

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΠΕΙΡΑΙΑ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εφαρμογές των μαθηματικών θεωριών πολέμου στη διοικητική των
επιχειρήσεων

Mathematical theories of war applications in business
management

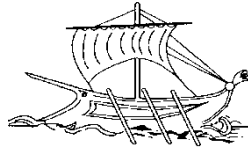
ΦΟΙΤΗΤΗΣ:

Σκορδούλης Μιχαήλ
Αριθμός Μητρώου: 7756

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Χαλικιάς Μιλτιάδης
Επίκουρος Καθηγητής

Πειραιάς, Απρίλιος 2014



**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΠΕΙΡΑΙΑ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ**

Πτυχιακή Εργασία

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ
ΠΟΛΕΜΟΥ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΤΩΝ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ**

**MATHEMATICAL THEORIES OF
WAR APPLICATIONS IN BUSINESS
MANAGEMENT**

**Επιμέλεια: Σκορδούλης Μιχαήλ, Α.Μ.: 7756
Επιβλέπων: Χαλικιάς Μιλτιάδης, Επίκουρος Καθηγητής**

Πειραιάς, Απρίλιος 2014

Στους γονείς μου...

Ευχαριστίες

Η παρούσα πτυχιακή εργασία αποτελεί την κατάληξη ενός μοναδικού ταξιδιού στη διάρκεια του οποίου είχα την τύχη να γνωρίσω ανθρώπους που με στήριξαν και ταυτόχρονα με τις γνώσεις και τις συμβουλές τους με βοήθησαν σε όλα τα στάδιά του.

Πρώτα απ' όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Χαλκιά Μιλτιάδη, όχι μόνο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, τη βοήθεια που μου προσέφερε και το χρόνο που διέθεσε στα πλαίσια της εργασίας αυτής, αλλά και για τη γενικότερη συνεργασία μας τα τελευταία χρόνια, η οποία μου προσέφερε ένα πλήθος ανεκτίμητων εμπειριών και γνώσεων.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Τμήματος Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής του Τ.Ε.Ι. Πειραιά και Κοσμήτορα της Σχολής Διοίκησης και Οικονομίας Πατσίκας Στυλιανό, για τη βοήθεια που μου προσέφερε και τις πολύτιμες συμβουλές του. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Εφαρμογών του Τμήματος Δρόσο Δημήτριο για την πολύτιμη βοήθεια και υποστήριξη που μου προσέφερε και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε. Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στο μέλος Ε.ΔΙ.Π. Νεκτάριο Σταυρόπουλο, το μέλος Ε.Τ.Π. Δέσποινα Καριπίδου και την Καθηγήτρια Εφαρμογών Νίκη Κάββουρα για την πολύτιμη προσφορά τους σε συμβουλές και γνώσεις καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο Τμήμα.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στους γονείς μου, στους οποίους είμαι ιδιαίτερος ευγνώμων για όσα μου έχουν προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια και τους ευχαριστώ για όλες τις θυσίες που έχουν κάνει ώστε να μου δώσουν τη δυνατότητα να ασχοληθώ απερίσπαστα με τις σπουδές μου.

Μιχάλης Σκορδούλης,

Πειραιάς,
Απρίλιος 2014

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η έρευνα και η αποτύπωση της δυνατότητας της εφαρμογής στις επιχειρήσεις ορισμένων από τις πιο ευρέως γνωστές μαθηματικές θεωρίες πολέμου.

Κατά τη διάρκεια Β' Παγκοσμίου Πολέμου χρησιμοποιήθηκαν σε πολλές περιπτώσεις μαθηματικά μοντέλα στις πολεμικές επιχειρήσεις. Μέσα από αυτή τη διαδικασία δημιουργήθηκε η επιχειρησιακή έρευνα.

Στη συγκεκριμένη έρευνα, εξετάστηκαν τα μοντέλα μάχης του Frederick William Lanchester που φάνηκαν ιδιαίτερα χρήσιμα στο στρατό των Η.Π.Α. στην εκστρατεία του Ειρηνικού έναντι του ιαπωνικού στόλου κατά το Β' παγκόσμιο πόλεμο, καθώς επίσης και η θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Lewis Frey Richardson. Τα συγκεκριμένα μαθηματικά μοντέλα βασίστηκαν σε διαφορετικές εξισώσεις και είχαν ως κύριο σκοπό να προβλέπουν την έκβαση των μαχών.

Το περιβάλλον στο οποίο λειτουργούν οι επιχειρήσεις σήμερα, είναι άκρως ανταγωνιστικό και έντονα μεταβαλλόμενο, αρκετά παρόμοιο με αυτό που μιας πολεμικής σύρραξης. Αφότου τέθηκαν οι κατάλληλες θεωρητικές προϋποθέσεις, τα παραπάνω μοντέλα εφαρμόστηκαν σε περιπτώσεις της λειτουργίας των σύγχρονων επιχειρήσεων. Πιο συγκεκριμένα, η θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson εφαρμόστηκε σε δευτερογενή δεδομένα από τον κλάδο της κινητής τηλεφωνίας στην Ελλάδα, ενώ τα μοντέλα μάχης του Lanchester σε δευτερογενή δεδομένα των πωλήσεων σε σχέση με τους ανεφοδιασμούς για τις Coca-Cola και Pepsi στην ελληνική αγορά, δύο επιχειρήσεων στις οποίες έχουν εφαρμοστεί και από άλλους ερευνητές τα μοντέλα αυτά.

Τα αποτελέσματα των εφαρμογών οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι τα θεωρητικά μοντέλα σχεδόν ταυτίζονται με την πραγματικότητα κάτι που σημαίνει ότι δύνανται να εφαρμοστούν στις επιχειρήσεις υπό τις κατάλληλες προϋποθέσεις.

Λέξεις κλειδιά: Επιχειρησιακή έρευνα, Frederick William Lanchester, Lewis Frey Richardson, μαθηματικές θεωρίες πολέμου, διαφορετικές εξισώσεις, διαφήμιση σε ολιγοπώλιο δύο επιχειρήσεων, εφοδιαστική αλυσίδα σε ολιγοπώλιο δύο επιχειρήσεων.

Abstract

The purpose of this study is the implementation of some of the most widely known mathematical theories of war in firms.

During World War II mathematical models in military operations were widely used. Through this process operations research was created.

In this specific research, Frederick William Lanchester's combat models which were particularly useful to the U.S. Army in the Pacific campaign against the Japanese fleet during World War II as well as Lewis Frey Richardson's arms race model were examined. These particular mathematical models were based on differential equations and their main purpose was to predict the possible outcome of a battle.

The environment in which firms operate today is highly competitive and highly fluctuating, quite similar to that of a military conflict. After the appropriate theoretical conditions were set, the above models were applied in cases of operation of modern firms. More specifically, Richardson's arms race model was applied to secondary data from the mobile phone industry in Greece, while Lanchester's combat model where applied to secondary data concerning the sales in relation to the supplies of Coca-Cola and Pepsi in the Greek market.

The results of applying the models led to the conclusion that the theoretical models are almost identical with reality, which means that they can be applied to firms under the appropriate preconditions.

Key words: Operations research, Frederick William Lanchester, Lewis Frey Richardson, mathematical theories of war, differential equations, advertisement in duopoly, supply chain in duopoly.

Περιεχόμενα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	IV
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	V
ABSTRACT.....	VI
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	VII
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	VIII
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ.....	IX
ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	XI
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....	16
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΟΠΛΙΣΜΩΝ ΤΟΥ LEWIS FREY RICHARDSON ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ.....	19
3.1. Η θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Lewis Frey Richardson.....	19
3.2. Εφαρμογή της θεωρίας των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Lewis Richardson στη διαφημιστική δαπάνη σε ολιγοπώλιο δύο επιχειρήσεων.....	20
3.2.1. Η λειτουργία της διαφήμισης στο ολιγοπώλιο.....	20
3.2.2. Κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου.....	22
3.2.3. Εφαρμογή του μαθηματικού μοντέλου.....	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΑΧΗΣ ΤΟΥ FREDERICK WILLIAM LANCHESTER ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ.....	34
4.1. Τα μοντέλα μάχης του Frederick William Lanchester.....	34
4.2. Εφαρμογή των μοντέλων μάχης του Frederick William Lanchester στην εφοδιαστική αλυσίδα δύο σε ολιγοπώλιο δύο επιχειρήσεων.....	36
4.2.1. Η λειτουργία της εφοδιαστικής αλυσίδας στο ολιγοπώλιο.....	36
4.2.2. Κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου.....	38
4.2.3. Εφαρμογή του μαθηματικού μοντέλου.....	46
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	51
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	53

Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 3.1: Διαφημιστικές δαπάνες (σε εκ. €) εταιριών κινητής τηλεφωνίας στην Ελλάδα κατά την περίοδο 2000-2006.....	32
Πίνακας 4.1: Πωλήσεις Coca-Cola και Pepsi (σε εκ. €) στην Ελλάδα κατά την περίοδο 2003-2007.....	47

