086714978	82,99753629
		Vr.Cosh(yx)	=	115048,097997557+105,449003787007i	=	115048,1463	=	0,000916564	=	115048,1463	=	115048,1463	0,052515263
		Ir.Zc.Sinh(yx)	=	3081,29880304304+12337,8652319692i	=	12716,81252	=	1,326059307	=	12716,81252	=	12716,81252	75,97760167
		V(x)	=	118129,3968006+12443,3142357562i	=	118782,9552	=	0,104949284	=	118782,9552	=	118782,9552	6,013151048
		Ir.Cosh(yx)	=	359,525306242367+0,329528136834397i	=	359,5254573	=	0,000916564	=	359,5254573	=	359,5254573	0,052515263
		(Vr.Sinh(yx))/Zc	=	-0,007511262711517715+24,6376172492147i	=	24,63761839	=	1,571101252	=	24,63761839	=	24,63761839	90,01747092
		I(x)	=	359,517793615252+24,9671453860491i	=	360,3836876	=	0,069334883	=	360,3836876	=	360,3836876	3,972596169
		I*(x)	=	359,517793615252-24,9671453860491i	=	360,3836876	=	-0,069334883	=	360,3836876	=	360,3836876	-3,972596169
		S(x)=V(x).I*(x)	=	128340882,403382+4572717,16504038i	=	128422318,3	=	0,035614401	=	128422318,3	=	128422318,3	2,04055488
		V(x)+	=	132192,975797016+2328,57845702976i	=	132213,4832	=	0,017613172	=	132213,4832	=	132213,4832	1,009160436
		V(x)-	=	-14063,5789964156+10114,7357787264i	=	17323,16755	=	2,51808684	=	17323,16755	=	17323,16755	144,2757484
		pV(x)	=	-0,105006342167146+0,0783646122079518i	=	0,131024213	=	2,500473668	=	0,131024213	=	0,131024213	143,266588
I(x)+	=	322,131139819102+45,4394018586396i	=	325,3201661	=	0,140134145	=	325,3201661	=	325,3201661	8,029095062		
I(x)-	=	37,3866537961506-20,4722564725904i	=	42,62481868	=	-0,500984841	=	42,62481868	=	42,62481868	-28,704311697		
pl(x)	=	0,105006342167145-0,0783646122079508i	=	0,131024213	=	-0,641118986	=	0,131024213	=	0,131024213	-36,73341203		
x=90km	90	cosh(yx)	=	0,99537598341299+0,00115541361300879i	=	0,99537598341299+0,00115541361300879i	=	0,001160781	=	0,99537598341299+0,001160781	=	0,99537598341299+0,001160781	0,06650784
		sinh(yx)	=	0,011881351638108+0,0967962890496662i	=	0,097522757	=	1,448661325	=	0,097522757	=	0,097522757	83,00217987
		Vr.Cosh(yx)	=	114936,097023437+133,415672099196i	=	114936,1745	=	0,001160781	=	114936,1745	=	114936,1745	0,06650784
		Ir.Zc.Sinh(yx)	=	3464,21395923203+13875,8840784653i	=	14301,78091	=	1,326140353	=	14301,78091	=	14301,78091	75,98224525
		V(x)	=	118400,310982669+14009,2997505645i	=	119226,2308	=	0,117773904	=	119226,2308	=	119226,2308	6,747947645
		Ir.Cosh(yx)	=	359,175303198242+0,416923975309989i	=	359,1755452	=	0,001160781	=	359,1755452	=	359,1755452	0,06650784
		(Vr.Sinh(yx))/Zc	=	-0,0106946117096422+27,7083422898274i	=	27,70834435	=	1,571182298	=	27,70834435	=	27,70834435	90,0221145
		I(x)	=	359,164608586532+28,1252662651374i	=	360,2641346	=	0,078147979	=	360,2641346	=	360,2641346	4,477549372
		I*(x)	=	359,164608586532-28,1252662651374i	=	360,2641346	=	-0,078147979	=	360,2641346	=	360,2641346	-4,477549372
		S(x)=V(x).I*(x)	=	128757649,90886+5104813,16766078i	=	128858804,6	=	0,039625925	=	128858804,6	=	128858804,6	2,270398274
		V(x)+	=	132335,632701202+3757,2782201453i	=	132388,9603	=	0,028384412	=	132388,9603	=	132388,9603	1,62630701
		V(x)-	=	-13935,3217185324+10252,0215304191i	=	17300,20627	=	2,507315601	=	17300,20627	=	17300,20627	143,6586018
		pV(x)	=	-0,103020296111639+0,0803948054508803i	=	0,130677106	=	2,478931189	=	0,130677106	=	0,130677106	142,0322948
I(x)+	=	322,049890504158+48,9713604981838i	=	325,7519396	=	0,150905384	=	325,7519396	=	325,7519396	8,646241636		
I(x)-	=	37,1147180823755-20,8460942330463i	=	42,56832089	=	-0,51175608	=	42,56832089	=	42,56832089	-29,32146355		
pl(x)	=	0,103020296111638-0,08039480545088i	=	0,130677106	=	-0,662661465	=	0,130677106	=	0,130677106	-37,96770518		

x=100km	100	$\cosh(yx)$	=	0,9942931	=	0,001434105	=	0,9942931	=	0,082168161
		$\sinh(yx)$	=	0,108319394	=	1,448751931	=	0,108319394	=	83,00737118
		$Vr.Cosh(yx)$	=	114811,0778	=	0,001434105	=	114811,0778	=	0,082168161
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	15885,1153	=	1,326230958	=	15885,1153	=	75,98743655
		$V(x)$	=	119675,3903	=	0,130531351	=	119675,3903	=	7,478895528
		$Ir.Cosh(yx)$	=	358,784618	=	0,001434105	=	358,784618	=	0,082168161
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	30,77590458	=	1,571272903	=	30,77590458	=	90,02730581
		$I(x)$	=	360,1315098	=	0,08699583	=	360,1315098	=	4,984493907
		$I^*(x)$	=	360,1315098	=	-0,08699583	=	360,1315098	=	-4,984493907
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	129296637	=	0,043535521	=	129296637	=	2,494401621
		$V(x)+$	=	132564,6704	=	0,039155652	=	132564,6704	=	2,243453584
		$V(x)-$	=	17277,27541	=	2,496544361	=	17277,27541	=	143,0414553
		$pV(x)$	=	0,13033092	=	2,457388709	=	0,13033092	=	140,7980017
		$I(x)+$	=	326,1842861	=	0,161676624	=	326,1842861	=	9,26338821
		$I(x)-$	=	42,51189798	=	-0,52252732	=	42,51189798	=	-29,93861012
		$p(x)$	=	0,13033092	=	-0,684203944	=	0,13033092	=	-39,20199833
x=110km	110	$\cosh(yx)$	=	0,993096206	=	0,001736663	=	0,993096206	=	0,099503482
		$\sinh(yx)$	=	0,119103655	=	1,448852104	=	0,119103655	=	83,01311069
		$Vr.Cosh(yx)$	=	114672,8724	=	0,001736663	=	114672,8724	=	0,099503482
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	17466,6348	=	1,326331131	=	17466,6348	=	75,99317607
		$V(x)$	=	120130,2502	=	0,143221256	=	120130,2502	=	8,205973494
		$Ir.Cosh(yx)$	=	358,3527262	=	0,001736663	=	358,3527262	=	0,099503482
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	33,83994866	=	1,571373076	=	33,83994866	=	90,03304532
		$I(x)$	=	359,9860417	=	0,095879102	=	359,9860417	=	5,493467867
		$I^*(x)$	=	359,9860417	=	-0,095879102	=	359,9860417	=	-5,493467867
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	129735639,8	=	0,047342154	=	129735639,8	=	2,712505627
		$V(x)+$	=	132740,6137	=	0,049926891	=	132740,6137	=	2,860600158
		$V(x)-$	=	17254,37496	=	2,485773121	=	17254,37496	=	142,4243087
		$pV(x)$	=	0,12998565	=	2,43584623	=	0,12998565	=	139,5637085
		$I(x)+$	=	326,6172064	=	0,172447864	=	326,6172064	=	9,880534784
		$I(x)-$	=	42,45554987	=	-0,53329856	=	42,45554987	=	-30,5557567
		$p(x)$	=	0,12998565	=	-0,705746424	=	0,12998565	=	-40,43629148

x=120km	cosh(yx)	=	0,991785942	=	0,991785942	=	0,991785942	=	0,991785942	=	0,118521857
	sinh(yx)	=	0,129874309	=	0,129874309	=	0,129874309	=	0,129874309	=	83,01939894
	Vr.Cosh(yx)	=	114521,5761	=	114521,5761	=	114521,5761	=	114521,5761	=	0,118521857
	Ir.Zc.Sinh(yx)	=	4607,85561782951+18480,3633827026i	=	19046,15878	=	19046,15878	=	19046,15878	=	75,99946431
	V(x)	=	119129,186705646+18717,262161818i	=	120590,6258	=	120590,6258	=	120590,6258	=	8,929163881
	Ir.Cosh(yx)	=	357,879159649424+0,74030868473561i	=	357,8799253	=	357,8799253	=	357,8799253	=	0,118521857
	(Vr.Sinh(yx))/Zc	=	-0,0253319421390492+36,9001178816436i	=	36,90012658	=	36,90012658	=	36,90012658	=	90,03933356
	I(x)	=	357,853827707285+37,6404265663792i	=	359,8279641	=	359,8279641	=	359,8279641	=	6,004509055
	I*(x)	=	357,853827707285-37,6404265663792i	=	359,8279641	=	359,8279641	=	359,8279641	=	-6,004509055
	S(x)=V(x).I*(x)	=	130006083,55859+6641911,51410288i	=	130175638,1	=	130175638,1	=	130175638,1	=	2,924654826
	V(x)+	=	132672,015505974+8062,84769815736i	=	132916,7906	=	132916,7906	=	132916,7906	=	3,477746732
	V(x)-	=	-13542,8288003286+10654,4144636607i	=	17231,50485	=	17231,50485	=	17231,50485	=	141,8071621
	pV(x)	=	-0,0968394039502358+0,0861916191239054i	=	0,129641295	=	0,129641295	=	0,129641295	=	138,3294154
I(x)+	=	321,57661868357+59,5872429160764i	=	327,0507013	=	327,0507013	=	327,0507013	=	10,49768136	
I(x)-	=	36,2772090237152-21,9468163496969i	=	42,39927644	=	42,39927644	=	42,39927644	=	-31,17290327	
pI(x)	=	0,0968394039502356-0,0861916191239054i	=	0,129641295	=	0,129641295	=	0,129641295	=	-41,67058463	
x=130km	cosh(yx)	=	0,990359552184419+0,00240663734187409i	=	0,990362476	=	0,990362476	=	0,990362476	=	0,139232151
	sinh(yx)	=	0,0170745828156871+0,139589722682945i	=	0,140630125	=	0,140630125	=	0,140630125	=	83,02623649
	Vr.Cosh(yx)	=	114356,870809638+277,894543434562i	=	114357,2085	=	114357,2085	=	114357,2085	=	0,139232151
	Ir.Zc.Sinh(yx)	=	4987,07686341669+20011,4491498959i	=	20623,5068	=	20623,5068	=	20623,5068	=	76,00630187
	V(x)	=	119343,947673055+20289,3436933305i	=	121056,3312	=	121056,3312	=	121056,3312	=	9,64845247
	Ir.Cosh(yx)	=	357,365221280119+0,868420448233006i	=	357,3662764	=	357,3662764	=	357,3662764	=	0,139232151
	(Vr.Sinh(yx))/Zc	=	-0,0321981324644831+39,9560758259656i	=	39,9560888	=	39,9560888	=	39,9560888	=	90,04617112
	I(x)	=	357,333023147655+40,8244962741986i	=	359,6575162	=	359,6575162	=	359,6575162	=	6,51765497
	I*(x)	=	357,333023147655-40,8244962741986i	=	359,6575162	=	359,6575162	=	359,6575162	=	-6,51765497
	S(x)=V(x).I*(x)	=	130421507,557208+7133687,91747843i	=	130616458,1	=	130616458,1	=	130616458,1	=	3,1307975
	V(x)+	=	132753,434409706+9503,9916512543i	=	133093,2012	=	133093,2012	=	133093,2012	=	4,094893306
	V(x)-	=	-13409,4867366505+10785,3520420761i	=	17208,66506	=	17208,66506	=	17208,66506	=	141,1900155
	pV(x)	=	-0,094708730074528+0,0880238095079441i	=	0,129297852	=	0,129297852	=	0,129297852	=	137,0951222
I(x)+	=	321,342076511547+63,1311764538803i	=	327,4847715	=	327,4847715	=	327,4847715	=	11,11482793	
I(x)-	=	35,9909466361092-22,3066801796816i	=	42,3430776	=	42,3430776	=	42,3430776	=	-31,79004984	
pI(x)	=	0,0947087300745281-0,0880238095079439i	=	0,129297852	=	0,129297852	=	0,129297852	=	-42,90487778	

x=140km	140	cosh(yx)	=	0,9888220577547+0,00278969288630394i	=	0,988825993	=	0,002821221	=	0,988825993	=	0,161644052
		sinh(yx)	=	0,0183591749590054+0,150252386967183i	=	0,151369875	=	1,449210128	=	0,151369875	=	83,03362398
		Vr.Cosh(yx)	=	114179,336245063+322,125987772792i	=	114179,7906	=	0,002821221	=	114179,7906	=	0,161644052
		Ir.Zc.Sinh(yx)	=	5365,15651669318+21540,3909130737i	=	22198,49871	=	1,326689156	=	22198,49871	=	76,01368936
		V(x)	=	119544,492761756+21862,5169008465i	=	121527,1797	=	0,180882929	=	121527,1797	=	10,3638284
		Ir.Cosh(yx)	=	356,810425765822+1,00664371178998i	=	356,8118457	=	0,002821221	=	356,8118457	=	0,161644052
		(Vr.Sin(yx))/Zc	=	-0,040202278481402+43,0074674934543i	=	43,00748628	=	1,571731101	=	43,00748628	=	90,05355861
		I(x)	=	356,770223487341+44,0141112052443i	=	359,4749426	=	0,122748008	=	359,4749426	=	7,032942799
		I*(x)	=	356,770223487341-44,0141112052443i	=	359,4749426	=	-0,122748008	=	359,4749426	=	-7,032942799
		S(x)=V(x).I*(x)	=	130836523,948179+7614751,32696099i	=	131057927,8	=	0,058134921	=	131057927,8	=	3,3308856
		V(x)+	=	132819,41343663+10947,8427471905i	=	133269,846	=	0,08224061	=	133269,846	=	4,71203988
		V(x)-	=	-13274,9206748731+10914,6741536561i	=	17185,85554	=	2,453459402	=	17185,85554	=	140,572869
		pV(x)	=	-0,0925448314862378+0,0898049472378043i	=	0,128955319	=	2,371218792	=	0,128955319	=	135,8608291
		I(x)+	=	321,069014190612+66,677078125232i	=	327,9194179	=	0,204761583	=	327,9194179	=	11,73197451
I(x)-	=	35,70120929673-22,6629669199873i	=	42,28695325	=	-0,565612279	=	42,28695325	=	-32,40719642		
pI(x)	=	0,0925448314862376-0,0898049472378038i	=	0,128955319	=	-0,770373862	=	0,128955319	=	-44,13917092		
x=150km	150	cosh(yx)	=	0,987171501411833+0,00320068254432963i	=	0,98717669	=	0,003242265	=	0,98717669	=	0,185768084
		sinh(yx)	=	0,0196373763467668+0,160898408068079i	=	0,162092333	=	1,449348675	=	0,162092333	=	83,0415621
		Vr.Cosh(yx)	=	113988,74641529+369,582985711849i	=	113989,3456	=	0,003242265	=	113989,3456	=	0,185768084
		Ir.Zc.Sinh(yx)	=	5742,00769321582+23067,024778866i	=	23770,95464	=	1,326827702	=	23770,95464	=	76,02162747
		V(x)	=	119730,754108506+23436,6077645778i	=	122002,9838	=	0,193300173	=	122002,9838	=	11,07528407
		Ir.Cosh(yx)	=	356,21483254778+1,15494683034953i	=	356,2167049	=	0,003242265	=	356,2167049	=	0,185768084
		(Vr.Sin(yx))/Zc	=	-0,0494306507393026+46,0539440052627i	=	46,05397053	=	1,571869647	=	46,05397053	=	90,06149672
		I(x)	=	356,165401897041+47,2088908356122i	=	359,2804933	=	0,131779504	=	359,2804933	=	7,550409398
		I*(x)	=	356,165401897041-47,2088908356122i	=	359,2804933	=	-0,131779504	=	359,2804933	=	-7,550409398
		S(x)=V(x).I*(x)	=	1312511105,24202+8084858,16960054i	=	131499876,6	=	0,061520669	=	131499876,6	=	3,524874667
		V(x)+	=	132869,90379396+12394,2378975888i	=	133446,7252	=	0,09301185	=	133446,7252	=	5,329186454
		V(x)-	=	-13139,149685455+11042,369866989i	=	17163,07626	=	2,442688163	=	17163,07626	=	139,9557224
		pV(x)	=	-0,0903489006945713+0,0915344655840415i	=	0,128613694	=	2,349676313	=	0,128613694	=	134,6265359
		I(x)+	=	320,757361606341+70,2245349755661i	=	328,3546411	=	0,215532823	=	328,3546411	=	12,34912108
I(x)-	=	35,4080402907001-23,0156441399535i	=	42,23090329	=	-0,576383519	=	42,23090329	=	-33,02434299		
pI(x)	=	0,0903489006945709-0,0915344655840408i	=	0,128613694	=	-0,791916341	=	0,128613694	=	-45,37346407		

x=160km	160	$\cosh(yx)$	=	0,985414781	=	0,003693389	=	0,985414781	=	0,211615623	V
		$\sinh(yx)$	=	0,172796273	=	1,449496844	=	0,172796273	=	83,050005156	
		$Vr.Cosh(yx)$	=	113785,8978	=	0,003693389	=	113785,8978	=	0,211615623	
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	25340,695	=	1,326975871	=	25340,695	=	76,03011693	
		$V(x)$	=	122483,5556	=	0,205648917	=	122483,5556	=	11,78281503	
		$Ir.Cosh(yx)$	=	355,5809307	=	0,003693389	=	355,5809307	=	0,211615623	
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	49,09519364	=	1,572017816	=	49,09519364	=	90,06998618	A
		$I(x)$	=	359,0744236	=	0,140849664	=	359,0744236	=	8,070091281	
		$I^*(x)$	=	359,0744236	=	-0,140849664	=	359,0744236	=	-8,070091281	
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	131942136,4	=	0,064799254	=	131942136,4	=	3,712723751	VA
		$V(x)+$	=	133623,8392	=	0,10378309	=	133623,8392	=	5,946333028	
		$V(x)-$	=	17140,32717	=	2,431916923	=	17140,32717	=	139,3385758	
		$pV(x)$	=	0,128272973	=	2,328133833	=	0,128272973	=	133,3922428	
$I(x)+$	=	328,790442	=	0,226304062	=	328,790442	=	12,96626765			
$I(x)-$	=	42,17492762	=	-0,587154758	=	42,17492762	=	-33,64148957			
$pI(x)$	=	0,128272973	=	-0,81345882	=	0,128272973	=	-46,60775722			
x=170km	170	$\cosh(yx)$	=	0,983540494	=	0,004174809	=	0,983540494	=	0,239198909	
		$\sinh(yx)$	=	0,183480473	=	1,449654649	=	0,183480473	=	83,05909315	
		$Vr.Cosh(yx)$	=	113569,4737	=	0,004174809	=	113569,4737	=	0,239198909	
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	26907,54055	=	1,327133677	=	26907,54055	=	76,03915852	V
		$V(x)$	=	122968,7066	=	0,21792914	=	122968,7066	=	12,48641993	
		$Ir.Cosh(yx)$	=	354,9046054	=	0,004174809	=	354,9046054	=	0,239198909	
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	52,13080831	=	1,572175622	=	52,13080831	=	90,07902778	
		$I(x)$	=	358,8569941	=	0,149959119	=	358,8569941	=	8,592024604	A
		$I^*(x)$	=	358,8569941	=	-0,149959119	=	358,8569941	=	-8,592024604	
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	132384541,3	=	0,067970021	=	132384541,3	=	3,894395324	VA
		$V(x)+$	=	133801,1882	=	0,114554329	=	133801,1882	=	6,563479602	
		$V(x)-$	=	17117,60823	=	2,421145683	=	17117,60823	=	138,7214292	
		$pV(x)$	=	0,127933156	=	2,306591354	=	0,127933156	=	132,1579496	
$I(x)+$	=	329,2268213	=	0,237075302	=	329,2268213	=	13,58341423			
$I(x)-$	=	42,11902615	=	-0,597925998	=	42,11902615	=	-34,25863614			
$pI(x)$	=	0,127933156	=	-0,83500113	=	0,127933156	=	-47,84205037			

x=180km	180	cosh(yx)	=	0,98155407	=	0,98155407	=	0,004686751	=	0,98155407	=	0,26853107
		sinh(yx)	=	0,194143715	=	0,194143715	=	1,449822106	=	0,194143715	=	83,06868771
		Vr.Cosh(yx)	=	113340,1013	=	113340,1013	=	0,004686751	=	113340,1013	=	0,26853107
		Ir.Zc.Sinh(yx)	=	28471,31237	=	28471,31237	=	1,327301133	=	28471,31237	=	76,04875309
		V(x)	=	123458,2479	=	123458,2479	=	0,230140887	=	123458,2479	=	13,18610035
		Ir.Cosh(yx)	=	354,1878166	=	354,1878166	=	0,004686751	=	354,1878166	=	0,26853107
		(Vr.Sin(yx))/Zc	=	55,16046793	=	55,16046793	=	1,572343078	=	55,16046793	=	90,08862234
		I(x)	=	358,6284705	=	358,6284705	=	0,159108493	=	358,6284705	=	9,116245147
		I*(x)	=	358,6284705	=	358,6284705	=	-0,159108493	=	358,6284705	=	-9,116245147
		S(x)=V(x).I*(x)	=	132826927,9	=	132826927,9	=	0,071032373	=	132826927,9	=	4,069855198
		V(x)+	=	133978,7727	=	133978,7727	=	0,125325569	=	133978,7727	=	7,180626177
		V(x)-	=	17094,91941	=	17094,91941	=	2,410374444	=	17094,91941	=	138,1042827
		pV(x)	=	0,127594238	=	0,127594238	=	2,285048874	=	0,127594238	=	130,9236565
		I(x)+	=	329,6637797	=	329,6637797	=	0,247846542	=	329,6637797	=	14,2005608
	I(x)-	=	42,06319877	=	42,06319877	=	-0,608697238	=	42,06319877	=	-34,87578271	
	pI(x)	=	0,127594238	=	0,127594238	=	-0,856543779	=	0,127594238	=	-49,07634352	
x=190km	190	cosh(yx)	=	0,979455768	=	0,979455768	=	0,005229463	=	0,979455768	=	0,299626134
		sinh(yx)	=	0,204784779	=	0,204784779	=	1,449999229	=	0,204784779	=	83,07883613
		Vr.Cosh(yx)	=	113097,8103	=	113097,8103	=	0,005229463	=	113097,8103	=	0,299626134
		Ir.Zc.Sinh(yx)	=	30031,83193	=	30031,83193	=	1,327478257	=	30031,83193	=	76,0589015
		V(x)	=	123951,9907	=	123951,9907	=	0,242284176	=	123951,9907	=	13,88186075
		Ir.Cosh(yx)	=	353,4306571	=	353,4306571	=	0,005229463	=	353,4306571	=	0,299626134
		(Vr.Sin(yx))/Zc	=	58,18382659	=	58,18382659	=	1,572520202	=	58,18382659	=	90,09877075
		I(x)	=	358,389124	=	358,389124	=	0,168298405	=	358,389124	=	9,6427883
		I*(x)	=	358,389124	=	358,389124	=	-0,168298405	=	358,389124	=	-9,6427883
		S(x)=V(x).I*(x)	=	133269136,1	=	133269136,1	=	0,073985771	=	133269136,1	=	4,239072445
		V(x)+	=	134156,5928	=	134156,5928	=	0,136096809	=	134156,5928	=	7,797772751
		V(x)-	=	17072,26066	=	17072,26066	=	2,399603204	=	17072,26066	=	137,4871361
		pV(x)	=	0,127256218	=	0,127256218	=	2,263506395	=	0,127256218	=	129,6893633
		I(x)+	=	330,1013181	=	330,1013181	=	0,258617781	=	330,1013181	=	14,81770738
	I(x)-	=	42,00744539	=	42,00744539	=	-0,619468477	=	42,00744539	=	-35,49292929	
	pI(x)	=	0,127256218	=	0,127256218	=	-0,878086259	=	0,127256218	=	-50,31063666	

x=200km	200	$\cosh(yx)$	=	0,977245859	=	0,977245859	=	0,005803203	=	0,977245859	=	0,332499053
		$\sinh(yx)$	=	0,215402451	=	0,215402451	=	1,450186035	=	0,215402451	=	83,08953934
		$Vr.Cosh(yx)$	=	112842,632	=	112842,632	=	0,005803203	=	112842,632	=	0,332499053
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	7604,81072604596+30659,8562888787i	=	31588,92106	=	1,327665063	=	31588,92106	=	76,06960472
		$V(x)$	=	120445,542606105+31314,7013395975i	=	124449,7459	=	0,254359195	=	124449,7459	=	14,57370836
		$Ir.Cosh(yx)$	=	352,627287125186+2,04639078349628i	=	352,633225	=	0,005803203	=	352,633225	=	0,332499053
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,116934646577116+61,2004274228519i	=	61,20053914	=	1,572707008	=	61,20053914	=	90,10947397
		$I(x)$	=	352,510352478609+63,2468182063482i	=	358,1392308	=	0,177529464	=	358,1392308	=	10,17168904
		$I^*(x)$	=	352,510352478609-63,2468182063482i	=	358,1392308	=	-0,177529464	=	358,1392308	=	-10,17168904
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	133316567,704101+10262877,2100318i	=	133711008,8	=	0,076829731	=	133711008,8	=	4,402019311
		$V(x)+$	=	132888,437140377+19658,6160238464i	=	134334,649	=	0,146868049	=	134334,649	=	8,414919325
		$V(x)-$	=	-12442,8945342719+11656,0853157511i	=	17049,63194	=	2,388831964	=	17049,63194	=	136,8699895
		$pV(x)$	=	-0,0789310791207429+0,0993898444195079i	=	0,126919094	=	2,241963916	=	0,126919094	=	128,4550702
x=210km	210	$\cosh(yx)$	=	0,974924631	=	0,974924631	=	0,006408251	=	0,974924631	=	0,367165721
		$\sinh(yx)$	=	0,22599552	=	0,22599552	=	1,450382542	=	0,22599552	=	83,10079834
		$Vr.Cosh(yx)$	=	112572,288128364+721,401322401143i	=	112574,5996	=	0,006408251	=	112574,5996	=	0,367165721
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	7972,47904065717+32169,2149454984i	=	33142,40203	=	1,32786157	=	33142,40203	=	76,08086372
		$V(x)$	=	120544,767169021+32890,6162678995i	=	124951,3246	=	0,266366095	=	124951,3246	=	15,26165306
		$Ir.Cosh(yx)$	=	351,788400401136+2,25437913250357i	=	351,7956237	=	0,006408251	=	351,7956237	=	0,367165721
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,135302978531248+64,210118646667i	=	64,2102612	=	1,572903515	=	64,2102612	=	90,12073297
		$I(x)$	=	351,653097422605+66,464497791706i	=	357,8790723	=	0,186802274	=	357,8790723	=	10,70298193
		$I^*(x)$	=	351,653097422605-66,464497791706i	=	357,8790723	=	-0,186802274	=	357,8790723	=	-10,70298193
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	133727997,134899+10662419,0308474i	=	134152392,4	=	0,079563821	=	134152392,4	=	4,558671133
		$V(x)+$	=	132845,066560227+21116,8108076629i	=	134512,9414	=	0,157639288	=	134512,9414	=	9,032065899
		$V(x)-$	=	-12300,2993912057+11773,8054602367i	=	17027,03322	=	2,378060724	=	17027,03322	=	136,2528429
		$pV(x)$	=	-0,0765684444904986+0,100799278159936i	=	0,126582863	=	2,220421436	=	0,126582863	=	127,220777
	$I(x)+$	=	318,073676534624+91,5186538113392i	=	330,9781378	=	0,280160261	=	330,9781378	=	16,05200052	
	$I(x)-$	=	33,5794208879822-25,0541560321684i	=	41,89616023	=	-0,641010957	=	41,89616023	=	-36,72722244	
	$pI(x)$	=	0,0765684444904985-0,100799278159936i	=	0,126582863	=	-0,9211171217	=	0,126582863	=	-52,77922296	