Κατάλογος διαγραμμάτων

Διάγραμμα 3.1: Η γραφική απεικόνιση της λύσης του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (3.2) με $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $k = 1$ και $\lambda = 2$	26
Διάγραμμα 3.2: Η γραφική απεικόνιση της λύσης του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (3.2) με $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $k = 1$ και $\lambda = 2$	26
Διάγραμμα 3.3: Το εμβαδό που ορίζεται από τη συνάρτηση (3.3) με $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $k = 1$, $\lambda = 2$ και για $t = 0$ έως και $t = 0,85$	27
Διάγραμμα 3.4: Το εμβαδό που ορίζεται από τη συνάρτηση (3.4) με $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $k = 1$, $\lambda = 2$ και για $t = 0$ έως και $t = 0,85$	27
Διάγραμμα 3.5: Το $d(U+V)$ ως συνάρτηση του $U+V$ για κάθε χρόνο.	32
Διάγραμμα 4.1: Διαγραμματική απεικόνιση της μεταβολής του αριθμού των στρατιωτών με βάση το πρώτο μοντέλο του Lanchester στην περίπτωση μάχης μεταξύ στρατιωτικής δύναμης 1000 ατόμων και στρατιωτικής δύναμης 500 ατόμων, όπου η πρώτη κερδίζει κατά την ημέρα 55.....	35
Διάγραμμα 4.2: Σχηματική απεικόνιση μίας τυπικής εφοδιαστικής αλυσίδας.....	37
Διάγραμμα 4.3: Οι υπερβολές που προκύπτουν στο χώρο από την εξίσωση $ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 = k$, θεωρώντας $a = 2$ και $b = 6$ και ορίζοντας πεδίο τιμών $[-10, 10]$ για x και y	40
Διάγραμμα 4.4: Οι υπερβολές που προκύπτουν στο επίπεδο από την εξίσωση $ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 = k$, θεωρώντας $a = 2$ και $b = 6$ και ορίζοντας πεδίο τιμών $[-10, 10]$ για x και y	41
Διάγραμμα 4.5: Τα τμήματα των υπερβολών που προκύπτουν από την εξίσωση $ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 = k$ στο πεδίο των θετικών τιμών.	41
Διάγραμμα 4.6: Οι υπερβολές που προκύπτουν στο χώρο από την εξίσωση $gy^2 - 2hx^2 = gy_0^2 - 2hx_0^2 = l$, θεωρώντας $g = 2$ και $h = 6$ και ορίζοντας πεδίο τιμών $[-10, 10]$ για x και y	44

Διάγραμμα 4.7: Οι υπερβολές που προκύπτουν στο επίπεδο από την εξίσωση $gy^2 - 2hx^2 = gy_0^2 - 2hx_0^2 = l$, θεωρώντας $g = 2$ και $h = 6$ και ορίζοντας πεδίο τιμών $[-10, 10]$ για x και y	45
Διάγραμμα 4.8: Τα τμήματα των υπερβολών που προκύπτουν από την εξίσωση $gy^2 - 2hx^2 = gy_0^2 - 2hx_0^2 = l$ στο πεδίο των θετικών τιμών.....	45
Διάγραμμα 4.9: Πωλήσεις Coca-Cola και Pepsi (σε εκ. €) στην Ελλάδα κατά την περίοδο 2003-2007.....	47
Διάγραμμα 4.10: Σύγκριση πωλήσεων και προβλέψεων πωλήσεων με βάση το μοντέλο για τις Coca-Cola και Pepsi (σε εκ. €) στην Ελλάδα κατά την περίοδο 2003-2007.	49

Δημοσιεύσεις στο πλαίσιο της πτυχιακής εργασίας

Σκορδούλης, Μ. & Χαλικιάς, Μ. (2014). *Εφαρμογές των μαθηματικών θεωριών πολέμου στις επιχειρήσεις*. Σε: Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου Φοιτητικού Συνεδρίου Ελληνικής Εταιρίας Επιχειρησιακών Ερευνών Καινοτομία και Σύγχρονα Εργαλεία Κοινωνικής Δικτύωσης. Πειραιάς, Απρίλιος 2014. Πειραιάς: Τ.Ε.Ι. Πειραιά, (δεκτό προς δημοσίευση).

Κεφάλαιο 1:

Εισαγωγή

Κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου κατασκευάστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν μαθηματικά μοντέλα, με τη χρήση των οποίων οι αντιμαχόμενες δυνάμεις προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα ώστε να αποκτούν πλεονέκτημα έναντι των αντιπάλων τους, κατά τη διάρκεια των πολεμικών επιχειρήσεων (Cheema, 2005). Το αντικείμενο αυτών των μαθηματικών μοντέλων ποίκιλλε αναλόγως του προβλήματος για το οποίο κατασκευάστηκαν να επιλύσουν. Τα σημαντικότερα από αυτά βασίστηκαν στο γραμμικό προγραμματισμό και σήμερα αποτελούν τα γνωστότερα προβλήματα επιχειρησιακής έρευνας, τα προβλήματα μεταφοράς και διαίτας.

Η κατασκευή και η χρήση τέτοιων μοντέλων είναι μια από τις μεγαλύτερες προόδους που σημειώθηκε στην επιστήμη των μαθηματικών αρχικά από τη δεκαετία του 1930 και κυρίως από τα τέλη της δεκαετίας του 1940 (Naidu et al., 2007). Πρωτοπόρος ήταν ο Dantzig, ο πατέρας του γραμμικού προγραμματισμού όπως συχνά αναφέρεται, ο οποίος έδωσε στη δημοσιότητα το 1947 τη μέθοδο Simplex που αποτελεί τον πρώτο πλήρη αλγόριθμο για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού (Kivotos & Frangos, 2009). Εκτός από τον γραμμικό προγραμματισμό, αναπτύχθηκαν πολλές ακόμη θεωρίες και μοντέλα όταν κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου επιστήμονες και μηχανικοί κλήθηκαν να επιλύσουν προβλήματα που σχετίζονταν με τις πολεμικές επιχειρήσεις (Cheema, 2005).

Μέσα από τη συγκεκριμένη διαδικασία δημιουργήθηκε η επιχειρησιακή έρευνα. Ο όρος επιχειρησιακή έρευνα χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1940 από τους McClosky και Trefthen, στο Bowdsey, μια μικρή κωμόπολη της Αγγλίας (Tiwary & Shandilya, 2006).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο όρος επιχειρησιακή έρευνα, δεν αφορά πρωτίστως τις οικονομικές μονάδες, αλλά αναφέρεται στο στρατιωτικό τομέα όπου οι κυριότερες λειτουργίες ονομάζονται επιχειρήσεις (Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών).

Έχουν δοθεί αρκετοί διαφορετικοί ορισμοί για την επιστήμη της επιχειρησιακής έρευνας. Οι περισσότεροι μιλούν για «μία επιστημονική προσέγγιση στη λήψη

αποφάσεων», «τη χρήση ποσοτικών μεθόδων για συστήματα που προέρχονται από την πραγματική ζωή» ή και για «επιστημονική λήψη αποφάσεων» (Eiselt & Sandblom, 2010).

Στα μέσα της δεκαετίας του 1970, η Αμερικανική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών, όρισε ότι «η επιχειρησιακή έρευνα ασχολείται επιστημονικά με τις αποφάσεις που αφορούν στον με τον καλύτερο τρόπο σχεδιασμό και λειτουργία συστημάτων ανθρώπου-μηχανής, συνήθως υπό συνθήκες που απαιτούν την κατανομή των περιορισμένων πόρων» (Eiselt & Sandblom, 2010).

Ένας πιο σύγχρονος ορισμός για την επιχειρησιακή έρευνα, είναι ο ορισμός που έχει δώσει η Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών της Μεγάλης Βρετανίας. Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό «η επιχειρησιακή έρευνα είναι η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα που ανακύπτουν στη διεύθυνση και διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές υλικά και κεφάλαια, στη βιομηχανία, τις επιχειρήσεις, τις κυβερνητικές υπηρεσίες και την άμυνα. Η χαρακτηριστική της μεθοδολογία συνίσταται στην ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου του υπό μελέτη συστήματος, που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων. Ο σκοπός της είναι να βοηθήσει τη διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειές της επιστημονικά κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο» (Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών).

Από το δεύτερο, πιο σύγχρονο ορισμό, προκύπτει ότι η επιχειρησιακή έρευνα παρά το γεγονός ότι είναι μία επιστήμη που αναπτύχθηκε μέσα από την πολεμική διαδικασία, έχει ένα αρκετά μεγάλο εύρος εφαρμογών. Ένας από τους τομείς στους οποίους δύνανται μοντέλα της να εφαρμοστούν είναι και αυτός των οικονομικών μονάδων, δηλαδή των επιχειρήσεων.