x=220km	220	$\cosh(yx)$	=	0,972492384	=	0,972492384	=	0,007044899	=	0,972492384	=	0,236562776	=	0,972492384	=	0,403643001
		$\sinh(yx)$	=	0,236562776	=	0,236562776	=	1,450588767	=	0,236562776	=	0,236562776	=	0,236562776	=	83,11261418
		$Vr.Cosh(yx)$	=	112290,961323616+791,091609761842i	=	112293,7479	=	0,007044899	=	112293,7479	=	112293,7479	=	112293,7479	=	0,403643001
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	8338,31727811027+33675,1257588274i	=	34692,09751	=	1,328067795	=	34692,09751	=	34692,09751	=	34692,09751	=	76,09267955
		$V(x)$	=	120629,278601726+34466,2173685892i	=	125456,5383	=	0,278305094	=	125456,5383	=	125456,5383	=	125456,5383	=	15,94570733
		$Ir.Cosh(yx)$	=	350,909254136301+2,47216128050576i	=	350,9179622	=	0,007044899	=	350,9179622	=	350,9179622	=	350,9179622	=	0,403643001
		$(Vr.Sin(yx))/Zc$	=	-0,155490477838363+67,2124693955696i	=	67,21264925	=	1,57310974	=	67,21264925	=	67,21264925	=	67,21264925	=	90,1325488
		$I(x)$	=	350,753763658463+69,6846306760754i	=	357,6089351	=	0,196117431	=	357,6089351	=	357,6089351	=	357,6089351	=	11,23670107
		$I^*(x)$	=	350,753763658463-69,6846306760754i	=	357,6089351	=	-0,196117431	=	357,6089351	=	357,6089351	=	357,6089351	=	-11,23670107
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	134138817,315277+11049446,199062i	=	134593137,2	=	0,082187664	=	134593137,2	=	134593137,2	=	134593137,2	=	4,70900626
		$V(x)+$	=	132785,913829165+22576,388478819i	=	134691,4705	=	0,168410528	=	134691,4705	=	134691,4705	=	134691,4705	=	9,649212473
		$V(x)-$	=	-12156,6352274392+11889,8288897703i	=	17004,46445	=	2,367289485	=	17004,46445	=	17004,46445	=	17004,46445	=	135,6356964
		$pV(x)$	=	-0,0741823357291995+0,10215389364952i	=	0,126247522	=	2,198878957	=	0,126247522	=	0,126247522	=	0,126247522	=	125,9864839
		$I(x)+$	=	317,490297930728+95,0653324012481i	=	331,4174206	=	0,2909315	=	331,4174206	=	331,4174206	=	331,4174206	=	16,6691471
		$I(x)-$	=	33,263465727734-25,3807017251725i	=	41,84062825	=	-0,651782196	=	41,84062825	=	41,84062825	=	41,84062825	=	-37,34436901
$pI(x)$	=	0,0741823357291991-0,102153893649519i	=	0,126247522	=	-0,942713697	=	0,126247522	=	0,126247522	=	0,126247522	=	-54,01351611		
x=230km	230	$\cosh(yx)$	=	0,969949435	=	0,969949435	=	0,007713461	=	0,969949435	=	0,969949435	=	0,969949435	=	0,441948746
		$\sinh(yx)$	=	0,247103012	=	0,247103012	=	1,45080473	=	0,247103012	=	0,247103012	=	0,247103012	=	83,12498794
		$Vr.Cosh(yx)$	=	112000,1135	=	112000,1135	=	0,007713461	=	112000,1135	=	112000,1135	=	112000,1135	=	0,441948746
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	8702,2406107045+35177,4271172321i	=	36237,83065	=	1,328283758	=	36237,83065	=	36237,83065	=	36237,83065	=	76,10505332
		$V(x)$	=	120699,022229543+36041,3270291259i	=	125965,1985	=	0,290176453	=	125965,1985	=	125965,1985	=	125965,1985	=	16,62588606
		$Ir.Cosh(yx)$	=	349,989942558873+2,69968722466838i	=	350,0003546	=	0,007713461	=	350,0003546	=	350,0003546	=	350,0003546	=	0,441948746
		$(Vr.Sin(yx))/Zc$	=	-0,177580621776356+70,2071360459911i	=	70,20736063	=	1,573325703	=	70,20736063	=	70,20736063	=	70,20736063	=	90,14492257
		$I(x)$	=	349,812361937097+72,9068232706595i	=	357,3291108	=	0,20547552	=	357,3291108	=	357,3291108	=	357,3291108	=	11,77288009
		$I^*(x)$	=	349,812361937097-72,9068232706595i	=	357,3291108	=	-0,20547552	=	357,3291108	=	357,3291108	=	357,3291108	=	-11,77288009
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	134549006,129301+11423758,35833255i	=	135033097,1	=	0,084700933	=	135033097,1	=	135033097,1	=	135033097,1	=	4,853005969
		$V(x)+$	=	132710,944002545+24037,1805767334i	=	134870,2366	=	0,179181768	=	134870,2366	=	134870,2366	=	134870,2366	=	10,26635905
		$V(x)-$	=	-12011,9217730016+12004,1464523927i	=	16981,92559	=	2,356518245	=	16981,92559	=	16981,92559	=	16981,92559	=	135,0185498
		$pV(x)$	=	-0,0717739981577263+0,103453344484994i	=	0,12591307	=	2,177336478	=	0,12591307	=	0,12591307	=	0,12591307	=	124,7521907
		$I(x)+$	=	316,867926849394+98,6102202935721i	=	331,8572865	=	0,30170274	=	331,8572865	=	331,8572865	=	331,8572865	=	17,28629367
		$I(x)-$	=	32,9444350877027-25,7033970229122i	=	41,78516988	=	-0,662553436	=	41,78516988	=	41,78516988	=	41,78516988	=	-37,96151558
$pI(x)$	=	0,0717739981577256-0,103453344484993i	=	0,12591307	=	-0,964256176	=	0,12591307	=	0,12591307	=	0,12591307	=	-55,24780926		

x=240km	240	$\cosh(yx)$	=	0,967296115	=	0,967296115	=	0,008414264	=	0,967296115	=	0,482101828
		$\sinh(yx)$	=	0,257615027	=	0,257615027	=	1,451030451	=	0,257615027	=	83,1379208
		$Vr.Cosh(yx)$	=	111689,78054653+939,809504391621	=	111693,7345	=	0,008414264	=	111693,7345	=	0,482101828
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	9064,16453266527+36675,957667811i	=	37779,42505	=	1,328509479	=	37779,42505	=	76,11798617
		$V(x)$	=	120753,945079195+37615,7672711727i	=	126477,1173	=	0,301980472	=	126477,1173	=	17,30220655
		$Ir.Cosh(yx)$	=	349,030564207905+2,93690470122381i	=	349,0429202	=	0,008414264	=	349,0429202	=	0,482101828
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,201656450676347+73,1937757979818i	=	73,19405359	=	1,5735551424	=	73,19405359	=	90,15785542
		$I(x)$	=	348,828907757229+76,1306804992056i	=	357,0398961	=	0,214877121	=	357,0398961	=	12,31155215
		$I^*(x)$	=	348,828907757229-76,1306804992056i	=	357,0398961	=	-0,214877121	=	357,0398961	=	-12,31155215
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	134958542,187618+11785160,9994314i	=	135472130,5	=	0,087103351	=	135472130,5	=	4,990654392
		$V(x)+$	=	132620,123908267+25499,0180501363i	=	135049,2399	=	0,189953007	=	135049,2399	=	10,88350562
		$V(x)-$	=	-11866,1788290728+12116,7492210366i	=	16959,41661	=	2,345747005	=	16959,41661	=	134,4014032
		$\rho V(x)$	=	-0,0693446809517388+0,104697312015107i	=	0,125579504	=	2,155793998	=	0,125579504	=	123,5178976
		$I(x)+$	=	316,206533116966+102,152894669046i	=	332,2977362	=	0,31247398	=	332,2977362	=	17,90344025
	$I(x)-$	=	32,6223746402626-26,0222141698401i	=	41,72978502	=	-0,673324676	=	41,72978502	=	-38,57866216	
	$\rho I(x)$	=	0,0693446809517385-0,104697312015105i	=	0,125579504	=	-0,985798655	=	0,125579504	=	-56,4821024	
x=250km	250	$\cosh(yx)$	=	0,96453277	=	0,96453277	=	0,009147657	=	0,96453277	=	0,524122162
		$\sinh(yx)$	=	0,268097621	=	0,268097621	=	1,451265951	=	0,268097621	=	83,15141394
		$Vr.Cosh(yx)$	=	111369,991015535+1018,80294216266i	=	111374,6509	=	0,009147657	=	111374,6509	=	0,524122162
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	9424,00487440699+38170,5568272535i	=	39316,7048	=	1,328744978	=	39316,7048	=	76,13147932
		$V(x)$	=	120793,995889942+39189,3597694162i	=	126992,1075	=	0,313717493	=	126992,1075	=	17,97468832
		$Ir.Cosh(yx)$	=	348,031221923548+3,1837591942583i	=	348,045784	=	0,009147657	=	348,045784	=	0,524122162
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,227800548639787+76,1720467120042i	=	76,17238734	=	1,573786923	=	76,17238734	=	90,17134857
		$I(x)$	=	347,803421374908+79,3558059062625i	=	356,7415925	=	0,224322804	=	356,7415925	=	12,85274989
		$I^*(x)$	=	347,803421374908-79,3558059062625i	=	356,7415925	=	-0,224322804	=	356,7415925	=	-12,85274989
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	135367404,838563+12133465,5504331i	=	135910100	=	0,08939469	=	135910100	=	5,12193843
		$V(x)+$	=	132513,422155408+26961,7312754353i	=	135228,4807	=	0,200724247	=	135228,4807	=	11,50065219
		$V(x)-$	=	-11719,4262654663+12227,6284939808i	=	16936,93746	=	2,334975766	=	16936,93746	=	133,7842566
		$\rho V(x)$	=	-0,066895636534355+0,10588550534348i	=	0,125246822	=	2,134251519	=	0,125246822	=	122,2836044
		$I(x)+$	=	315,506091081744+105,692931846355i	=	332,7387704	=	0,323245219	=	332,7387704	=	18,52058682
	$I(x)-$	=	32,2973302931644-26,3371259400921i	=	41,67447356	=	-0,684095915	=	41,67447356	=	-39,19580873	
	$\rho I(x)$	=	0,0668956365343543-0,105885505343479i	=	0,125246822	=	-1,007341135	=	0,125246822	=	-57,71639555	

x=260km	260	$\cosh(yx)$	=	0,961659761	=	0,961659761	=	0,009914007	=	0,961659761	=	0,961659761	=	0,568030741
		$\sinh(yx)$	=	0,033148068703858+0,276570215148859i	=	0,278549598	=	1,451511252	=	0,278549598	=	0,278549598	=	83,16546864
		$Vr.Cosh(yx)$	=	111037,447307794+1100,86206236139i	=	111042,9043	=	0,009914007	=	111042,9043	=	111042,9043	=	0,568030741
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	9781,67781674693+39661,0638081168i	=	40849,49453	=	1,328990279	=	40849,49453	=	40849,49453	=	76,14553402
		$V(x)$	=	120819,125124541+40761,9258704782i	=	127509,9823	=	0,325387895	=	127509,9823	=	127509,9823	=	18,6433531
		$Ir.Cosh(yx)$	=	346,992022836856+3,44019394487933i	=	347,009076	=	0,009914007	=	347,009076	=	347,009076	=	0,568030741
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,25609502433242+79,1416077456438i	=	79,14202209	=	1,574032224	=	79,14202209	=	79,14202209	=	90,18540327
		$I(x)$	=	346,735927812524+82,5818016905231i	=	356,4345068	=	0,233813128	=	356,4345068	=	356,4345068	=	13,39650541
		$I^*(x)$	=	346,735927812524-82,5818016905231i	=	356,4345068	=	-0,233813128	=	356,4345068	=	356,4345068	=	-13,39650541
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	135775574,178944+12468489,4640047i	=	136346873	=	0,091574767	=	136346873	=	136346873	=	5,246847687
		$V(x)+$	=	132390,809142651+28425,1500752013i	=	135407,9595	=	0,211495487	=	135407,9595	=	135407,9595	=	12,11779877
		$V(x)-$	=	-11571,6840181097+12336,7757952769i	=	16914,48811	=	2,324204526	=	16914,48811	=	16914,48811	=	133,1671101
		$pV(x)$	=	-0,0644281199705138+0,107017661318435i	=	0,124915021	=	2,112709039	=	0,124915021	=	0,124915021	=	121,0493113
		$I(x)+$	=	314,766579629012+109,22990732981i	=	333,18039	=	0,334016459	=	333,18039	=	333,18039	=	19,13773339
	$I(x)-$	=	31,969348183512-26,6481056392867i	=	41,61923543	=	-0,694867155	=	41,61923543	=	41,61923543	=	-39,812955531	
	$pI(x)$	=	0,064428119970514-0,107017661318435i	=	0,124915021	=	-1,028883614	=	0,124915021	=	0,124915021	=	-58,9506887	
x=270km	270	$\cosh(yx)$	=	0,958622442753014+0,0102707840520143i	=	0,958677462	=	0,010713698	=	0,958677462	=	0,958677462	=	0,613849662
		$\sinh(yx)$	=	0,034314892944436+0,286925100214457i	=	0,288969765	=	1,451766377	=	0,288969765	=	0,288969765	=	83,18008622
		$Vr.Cosh(yx)$	=	110692,185074934+1185,96798744379i	=	110698,5382	=	0,010713698	=	110698,5382	=	110698,5382	=	0,613849662
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	10137,0999050681+411147,31862447i	=	42377,61938	=	1,329245404	=	42377,61938	=	42377,61938	=	76,16015159
		$V(x)$	=	120829,284980002+42333,28666119138i	=	128030,556	=	0,336992093	=	128030,556	=	128030,556	=	19,30822465
		$Ir.Cosh(yx)$	=	345,913078359168+3,70614996076185i	=	345,9329318	=	0,010713698	=	345,9329318	=	345,9329318	=	0,613849662
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,286621491858535+82,1021187902317i	=	82,10261909	=	1,574287349	=	82,10261909	=	82,10261909	=	90,20002084
		$I(x)$	=	345,62645686731+85,8082687509935i	=	356,1189502	=	0,243348644	=	356,1189502	=	356,1189502	=	13,94285026
		$I^*(x)$	=	345,62645686731-85,8082687509935i	=	356,1189502	=	-0,243348644	=	356,1189502	=	356,1189502	=	-13,94285026
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	136183031,06447+12790056,3020091i	=	136782321,6	=	0,093643449	=	136782321,6	=	136782321,6	=	5,365374391
		$V(x)+$	=	132252,257066527+29889,1037367659i	=	135587,6765	=	0,222266726	=	135587,6765	=	135587,6765	=	12,73494584
		$V(x)-$	=	-11422,9720865253+12444,1828751479i	=	16892,06852	=	2,313433286	=	16892,06852	=	16892,06852	=	132,5499635
		$pV(x)$	=	-0,0619433883633113+0,108093544509827i	=	0,124584099	=	2,09116656	=	0,124584099	=	0,124584099	=	119,8150182
		$I(x)+$	=	313,987982195582+112,763395857251i	=	333,6225958	=	0,344787699	=	333,6225958	=	333,6225958	=	19,75487997
	$I(x)-$	=	31,6384746717282-26,9551271062571i	=	41,5640705	=	-0,705638395	=	41,5640705	=	41,5640705	=	-40,43010188	
	$pI(x)$	=	0,061943388363311-0,108093544509826i	=	0,124584099	=	-1,050426094	=	0,124584099	=	0,124584099	=	-60,18498185	

x=280km	cosh(yx)	=	0,955522593031678+0,0110340394413548i	=	0,955586266	=	0,011547136	=	0,955586266	=	0,661602162
	sinh(yx)	=	0,0354695982931395+0,297248181846454i	=	0,299356934	=	1,452031349	=	0,299356934	=	83,19526804
	Vr.Cosh(yx)	=	110334,24133474+1274,10112834303i	=	110341,5975	=	0,011547136	=	110341,5975	=	0,661602163
	Ir.Zc.Sinh(yx)	=	10490,1880634284+42629,1616129495i	=	43900,90506	=	1,329510377	=	43900,90506	=	76,17533341
	V(x)	=	120824,429398168+43903,2627412925i	=	128553,6434	=	0,348530536	=	128553,6434	=	19,96932874
	Ir.Cosh(yx)	=	344,794504171062+3,98156602607196i	=	344,8174923	=	0,011547136	=	344,8174923	=	0,661602163
	(Vr.Sin(yx))/Zc	=	-0,319461051717688+85,053240707371i	=	85,05384066	=	1,574552322	=	85,05384066	=	90,21520266
	I(x)	=	344,475043119344+89,034806733443i	=	355,7952391	=	0,252929894	=	355,7952391	=	14,49181541
	I*(x)	=	344,475043119344-89,034806733443i	=	355,7952391	=	-0,252929894	=	355,7952391	=	-14,49181541
	S(x)=V(x).I*(x)	=	136589757,119828+13097995,8172266i	=	137216322,8	=	0,095600642	=	137216322,8	=	5,477513323
	V(x)+	=	132097,739929477+31353,421030933i	=	135767,632	=	0,233037966	=	135767,632	=	13,35209192
	V(x)-	=	-11273,3105313085+12549,8417103595i	=	16869,67864	=	2,302662047	=	16869,67864	=	131,9328169
	pV(x)	=	-0,0594427002525596+0,109112947172968i	=	0,124254054	=	2,069624081	=	0,124254054	=	118,580725
	I(x)+	=	313,170286783835+116,292971448159i	=	334,0653884	=	0,355558938	=	334,0653884	=	20,37202654
I(x)-	=	31,3047563355099-27,2581647147155i	=	41,5089787	=	-0,716409634	=	41,5089787	=	-41,04724845	
pI(x)	=	0,059442700252559-0,109112947172968i	=	0,124254054	=	-1,071968573	=	0,124254054	=	-61,419275	
x=290km	cosh(yx)	=	0,952313182618157+0,0118233355089761i	=	0,952386575	=	0,012414748	=	0,952386575	=	0,711312658
	sinh(yx)	=	0,0366117578604625+0,307538313528359i	=	0,309709921	=	1,452306195	=	0,309709921	=	83,21101553
	Vr.Cosh(yx)	=	109963,654467484+1365,24118776532i	=	109972,1291	=	0,012414748	=	109972,1291	=	0,711312658
	Ir.Zc.Sinh(yx)	=	10840,8596086152+44106,4335475991i	=	45419,17786	=	1,329785222	=	45419,17786	=	76,1910809
	V(x)	=	120804,514076099+45471,6747353644i	=	129079,0604	=	0,360003706	=	129079,0604	=	20,62669297
	Ir.Cosh(yx)	=	343,636420210888+4,26637871176663i	=	343,6629036	=	0,012414748	=	343,6629036	=	0,711312658
	(Vr.Sin(yx))/Zc	=	-0,354694271848689+87,9946353653718i	=	87,99535022	=	1,574827167	=	87,99535022	=	90,23095016
	I(x)	=	343,281725939039+92,2610140771384i	=	355,4636945	=	0,262557406	=	355,4636945	=	15,04343122
	I*(x)	=	343,281725939039-92,2610140771384i	=	355,4636945	=	-0,262557406	=	355,4636945	=	-15,04343122
	S(x)=V(x).I*(x)	=	136995734,748422+13392144,0322213i	=	137648759	=	0,097446301	=	137648759	=	5,583261753
	V(x)+	=	131927,233547707+32817,9302308008i	=	135947,8264	=	0,243809206	=	135947,8264	=	13,96923849
	V(x)-	=	-11122,7194716071+12653,7445045636i	=	16847,31843	=	2,291890807	=	16847,31843	=	131,3156703
	pV(x)	=	-0,0569273150158669+0,110075689199757i	=	0,123924883	=	2,048081601	=	0,123924883	=	117,3464319
	I(x)+	=	312,313485975266+119,818207451989i	=	334,5087687	=	0,366330178	=	334,5087687	=	20,98917312
I(x)-	=	30,9682399637746-27,5571933748501i	=	41,45395992	=	-0,727180874	=	41,45395992	=	-41,66439503	
pI(x)	=	0,0569273150158669-0,110075689199757i	=	0,123924883	=	-1,093511052	=	0,123924883	=	-62,65356814	

x=300km	300	$\cosh(yx)$	=	0,948994657661885+0,0126384903713141i	=	0,949078812	=	0,01331698	=	0,949078812	=	0,763006772	V
		$\sinh(yx)$	=	0,0377409471318262+0,317794352150057i	=	0,320027545	=	1,452590939	=	0,320027545	=	83,22733018	
		$Vr.Cosh(yx)$	=	109580,464212121+1459,36716360574i	=	109590,1815	=	0,01331698	=	109590,1815	=	0,763006772	
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	11189,0322641416+45578,9756557002i	=	46932,26465	=	1,330069967	=	46932,26465	=	76,20739555	
		$V(x)$	=	120769,496476263+47038,3428193059i	=	129606,624	=	0,371412117	=	129606,624	=	21,28034677	V
		$Ir.Cosh(yx)$	=	342,438950662878+4,56052238626792i	=	342,4693173	=	0,01331698	=	342,4693173	=	0,763006772	
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,39240116876251+90,9259656755813i	=	90,9268124	=	1,575111912	=	90,9268124	=	90,24726481	A
		$I(x)$	=	342,046549494116+95,4864880618492i	=	355,1246421	=	0,272231699	=	355,1246421	=	15,5977274	
		$I^*(x)$	=	342,046549494116-95,4864880618492i	=	355,1246421	=	-0,272231699	=	355,1246421	=	-15,5977274	
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	137400947,141737+13672343,3152461i	=	138079517,8	=	0,099180418	=	138079517,8	=	5,68261937	VA
		$V(x)+$	=	131740,715558862+34282,4591306915i	=	136128,2599	=	0,254580445	=	136128,2599	=	14,58638506	
		$V(x)-$	=	-10971,2190825995+12755,8836886144i	=	16824,98787	=	2,281119567	=	16824,98787	=	130,6985238	
		$pV(x)$	=	-0,054398492272485+0,110981618057058i	=	0,123596584	=	2,026539122	=	0,123596584	=	116,1121387	
		$I(x)+$	=	311,41757694352+123,338676596705i	=	334,9527375	=	0,377101418	=	334,9527375	=	21,60631969	
$I(x)-$	=	30,6289725505964-27,8521885348555i	=	41,39901407	=	-0,737952114	=	41,39901407	=	-42,2815416			
$\rho I(x)$	=	0,0543984922724848-0,110981618057057i	=	0,123596584	=	-1,115053532	=	0,123596584	=	-63,88786129			
x=310km	310	$\cosh(yx)$	=	0,945567340044699+0,0134793160715764i	=	0,945663411	=	0,014254303	=	0,945663411	=	0,816711387	V
		$\sinh(yx)$	=	0,0388567440487452+0,328015158126297i	=	0,330308629	=	1,452885609	=	0,330308629	=	83,24421353	
		$Vr.Cosh(yx)$	=	109184,711662345+1556,45735248333i	=	109195,805	=	0,014254303	=	109195,805	=	0,816711387	
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	11534,6241741844+47046,6296335623i	=	48439,99293	=	1,330364637	=	48439,99293	=	76,2242789	
		$V(x)$	=	120719,335836529+48603,0869860456i	=	130136,1522	=	0,382756312	=	130136,1522	=	21,93032124	V
		$Ir.Cosh(yx)$	=	341,202223944828+4,86392922651042i	=	341,2368905	=	0,014254303	=	341,2368905	=	0,816711387	
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,432661188768312+93,8468956286152i	=	93,84789297	=	1,575406582	=	93,84789297	=	90,26414816	A
		$I(x)$	=	340,76956275606+98,7108248551256i	=	354,7784123	=	0,281953281	=	354,7784123	=	16,15473303	
		$I^*(x)$	=	340,76956275606-98,7108248551256i	=	354,7784123	=	-0,281953281	=	354,7784123	=	-16,15473303	
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	137805378,288342+13938442,45333284i	=	138508492,4	=	0,100803031	=	138508492,4	=	5,775588218	VA
		$V(x)+$	=	131538,165429502+35746,8350651891i	=	136308,9329	=	0,265351685	=	136308,9329	=	15,20353164	
		$V(x)-$	=	-10818,8295929732+12856,2519208566i	=	16802,6869	=	2,270348328	=	16802,6869	=	130,0813772	
		$pV(x)$	=	-0,0518574912901986+0,111830608712463i	=	0,123269154	=	2,004996643	=	0,123269154	=	114,8778456	
		$I(x)+$	=	310,482561466924+126,853951037521i	=	335,3972956	=	0,387872658	=	335,3972956	=	22,22346626	
$I(x)-$	=	30,2870012891362-28,143126182395i	=	41,34414104	=	-0,748723353	=	41,34414104	=	-42,89868818			
$\rho I(x)$	=	0,0518574912901981-0,111830608712462i	=	0,123269154	=	-1,136596011	=	0,123269154	=	-65,12215444			