Ωστόσο, η ανάγκη για εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων που θα βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων και στην επιλογή των βέλτιστων λύσεων κατά το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο όπου γεννήθηκε η επιχειρησιακή έρευνα. Στην πραγματικότητα, η ανάγκη αυτή προέκυψε αρκετά χρόνια νωρίτερα, όταν το 1881 ο Frederick Winslow Taylor, ο πατέρας του επιστημονικού μανάτζμεντ όπως αναφέρεται από πολλούς, διερωτήθηκε ποιός είναι ο καλύτερος τρόπος εκτέλεσης μιας εργασίας, ένα

ερώτημα το οποίο έρχεται σε απόλυτη ταύτιση με την επιστήμη της επιχειρησιακής έρευνας (Eiselt & Sandblom, 2010). Λίγα χρόνια αργότερα και συγκεκριμένα το 1909, έχουμε ίσως την πρώτη εφαρμογή μοντέλου ουρών αναμονής της επιχειρησιακής έρευνας, έπειτα από την εισαγωγή της πειθαρχίας κατά την αναμονή στην εταιρία τηλεπικοινωνιών της Κοπεγχάγης από τον Agner Krarup (Krarup, 2004). Ένας ακόμη που συνεισέφερε στην αναζήτηση των βέλτιστων λύσεων προβλημάτων των επιχειρήσεων πριν από την ανάπτυξη της επιχειρησιακής έρευνας ως επιστήμης, ήταν ο Ford Whitman Harris. Ο Harris ήταν αυτός που το 1913 κατασκεύασε το γνωστό μοντέλο της οικονομικής ποσότητας παραγγελίας (Erlenkotter, 1990). Σύμφωνα με το μοντέλο του Harris έχουμε (Ζώης & Γαρουφάλης, 2008):

$$E.O.Q. = \sqrt{\frac{2FS}{CP}} \quad (2.1)$$

E.O.Q.: η οικονομικής ποσότητας παραγγελίας

F: το σταθερό κόστος ανά παραγγελία

όπου S: η ετήσια ανάλωση του προϊόντος σε μονάδες

C: το κόστος διατήρησης του αποθέματος ως ποσοστό της τιμής αγοράς του

P: η ανά μονάδα τιμή αγοράς του προϊόντος από τον προμηθευτή

Το μοντέλο αυτό είναι τόσο ισχυρό που με τον έναν ή τον άλλο τρόπο εφαρμόζεται ακόμη και σήμερα (Eiselt & Sandblom, 2010).

Προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση το συμπέρασμα ότι σαφώς η επιχειρησιακή έρευνα, αν και είναι μία επιστήμη που αναπτύχθηκε μέσα από τις πολεμικές συρράξεις, έχει άμεση σχέση με τις επιχειρήσεις. Καθίσταται δε όλο και σημαντικότερη γι' αυτές δεδομένης της όλο και εντεινόμενης ανάγκης για βελτιστοποίηση των διαδικασιών. Η παρούσα έρευνα ανήκει στο επιστημονικό πεδίο της επιχειρησιακής έρευνας, δεδομένου ότι εξετάζει τη δυνατότητα εφαρμογής στις επιχειρήσεις, μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια των πολέμων και τα οποία είχαν ως στόχο τη βέλτιστη επίλυση προβλημάτων. Η σημαντικότητα της έρευνας έγκειται επομένως στο γεγονός ότι εξετάζονται θεωρίες οι οποίες μπορούν να βελτιστοποιήσουν διαδικασίες και λειτουργίες επιχειρήσεων.

Θα εξεταστεί η δυνατότητα εφαρμογής της θεωρίας των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Lewis Richardson στην περίπτωση της διαχρονικής εξέλιξης της διαφημιστικής δαπάνης στον κλάδο της κινητής τηλεφωνίας στην Ελλάδα. Ακόμη, θα εξεταστεί και η δυνατότητα εφαρμογής των μοντέλων μάχης του Frederick William Lanchester

στην περίπτωση των πωλήσεων των πωλήσεων σε σχέση με τους ανεφοδιασμούς για τις Coca-Cola και Pepsi στην ελληνική αγορά.

Τα μοντέλα μάχης του Lanchester, έχουν εφαρμοστεί σε περιπτώσεις επιχειρήσεων και από άλλους ερευνητές οι οποίοι επίσης έχουν εστιάσει στον ανταγωνισμό μεταξύ Coca-Cola και Pepsi. Συγκεκριμένα, ο Erickson (1992) εφήρμοσαν τα μοντέλα αυτά στις στρατηγικές διαφήμισης κλειστού βρόγχου στην περίπτωση του ανταγωνισμού μεταξύ Coca-Cola και Pepsi όπως και οι Fruchter & Kalish (1997). Η επιλογή των επιχειρήσεων αυτών δεν είναι τυχαία, αφού τα μοντέλα είναι τέτοια που περιγράφουν με υψηλή ακρίβεια τη συγκεκριμένη περίπτωση ανταγωνισμού σε ολιγοπώλιο δύο επιχειρήσεων. Για τον ίδιο λόγο επέλεξαν τον ανταγωνισμό μεταξύ Kodak και Polaroid κατά την περίοδο 1976-1985 οι Nguyen & Shi (2006) προκειμένου να εφαρμόσουν τα μοντέλα μάχης του Lanchester σε στρατηγικές διαφήμισης που εφαρμόζονται σε αγορές με μεγάλη δυναμική. Έχοντας από τις προηγούμενες ήδη μελέτες ως δεδομένη τη δυνατότητα της εφαρμογής των μοντέλων μάχης του Lanchester σε περιπτώσεις ανταγωνισμού σε ολιγοπώλιο με δύο επιχειρήσεις, το κυριότερο ενδιαφέρον στρέφεται στην εξέταση της περίπτωσης της ελληνικής αγοράς. Το μοντέλο που θα κατασκευαστεί θα εφαρμοστεί στη λειτουργία του εφοδιασμού και όχι σε αυτή της διαφήμισης όπως στις προηγούμενες έρευνες. Σε ό,τι έχει να κάνει με τη θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson, δεν έχει υπάρξει κάποια αντίστοιχη εφαρμογή της σε δεδομένα επιχειρήσεων. Επομένως εδώ το ενδιαφέρον στρέφεται κυρίως στη δυνατότητα κατασκευής ενός μαθηματικού μοντέλου βασισμένου στη συγκεκριμένη θεωρία και στη συνέχεια, στην αποτύπωση της δυνατότητας της εφαρμογής του μοντέλου υπό τις κατάλληλες προϋποθέσεις στην περίπτωση της διαφημιστικής δαπάνης σε ολιγοπώλιο δύο επιχειρήσεων.

Η μεθοδολογία που επιλέχθηκε για την ανάπτυξη του θέματος είναι η στη βάση των στοιχείων που προέκυψαν από την ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας ανάπτυξη και εφαρμογή των κατάλληλων, με βάση τις προϋποθέσεις που θα τεθούν, μοντέλων επιχειρησιακής έρευνας. Μέσα από τη διαδικασία που θα ακολουθηθεί στόχος είναι να καταστεί εφικτή και η εξαγωγή ενός συνολικότερου συμπεράσματος σε σχέση με τη δυνατότητα εφαρμογής της θεωρίας των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson και των μοντέλων μάχης του Lanchester σε περιπτώσεις επιχειρήσεων.

Κεφάλαιο 2:

Στοιχεία διαφορικών εξισώσεων

Τόσο η θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson, όσο και τα μοντέλα μάχης του Lanchester είναι μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας βασισμένα στις διαφορικές εξισώσεις.

Οι σημαντικότερες κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων είναι οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (Φράγκος, 1999). Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις είναι διαφορικές εξισώσεις με μία μεταβλητή και διακρίνονται σε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης χωριζόμενων μεταβλητών, γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, διαφορικές εξισώσεις Bernoulli και Riccati και, διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης πεπλεγμένης μορφής (Φούντας, 2013).

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι εξισώσεις που περιλαμβάνουν παραγώγους συναρτήσεων και οι λύσεις τους καταλήγουν σε συναρτήσεις (Φράγκος, 1999). Τις περισσότερες φορές οι συναρτήσεις αυτές είναι συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης πραγματικής μεταβλητής στη μορφή $y = f(x)$ (Γεωργούδης et al., 1995). Ορισμένες φορές, προκειμένου να επιλυθεί μία διαφορική εξίσωση χρησιμοποιούνται διαδοχικές ολοκληρώσεις με αποτέλεσμα οι λύση της διαφορικής εξίσωσης να μην είναι συνάρτηση αφού σε κάθε x του πεδίου ορισμού μπορούν να αντιστοιχούν περισσότερα από ένα $y = f(x)$ του πεδίου τιμών (Γεωργούδης et al., 1995).

Τα μαθηματικά μοντέλα της θεωρίας των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson και των μοντέλων μάχης του Lanchester είναι βασισμένα στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Επομένως η ανάλυση που ακολουθεί αφορά τα συστήματα της παραπάνω κατηγορίας διαφορικών εξισώσεων.

Η γενική μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι η ακόλουθη (Φούντας, 2013):

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x) \quad (2.1)$$

όπου $P(x), Q(x) \neq 0$ και συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών.