x=320km	320	cosh(yx)	=	0,942031597345545+0,0143456186113859i	=	0,942140821	0,015227207	=	0,942140821	0,872454677	V
		sinh(yx)	=	0,039958729089612+0,33819959551484i	=	0,340552003	1,453190233	=	0,340552003	83,26166718	
		Vr.Cosh(yx)	=	108776,439262517+1656,48935339507i	=	108789,0514	0,015227207	=	108789,0514	0,872454677	
		Ir.Zc.Sinh(yx)	=	11877,5539174592+48509,2376622725i	=	49942,19084	1,33066926	=	49942,19084	76,24173255	
		V(x)	=	120653,993179976+50165,7270156676i	=	130667,4643	0,394036861	=	130667,4643	22,57664911	
		Ir.Cosh(yx)	=	339,926372695364+5,17652922935959i	=	339,9657855	0,015227207	=	339,9657855	0,872454677	
		(Vr.Sin(yx))/Zc	=	-0,475553189295533+96,7570903304793i	=	96,75825898	1,575711205	=	96,75825898	90,28160181	A
		I(x)	=	339,450819506069+101,933619559839i	=	354,42534	0,291722647	=	354,42534	16,71447647	
		I*(x)	=	339,450819506069-101,933619559839i	=	354,42534	-0,291722647	=	354,42534	-16,71447647	
		S(x)=V(x).I*(x)	=	138209012,982541+14190296,7222091i	=	138935581,4	0,102314214	=	138935581,4	5,862172641	VA
		V(x)+	=	131319,564462379+37210,8849282812i	=	136489,8457	0,276122925	=	136489,8457	15,82067821	
		V(x)-	=	-10665,5712824035+12954,8420873865i	=	16780,4155	2,259577088	=	16780,4155	129,4642306	
		pV(x)	=	-0,0493055703955178+0,112622563547523i	=	0,122942593	1,983454163	=	0,122942593	113,6435524	
		I(x)+	=	309,508445940507+130,363602405835i	=	335,8424436	0,398643897	=	335,8424436	22,84061284	
I(x)-	=	29,9423735655621-28,4299828459956i	=	41,28934075	-0,759494593	=	41,28934075	-43,51583475			
pI(x)	=	0,0493055703955177-0,112622563547523i	=	0,122942593	-1,15813849	=	0,122942593	-66,35644759			
x=330km	330	cosh(yx)	=	0,938387808804023+0,01523719798345i	=	0,938511509	0,016236207	=	0,938511509	0,930266157	V
		sinh(yx)	=	0,0410464853500874+0,348346532134263i	=	0,350756497	1,453504839	=	0,350756497	83,27969278	
		Vr.Cosh(yx)	=	108355,690803453+1759,44007148809i	=	108369,9744	0,016236207	=	108369,9744	0,930266157	
		Ir.Zc.Sinh(yx)	=	12217,7405210336+49966,6424234005i	=	51438,68718	1,330983867	=	51438,68718	76,25975816	
		V(x)	=	120573,431324487+51726,0824948886i	=	131200,3809	0,405254363	=	131200,3809	23,21936461	
		Ir.Cosh(yx)	=	338,611533760791+5,49825022340029i	=	338,6561701	0,016236207	=	338,6561701	0,930266157	
		(Vr.Sin(yx))/Zc	=	-0,52115542031504+99,6562160385815i	=	99,65757873	1,576025812	=	99,65757873	90,29962741	A
		I(x)	=	338,090378340476+105,154466261982i	=	354,0657647	0,30154028	=	354,0657647	17,27698539	
		I*(x)	=	338,090378340476-105,154466261982i	=	354,0657647	-0,30154028	=	354,0657647	-17,27698539	
		S(x)=V(x).I*(x)	=	138611836,832635+14427767,95339962i	=	139360689,6	0,103714083	=	139360689,6	5,942379221	VA
		V(x)+	=	131084,89580352+38674,4351926035i	=	136670,9986	0,286894164	=	136670,9986	16,43782479	
		V(x)-	=	-10511,4644790337+13051,6473022851i	=	16758,17361	2,248805848	=	16758,17361	128,8470841	
		pV(x)	=	-0,0467439863874402+0,113357412258561i	=	0,122616896	1,961911684	=	0,122616896	112,4092593	
		I(x)+	=	308,49524138751+133,867201858358i	=	336,2881825	0,409415137	=	336,2881825	23,45775941	
I(x)-	=	29,5951369529656-28,7127355963762i	=	41,23461309	-0,770265833	=	41,23461309	-44,13298132			
pI(x)	=	0,0467439863874402-0,113357412258561i	=	0,122616896	-1,17968097	=	0,122616896	-67,59074074			

x=340km	cosh(yx)	=	0,934775953	=	0,934775953	=	0,017281844	=	0,934775953	=	0,934775953	=	0,990176731
	sinh(yx)	=	0,360920951	=	0,360920951	=	1,453829458	=	0,360920951	=	0,360920951	=	83,29829206
	Vr.Cosh(yx)	=	107938,6296	=	107938,6296	=	0,017281844	=	107938,6296	=	107938,6296	=	0,990176731
	Ir.Zc.Sinh(yx)	=	52929,31142	=	52929,31142	=	1,331308485	=	52929,31142	=	52929,31142	=	76,27835743
	V(x)	=	131734,7238	=	131734,7238	=	0,416409439	=	131734,7238	=	131734,7238	=	23,85850341
	Ir.Cosh(yx)	=	337,3082175	=	337,3082175	=	0,017281844	=	337,3082175	=	337,3082175	=	0,990176731
	(Vr.Sinh(yx))/Zc	=	102,5455219	=	102,5455219	=	1,57635043	=	102,5455219	=	102,5455219	=	90,318228669
	I(x)	=	353,70003	=	353,70003	=	0,311406649	=	353,70003	=	353,70003	=	17,84228668
	I*(x)	=	353,70003	=	353,70003	=	-0,311406649	=	353,70003	=	353,70003	=	-17,84228668
	S(x)=V(x).I*(x)	=	139783727,3	=	139783727,3	=	0,10500279	=	139783727,3	=	139783727,3	=	6,016216724
	V(x)+	=	136852,3919	=	136852,3919	=	0,297665404	=	136852,3919	=	136852,3919	=	17,05497136
	V(x)-	=	16735,96121	=	16735,96121	=	2,238034609	=	16735,96121	=	16735,96121	=	128,2299375
	pV(x)	=	0,122292062	=	0,122292062	=	1,940369205	=	0,122292062	=	0,122292062	=	111,1749661
	I(x)+	=	336,734513	=	336,734513	=	0,420186377	=	336,734513	=	336,734513	=	24,07490599
I(x)-	=	41,17995797	=	41,17995797	=	-0,781037073	=	41,17995797	=	41,17995797	=	-44,7501279	
pl(x)	=	0,122292062	=	0,122292062	=	-1,201223449	=	0,122292062	=	0,122292062	=	-68,825503388	
x=350km	cosh(yx)	=	0,930934649	=	0,930934649	=	0,018364681	=	0,930934649	=	0,930934649	=	1,052218742
	sinh(yx)	=	0,371044205	=	0,371044205	=	1,45416412	=	0,371044205	=	0,371044205	=	83,31746678
	Vr.Cosh(yx)	=	107495,074	=	107495,074	=	0,018364681	=	107495,074	=	107495,074	=	1,052218742
	Ir.Zc.Sinh(yx)	=	54413,89376	=	54413,89376	=	1,331643147	=	54413,89376	=	54413,89376	=	76,29753215
	V(x)	=	132270,3162	=	132270,3162	=	0,427502737	=	132270,3162	=	132270,3162	=	24,49410254
	Ir.Cosh(yx)	=	335,9221064	=	335,9221064	=	0,018364681	=	335,9221064	=	335,9221064	=	1,052218742
	(Vr.Sinh(yx))/Zc	=	105,4217594	=	105,4217594	=	1,576685092	=	105,4217594	=	105,4217594	=	90,33740141
	I(x)	=	353,3284841	=	353,3284841	=	0,32132221	=	353,3284841	=	353,3284841	=	18,41040649
	I*(x)	=	353,3284841	=	353,3284841	=	-0,32132221	=	353,3284841	=	353,3284841	=	-18,41040649
	S(x)=V(x).I*(x)	=	140204611	=	140204611	=	0,106180527	=	140204611	=	140204611	=	6,08369605
	V(x)+	=	137034,026	=	137034,026	=	0,308436644	=	137034,026	=	137034,026	=	17,67211794
	V(x)-	=	16713,77824	=	16713,77824	=	2,227263369	=	16713,77824	=	16713,77824	=	127,6127909
	pV(x)	=	0,121968089	=	0,121968089	=	1,918826725	=	0,121968089	=	0,121968089	=	109,940673
	I(x)+	=	337,1814358	=	337,1814358	=	0,430957616	=	337,1814358	=	337,1814358	=	24,69205256
I(x)-	=	41,1253753	=	41,1253753	=	-0,791808312	=	41,1253753	=	41,1253753	=	-45,36727447	
pl(x)	=	0,121968089	=	0,121968089	=	-1,222765928	=	0,121968089	=	0,121968089	=	-70,059932703	

x=360km	360	$\cosh(yx)$	=	0,926988107	=	0,926988107	=	0,01948531	=	0,926988107	=	1,116426022
		$\sinh(yx)$	=	0,381125106	=	0,381125106	=	1,454508857	=	0,381125106	=	83,33721878
		$Vr.Cosh(yx)$	=	107019,047083714+2085,5632550888i	=	107039,3666	=	0,01948531	=	107039,3666	=	1,116426022
		$Ir.Zc.Sinh(yx)$	=	13221,0387777124+54306,0717528036i	=	55892,26508	=	1,331987885	=	55892,26508	=	76,31728416
		$V(x)$	=	120240,085861426+56391,6350078924i	=	132806,983	=	0,438534924	=	132806,983	=	25,1262003
		$Ir.Cosh(yx)$	=	334,434522136605+6,5173851721525i	=	334,4980208	=	0,01948531	=	334,4980208	=	1,116426022
		$(Vr.Sinh(yx))/Zc$	=	-0,674996496887042+108,283859798429i	=	108,2859636	=	1,57702983	=	108,2859636	=	90,35715341
		$I(x)$	=	333,759525639718+114,801244970582i	=	352,9514794	=	0,331287405	=	352,9514794	=	18,98137011
		$I^*(x)$	=	333,759525639718-114,801244970582i	=	352,9514794	=	-0,331287405	=	352,9514794	=	-18,98137011
		$S(x)=V(x).I^*(x)$	=	139815311,774464+15052601,3940627i	=	140623263,4	=	0,107247519	=	140623263,4	=	6,144830186
		$V(x)+$	=	130284,342929096+43060,3472059817i	=	137215,9011	=	0,319207883	=	137215,9011	=	18,28926451
		$V(x)-$	=	-10044,2570676702+13331,2878019107i	=	16691,62468	=	2,216492129	=	16691,62468	=	126,9956443
		$\rho V(x)$	=	-0,0390137885579116+0,11521902590555i	=	0,121644974	=	1,897284246	=	0,121644974	=	108,7063798
		$I(x)+$	=	305,221273451864+144,337394204849i	=	337,6289519	=	0,441728856	=	337,6289519	=	25,30919913
		$I(x)-$	=	28,5382521878554-29,5361492342672i	=	41,07086497	=	-0,802579552	=	41,07086497	=	-45,98442105
		$\rho I(x)$	=	0,0390137885579112-0,115219025905549i	=	0,121644974	=	-1,244308408	=	0,121644974	=	-71,29362018

5.2. Σχηματική παράσταση των υπολογισμών του Κεφαλαίου 5.1.

$$V_+(x) = V_R^+ e^{\alpha x} e^{j\beta x} = e^{\gamma x} \quad \gamma = \alpha + j\beta \quad x = 0 \quad \omega \varsigma \ 360 \quad (1)$$

$$V_R^+ = \frac{V_R + I_R Z_C}{2}$$

Το V_R^+ είναι μιγαδικός αριθμός και έχει σταθερό μέτρο με σταθερή γωνία. Διότι V_R είναι σταθερό, I_R είναι σταθερό, Z_C είναι σταθερό.

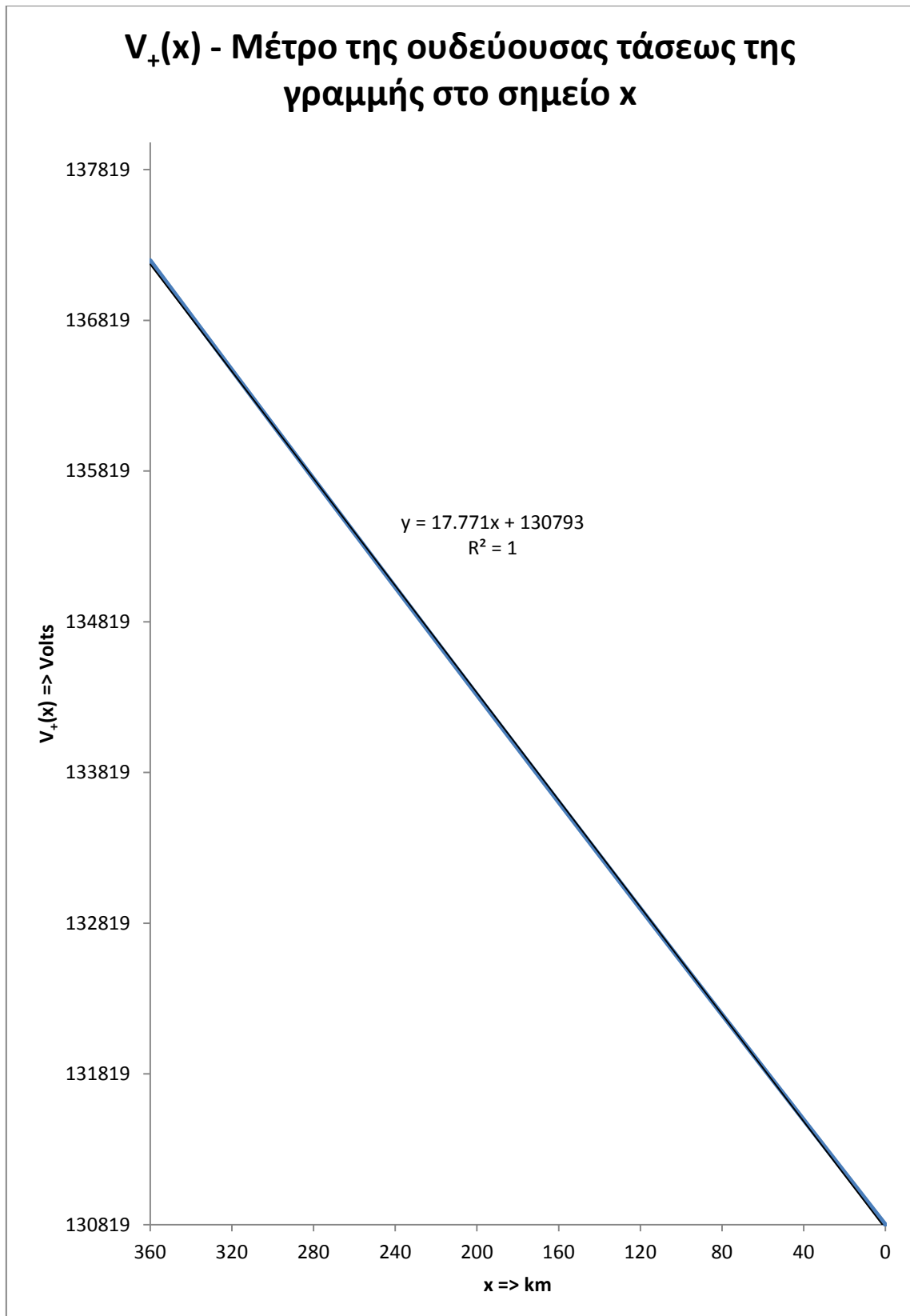
α είναι σταθερό, β είναι σταθερό.

$e^{\alpha x}$: ο συντελεστής α είναι θετικός αριθμός, άρα το $e^{\alpha x}$ μειώνεται όταν το x μειώνεται.

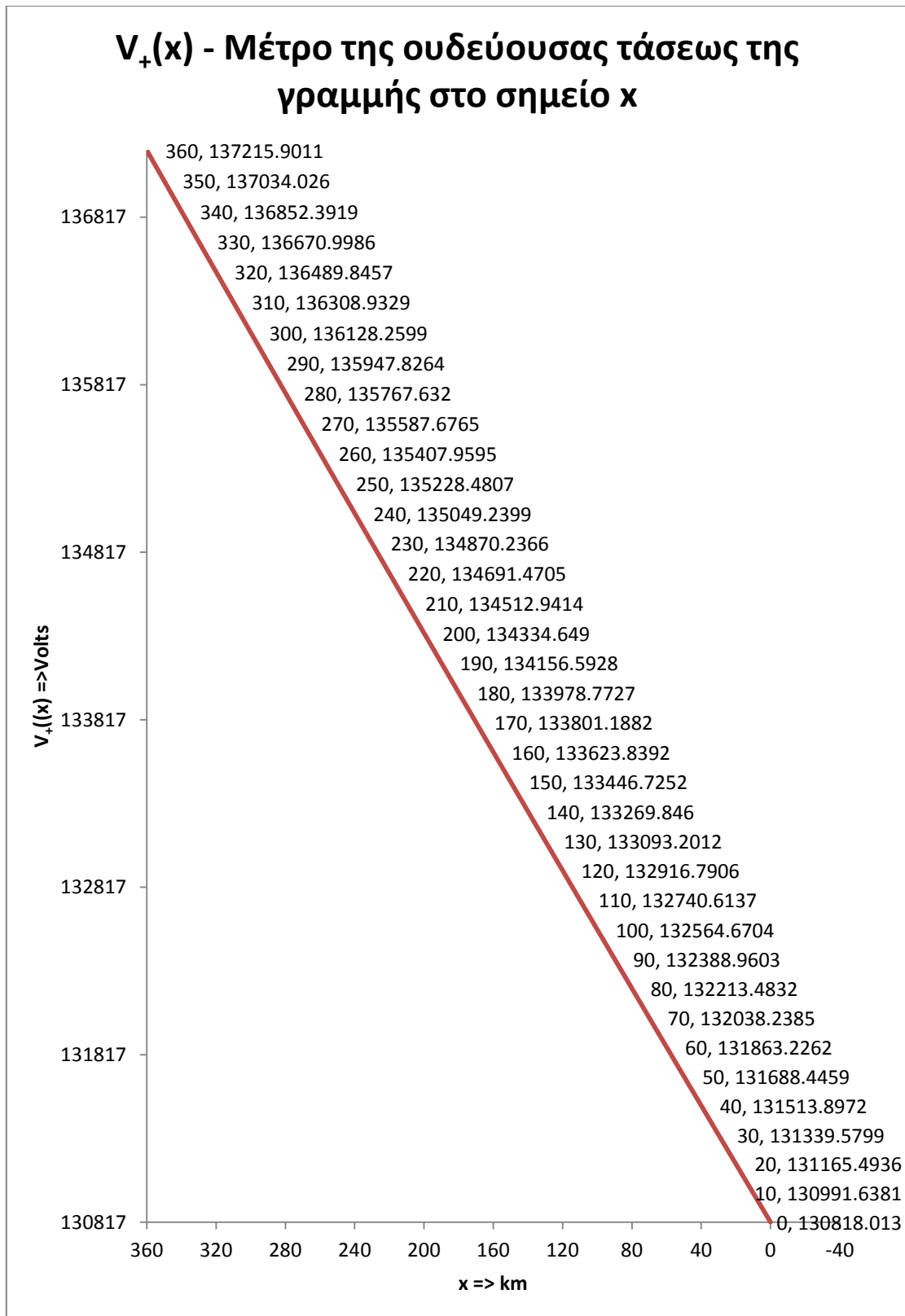
$e^{j\beta x}$: ο συντελεστής β είναι θετικός αριθμός, άρα το $e^{j\beta x}$ μειώνεται όταν το x μειώνεται.

Το $V_+(x)$ προκύπτει από την εξίσωση (1). Οπότε το μέτρο του $V_+(x)$ μειώνεται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 1 και 2.

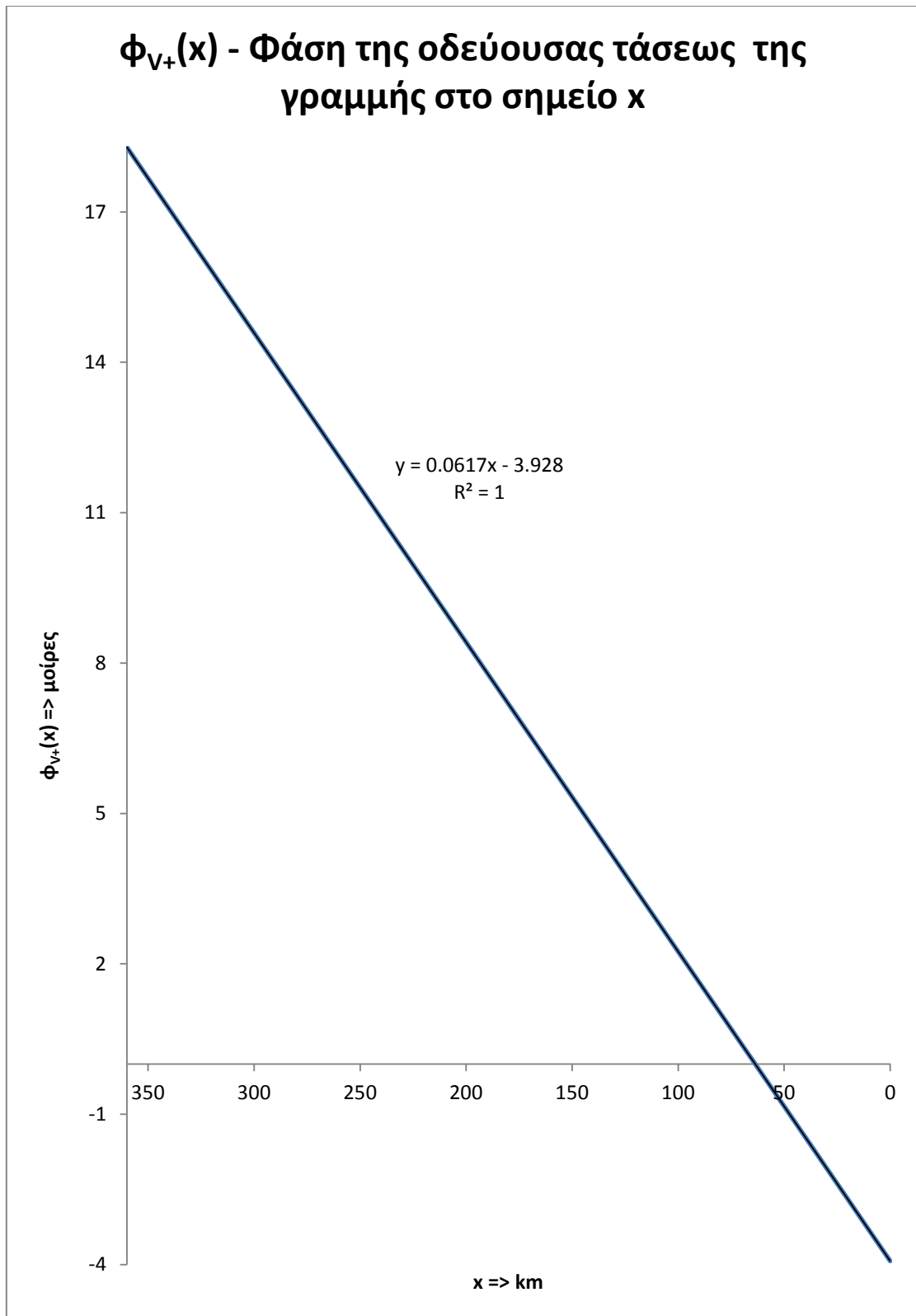
Οπότε και η γωνία του $V_+(x)$ μειώνεται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 3 και 4.



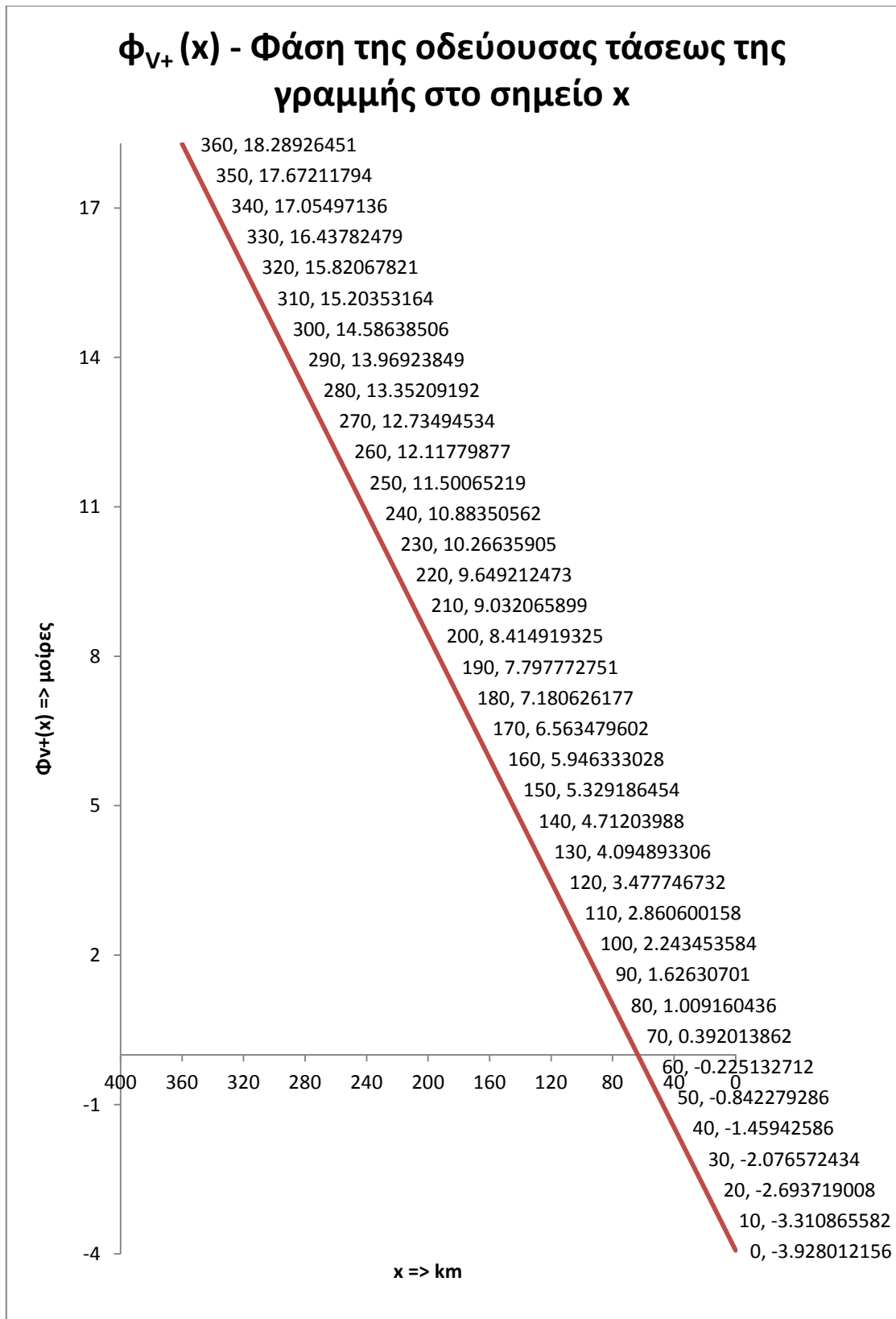
Γραφική παράσταση 1



Γραφική παράσταση 2



Γραφική παράσταση 3



Γραφική παράσταση 4

$$V_-(x) = V_R^- e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} = e^{-\gamma x} \quad \gamma = \alpha + j\beta \quad x = 0 \quad \omega_s 360 \quad (2)$$

$$V_R^- = \frac{V_R - I_R Z_C}{2}$$

Το V_R^- είναι μιγαδικός αριθμός και έχει σταθερό μέτρο με σταθερή γωνία. Διότι V_R είναι σταθερό, I_R είναι σταθερό, Z_C είναι σταθερό.

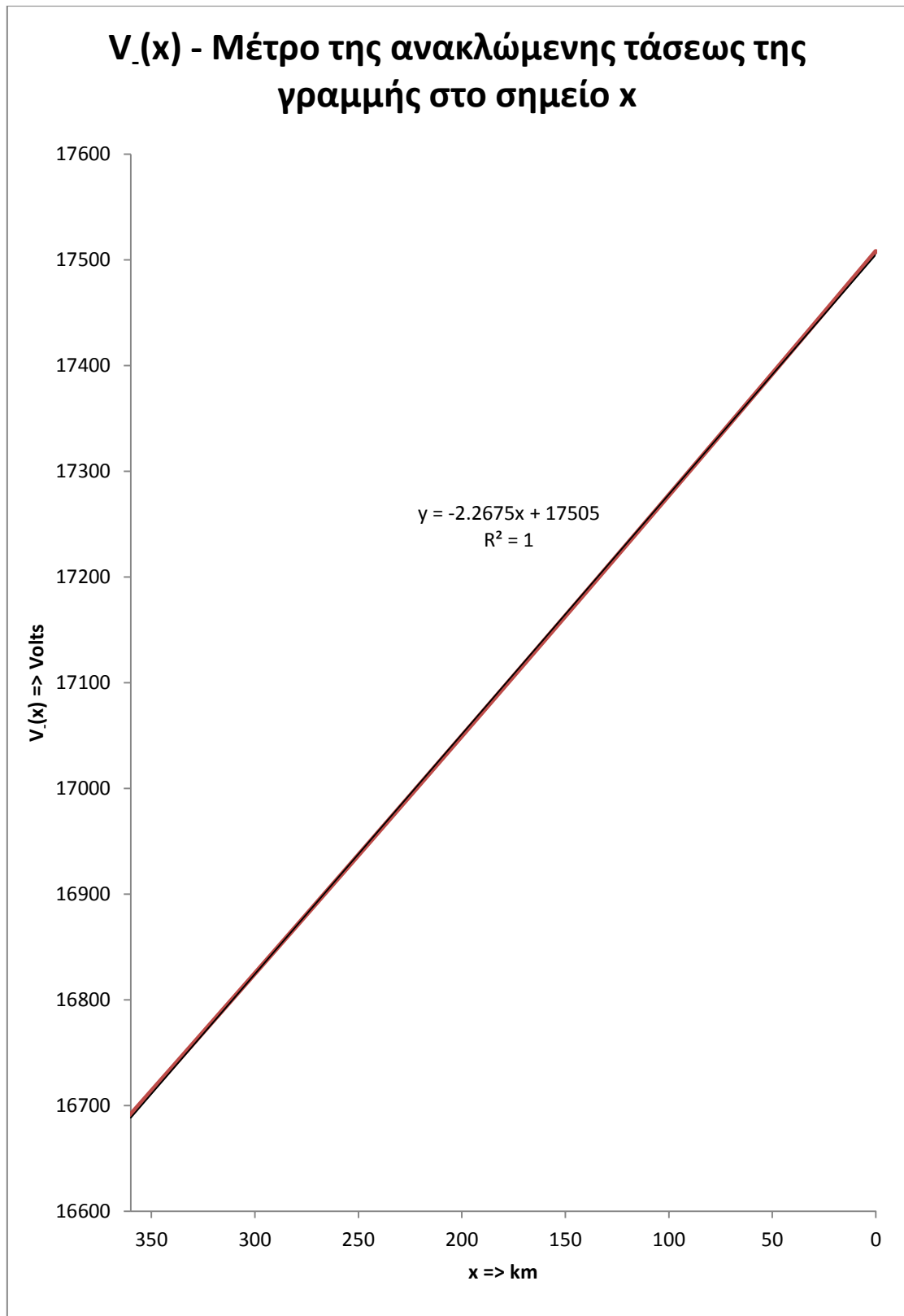
α είναι σταθερό, β είναι σταθερό.

$e^{-\alpha x}$: ο συντελεστής α είναι θετικός αριθμός, άρα το $- \alpha$ είναι αρνητικός αριθμός, άρα το $e^{-\alpha x}$ αυξάνεται όταν το x μειώνεται.

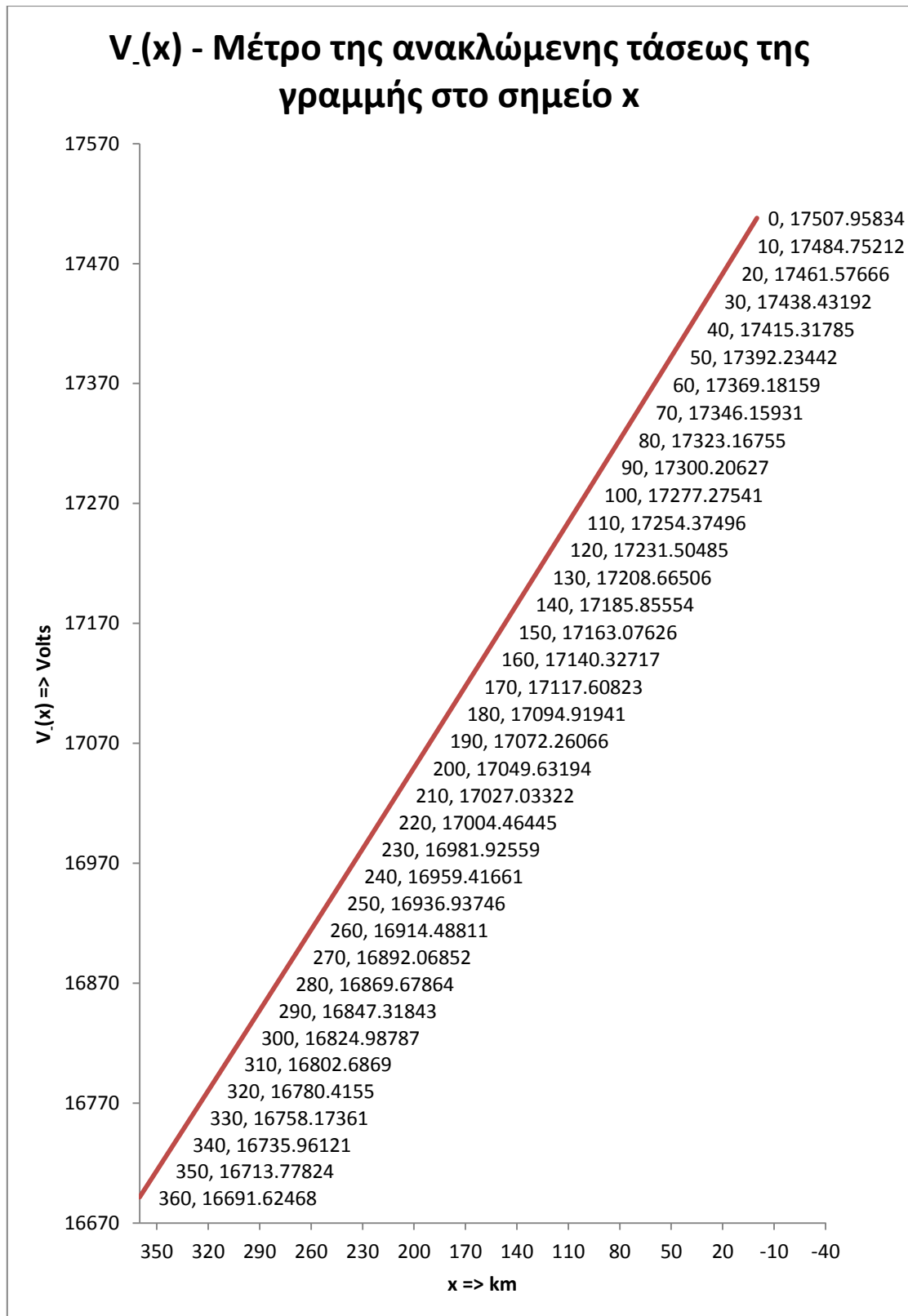
$e^{-j\beta x}$: ο συντελεστής β είναι θετικός αριθμός, άρα το $- \beta$ είναι αρνητικός αριθμός, άρα το $e^{-j\beta x}$ μειώνεται όταν το x μειώνεται.

Το $V_-(x)$ προκύπτει από την εξίσωση (2). Οπότε το μέτρο του $V_-(x)$ αυξάνεται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 5 και 6.

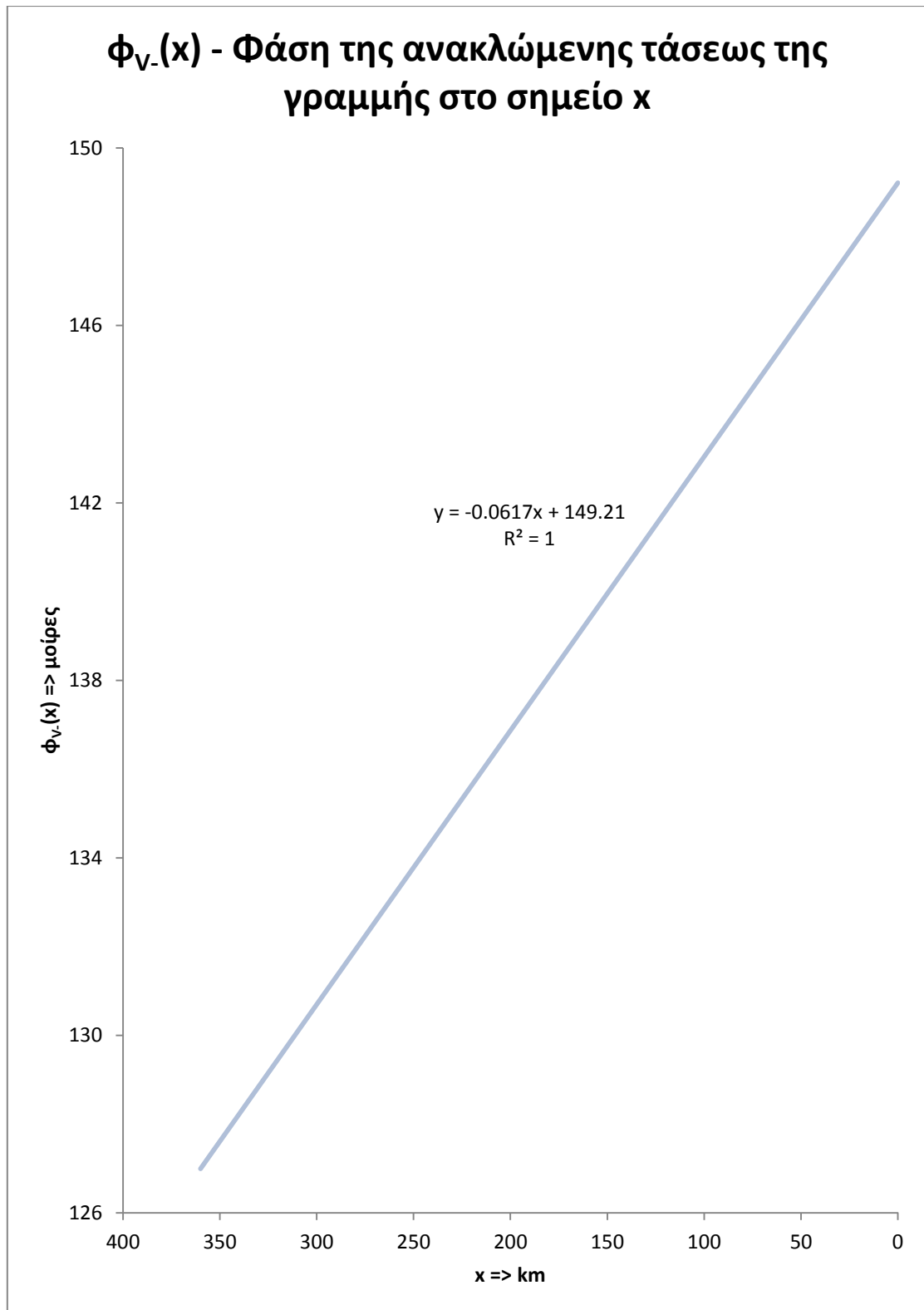
Οπότε και η γωνία του $V_-(x)$ αυξάνεται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 7 και 8.



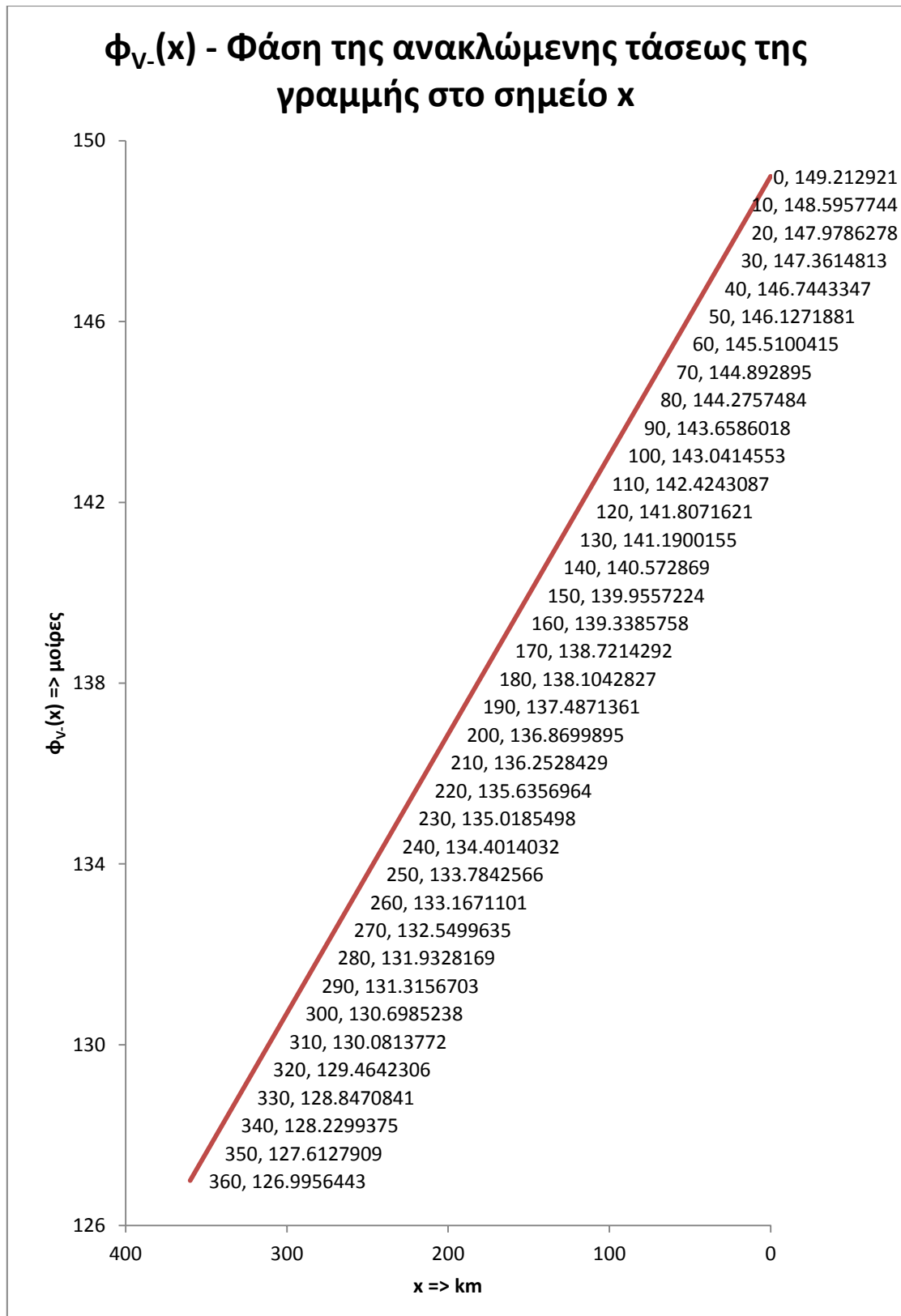
Γραφική παράσταση 5.



Γραφική παράσταση 6.



Γραφική παράσταση 7.

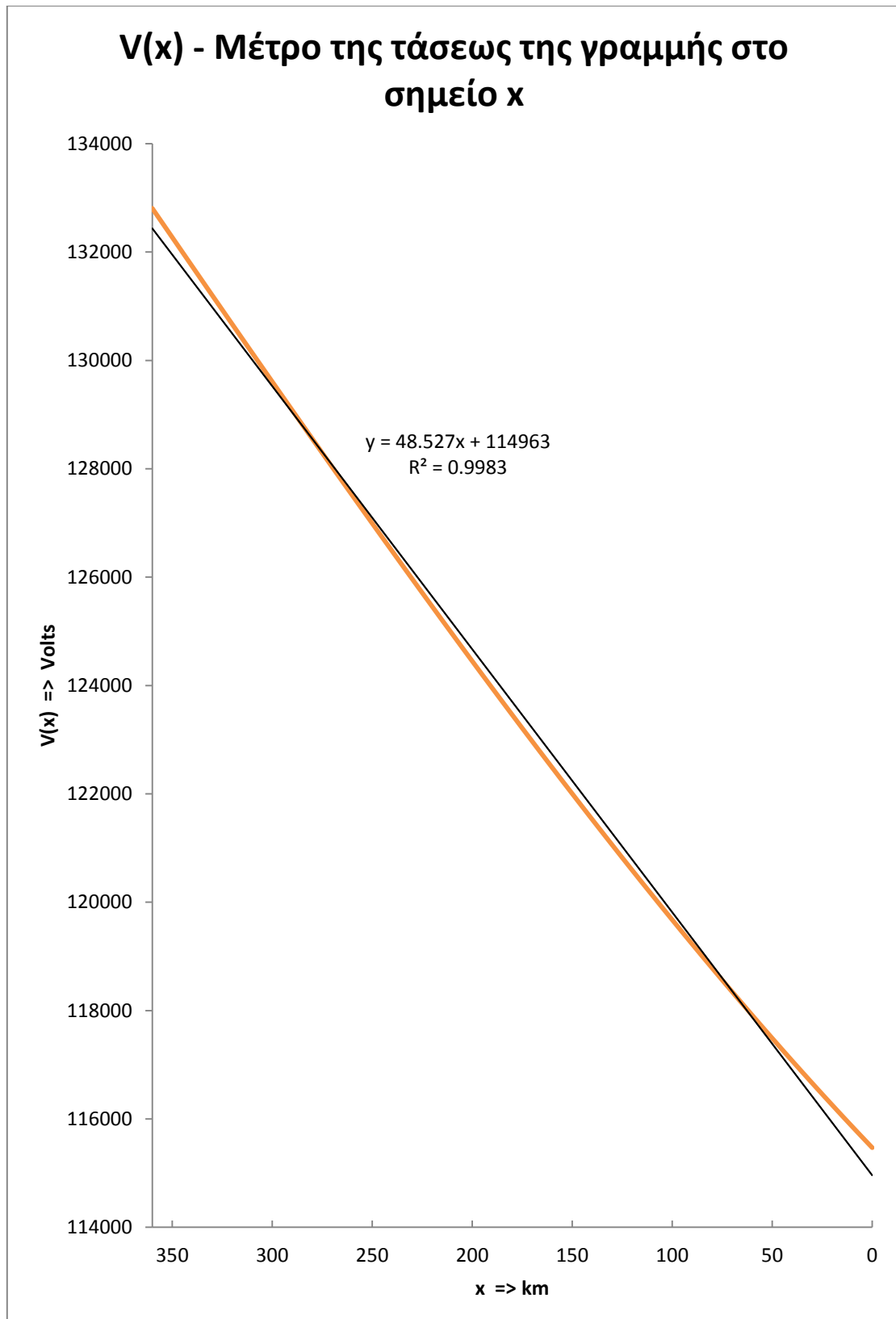


Γραφική παράσταση 8.

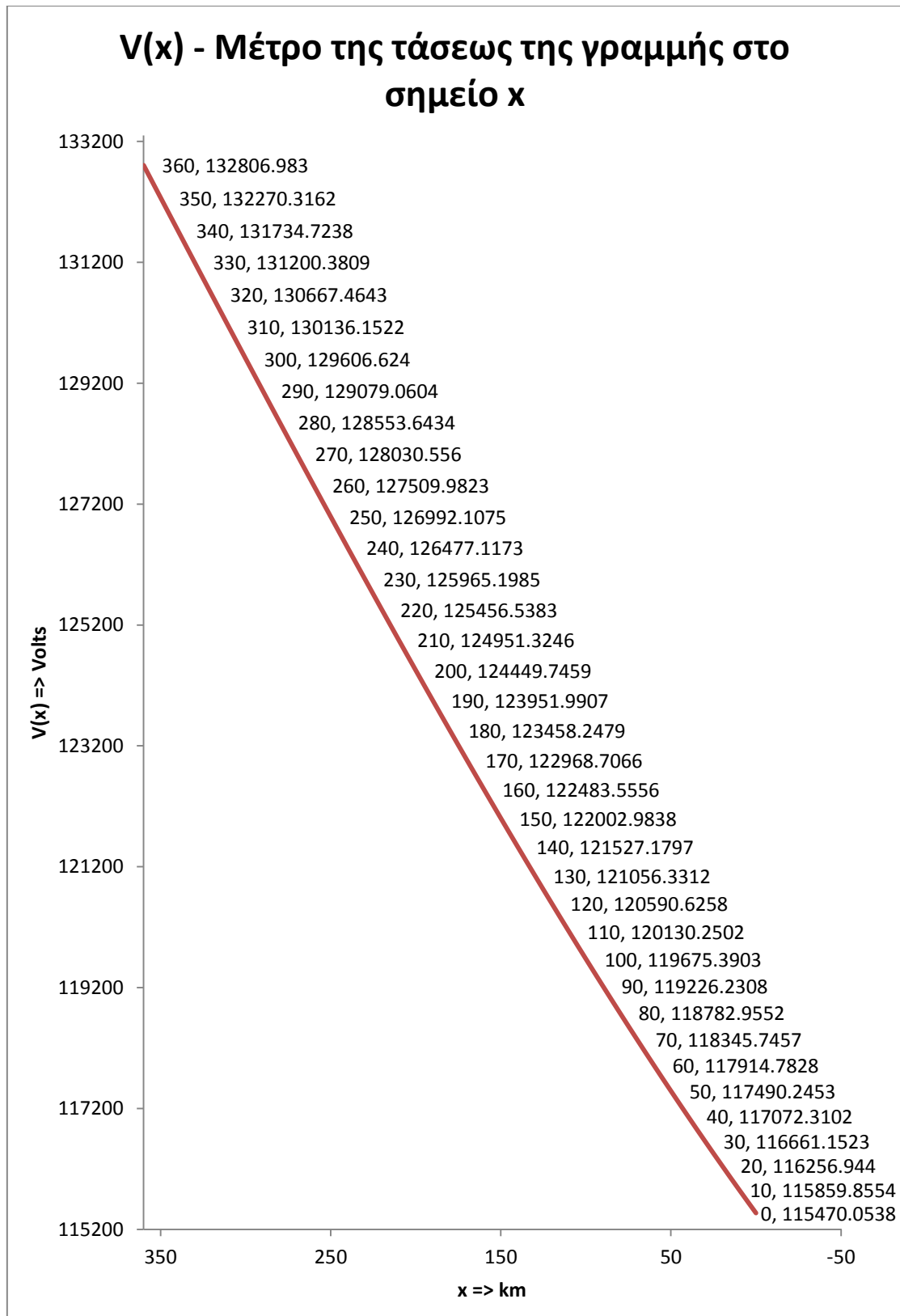
$$V(x) = V_R^+ e^{\gamma x} + V_R^- e^{-\gamma x}$$

$$V(x) = V_+(x) + V_-(x)$$

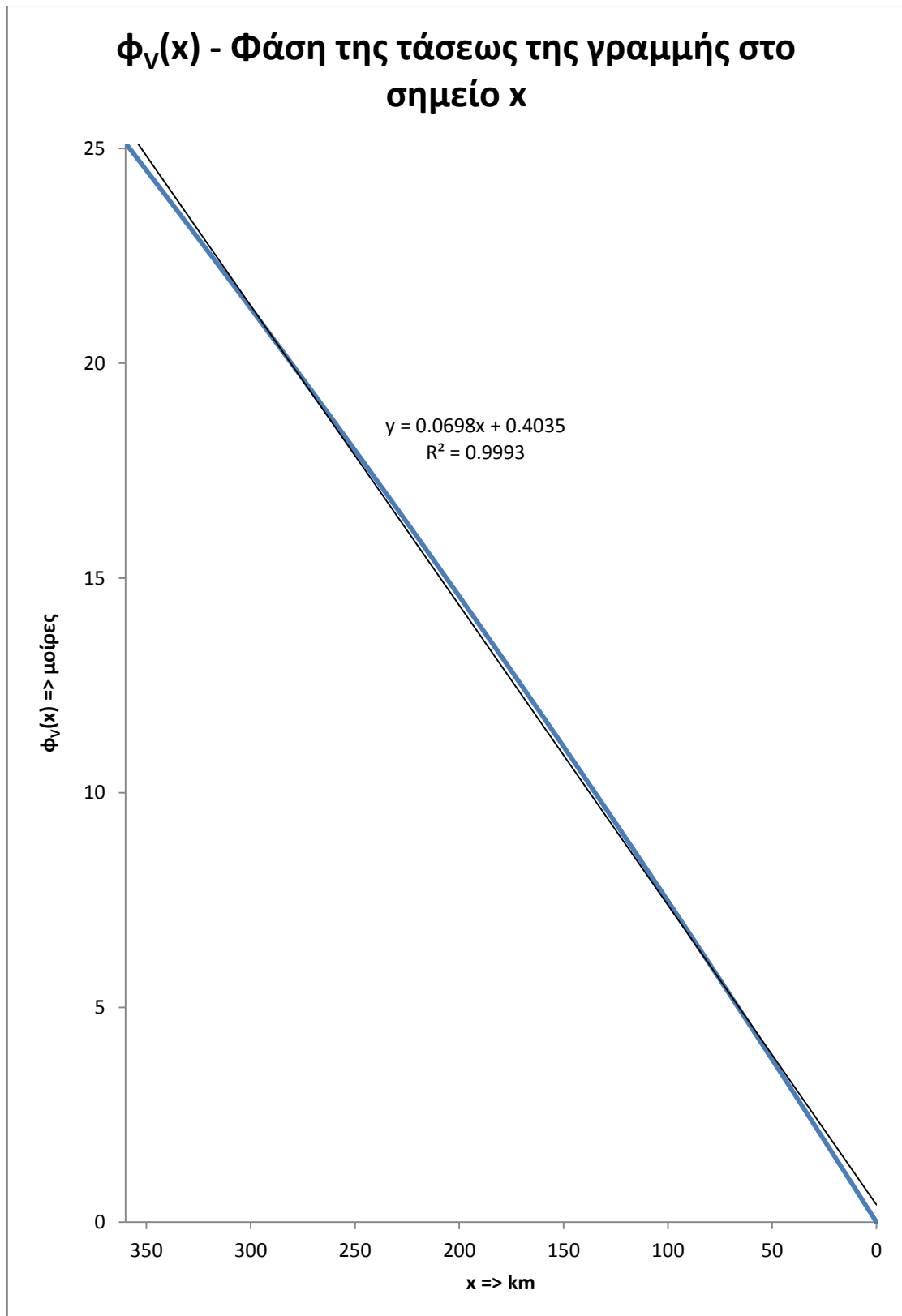
Επειδή το μέτρο του $V_+(x)$ μειώνεται με ποιο γρήγορο ρυθμό από ότι αυξάνεται το $V_-(x)$, τότε το άθροισμά τους, που είναι η $V(x)$, μειώνεται όταν το x μειώνεται. Άρα και το μέτρο και η γωνία του $V(x)$ μειώνονται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 9, 10, 11 και 12.