Η εξίσωση (2.1) σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται πλήρης γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (Γεωργούδης et al., 1995). Η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο (Φούντας, 2013):

$$x = e^{-\int P(y)dy} \left[\int Q(y)e^{\int P(y)dy} dy + c \right] \quad (2.2)$$

Με τη μέθοδο του Bernoulli η λύση δίνεται θέτοντας $y \equiv uv$ και η (2.1) γίνεται $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ από όπου τελικά εξάγεται η λύση (Φούντας, 2013):

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int e^{\int P(x)dx} dx + c \right] \quad (2.3)$$

Αν στη σχέση (2.1) θεωρήσουμε ότι $P(x) \neq 0$ και $Q(x) = 0$ για κάθε x που ανήκει στο διάστημα πραγματικών αριθμών (α, β) θα έχουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης η οποία έχει τη μορφή (Γεωργούδης et al., 1995):

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = 0 \quad (2.4)$$

Η γενική λύση της (2.4) δίνεται από τον τύπο (Γεωργούδης et al., 1995):

$$y = c'e^{-\int P(x)dx} \quad (2.5)$$

Αν τώρα στη σχέση (2.1) θεωρήσουμε ότι $P(x) = A$ και $Q(x) = B$ για κάθε x που ανήκει στο διάστημα πραγματικών αριθμών (α, β) και A, B πραγματικούς αριθμούς, θα έχουμε τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές και σταθερό δεύτερο μέλος η οποία έχει τη μορφή (Γεωργούδης et al., 1995):

$$\frac{dy}{dx} + Ay = B \quad (2.6)$$

Η γενική λύση της (2.6) δίνεται από τον τύπο (Γεωργούδης et al., 1995):

$$B - Ay = c'e^{-Ax} \quad (2.7)$$

Τέλος, αν στη (2.1) θεωρήσουμε ότι $P(x) = A$ με A πραγματικό αριθμό, θα έχουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές η οποία έχει τη μορφή (Γεωργούδης et al., 1995):

$$\frac{dy}{dx} + Ay = Q(x) \quad (2.8)$$

Η γενική λύση της (2.6) δίνεται από τον τύπο (Γεωργούδης et al., 1995):

$$y = e^{-Ax} \left[\int Q(x) e^{Ax} dx + c \right] \quad (2.9)$$

Σε ό,τι έχει να κάνει με τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων τώρα, έστω ότι έχουμε το σύστημα (Γεωργούδης et al., 1995):

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\square \\ &\square \\ &\square \\ \frac{dy_n}{dx} &= F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Για την επίλυση του συστήματος εφαρμόζονται παραγωγή και απαλοιφές ώστε τελικά τη γενική λύση του συστήματος (2.10) να δίνουν οι εξισώσεις (Γεωργούδης et al., 1995):

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y_2 &= g_2(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &\square \\ &\square \\ &\square \\ y_n &= g_n(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Κεφάλαιο 3:

Εφαρμογή της θεωρίας των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Lewis Frey Richardson στην περίπτωση των επιχειρήσεων

3.1. Η θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Lewis Frey Richardson

Ο Lewis Frey Richardson γεννήθηκε το 1881 στο Νιούκαστλ και σπούδασε μαθηματική ψυχολογία (Lynch, 2008). Ασχολήθηκε με διάφορους τομείς των μαθηματικών προβλέψεων, όπως η κατασκευή μοντέλων για την πρόγνωση του καιρού (Lynch, 2008). Μελέτησε ακόμη τις πολεμικές συγκρούσεις μεταξύ κρατών και κατασκεύασε μαθηματικά μοντέλα για να περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο αυτά αυξάνουν τον εξοπλισμό τους (Lynch, 2008).

Ο Richardson πίστευε ότι κάθε κράτος αυξάνει σταθερά τον εξοπλισμό σαν να είναι υποχρεωμένο να το κάνει, κάτι που πιθανώς να οφείλεται είτε στα αρχέγονα ένστικτα, είτε στην έλλειψη του πνευματικού υπόβαθρου και της ηθικής που να καθορίζουν το μέτρο (Δάρας, 2001). Βασιζόμενος σε αυτή την υπόθεση κατασκεύασε το μαθηματικό μοντέλο της θεωρίας των ανταγωνιστικών εξοπλισμών το οποίο αναπτύχθηκε σε μία περίοδο η οποία διήρκεσε περίπου τριάντα έτη (Rapport, 1957).

Στη θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών, οι συναρτήσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ αναπαριστούν τον εξοπλισμό δύο κρατών συναρτήσει του χρόνου. Ο ρυθμός μεταβολής εξαρτάται από την πολεμική ετοιμότητα και από τις όποιες διαφορές που υπάρχουν μεταξύ των δύο κρατών. Ισχύει επομένως η κατάσταση:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ky - ax + g \\ \frac{dy}{dt} = \lambda x - by + h \end{cases} \quad (3.1)$$

όπου, a και b είναι τα κόστη των εξοπλισμών και g και h οι διαφορές μεταξύ των κρατών.

Στη θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών, ο Richardson χρησιμοποίησε τις διαφορικές εξισώσεις προκειμένου να αξιολογήσει την πιθανότητα το αποτέλεσμα

ενός ανταγωνισμού εξοπλισμών μεταξύ δύο κρατών να είναι μια σταθερή ισορροπία (Lichbach, 1989).

Τα τρία διαφορετικά αποτελέσματα με βάση το μοντέλο αυτό είναι ότι τα δύο έθνη που συγκρούονται τείνουν προς τον αποπλισμό, τείνουν προς μια ανεξέλεγκτη κούρσα των εξοπλισμών, ή τείνουν προς ένα σταθερό σημείο ισορροπίας εξοπλισμών (Rapoport, 1957).

Παρά το γεγονός ότι η θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών, δεν έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα η εφαρμογή του μοντέλου στο οποίο έχει βασιστεί. (McGinnis, 1991). Οι Dunne et al. (1999) έχουν εφαρμόσει εμπειρικά τη θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών μελετώντας την περίπτωση του ανταγωνισμού των εξοπλιστικών προγραμμάτων μεταξύ της Ελλάδας και της Τουρκίας και, την περίπτωση του ανταγωνισμού των εξοπλιστικών προγραμμάτων μεταξύ της Ινδίας και του Πακιστάν.

Σε ό,τι έχει να κάνει με την επιστήμη της διοικητικής των επιχειρήσεων, δεν έχει υπάρξει κάποια εφαρμογή του μοντέλου από άλλους ερευνητές.

3.2. Εφαρμογή της θεωρίας των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Lewis Richardson στη διαφημιστική δαπάνη σε ολιγοπώλιο δύο επιχειρήσεων

3.2.1. Η λειτουργία της διαφήμισης στο ολιγοπώλιο

Η λειτουργία της διαφήμισης εντάσσεται στο ευρύτερο πεδίο του μίγματος επικοινωνίας της λειτουργίας του μάρκετινγκ το οποίο περιλαμβάνει ακόμη την προσωπική πώληση, προώθηση των πωλήσεων και τις δημόσιες σχέσεις (Boyd et al., 2002).

Υπάρχουν αρκετοί ορισμοί για την έννοια της διαφήμισης. Σύμφωνα με το Seyffert η διαφήμιση είναι «*μια μορφή ψυχικής επιρροής που επιδιώκει με ορισμένες διαδικασίες να κάνει τους άλλους με την ελεύθερη θέλησή τους να πραγματοποιήσουν τους σκοπούς τους οποίους τάχθηκε να εξυπηρετεί*» (Κυριαζόπουλος, 2001).

Οι γενικοί στόχοι της διαφήμισης για μια επιχείρηση έγκεινται στην αύξηση του μεριδίου της αγοράς, στην αύξηση των πωλήσεων, στην αύξηση των κερδών και τέλος στη δημιουργία κλίματος εμπιστοσύνης (Κυριαζόπουλος, 2001).

Είναι σαφές ότι τα χρήματα που θα επενδύσει μία επιχείρηση στη διαφήμιση έχουν άμεση σχέση με τις πωλήσεις του προϊόντος της, όπως ακριβώς συμβαίνει με τους παράγοντες που επηρεάζουν τη ζήτηση (Dayal et al., 1996). Στην ουσία η στρατηγική της διαφήμισης που θα ακολουθηθεί καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τις πωλήσεις ενός προϊόντος. Η στρατηγική διαφήμισης που θα επιλέξει να ακολουθήσει κάθε επιχείρηση επηρεάζεται από πολλούς διαφορετικούς παράγοντες (Kurtz, 2012). Για το λόγο αυτή διαφήμιση είναι μια ιδιαίτερα πολύπλοκη λειτουργία με κρίσιμες αποφάσεις που απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή λόγω του συνεχώς μεταβαλλόμενου μακροπεριβάλλοντος των επιχειρήσεων (Boyd et al., 2002).

Μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας εφαρμόζονται με όλο και αυξανόμενη συχνότητα στη διαφήμιση με στόχο τις περισσότερες φορές τη βελτιστοποίηση του αποτελέσματος μιας διαφημιστικής καμπάνιας με όσο το δυνατό λιγότερους πόρους επενδυμένους σε αυτή (Deal, 1979).

Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το μοντέλο διαφήμισης των Nerbone-Arrow, γνωστό και ως μοντέλο N-A, που καταρτίστηκε το 1962 (Little, 1979). Στο μοντέλο αυτό, η διαφημιστική δαπάνη μιας επιχείρησης συμβολίζεται με $q(t)$, ενώ η επίδρασή της στους καταναλωτές συμβολίζεται με $A(t)$ (Little, 1979). Το μοντέλο αυτό που συσχετίζει τη διαφημιστική δαπάνη μιας επιχείρησης ως συνάρτηση του χρόνου με την αντίστοιχη επίδρασή της στους καταναλωτές δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dA}{dt} = bq(t) - kA,$$
 όπου b σταθερά που περιγράφει την αποτελεσματικότητα της διαφήμισης και k σταθερά που αντιστοιχεί στην απαξίωση του προϊόντος (Little, 1979). Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$A(t) = \frac{b \int e^{kt} q(t) dt + c}{e^{kt}} \quad (\text{Little, 1979}).$$

Το μαθηματικό μοντέλο που θα κατασκευαστεί, θα εφαρμοστεί σε ολιγοπώλιο στο οποίο υπάρχουν δύο μόνον επιχειρήσεις. Η βασική διαφορά του ολιγοπωλίου και του ολιγοπωλίου με δύο επιχειρήσεις από τις άλλες αγορές είναι ότι εδώ αγοράς είναι ότι

εδώ οι επιχειρήσεις πρέπει να γνωρίζουν και να κρίνουν την αντίδραση των άλλων επιχειρήσεων στην αγορά (Maurice & Thomas, 2001). Με έναν πεπερασμένο αριθμό πωλητών συχνά υπάρχει έντονος ανταγωνισμός όσον αφορά την τιμή, την ποιότητα και την ποσότητα που παράγεται (Sznajd-Weron, & Weron, 2003). Είναι επομένως ιδιαίτερα κρίσιμη η διαφήμιση για την επικράτηση μίας επιχείρησης έναντι των ανταγωνιστών της σε μία ολογοπωλιακή αγορά.

Θα πρέπει να διερευνηθεί υπό ποιές προϋποθέσεις η διαφήμιση αποφέρει αποτελέσματα σε ένα ολιγοπώλιο. Σύμφωνα με τους Bester & Petrakis (1995) η διαφήμιση αποδίδει σε ένα ολιγοπώλιο μόνο στην περίπτωση κατά την οποία οι πωλητές προσφέρουν το προϊόν τους στην ίδια τιμή ενώ, στην περίπτωση των διαφορετικών τιμών, οι καταναλωτές επιλέγουν το προϊόν που κοστίζει λιγότερο. Σημαντικός παράγοντας επιτυχίας σε ένα ολιγοπώλιο είναι η καινοτομία όσον αφορά τη διαφήμιση και την εισαγωγή του προϊόντος ώστε να διατηρείται η εικόνα του brand name (Sznajd-Weron, & Weron, 2003).

Σε ένα ολιγοπώλιο τα αποτελέσματα μιας μεμονωμένης διαφημιστικής καμπάνιας αν και στιγμιαία αυξάνουν τα κέρδη, έχουν μικρή επίδραση στα μακροχρόνια μερίδια αγοράς λόγω του έντονου ανταγωνισμού (Bass et al., 2005). Αυτό σημαίνει ότι η διαφήμιση σε ένα ολιγοπώλιο θα πρέπει να είναι μια συνεχής διαδικασία.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι σε ένα ολιγοπώλιο είναι ιδιαίτερα σημαντικό οι επιχειρήσεις να γνωρίζουν και να μπορούν να προβλέψουν τις κινήσεις των ανταγωνιστών τους σε ό,τι έχει να κάνει με τις στρατηγικές διαφήμισης που ακολουθούν. Το μαθηματικό μοντέλο που θα κατασκευαστεί στη συνέχεια θα προσπαθήσει να δώσει τις κατευθύνσεις για την απάντηση στο ερώτημα αυτό.

3.2.2. Κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου

Θεωρούμε δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις A και B οι οποίες συνυπάρχουν σε κοινή αγορά και πωλούν το προϊόν P στην ίδια τιμή. Η αγορά αυτή χαρακτηρίζεται ως ολιγοπώλιο δύο επιχειρήσεων, δεδομένου ότι θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν άλλες επιχειρήσεις που να πωλούν το ίδιο προϊόν, ενώ η είσοδος τέτοιων επιχειρήσεων είναι πολύ δύσκολη. Ταυτόχρονα, η αγορά αυτή είναι κλειστή δεδομένου θεωρείται ότι δεν διενεργείται διεθνές εμπόριο. Ακόμη, δεν υπάρχουν υποκατάστατα προϊόντα για το προϊόν P, ενώ αποκλείεται η εισαγωγή επιχειρήσεων στην αγορά που να πωλούν

υποκατάστατα προϊόντα. Τέλος, γίνεται δεκτό ότι στην περίπτωση που η μία εκ των δύο επιχειρήσεων δεν δαπανά πόρους για διαφήμιση, τότε είναι ασύμφορο και για την άλλη να συνεχίσει να δαπανά τέτοιους πόρους. Αυτό επιβεβαιώνεται, σύμφωνα με την παρατήρηση των Bester & Petrakis (1995) που αναπτύχθηκε προηγουμένως.

Έστω ότι η συνάρτηση $x = x(t)$ αναπαριστά τη διαφημιστική δαπάνη μίας επιχείρησης A και έστω ότι η συνάρτηση $y = y(t)$ αναπαριστά την αντίστοιχη δαπάνη της ανταγωνιστικής προς την επιχείρηση A, επιχείρησης B.

Ο ρυθμός μεταβολής των συναρτήσεων $x(t)$ και $y(t)$ εξαρτάται από τον ανταγωνισμό μεταξύ των δύο επιχειρήσεων στις διάφορες αγορές στις οποίες συνυπάρχουν. Έτσι, ο ρυθμός μεταβολής της $x(t)$ για την επιχείρηση A εξαρτάται από το πόσο έτοιμη είναι η επιχείρηση B να την ανταγωνιστεί καθώς και από τις διεκδικήσεις της για το μερίδιο αγοράς. Συμβολίζουμε αυτούς τους όρους με kx και g αντίστοιχα, όπου k και g είναι κατάλληλες σταθερές. Αυτοί οι όροι προκαλούν αύξηση της τιμής του x . Αντίστοιχα, ο ρυθμός μεταβολής της $y(t)$ για την επιχείρηση B εξαρτάται από το πόσο έτοιμη είναι η επιχείρηση A να την ανταγωνιστεί καθώς και από τις διεκδικήσεις της. Συμβολίζουμε αυτούς τους όρους με lx και h αντίστοιχα, όπου l και h είναι κατάλληλες σταθερές. Αυτοί οι όροι προκαλούν αύξηση της τιμής του y .

Το συνολικό μέγεθος της διαφημιστικής δαπάνης των δύο ανταγωνιστικών επιχειρήσεων αποτελεί τον όρο $\frac{dx}{dt}$ για την επιχείρηση A και τον όρο $\frac{dy}{dt}$ για την επιχείρηση B. Τα μεγέθη αυτά εκφράζονται με $-ax$ και $-by$ αντίστοιχα, όπου a και b κατάλληλες θετικές σταθερές.

Οι δύο χρονικές συναρτήσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ στοιχειοθετούν τη λύση του παρακάτω συστήματος διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ky - ax + g \\ \frac{dy}{dt} = lx - by + h \end{cases} \quad (3.2)$$

Εάν υποθεθεί ότι $g=0$ και $h=0$ τότε, οι συναρτήσεις $x(t)=0$ και $y(t)=0$ αποτελούν λύση για το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (3.2). Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση (3.2) ισορροπεί υπό την έννοια ότι εάν τα x , y , g και h ισούνται όλα με

το μηδέν, τότε οι συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ θα παραμείνουν για όλη τη χρονική διάρκεια ίσες με το μηδέν.

Στην περίπτωση των επιχειρήσεων A και B, η παραπάνω κατάσταση σημαίνει ότι καμία από τις δύο αυτές επιχειρήσεις δεν επενδύει χρήματα για διαφήμιση στο μεταξύ τους ανταγωνισμό.

Το παραπάνω μπορεί να σημαίνει αρκετά διαφορετικά πράγματα για τη σχέση μεταξύ των δύο επιχειρήσεων. Αρχικά, μπορεί να σημαίνει την απόφαση των επιχειρήσεων να σταματήσουν να δαπανούν χρήματα για διαφήμιση.

Μπορεί επίσης να σημαίνει τη μη ύπαρξη διαθέσιμων πόρων για διαφήμιση ή την εξάντληση αυτών σε κάποια χρονική στιγμή.

Μία ακόμη πιθανή εξήγηση θα ήταν η συνεργασία των επιχειρήσεων A και B στην αγορά που θεωρήθηκε κατ' αρχήν, εάν επιπροσθέτως θεωρούταν ότι η ζήτηση από πλευράς καταναλωτών τείνει στο άπειρο χωρίς να μπορεί να καλυφθεί από τις επιχειρήσεις αυτές. Αυτό θα σήμαινε ότι οι επιχειρήσεις δεν θα είχαν λόγο να ανταγωνίζονται η μία την άλλη αντίθετα, θα είχαν όφελος από μία μεταξύ τους συνεργασία που θα οδηγούσε στην επίτευξη οικονομικών κλίμακας. Το σενάριο αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει λόγος οι επιχειρήσεις A και B να δαπανούν κεφάλαια για διαφήμιση, δεδομένου ότι και οι δύο πωλούν όλες τις παραγόμενες ποσότητές τους κάτι που σημαίνει πως δεν υπάρχει λόγος να ανταγωνίζονται η μία την άλλη.