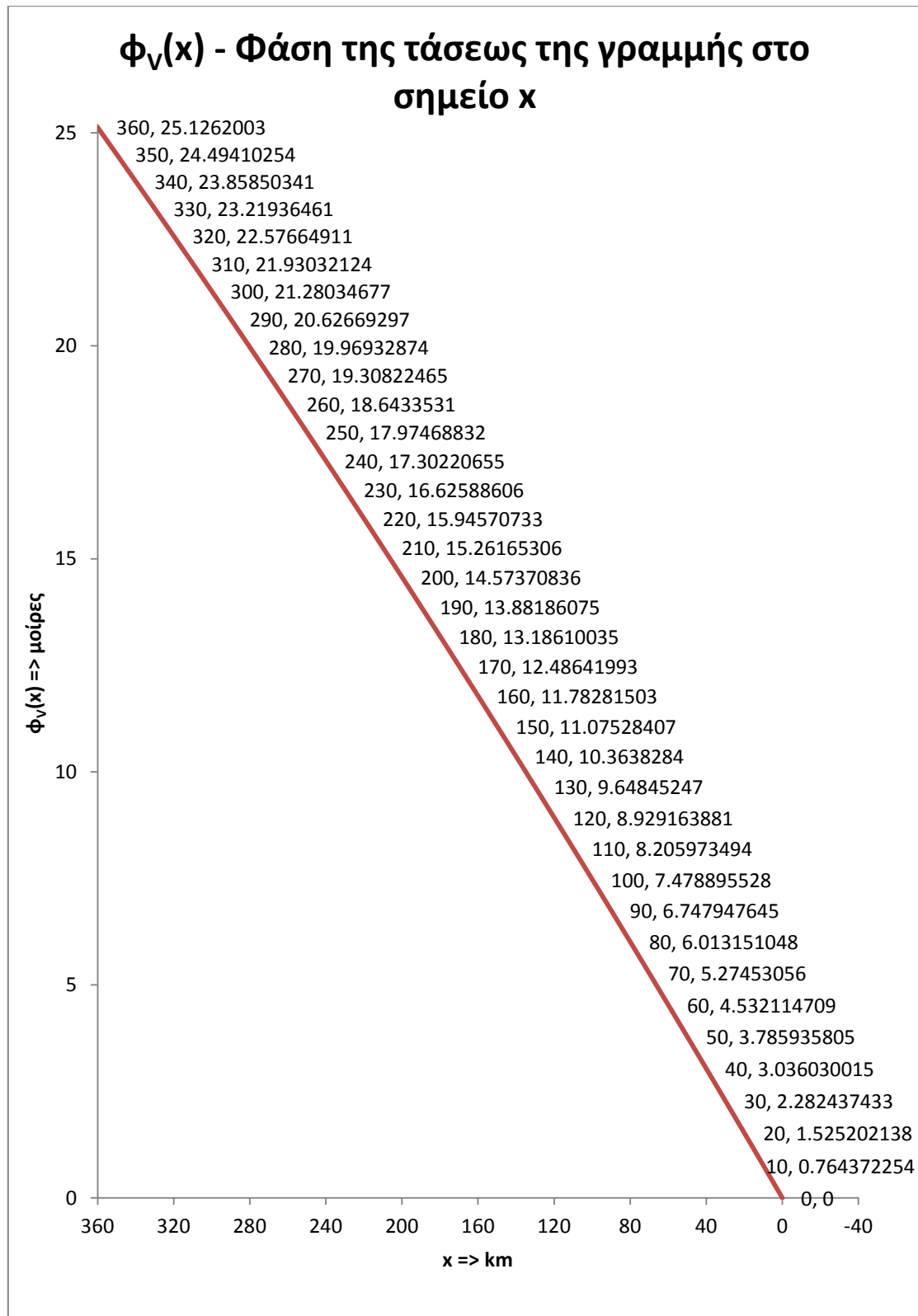
Γραφική παράσταση 9.



Γραφική παράσταση 10.



Γραφική παράσταση 11.

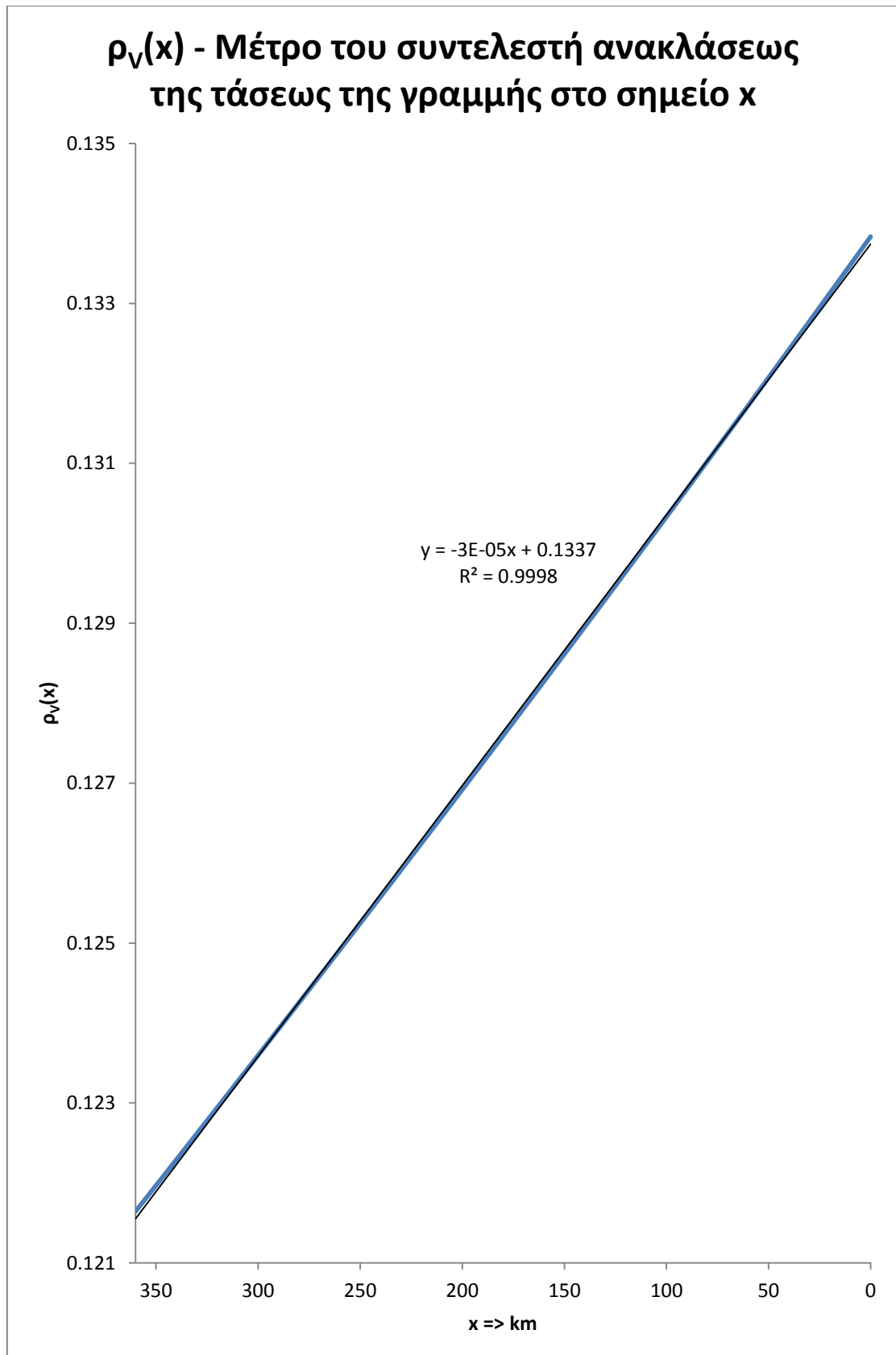


Γραφική παράσταση 12.

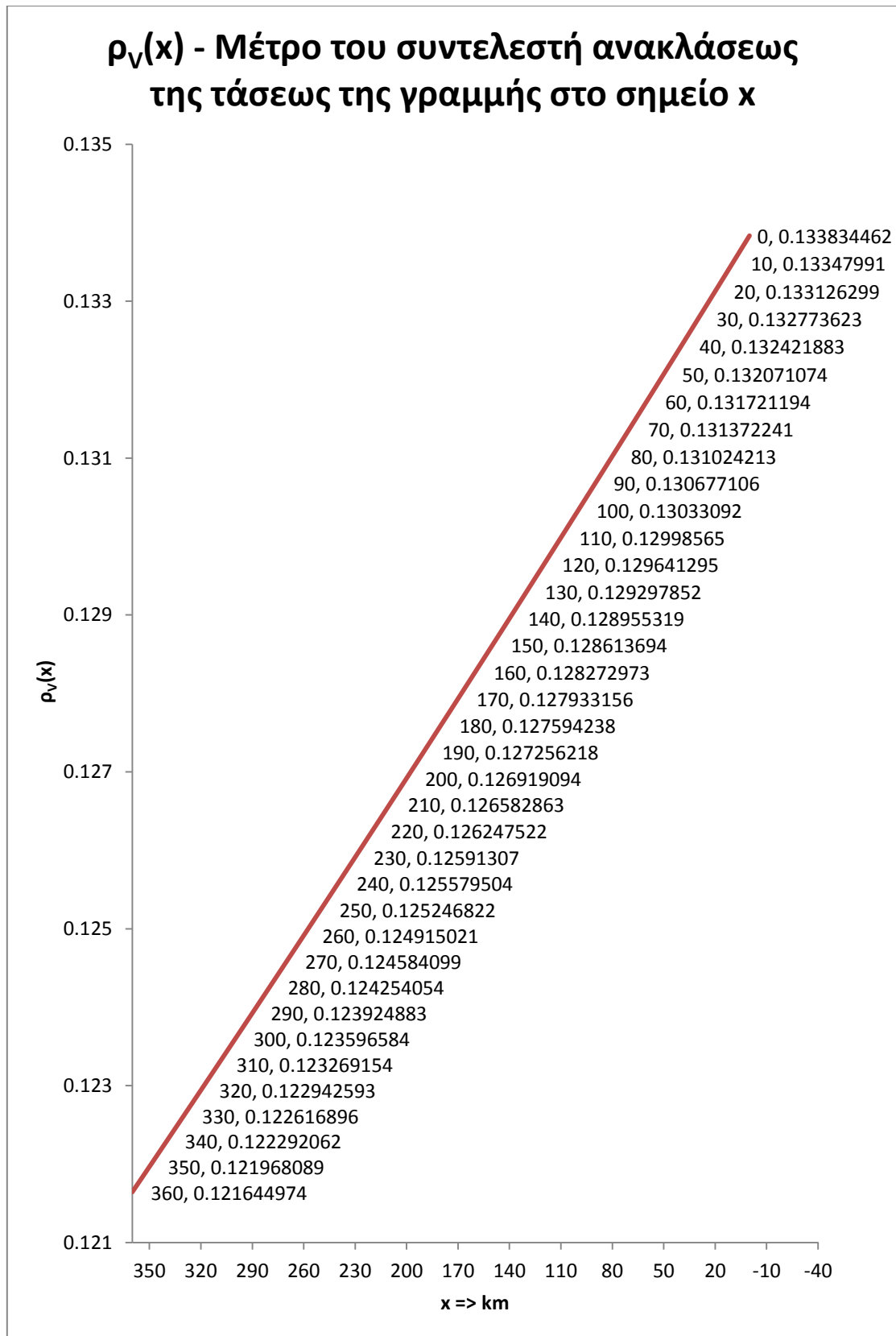
$$\rho_V(x) = \frac{V_-(x)}{V_+(x)} = \frac{V_R^- e^{-ax} e^{-j\beta x}}{V_R^+ e^{ax} e^{j\beta x}}$$

Το μέτρο του $V_-(x)$ αυξάνεται όταν το x μειώνεται. Το μέτρο του $V_+(x)$ μειώνεται όταν το x μειώνεται. Οπότε ο λόγος του, δηλαδή το $\rho_V(x)$, αυξάνεται όταν μειώνεται το x . Βλέπε γραφικές παραστάσεις 13 και 14.

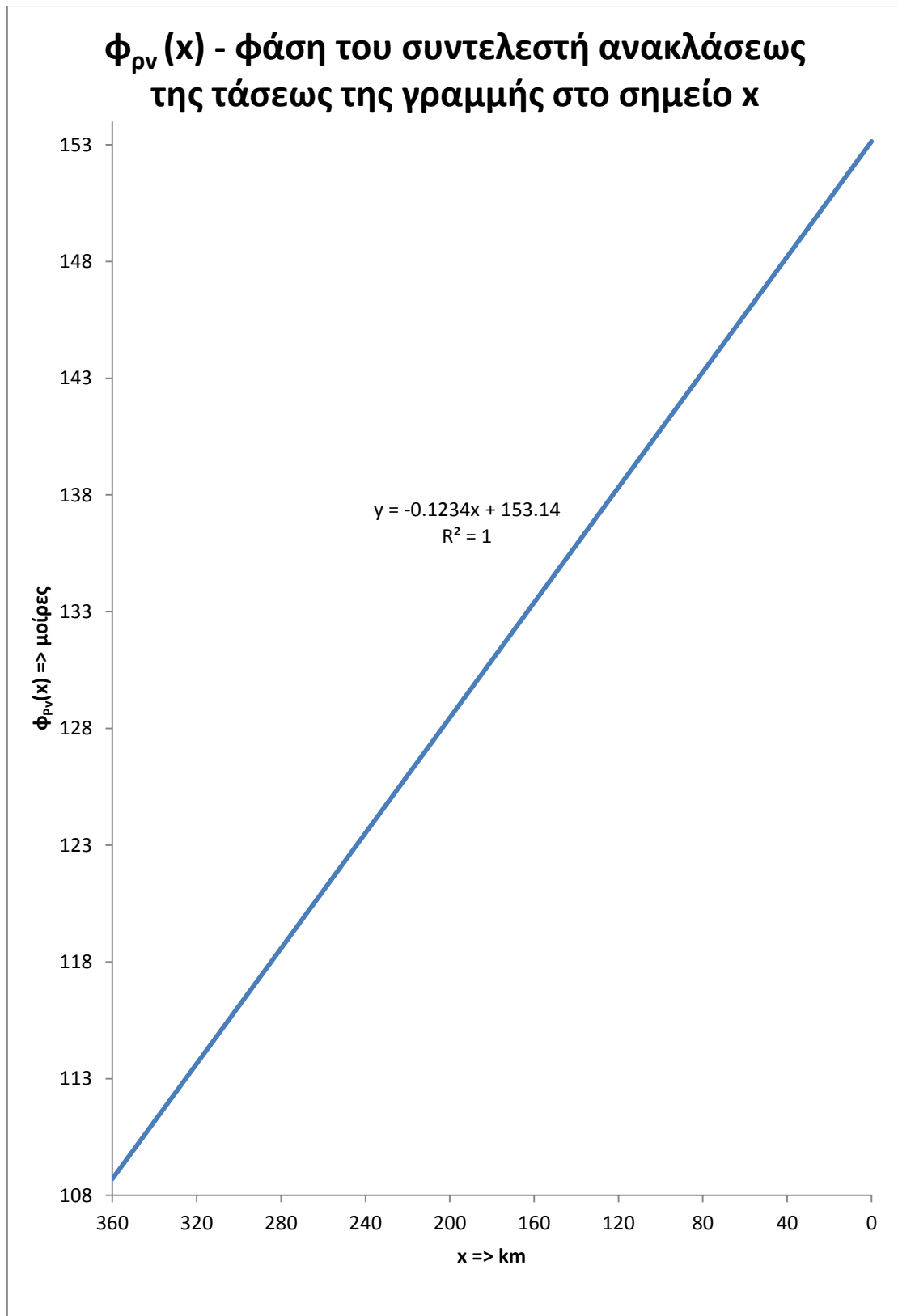
Η γωνία του $V_-(x)$ αυξάνεται όταν το x μειώνεται. Η γωνία του $V_+(x)$ μειώνεται όταν το x μειώνεται. Οπότε η διαφορά τους, δηλαδή το $\varphi_{\rho_V}(x)$ αυξάνεται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 15 και 16.



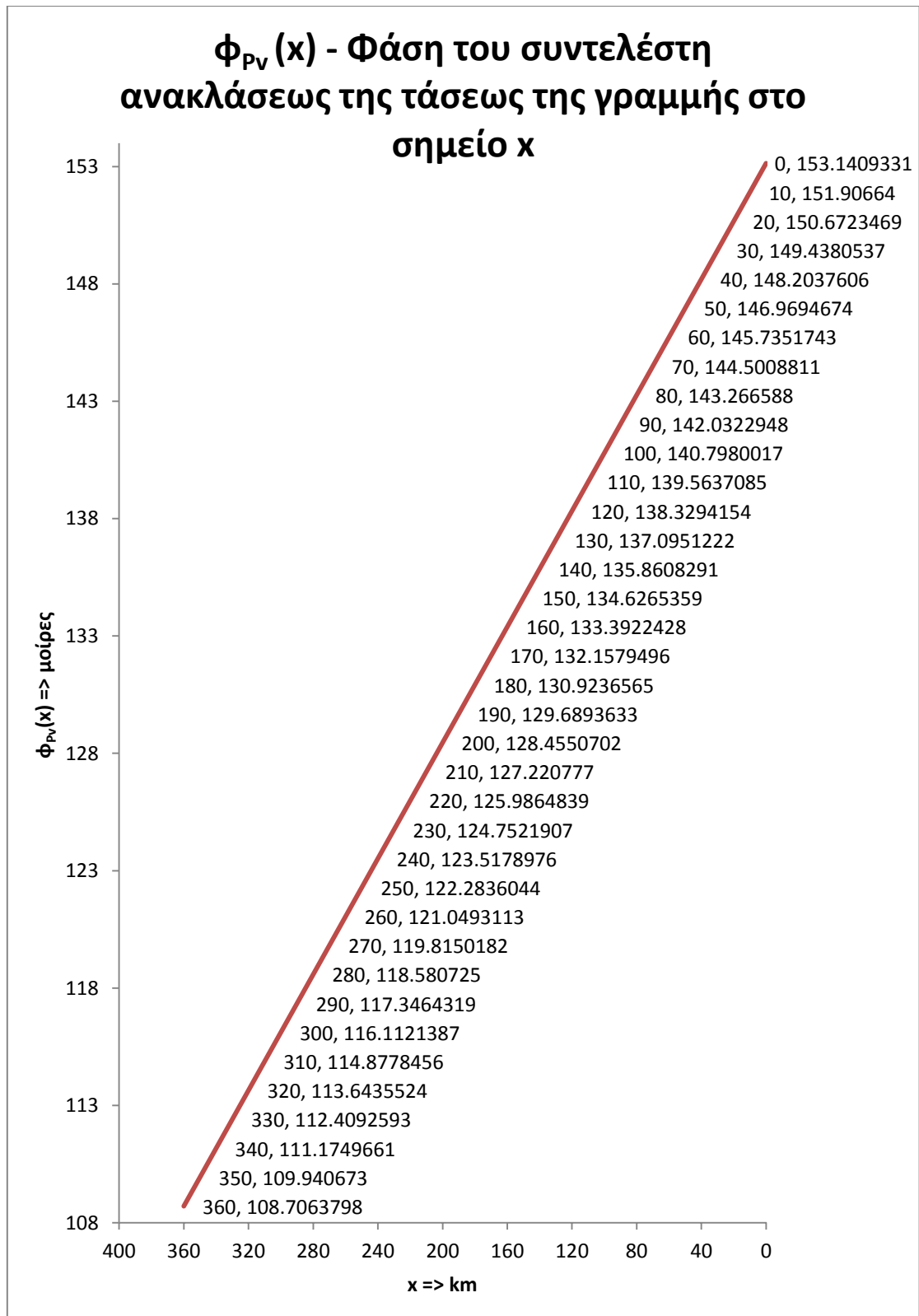
Γραφική παράσταση 13.



Γραφική παράσταση 14



Γραφική παράσταση 15.



Γραφική παράσταση 16.

$$I_+(x) = I_R^+ e^{\alpha x} e^{j\beta x} = e^{\gamma x} \quad \gamma = \alpha + j\beta \quad x = 0 \text{ έως } 360$$

Όπου:

$$I_R^+ = \frac{V_R/Z_C + I_R}{2}$$

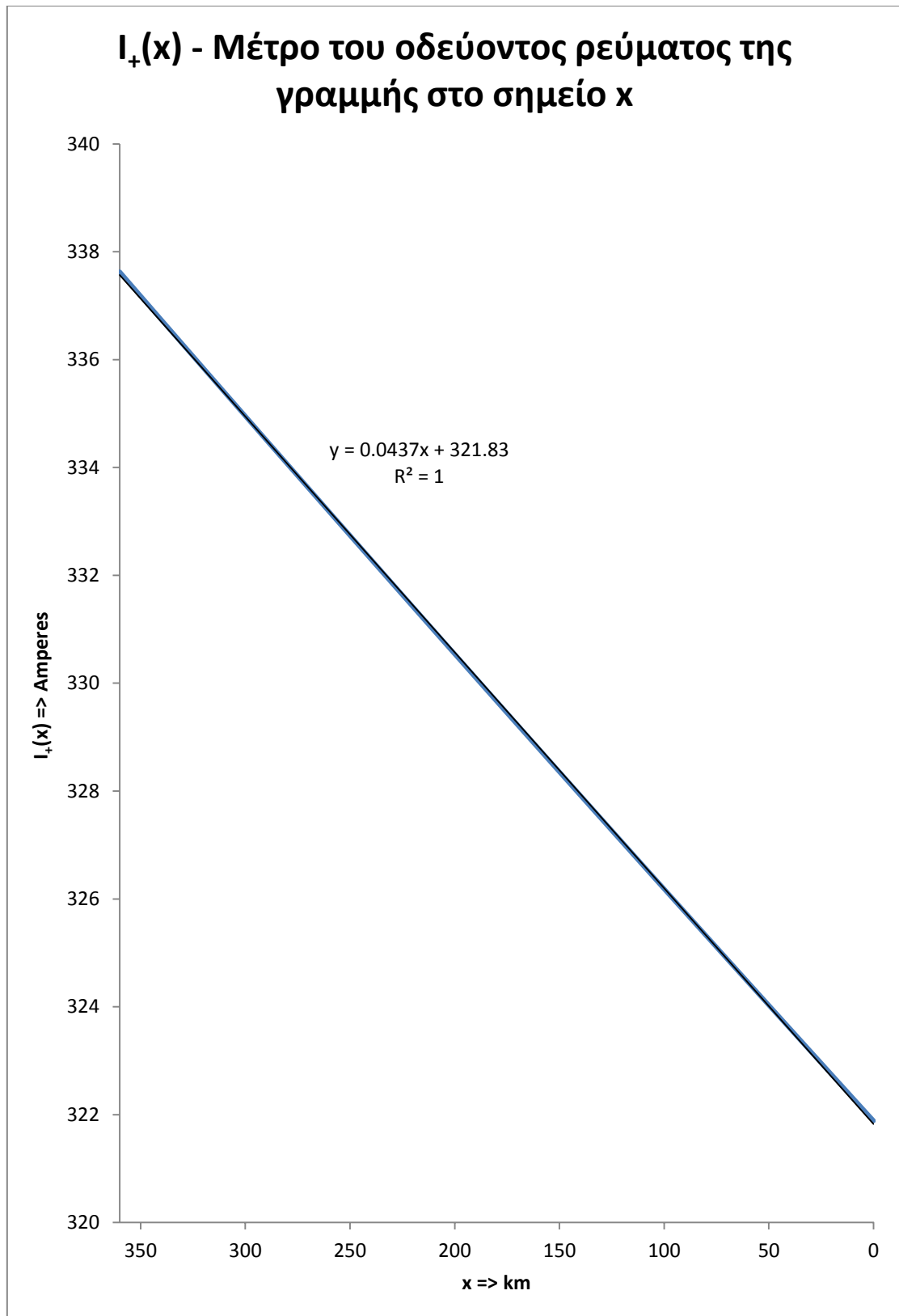
Το I_R^+ είναι μιγαδικός αριθμός και έχει σταθερό μέτρο με σταθερή γωνία

Διότι V_R, Z_C, I_R είναι σταθερά.

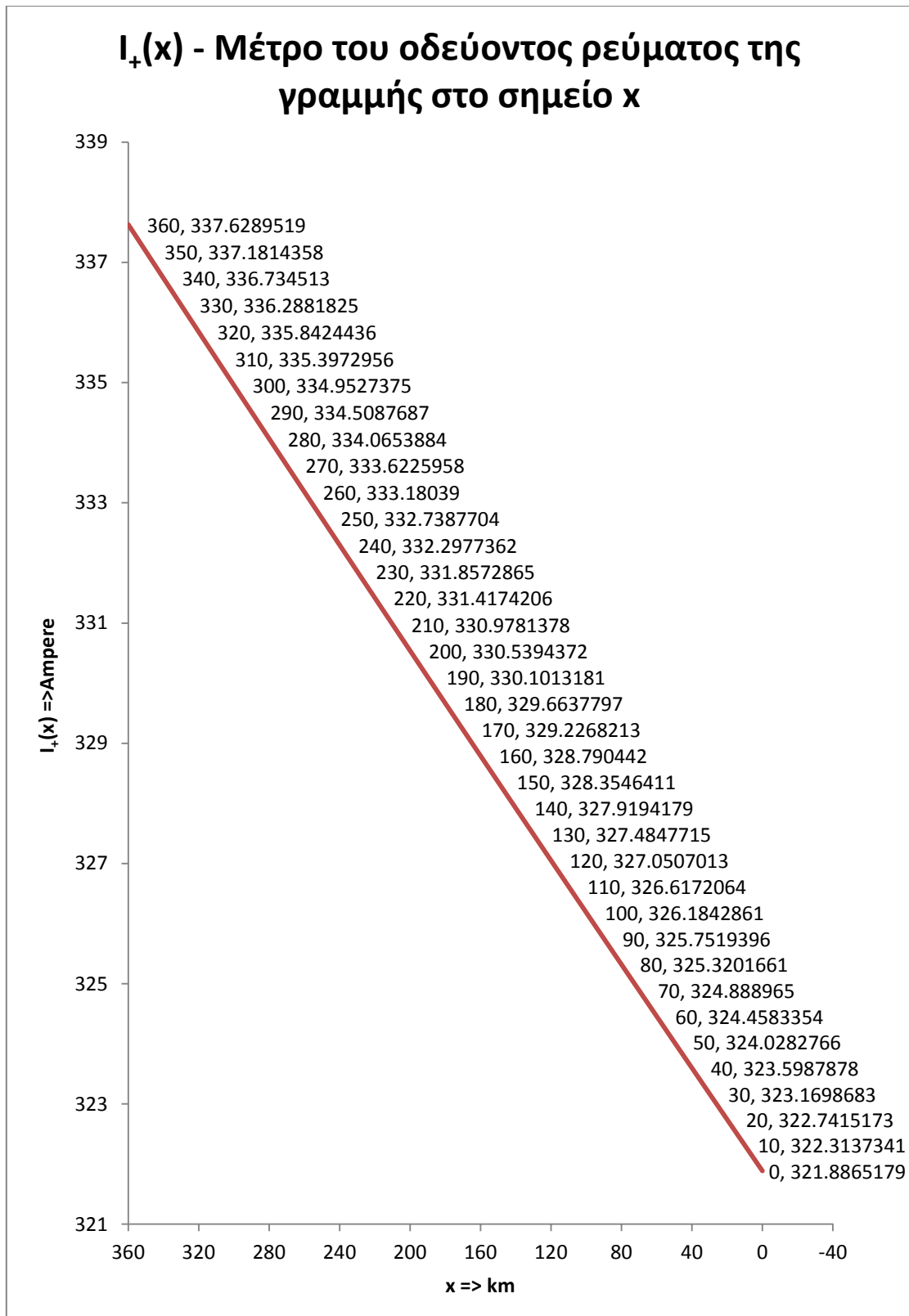
α είναι σταθερό β είναι σταθερό

$e^{\alpha x}$: ο συντελεστής α είναι θετικός αριθμός, άρα όταν το x μειώνεται το $e^{\alpha x}$ μειώνεται επίσης. Οπότε επειδή το μέτρο του I_R^+ είναι σταθερό, όταν πολλαπλασιάζεται με $e^{\alpha x}$ που μειώνεται, έχει ως αποτέλεσμα ότι το μέτρο του $I_+(x)$ μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 17 και 18.

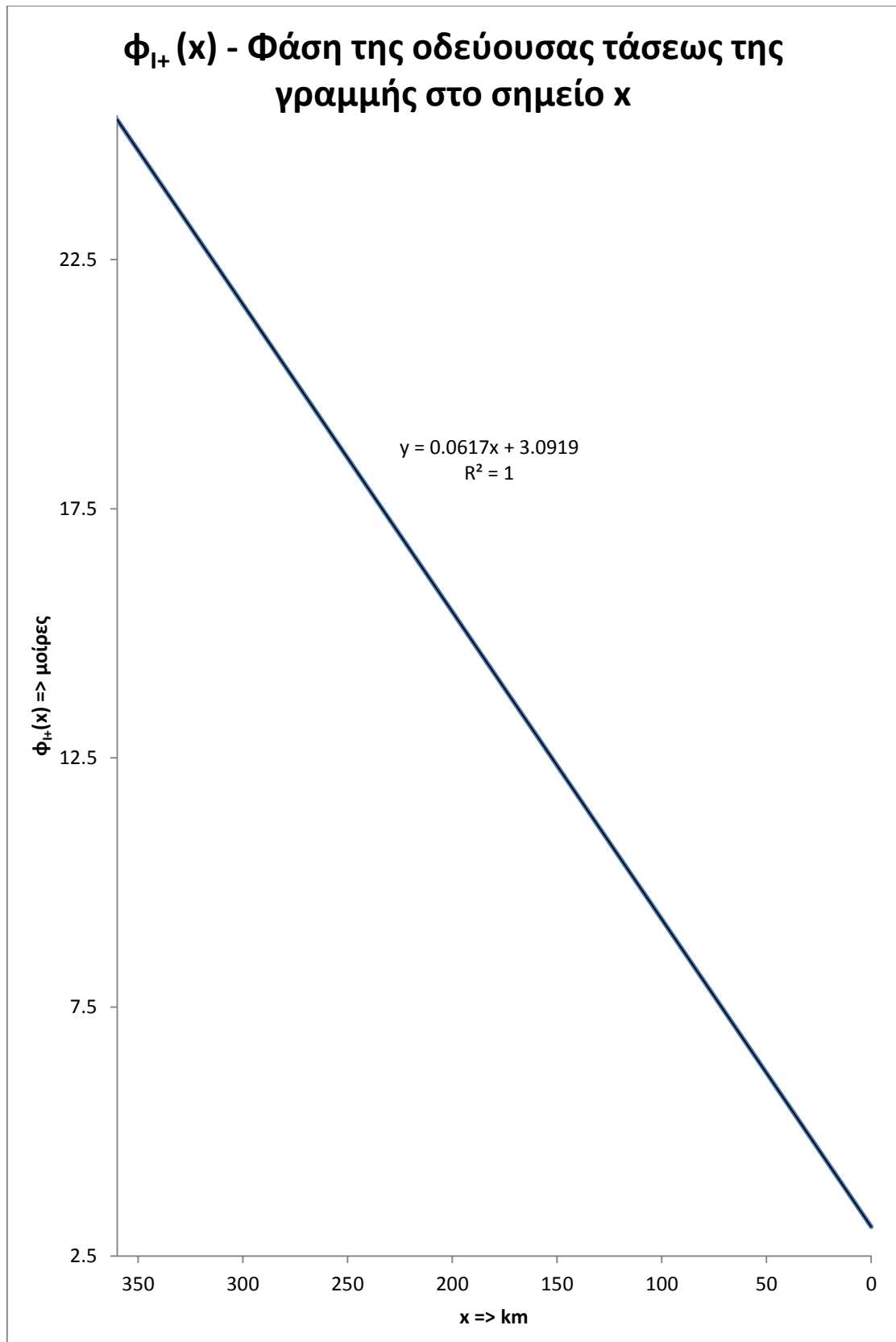
$e^{j\beta x}$: ο συντελεστής β είναι θετικός αριθμός, άρα όταν το x μειώνεται το $e^{j\beta x}$ μειώνεται επίσης. Οπότε επειδή η γωνία του I_R^+ είναι σταθερή, όταν πολλαπλασιάζεται με $e^{j\beta x}$ που μειώνεται, έχει ως αποτέλεσμα ότι η γωνία του $I_+(x)$ μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 19 και 20.



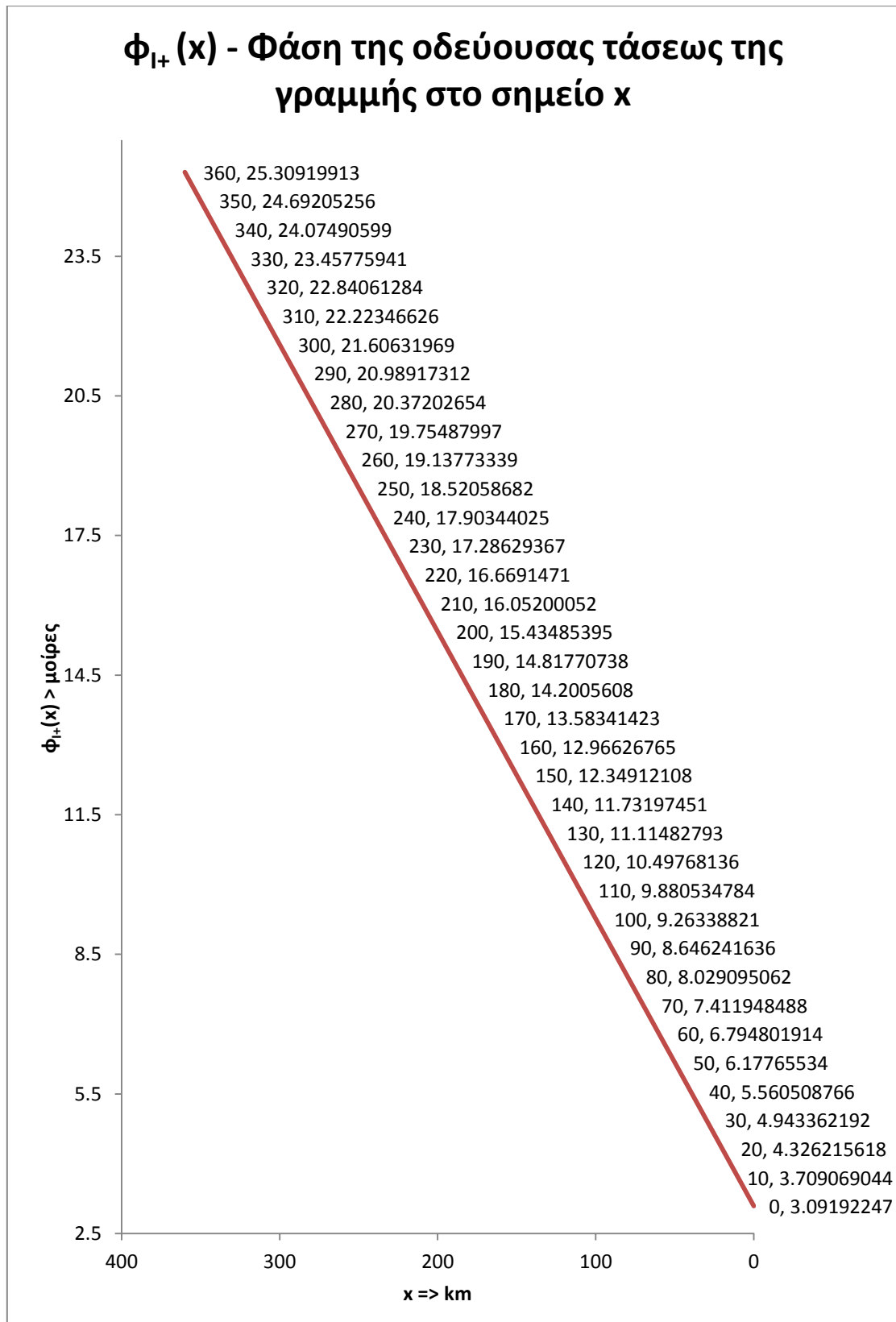
Γραφική παράσταση 17.



Γραφική παράσταση 18.



Γραφική παράσταση 19.



Γραφική παράσταση 20.

$$I_-(x) = I_R^- e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} = e^{-\gamma x} \quad \gamma = \alpha + j\beta \quad x = 0 \text{ έως } 360$$

Όπου:

$$I_R^- = -\frac{V_R/Z_C - I_R}{2}$$

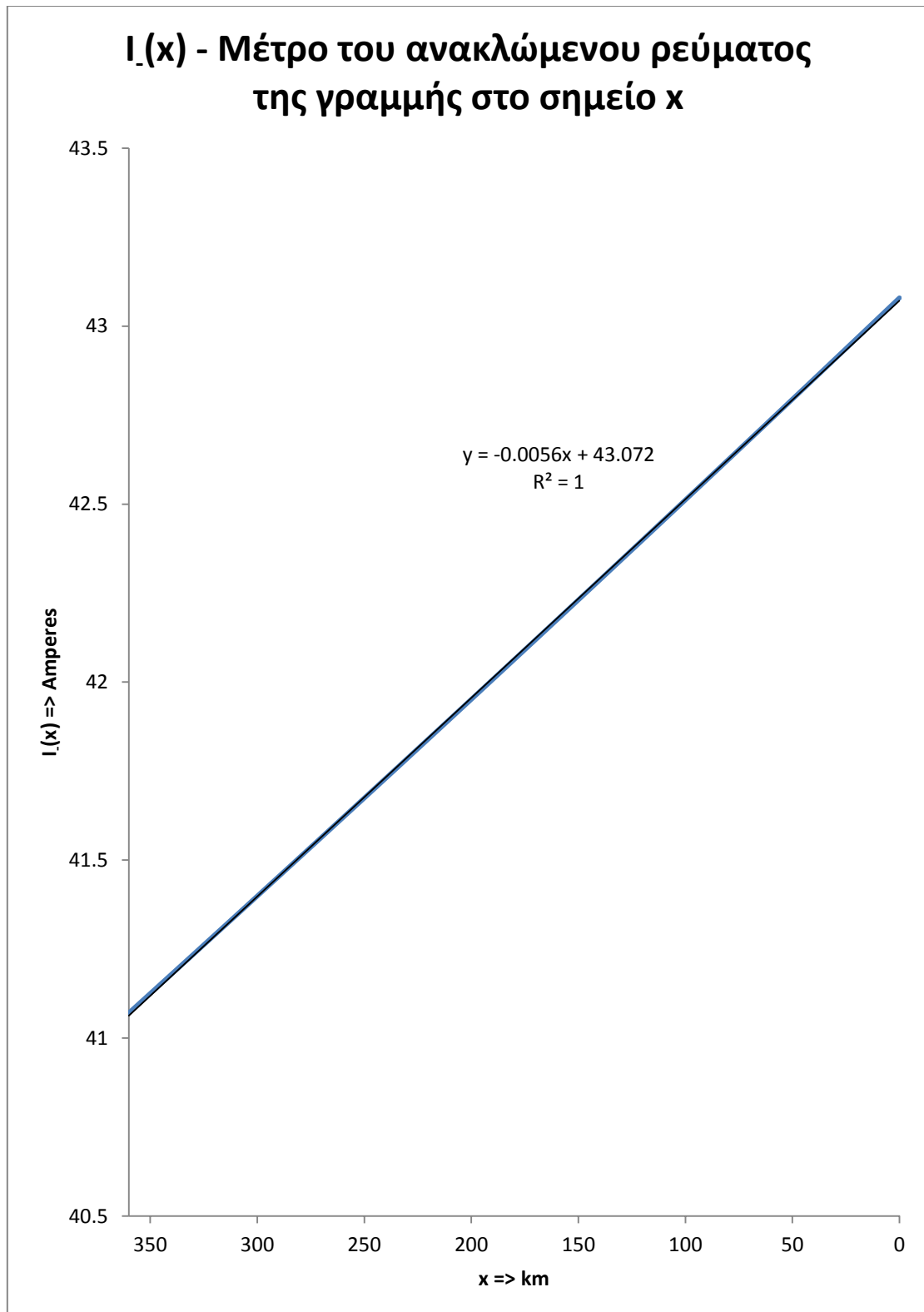
Το I_R^- είναι μιγαδικός αριθμός και έχει σταθερό μέτρο με σταθερή γωνία

Διότι V_R, Z_C, I_R είναι σταθερά.

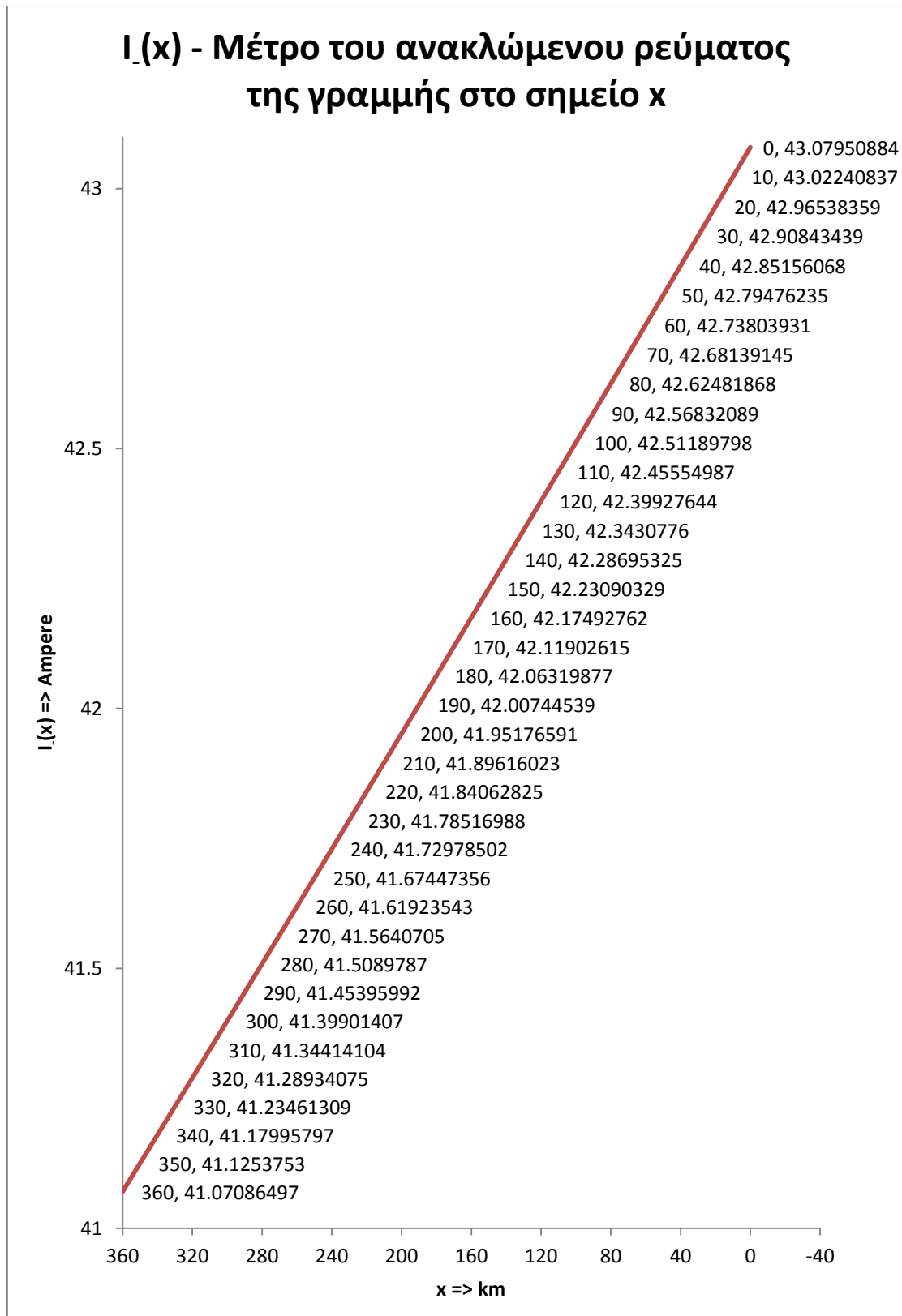
α είναι σταθερός και θετικός β είναι σταθερός και θετικός

$e^{-\alpha x}$. ο συντελεστής $-\alpha$ είναι αρνητικός αριθμός, άρα το $e^{-\alpha x}$ αυξάνεται όταν το x μειώνεται. Οπότε επειδή είναι σταθερό το μέτρο του I_R^+ το μέτρο του $I_-(x)$ αυξάνεται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 21 και 22.

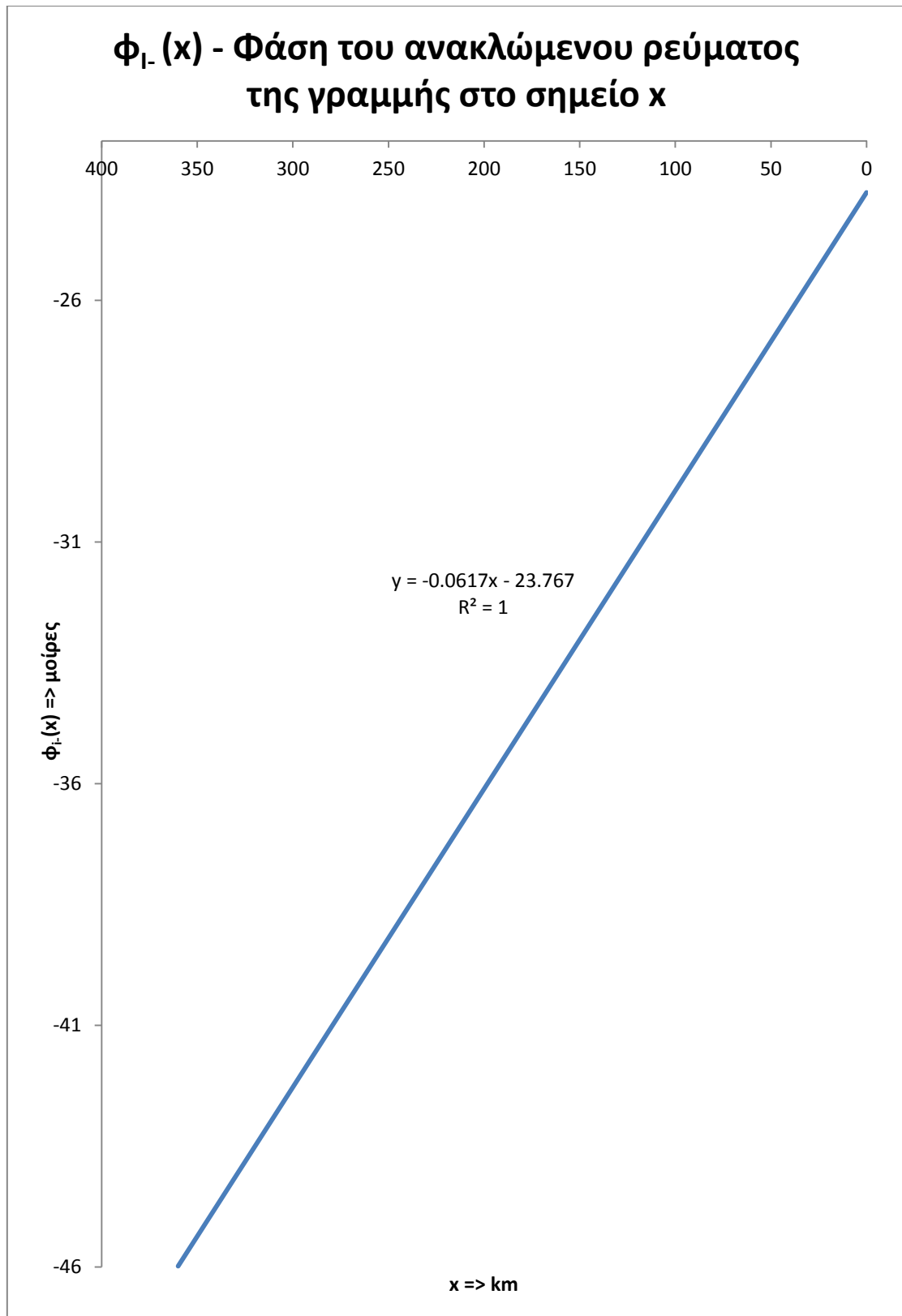
Ομοίως και για την γωνία του I_R^- επειδή είναι σταθερή και στο $e^{j\beta x}$ ο συντελεστής $-\beta$ είναι αρνητικός η γωνία του $I_-(x)$ αυξάνεται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 23 και 24.



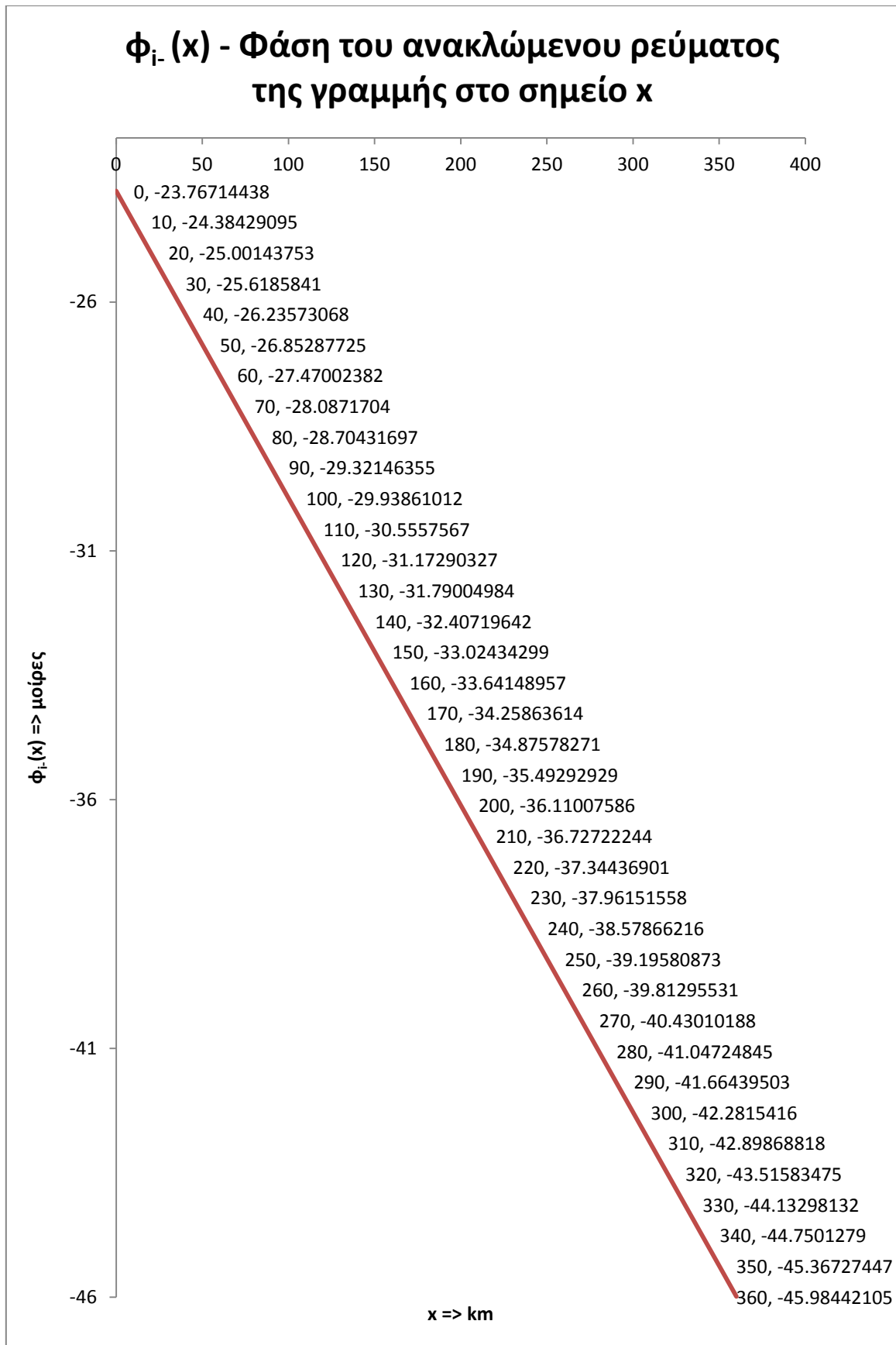
Γραφική παράσταση 21.



Γραφική παράσταση 22.



Γραφική παράσταση 23.