Τέλος, υπάρχει και η περίπτωση του ολιγοπωλίου με ύπαρξη μόνο των επιχειρήσεων A και B στην αγορά, οι οποίες από ανταγωνίστριες αποφασίζουν κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ τη μεταξύ τους στρατηγική συνεργασία.

Ωστόσο στην πραγματικότητα των επιχειρήσεων είναι δύσκολο να ισχύει κάτι από τα παραπάνω, ενώ, ακόμη αν ισχύει δεν μπορεί αυτή η ισχύς να έχει μόνιμο χαρακτήρα. Έτσι, εάν υποτεθεί ότι το x και το y μηδενίζονται κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ τότε σε αυτή τη χρονική στιγμή θα ισχύει ότι $\frac{dx}{dt} = g$ και ότι $\frac{dy}{dt} = h$ κάτι που σημαίνει ότι το x και το y δεν θα συνεχίσουν να ισούνται με το μηδέν, δεδομένου ότι το g και το h είναι πλέον θετικοί αριθμοί.

Εάν η μία από τις ανταγωνιστικές επιχειρήσεις A και B αποφασίσει να μην επενδύει χρηματικά κεφάλαια στη διαφήμιση, το x ή το y αντιστοίχως θα μηδενίζονται σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_i . Έτσι, για την επιχείρηση A κατά τη χρονική στιγμή

t_i θα ισχύει ότι $\frac{dx}{dt} = \lambda x + h$ και αντίστοιχα για την επιχείρηση B θα ισχύει ότι

$$\frac{dy}{dt} = kx + g.$$

Στην περίπτωση που τα a, b, g και h ισούνται όλα με το μηδέν το σύστημα (3.2) θα γράφεται υπό τη μορφή:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ky \\ \frac{dy}{dt} = \lambda x \end{cases} \quad (3.3)$$

Κάθε λύση για το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (3.3) θα δίνεται από τους τύπους:

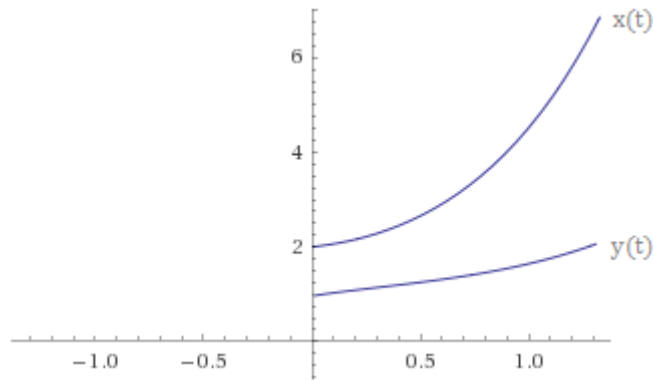
$$x(t) = \frac{1}{2}c_1 e^{-\sqrt{k}\sqrt{\lambda}t} \left(e^{2\sqrt{k}\sqrt{\lambda}t} + 1 \right) + \frac{c_2 \sqrt{k} e^{-\sqrt{k}\sqrt{\lambda}t} \left(e^{2\sqrt{k}\sqrt{\lambda}t} - 1 \right)}{2\sqrt{\lambda}} \quad (3.4)$$

$$y(t) = \frac{c_1 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{k}\sqrt{\lambda}t} \left(e^{2\sqrt{k}\sqrt{\lambda}t} - 1 \right)}{2\sqrt{k}} + \frac{1}{2}c_2 e^{-\sqrt{k}\sqrt{\lambda}t} \left(e^{2\sqrt{k}\sqrt{\lambda}t} + 1 \right) \quad (3.5)$$

Η λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (3.3) εξαγάγει στους τύπους (3.4) και (3.5) τους συντελεστές c_1 και c_2 . Οι συντελεστές αυτοί ισούνται με $x(t)$ και $y(t)$ αντιστοίχως για $t = 0$. Αυτό σημαίνει ότι κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ισχύει ότι $c_1 = x(t)$ και $c_2 = y(t)$.

Η παραπάνω κατάσταση, όπου οι $x(t)$ και $y(t)$ τείνουν στο άπειρο, μπορεί να ερμηνευτεί ως μία κατάσταση όπου οι επιχειρήσεις ανταγωνίζονται συνεχώς η μία την άλλη.

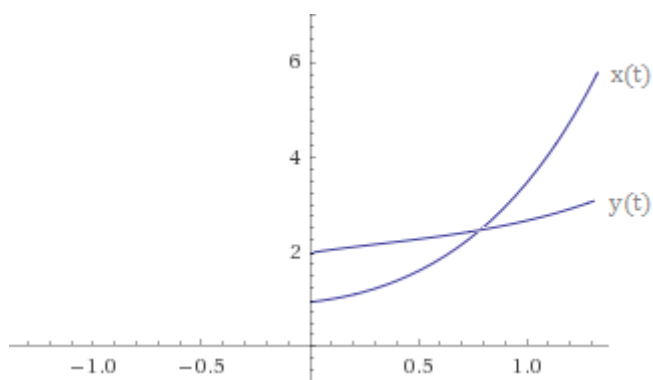
Στο Διάγραμμα 3.1 απεικονίζεται ακριβώς η κατάσταση αυτή, δηλαδή ο συνεχής ανταγωνισμός μεταξύ των δύο επιχειρήσεων και το κόστος διαφήμισης το οποίο τόσο για την A όσο και για τη B είναι αύξον και τείνει στο άπειρο. Από το διάγραμμα προκύπτει επίσης ότι σταθερά η επιχείρηση B δαπανά περισσότερα χρήματα από την A για διαφήμιση.



Διάγραμμα 3.1: Η γραφική απεικόνιση της λύσης του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (3.2) με $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $k = 1$ και $\lambda = 2$.

Στο σημείο αυτό, ενδιαφέρον παρουσιάζει να εξεταστεί για ποιά c_1 , c_2 , k και λ οι καμπύλες του Διαγράμματος 3.1 τέμνονται, δηλαδή για ποιά c_1 , c_2 , k και λ οι διαφημιστικές δαπάνες της επιχείρησης A ξεπερνούν αυτές της B σε κάποια χρονική στιγμή t . Ενδιαφέρον παρουσιάζει ακόμη, η μέτρηση της διαφοράς που προκύπτει μεταξύ των δαπανών των δύο επιχειρήσεων για διαφήμιση.

Η εικόνα των καμπυλών του Διαγράμματος 3.1 καθώς και η συμμετρία των δύο εξισώσεων δίνουν την απάντηση για το ποιά c_1 , c_2 , k και λ είναι αυτά με τα οποία οι καμπύλες του Διαγράμματος 3.1 τέμνονται. Η διατήρηση των k και λ σε συνδυασμό με την αντιστροφή των c_1 και c_2 για τις δύο εξισώσεις, οδηγούν τελικά στην απάντηση του παραπάνω ερωτήματος κάτι που επιβεβαιώνεται και από το Διάγραμμα 3.2 όπου οι καμπύλες των $x(t)$ και $y(t)$ τέμνονται κατά τη χρονική στιγμή $t = 0,85$.



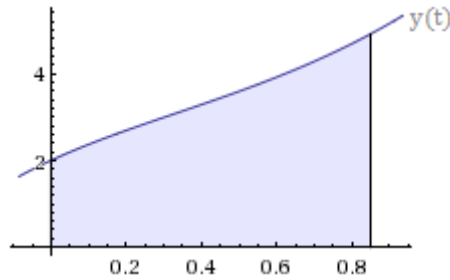
Διάγραμμα 3.2: Η γραφική απεικόνιση της λύσης του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (3.2) με $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $k = 1$ και $\lambda = 2$.

Προκειμένου να υπολογιστεί η διαφορά μεταξύ της διαφημιστικής δαπάνης των δύο επιχειρήσεων, θα υπολογιστεί το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ των συναρτήσεων

$x(t)$ και $y(t)$ στο οποίο αντιστοιχεί η ζητούμενη διαφορά. Ο υπολογισμός θα γίνει με τη βοήθεια ορισμένων ολοκληρωμάτων για τις δύο συναρτήσεις για $t = 0$ έως και $t = 0,85$ που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή όπου οι δύο συναρτήσεις τέμνονται.

Αρχικά θα υπολογιστεί το εμβαδό που ορίζεται από τη συνάρτηση

$$y(t) = \frac{2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}(e^{2\sqrt{2}t} - 1)}{2} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}t}(e^{2\sqrt{2}t} + 1), \text{ για } t = 0 \text{ έως και } t = 0,85.$$

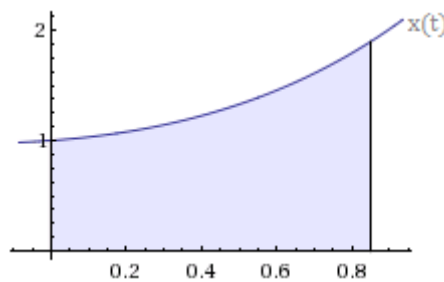


Διάγραμμα 3.3: Το εμβαδό που ορίζεται από τη συνάρτηση (3.3) με $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $k = 1$, $\lambda = 2$ και για $t = 0$ έως και $t = 0,85$.