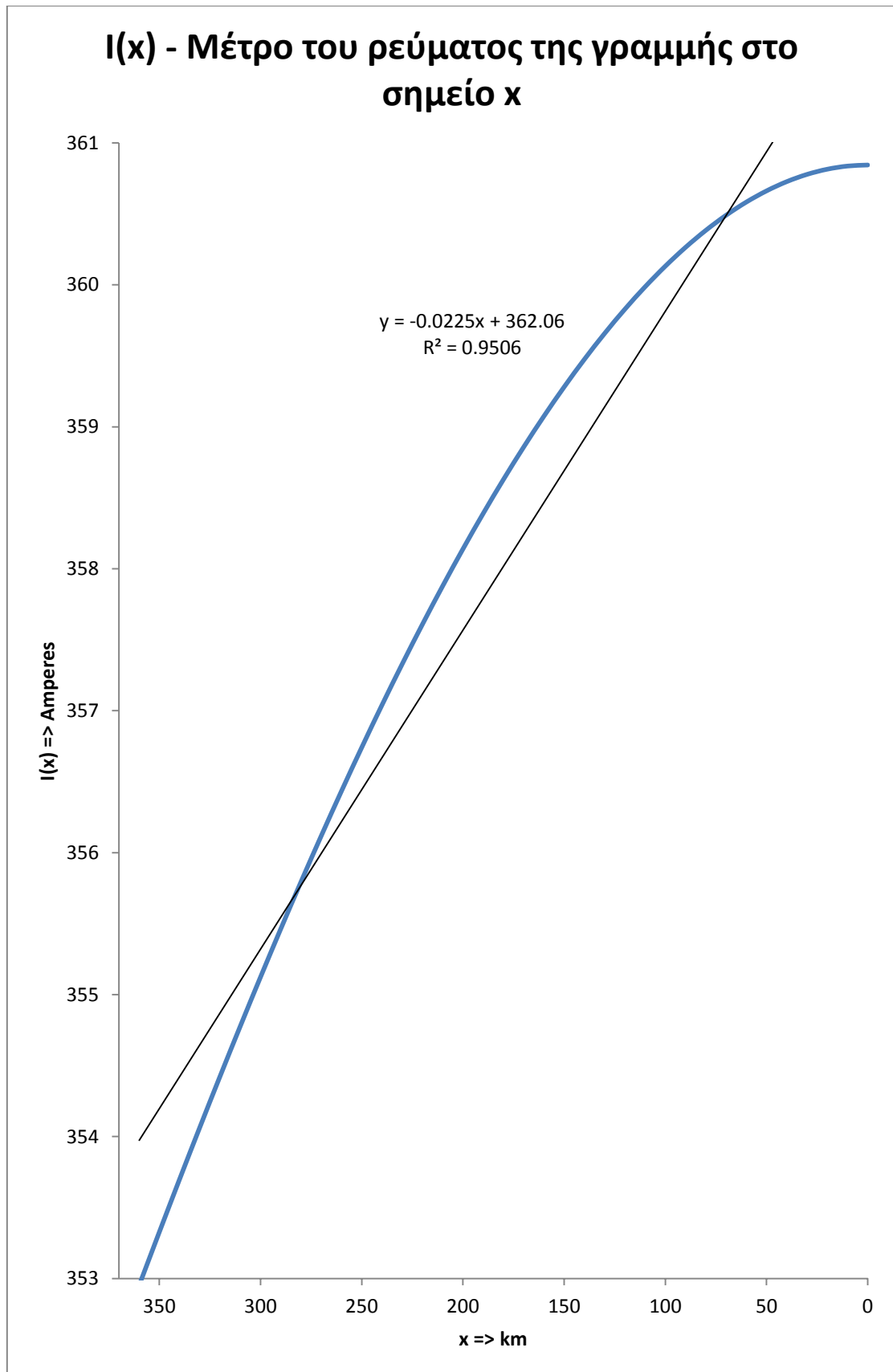


Γραφική παράσταση 24.

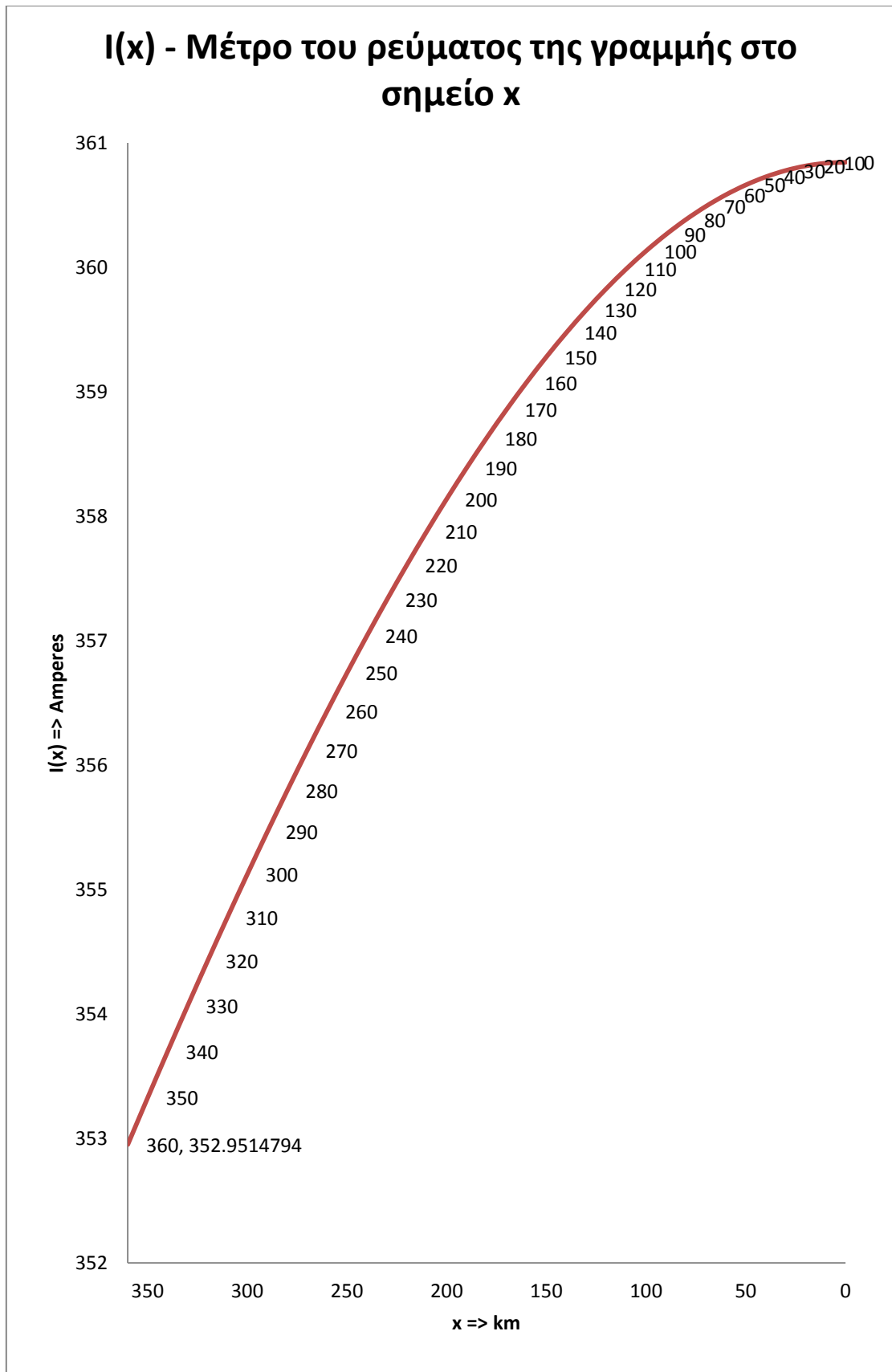
Το μέτρο του:

$$I(x) = I_+(x) + I_-(x)$$

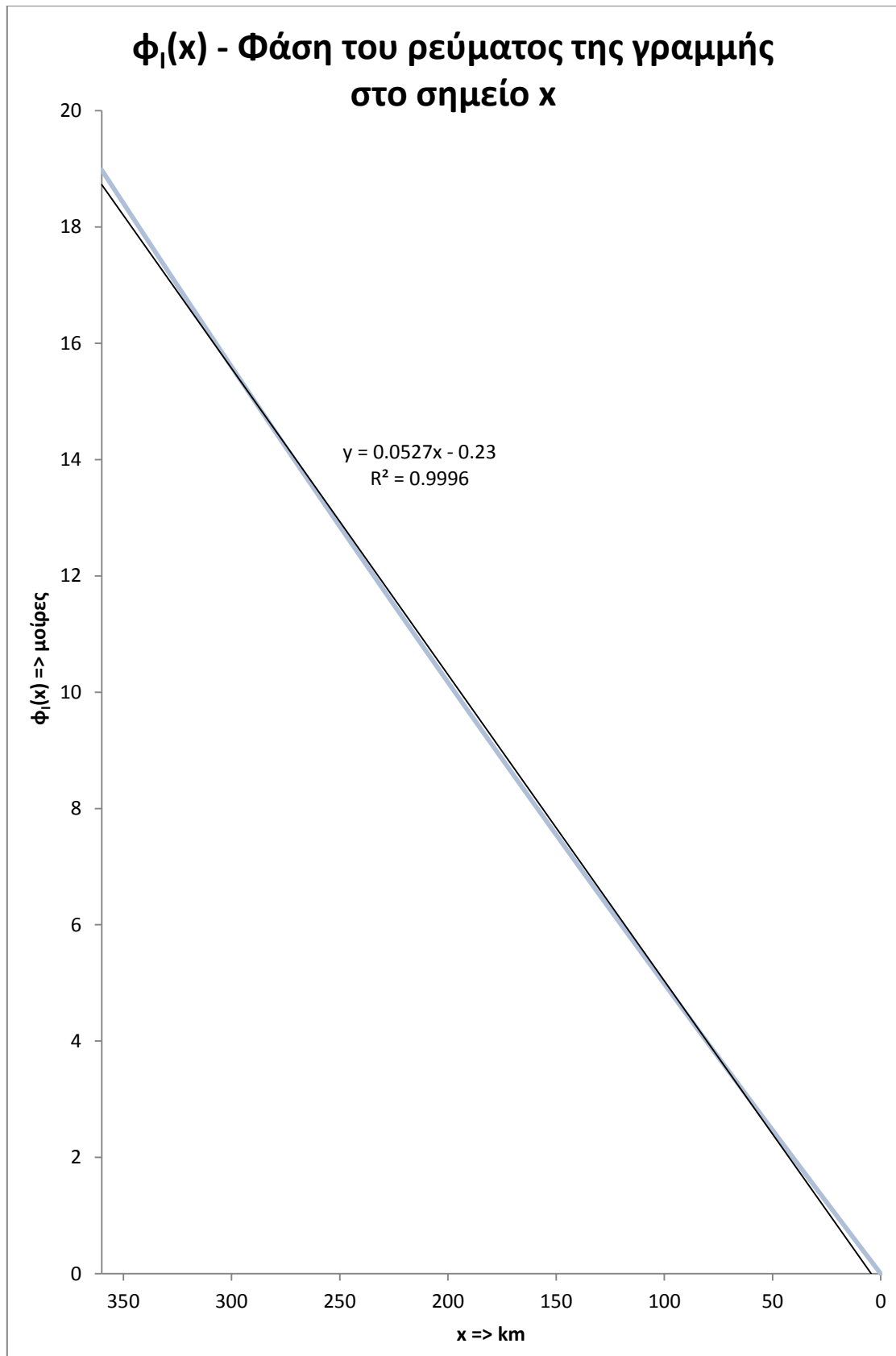
Επειδή το μέτρο του $I_+(x)$ μειώνεται με πιο γρήγορο ρυθμό από ότι αυξάνεται το μέτρο του $I_-(x)$ τότε το άθροισμα τους, που είναι η $I(x)$ μειώνεται όταν το x μειώνεται. Άρα και το μέτρο και η γωνία του $I(x)$ μειώνονται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 25, 26, 27 και 28.



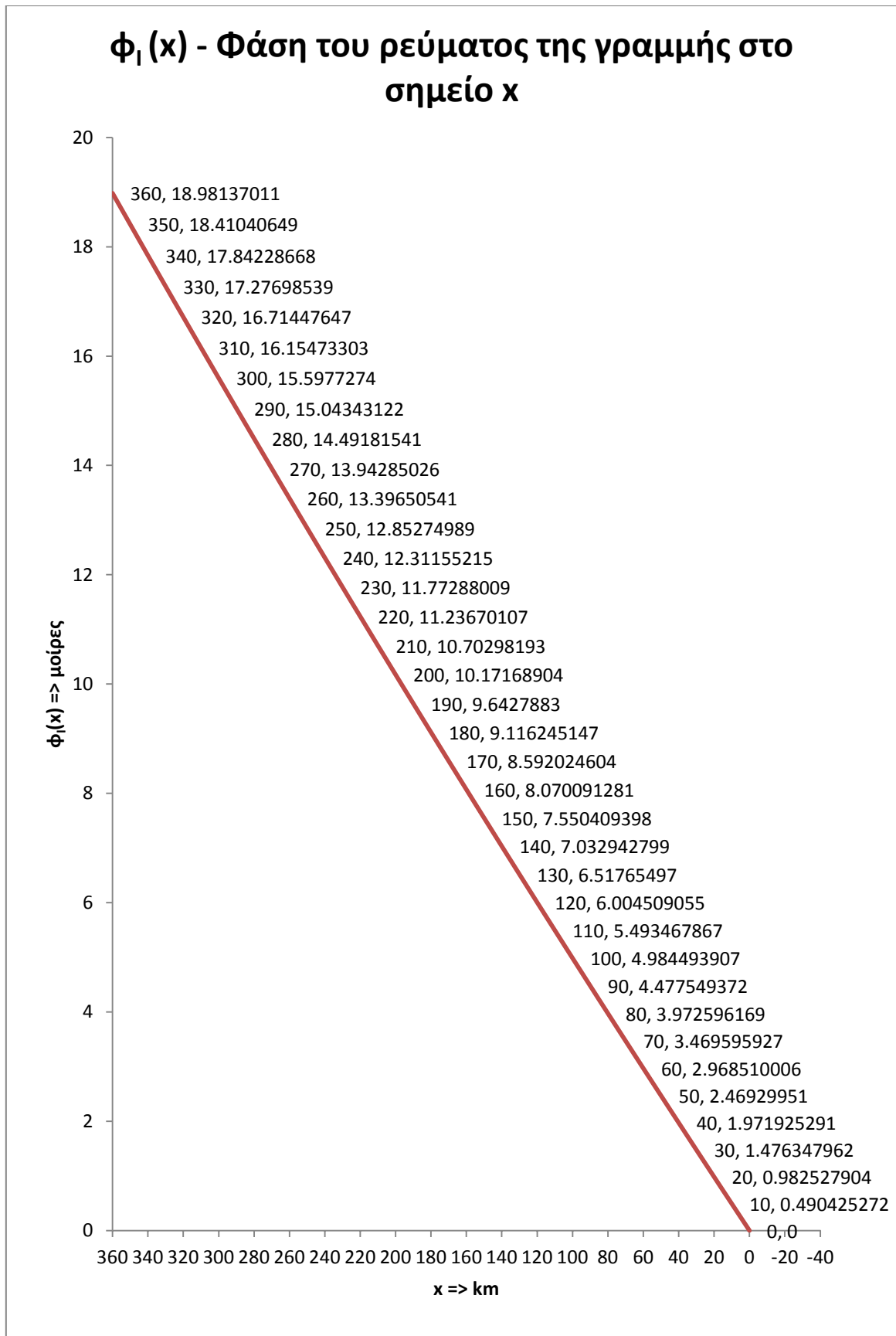
Γραφική παράσταση 25.



Γραφική παράσταση 26.



Γραφική παράσταση 27.



Γραφική παράσταση 28

$$\rho_I(x) = \frac{I_-(x)}{I_+(x)} = \frac{I_R^- e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}}{I_R^+ e^{\alpha x} e^{j\beta x}}$$

Το μέτρο του $I_-(x)$: αυξάνεται όταν το x μειώνεται.

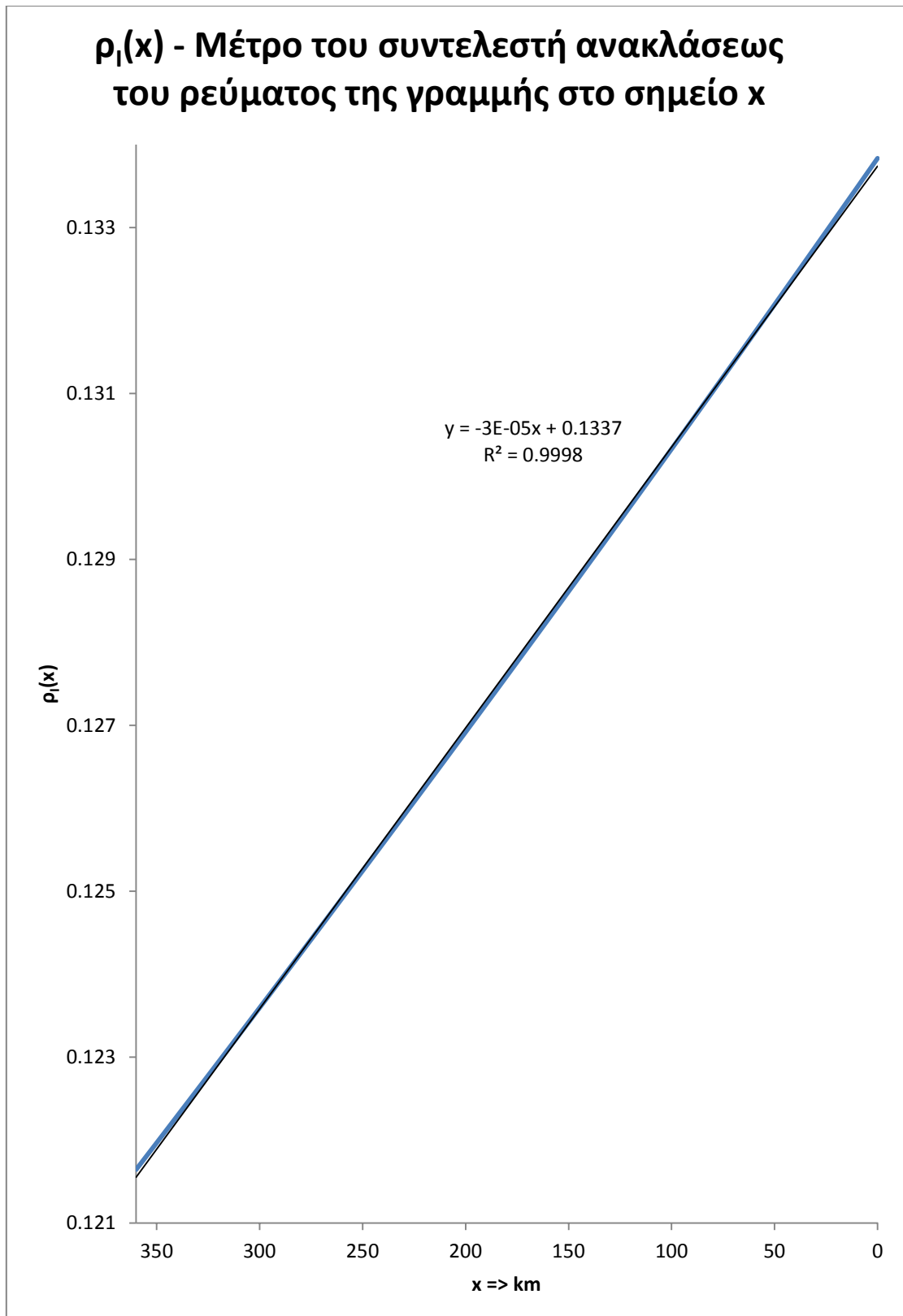
Το μέτρο του $I_+(x)$: μειώνεται όταν το x μειώνεται.

Άρα ο λόγος τους, δηλαδή το μέτρο του $\rho_I(x)$ αυξάνεται όταν μειώνεται το x . Βλέπε γραφικές παραστάσεις 29 και 30.

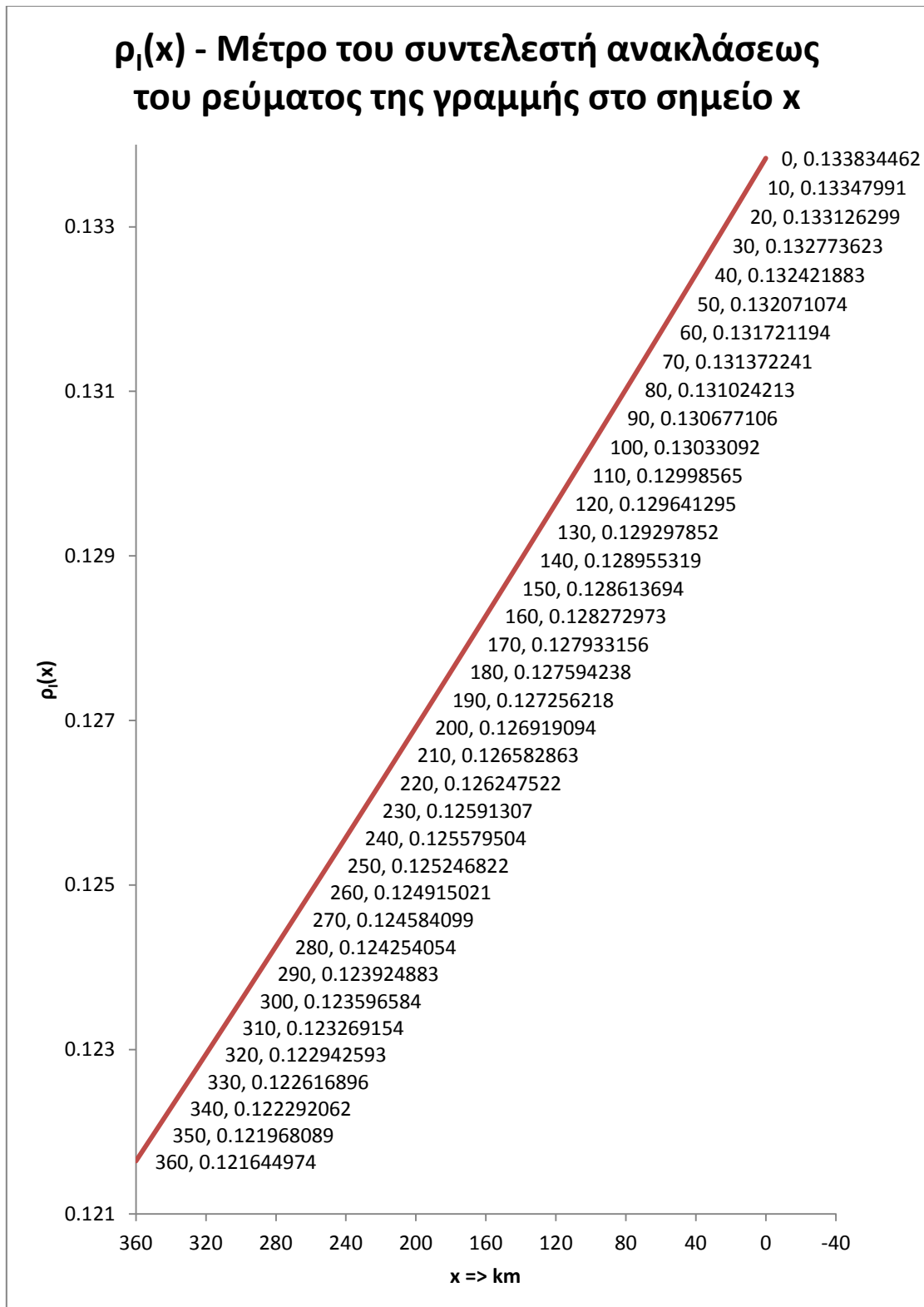
Επίσης η γωνία του $I_-(x)$: αυξάνεται όταν το x μειώνεται.

Και η γωνία του $I_+(x)$: μειώνεται όταν το x μειώνεται.

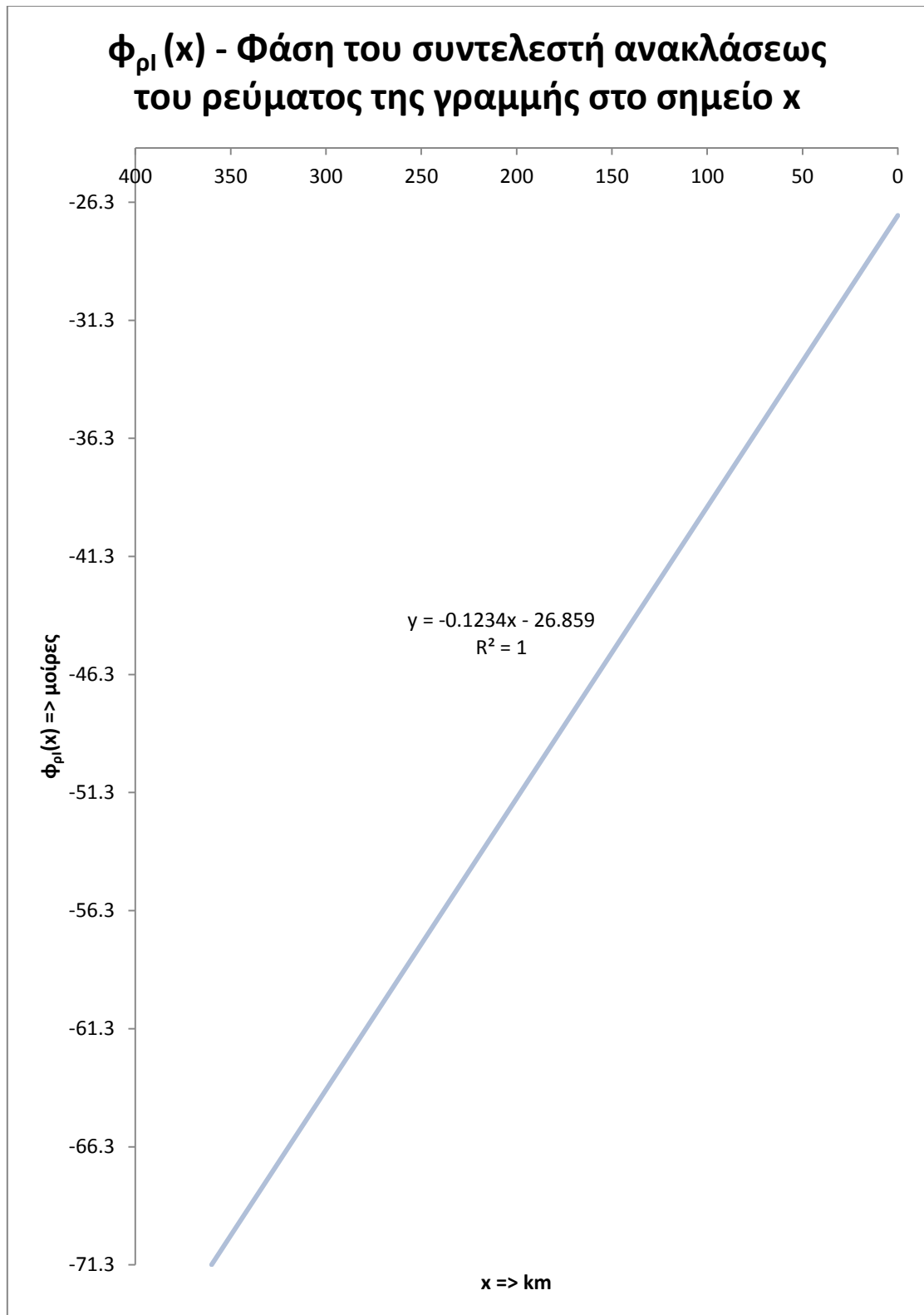
Οπότε η διαφορά τους, δηλαδή το $\varphi_{\rho_I}(x)$ αυξάνεται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 31 και 32.