Το ζητούμενο εμβαδό ισούται με
$$\int_0^{0,85} \left(\frac{1}{2}(2e^{-\sqrt{2}t})(e^{2\sqrt{2}t} + 1) + \frac{e^{-2\sqrt{2}t}(e^{2\sqrt{2}t} - 1)}{2\sqrt{2}} \right) dt = 2,33.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζεται το εμβαδό που ορίζεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = e^{-\sqrt{2}t}(e^{2\sqrt{2}t} + 1) + \frac{\sqrt{1}e^{-\sqrt{2}t}(e^{2\sqrt{2}t} - 1)}{2\sqrt{2}}, \text{ για } t = 0 \text{ έως και } t = 0,85.$$



Διάγραμμα 3.4: Το εμβαδό που ορίζεται από τη συνάρτηση (3.4) με $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $k = 1$, $\lambda = 2$ και για $t = 0$ έως και $t = 0,85$.

Το ζητούμενο εμβαδό ισούται με
$$\int_0^{0,85} \left(\frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}t}(e^{2\sqrt{2}t} + 1) + \frac{2e^{-2\sqrt{2}t}(e^{-2\sqrt{2}t} - 1)}{2\sqrt{2}} \right) dt = 1,44.$$

Η διαφορά μεταξύ των δύο εμβαδών ισούται με 0,89 που αντιστοιχεί στη διαφορά μεταξύ της διαφημιστικής δαπάνης της επιχείρησης A και της διαφημιστικής δαπάνης της επιχείρησης B για $t = 0$ έως και $t = 0,85$. Επομένως, με βάση τον παραπάνω υπολογισμό η επιχείρηση B δαπανά συνολικά 0,85 περισσότερες χρηματικές μονάδες για διαφήμιση σε σχέση με την επιχείρηση A, έως και τη χρονική στιγμή $t = 0,85$.

Σε αυτό το σημείο της ανάλυσης της θεωρίας των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson, ο Δάρας (2001) σημειώνει ότι το αντίστοιχο του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (3.2), δεν μπορεί να θεωρείται πλήρες, δεδομένου ότι δεν συμπεριλαμβάνεται σε αυτό το διεθνές εμπόριο που ενδεχομένως να διενεργείται, η οποιαδήποτε άλλη διεθνής συνεργασία με οφέλη για τις δύο χώρες που πρόκειται να εμπλακούν σε πολεμική σύρραξη. Έτσι, προτείνει ότι στο υπό εξέταση σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, προκειμένου αυτό να καταστεί πλήρες, θα πρέπει να αφαιρείται το κέρδος από την συνεργασία μεταξύ των δύο χωρών, στην περίπτωση που αυτές προχωρήσουν σε πολεμική σύρραξη.

Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση των επιχειρήσεων. Είναι δηλαδή δυνατόν, να συνεργάζονται δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις μεταξύ τους προκειμένου να έχουν κοινά οφέλη (Παπαδάκης, 2012). Αυτό είναι κάτι που επιβεβαιώνεται για παράδειγμα και από τη συνεργασία που υπήρχε έως και το 2011 μεταξύ των επιχειρήσεων Apple και Samsung στον τομέα της κατασκευής smartphones και η οποία διακόπηκε ύστερα από δικαστική διαμάχη που είχε τα αίτιά της στον μεταξύ τους ανταγωνισμό (Chou, 2013; Bosker & Grandoni, 2012).

Επομένως, είναι δυνατό να γίνει η ίδια ανάλυση και στην περίπτωση του ανταγωνισμού μεταξύ των επιχειρήσεων A και B.

Θέτουμε U τον προϋπολογισμό της επιχείρησης A για τη διαφημιστική της εκστρατεία και U_0 τα οικονομικά οφέλη από την εμπορική συναλλαγή με την επιχείρηση B, πριν αυτή διακοπεί λόγω του έντονου μεταξύ τους ανταγωνισμού.

Αντιστοίχως, θέτουμε V τον προϋπολογισμό της επιχείρησης B για τη διαφημιστική της εκστρατεία και V_0 τα οικονομικά οφέλη από την εμπορική συναλλαγή με την επιχείρηση A, πριν αυτή διακοπεί λόγω του έντονου μεταξύ τους ανταγωνισμού.

Με βάση τα νέα δεδομένα, θεωρούμε τις εξαρτημένες μεταβλητές $x = U - U_0$ και $y = V - V_0$. Σε αυτή την περίπτωση, οι παρακάτω συναρτήσεις στοιχειοθετούν τη λύση του συστήματος (3.2):

$$\begin{aligned} x = x_0 &= \frac{kh + bg}{ab - k\lambda} \\ y = y_0 &= \frac{\lambda g + ah}{ab - k\lambda} \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου, $ab - k\lambda \neq 0$.

Προκειμένου να αποδειχθεί μαθηματικά το γεγονός ότι οι επιχειρήσεις A και B θα ανταγωνίζονται η μια την άλλη, όπως και στην περίπτωση των χωρών ότι θα προχωρήσουν σε πολεμική σύρραξη μεταξύ τους, θα πρέπει να διερευνηθεί το γεγονός αν η λύση της ισορροπίας του συστήματος (3.6) είναι ευσταθής ή όχι. Για να καταστεί εφικτή η παραπάνω διερεύνηση θα αναδιατυπωθεί το σύστημα (3.2) ως εξής:

$$\dot{W} = AW + F \quad (3.7)$$

όπου, $W = W(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\dot{W} = \dot{W}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -a & k \\ \lambda & -b \end{pmatrix}$ και, $F = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$.

Η ισορροπημένη λύση του συστήματος θα είναι $W = W_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ και επαληθεύει την εξίσωση $AW_0 + F = 0$. Στη συνέχεια, θέτοντας $Z = Z(t) = W - W_0$, έχουμε $\dot{Z} = \dot{W} = AW + F = A(Z + W_0) = AZ + AW_0 + F = AZ$.

Προκύπτει επομένως ότι η λύση ισορροπίας $\dot{W} = AW + F$ της εξίσωσης (3.7) είναι ευσταθής κατά την περίπτωση που η διανυσματική συνάρτηση $Z=0$ είναι μια ευσταθής λύση της εξίσωσης $\dot{Z} = AZ$. Προκειμένου να προσδιοριστεί η ευστάθεια της $Z=0$ θα πρέπει να υπολογιστεί το πολυώνυμο $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -a - \lambda & k \\ \lambda & -b - \lambda \end{pmatrix} =$

$$= \lambda^2 + (a + b)\lambda + (ab - k\lambda). \text{ Οι ρίζες του } p(\lambda) \text{ είναι } \lambda = \frac{-(a + b) \pm [(a + b)^2 + 4k\lambda]^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Γίνεται επομένως αντιληπτό ότι οι και οι δύο ρίζες του $p(\lambda)$ είναι πραγματικές τιμές διάφορες του μηδενός, αρνητικές όταν $ab - k\lambda > 0$, ενώ η μία από τις δύο είναι

αρνητική όταν $ab - k\lambda < 0$. Έτσι εξάγεται ότι $Z(t) = 0$ και επομένως η ισορροπημένη λύση είναι ευσταθής στην περίπτωση όπου $ab - k\lambda > 0$, ενώ είναι ασταθής στην περίπτωση όπου $ab - k\lambda < 0$.

Ο Richardson θεώρησε ως a και b τη μέση διάρκεια ζωής των κυβερνήσεων των χωρών που βρίσκονται σε εμπόλεμη κατάσταση (Δάρας, 2001). Αντιστοίχως, στην περίπτωση των επιχειρήσεων, οι παράμετροι a και b μπορούν να θεωρηθούν ως η μέση διάρκεια ζωής των διοικήσεών τους. Έτσι, αν για παράδειγμα η μέση διάρκεια ζωής της διοίκησης της επιχείρησης A είναι πέντε χρόνια τότε έχουμε $a = 0,2$ και, αν αντίστοιχα η μέση διάρκεια ζωής της διοίκησης της επιχείρησης B είναι τέσσερα χρόνια, τότε έχουμε $b = 0,25$.

Προκειμένου να υπολογιστούν οι τιμές των k και λ , θεωρείται ότι $g = 0$ και $y = y_1$ ώστε $\frac{dx}{dt} = ky_1 - ax$. Όταν $x = 0$, θα ισχύει $\frac{1}{k} = \frac{y_1}{\frac{dx}{dt}}$ ώστε τελικά το $\frac{1}{k}$ να είναι ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται προκειμένου η επιχείρηση A να δαπανά τα ίδια χρήματα με την επιχείρηση B.