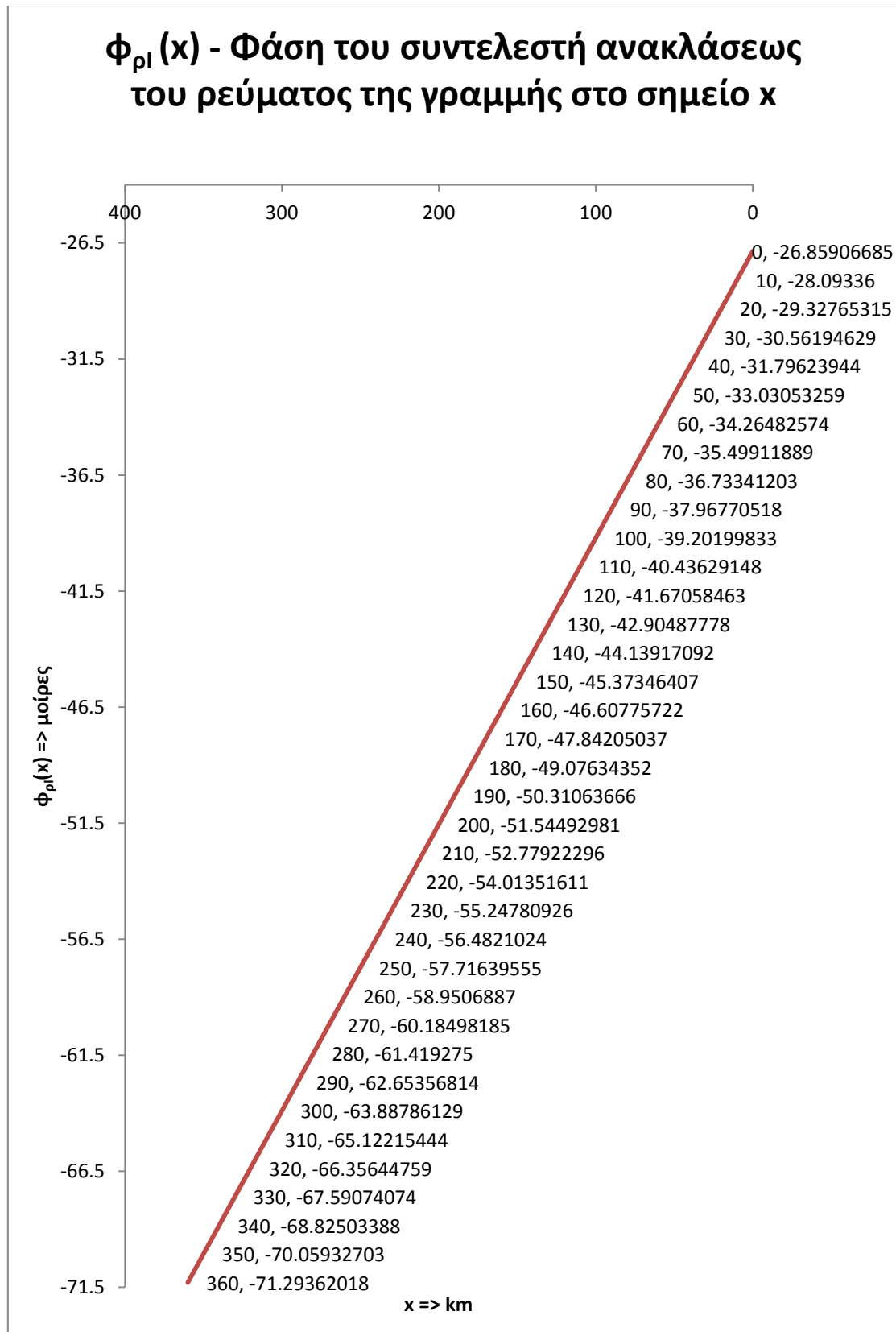
Γραφική παράσταση 29.



Γραφική παράσταση 30.



Γραφική παράσταση 31.



Γραφική παράσταση 32.

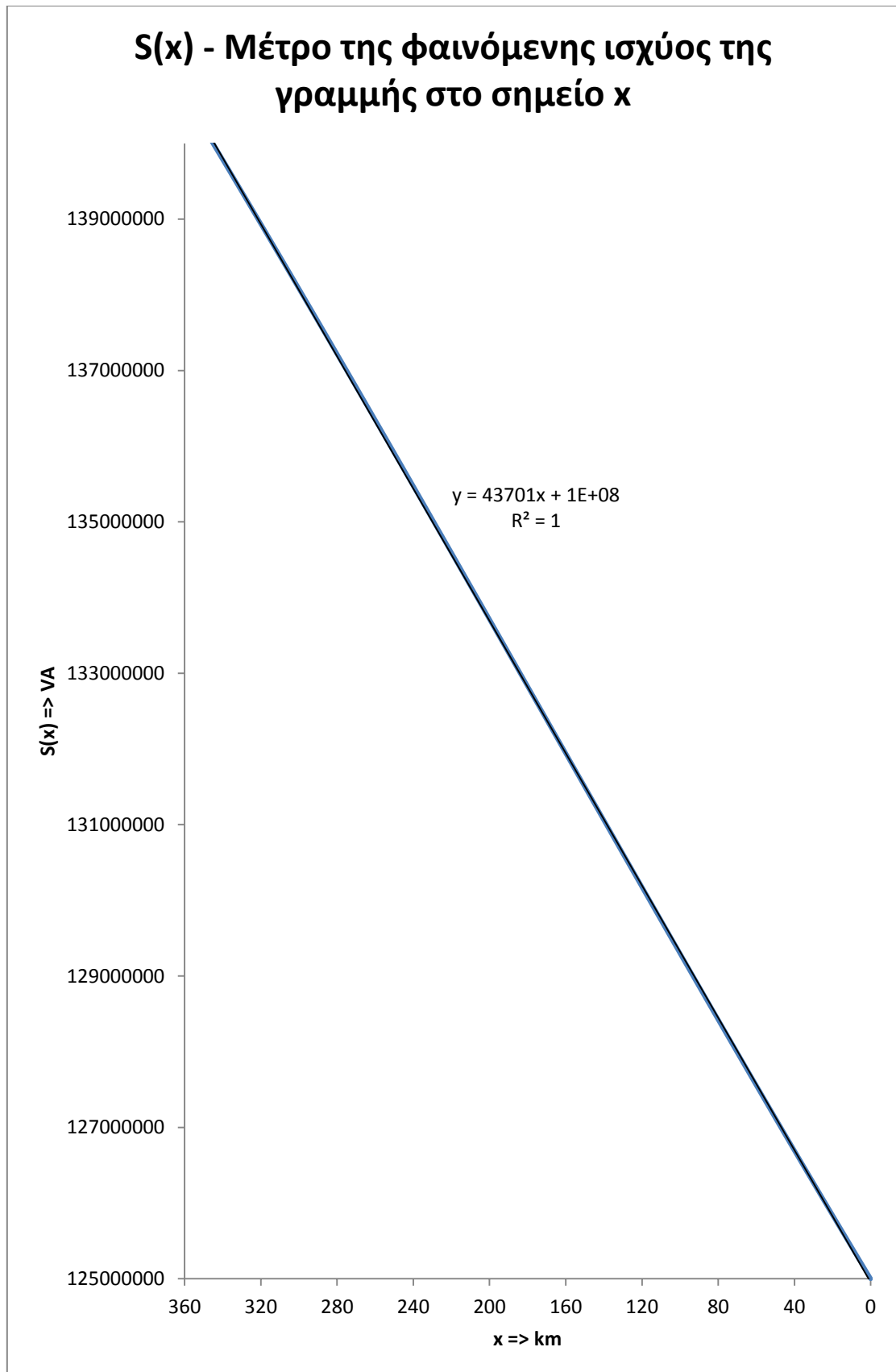
Το μέτρο του $V(x)$ μειώνεται με πιο γρήγορο ρυθμό από ότι αυξάνεται το μέτρο του $I(x)$ όταν μειώνεται το x . Άρα το $S(x) = V(x) \cdot I^*(x)$ μειώνεται όταν το x μειώνεται.

Βλέπε γραφικές παραστάσεις 33 και 34.

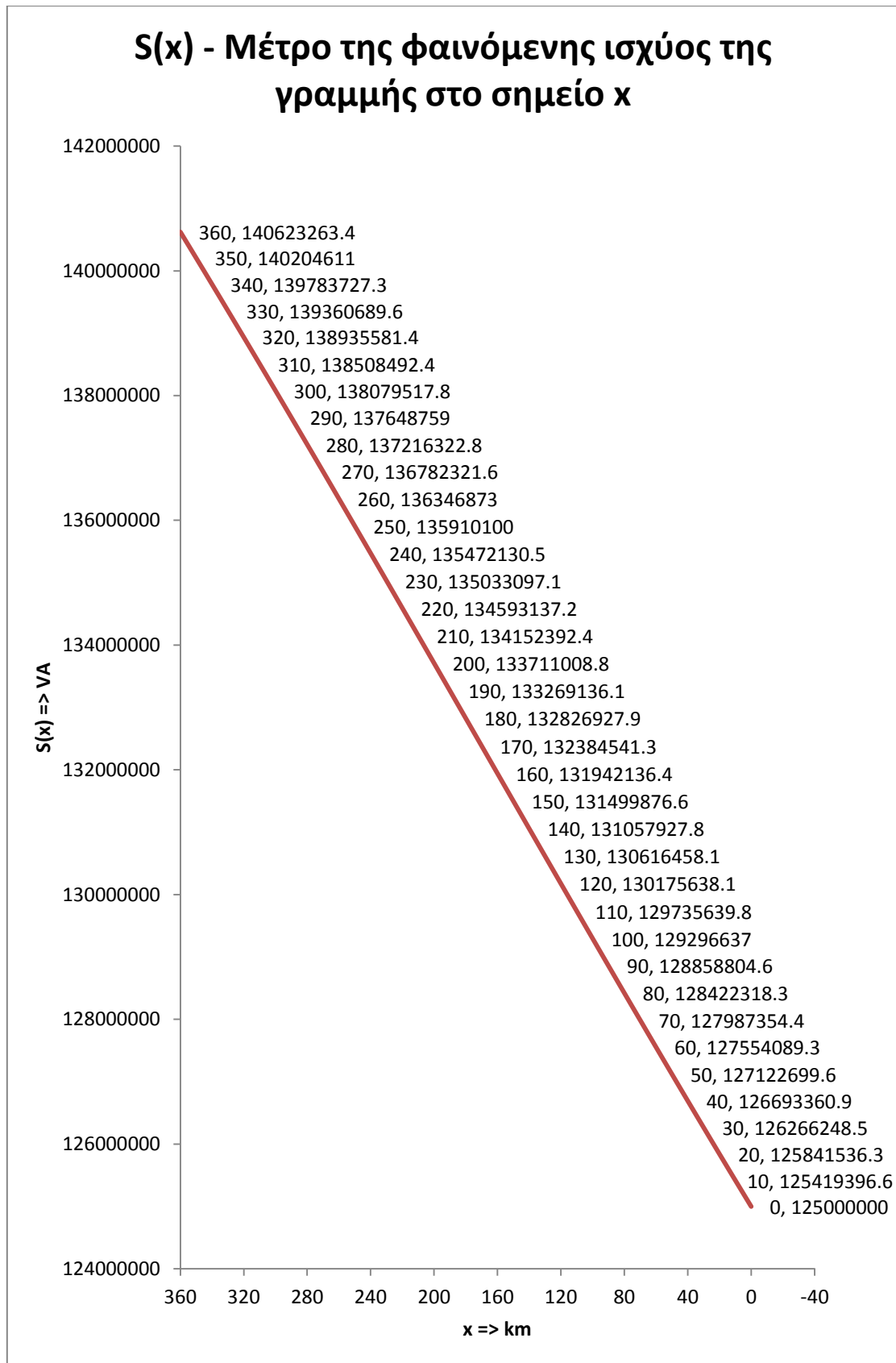
Η γωνία του $\varphi_V(x)$ μειώνεται όταν το x μειώνεται.

Η γωνία του $\varphi_I(x)$ μειώνεται όταν το x μειώνεται.

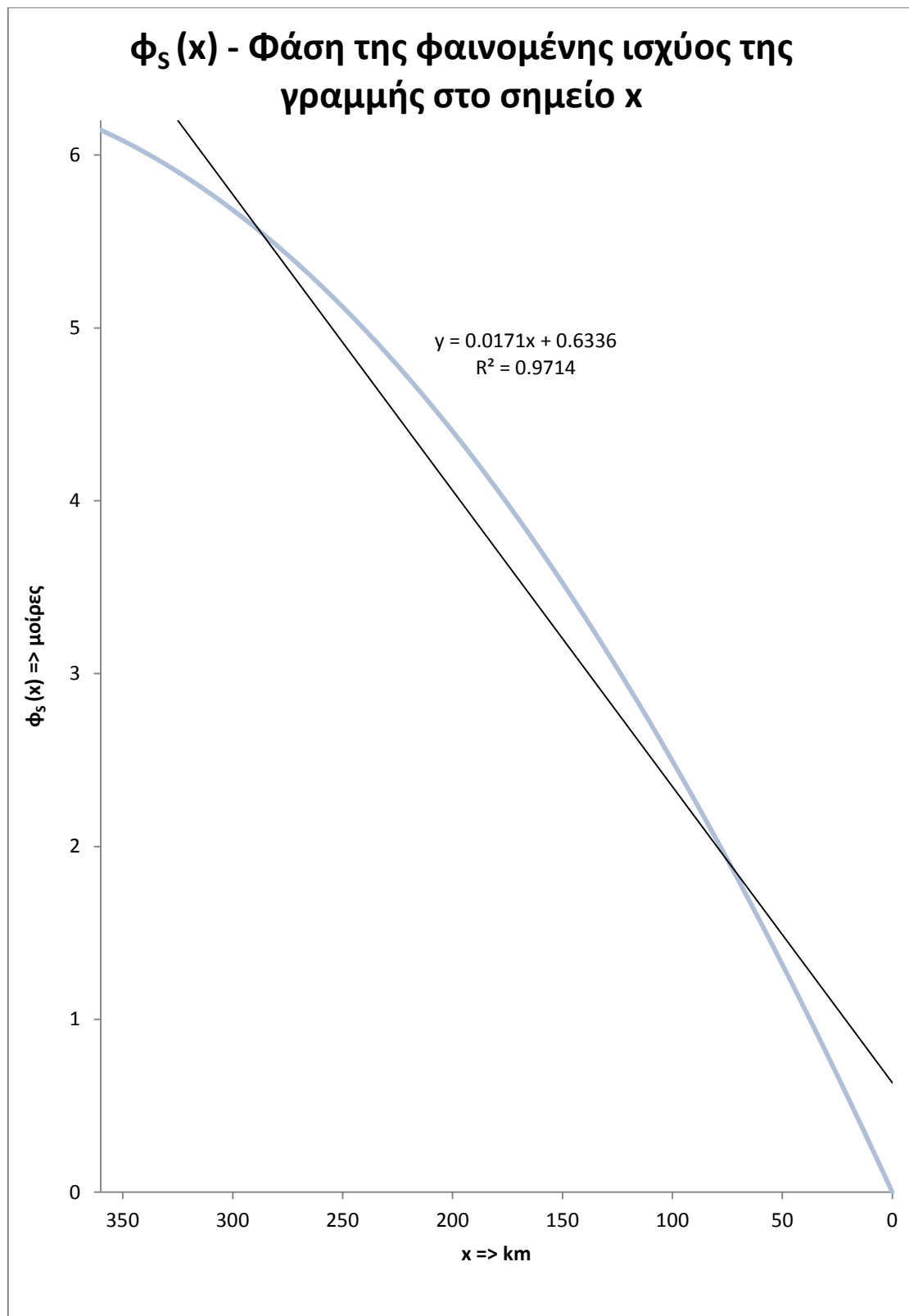
Άρα η διαφορά τους μειώνεται όταν το x μειώνεται. Βλέπε γραφικές παραστάσεις 35 και 36.



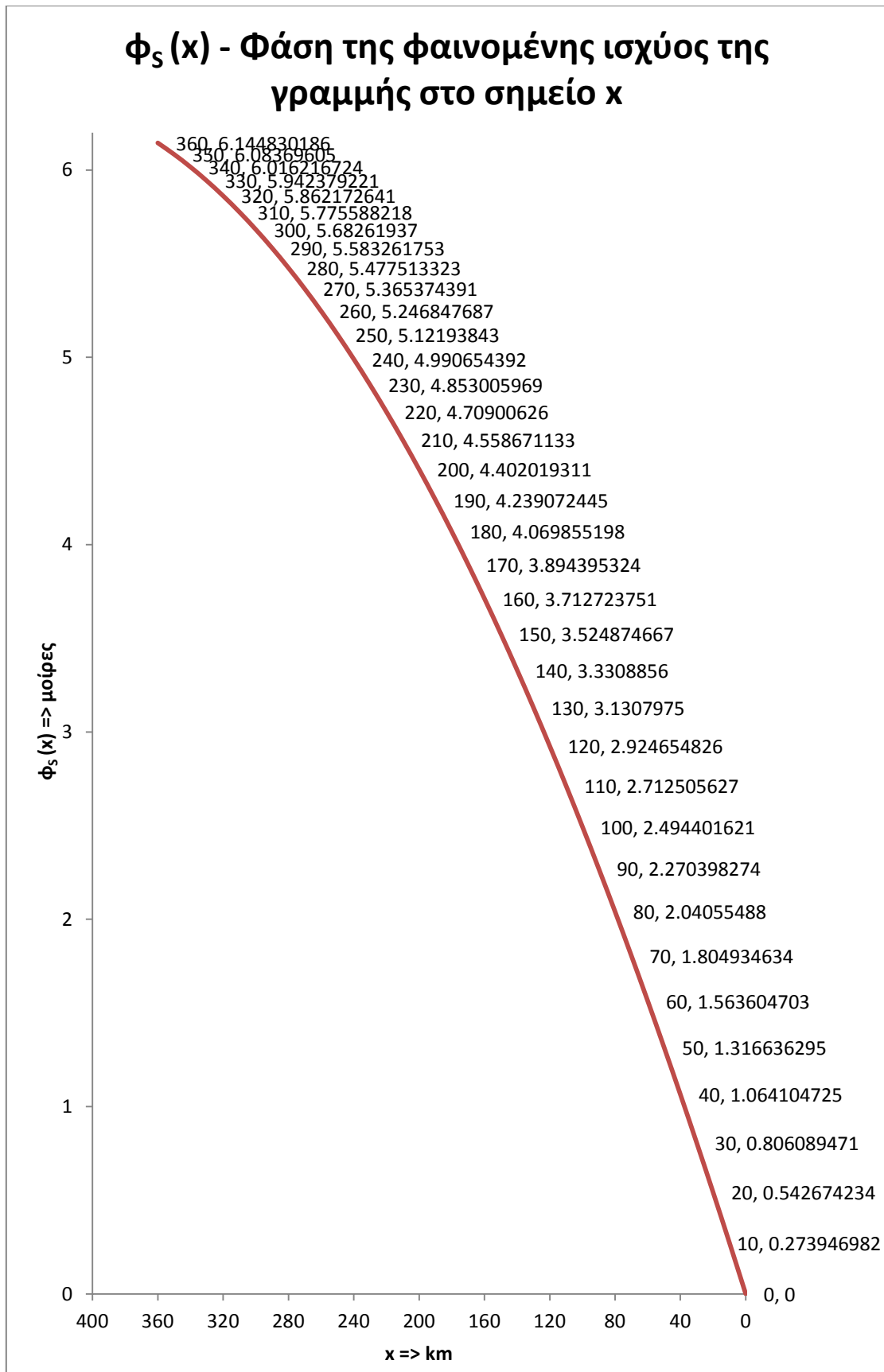
Γραφική παράσταση 33.



Γραφική παράσταση 34.



Γραφική παράσταση 35



Γραφική παράσταση 36.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συμπεράσματα και προτάσεις.

Στην εφαρμογή μας βλέπουμε τιμές τάσης και ρεύματος ανά 10 χιλιόμετρα πάνω σε μια γραμμή μεταφοράς 360 χιλιομέτρων. Η τιμές της τάσης μειώνονται κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς, όπως και οι τιμές του ρεύματος.

Το άθροισμα του προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος μας δίνει τις συνολικές τιμές της σημειακής τάσης και ρεύματος. Το προσπίπτον κύμα φαίνεται να μειώνεται με την αύξηση της απόστασης από την αφετηρία και πηγαίνοντας προς το άκρο αφίξεως, ενώ το ανακλώμενο ακριβώς αντίθετα μειώνεται με την απομάκρυνση από το άκρο αφίξεως. Οι παρατηρήσεις αυτές είναι σε σύμπτωση με τα αναμενόμενα από τη θεωρία.

Ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και για την φάση η οποία φαίνεται ότι καθυστερεί όταν το προσπίπτον απομακρύνεται από την αφετηρία ή όταν το ανακλώμενο απομακρύνεται από την άφιξη.

Επαληθεύεται επίσης ότι οι συντελεστές ανάκλασης τάσης και ρεύματος είναι κατά πολύ καλή προσέγγιση, κατά μέτρο ίσοι.

Για την καλύτερη απόδοση της γραμμής μεταφοράς που εξετάζουμε, με επέμβαση στη γραμμή, θα μπορούσαμε να μειώσουμε την επαγωγική αντίδραση που παρουσιάζουν οι αγωγοί φάσης της γραμμής. Η αντιστάθμιση αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με την προσθήκη σε κάθε φάση της γραμμής, πυκνωτών εν σειρά. Στην περίπτωση αυτή η συνολική αντίδραση μεταξύ των άκρων της γραμμής γίνεται $X=X_L-X_C<X_L$, οπότε αυξάνεται το μέτρο της τάσης στο φορτίο.

Ιδανικά για να εξαλείψει κανείς την ανάκλαση στο τέλος γραμμής θα μπορούσε να τερματίσει τη γραμμή σε μια αντίσταση τιμής Z_c ώστε, να μηδενίσει το συντελεστή ανάκλασης $(\rho = \frac{Z_L-Z_c}{Z_L+Z_c})$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

T	Περίοδος εναλλασσόμενου ρεύματος.
s	Διατομή αγωγού (κεφ.2)
s	Μήκος αγωγού (κεφ.4)
p	Στιγμιαία ισχύς
D	Απόσταση
H	Ορίζοντα τάση (κεφ.4)
	Μήκος γραμμής
f	Συχνότητα τάσεως
L	Επαγωγή ενός αγωγού
$Y=y$.	Συνολική σύνθετη εγκάρσια αγωγιμότητα ανά φάση προς ουδέτερο
S_R	Φαινόμενη ισχύς φορτίου (ή τέλους γραμμής)
S_S	Φαινόμενη ισχύς αναχώρησης (ή αρχής γραμμής)
P_R	Πραγματική ισχύς φορτίου (ή τέλους γραμμής)
S	Φαινόμενη ισχύς γραμμής
E.P.	Κύκλωμα Εναλλασσόμενου Ρεύματος
e	Τάση (κεφ.1)
E	Τάση (κεφ.3)
V	Τάση (κεφ.2)
S	Φαινόμενη ισχύς $S = P+jQ$
P	Πραγματική ισχύς
Q	Άεργος ισχύς
π	Ισοδύναμο
X'	Χωρητική αντίδραση της γραμμής
R_{θ_2}	Ωμική αντίσταση υπό θερμοκρασία θ_2
R_{θ_1}	Ωμική αντίσταση υπό θερμοκρασία θ_1
α_{θ_1}	Θερμοκρασιακή συντελεστής αντιστάσεως

T_0	Θερμοκρασία στην οποία η αντίσταση του αγωγού θα γίνεται μηδέν
Φ	Πεπλεγμένη ροή του αγωγού
y	$=G+j\omega C$ Εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους, ανά φάση προς ουδέτερο
G	Εγκάρσια ωμική αγωγιμότητα γραμμής ανά μονάδα μήκους
C	Εγκάρσια χωρητικότητα γραμμής ανά μονάδα μήκους
z	$=R+j\omega L$ Διαμήκης σύνθετη αντίδραση γραμμής ανά μονάδα μήκους
R	Διαμήκης ωμική αντίσταση γραμμής ανά μονάδα μήκους
L	Διαμήκης επαγωγή γραμμής ανά μονάδα μήκους
Z_c	Χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής
$Z=z$	Συνολική σύνθετη αντίσταση, ανά φάση
Z	Σύνθετη αντίδραση
Y	Σύνθετη αγωγιμότητα
R	Ωμική αντίσταση
$\gamma = \sqrt{zy}$	Συντελεστής μεταδόσεως γραμμής
ρ	Ειδική αντίσταση του αγωγού
λ	Απόσταση κατά μήκος της γραμμής
u	Ταχύτητα μεταδόσεως ενός κύματος
τ	Χρόνος οδεύσεως ενός κύματος
α	Συντελεστής αποσβέσεως
β	Συντελεστής φάσεως
r	Ακτίνα αγωγού
D_{σ}	Μέση γεωμετρική απόσταση των πολλαπλών αγωγών
Φ_α	Πεπλεγμένη ροή της δέσμης του α

Βιβλιογραφία

- [1] Βασιλείου Κ. Παπαδιά « Γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας, Μόνιμη κατάσταση λειτουργίας » Εκδόσεις Συμμετρία – Αθήνα 1999.
- [2] Γαβριήλ Β. Γιαννακόπουλος & Νικόλαος Α. Βόμβος « Εισαγωγή στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας » Εκδόσεις ΖΗΤΗ – Θεσσαλονίκη 2008.
- [3] Βασίλη Ν. Ξάνθου « Παραγωγή-Μεταφορά-Διανομή-Μέτρηση και εξοικονόμηση ηλεκτρικής ενέργειας » Εκδόσεις ΖΗΤΗ – Θεσσαλονίκη 2003.
- [4] Λάμπρος Οικονόμου, Δήμητρα Ι. Καρβουνιάρη & Άννα Μαλάμου « Συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, Συνοπτική θεωρία και εργαστηριακές ασκήσεις » Εκδόσεις Τζιόλα – Αθήνα 2013.
- [5] Παντελής Β. Μαλατέστας « Συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας » Εκδόσεις Τζιόλα – Θεσσαλονίκη 2013.
- [6] B.M.Weedy & B.J.Cory « Electric power systems » Εκδόσεις John Wiley & Sons – Chichester 1998.
- [7] Stephen W. Fardo & Dale R. Patrick « Electric power systems technology » Εκδόσεις Newnes, Butterworth-Heinemann – Boston 1996.
- [8] S.A. Nasar & F.C.Trutt « Electric power systems » Εκδόσεις CRC Press LLC – London 1999.
- [9] Helmut Ungrad & Wilibald Winkler « Protection techniques in electrical energy systems » Εκδόσεις Marcel Dekker – New York 1995.
- [10] El Hawary & Mohamed E. «: design and analysis » Εκδόσεις Wiley-IEEE Press - New York 1995.
- [11] J. Arrillaga & N. R. Watson « Computer modeling of electrical power systems » Εκδόσεις John Wiley & Sons – Chichester 2001.