3.2.3. Εφαρμογή του μαθηματικού μοντέλου

Προκειμένου να ελεγχθεί το μαθηματικό μοντέλο που προέκυψε από την παραπάνω ανάλυση, θα γίνει εφαρμογή του με χρήση πραγματικών δεδομένων, υπό τις προϋποθέσεις που τέθηκαν στην αρχή της κατασκευής του.

Η εφαρμογή του μαθηματικού μοντέλου θα γίνει στην αγορά της κινητής τηλεφωνίας στην Ελλάδα. Η συγκεκριμένη αγορά αποτελείται από τρεις επιχειρήσεις, την Cosmote, στην οποία ανήκει διαχρονικά το μεγαλύτερο μερίδιο (Χατζηβασιλειάδου, 2008), τη Vodafone και τη Wind. Η κινητή τηλεφωνία είναι ένας από τους σημαντικότερους τεχνολογικούς τομείς της ελληνικής οικονομίας (Skordoulis & Chalikias, 2014) και συμβάλλει στην ανάπτυξη του εθνικού εισοδήματος, στην αύξηση των κρατικών εσόδων, καθώς και στη δημιουργία νέων θέσεων εργασίας (Drosos et al., 2011). Η εν λόγω αγορά αναπτύσσεται με υψηλούς ρυθμούς και οδηγείται στο στάδιο της ωρίμανσής της (Santouridis & Trivellas, 2010; Skordoulis & Chalikias, 2014). Οι επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στην κινητή τηλεφωνία στην Ελλάδα προσφέρουν τις υπηρεσίες τους σε παρόμοιες τιμές μεταξύ τους, με

αποτέλεσμα οι διαφημιστικές καμπάνιες να διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της ζήτησης αφού επηρεάζουν σημαντικά τους καταναλωτές (Κλειούσης, 2012). Ο ανταγωνισμός μεταξύ των επιχειρήσεων της αγοράς, είναι ιδιαίτερα έντονος (Kyriazopoulos, 2011) και σε συνδυασμό με τα χαρακτηριστικά γνωρίσματά της, της προσδίδουν τη μορφή του ολιγοπωλίου το οποίο ενδεχομένως να οδηγήσει σε συνεργασίες ή ακόμη και σε συγχωνεύσεις (Michalakelis et al., 2008). Τα παραπάνω συνηγορούν στο γεγονός ότι η δομή της αγοράς αυτής προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό τη θεωρητική διατύπωση του μαθηματικού μοντέλου και επομένως είναι κατάλληλη για την εφαρμογή του.

Προκειμένου να καταστεί εφικτή η ανάλυση των δεδομένων με βάση τις προϋποθέσεις του μαθηματικού μοντέλου το οποίο αφορά δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις ή δύο ανταγωνιστικούς συνασπισμούς επιχειρήσεων κατ' αντιστοιχία με την αρχική θεωρία του Richardson που αφορά δύο αντιμαχόμενες χώρες ή δύο αντιμαχόμενες συμμαχίες χωρών, θα θεωρηθεί ότι οι δύο από τις τρεις επιχειρήσεις συμμαχούν μεταξύ τους. Άλλωστε το σενάριο αυτό δεν απέχει από την πραγματικότητα αφού λόγω του έντονου ανταγωνισμού και της δομής της συγκεκριμένης αγοράς η Vodafone και η Wind οδηγήθηκαν τελικά στη σύσταση κοινής εταιρίας για τη μερική κοινή διαχείριση των δικτύων τους το Φεβρουάριο του 2014 (Ναυτεμπορική). Δεν είναι επομένως απίθανη μια μελλοντική συμμαχία των δύο αυτών επιχειρήσεων σε υψηλότερο επίπεδο στρατηγικής.

Τελικά έχουμε ότι οι δύο ανταγωνιστές της αγοράς που θα εξεταστεί η εφαρμογή του μοντέλου είναι η Cosmote και η συμμαχία μεταξύ της Vodafone και της Wind που θεωρούμε ότι λειτουργεί ως μία ενιαία επιχείρηση. Έτσι, επειδή στο ολιγοπώλιο αυτό θεωρούμε στην ουσία τη ύπαρξη μόνο δύο επιχειρήσεων που ανταγωνίζονται η μία την άλλη, οδηγούμαστε τελικά σε μία ειδική μορφή ολιγοπωλίου με δύο επιχειρήσεις.

Το πρώτο ζητούμενο στην εφαρμογή του μοντέλου είναι να προσδιοριστεί αν υπάρχει όντως ανταγωνισμός μεταξύ των επιχειρήσεων.

Επειδή με βάση τα δεδομένα των μεριδίων της αγοράς η Cosmote θα είναι περίπου ισοδύναμη με μια πιθανή συνεργασία μεταξύ Vodafone και Wind θεωρούμε ότι $k = \lambda = 0,9$. Θεωρούμε ακόμη ότι η μέση διάρκεια ζωής των διοικήσεων των επιχειρήσεων είναι ίδια και ισούται με τρία χρόνια. Επομένως έχουμε $a = b = 0,33$.

Με τα παραπάνω δεδομένα το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (3.2) έχει ένα και

μοναδικό σημείο ισορροπίας το $W_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, με $x_0 = \frac{kh + ag}{a^2 - k^2}$ και $y_0 = \frac{kg + ah}{a^2 - k^2}$. Η

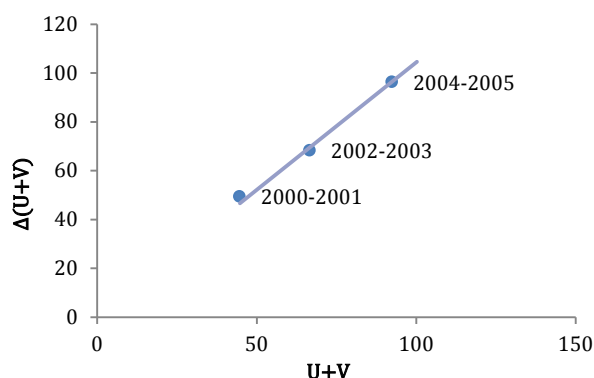
παραπάνω ισορροπία αποδεικνύεται ασταθής αφού $ab - k\lambda = a^2 - k^2 = = 0,11 - 0,81 = -0,7$, δηλαδή ισχύει ότι $ab - k\lambda < 0$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι επομένως συμβατό με το γεγονός ότι υπάρχει ανταγωνισμός μεταξύ της Cosmote και της συμμαχίας της Vodafone με τη Wind στην υπό εξέταση περίπτωση.

Στον Πίνακα 3.1 αναφέρονται οι προϋπολογισμοί διαφήμισης των επιχειρήσεων κατά την περίοδο από το 2000 έως και το 2006.

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Vodafone	13,962	15,761	21,939	20,776	33,131	35,605	36,616
Wind	16,193	17,079	18,879	17,456	23,755	32,011	34,670
Cosmote	14,548	21,209	25,873	31,385	35,546	32,601	31,489
Σύνολο U+V	44,704	54,050	66,692	69,618	92,433	100,219	102,776
d(U+V)	9,345		2,926		7,785		
U+V τον ίδιο χρόνο	49,377		68,155		96,326		

Πίνακας 3.1: Διαφημιστικές δαπάνες (σε εκ. €) εταιριών κινητής τηλεφωνίας στην Ελλάδα κατά την περίοδο 2000-2006. Πηγή: Χατζηβασιλειάδου, 2008.

Από τα δεδομένα του Πίνακα 3.1 προκύπτει το Διάγραμμα 3.5 το οποίο περιγράφει την ετήσια προσαύξηση του αθροίσματος U+V για τα δύο χρόνια που χρειάζεται να γίνει η κάθε προσαύξηση.



Διάγραμμα 3.5: Το $d(U+V)$ ως συνάρτηση του $U+V$ για κάθε χρόνο.

Τα σημεία των που αντιστοιχούν στο άθροισμα $U+V$ για κάθε χρόνο, δηλαδή στα δαπανώμενα χρήματα κάθε χρόνου, βρίσκονται πολύ κοντά στην ευθεία $d(U+V) = 7,896 + 0,17(U+V)$. Ο συντελεστής συσχέτισης $R^2 = 0,924$ πιστοποιεί την πολύ υψηλή συσχέτιση των δεδομένων και επομένως την καταλληλότητα των προβλέψεων του μοντέλου.

Κεφάλαιο 4:

Εφαρμογή των μοντέλων μάχης του Frederick William Lanchester στην περίπτωση των επιχειρήσεων

4.1. Τα μοντέλα μάχης του Frederick William Lanchester

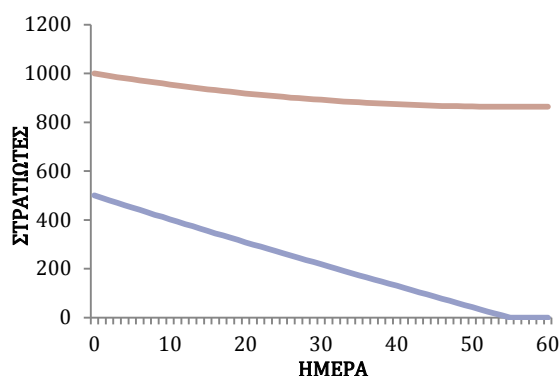
Ο Frederick William Lanchester γεννήθηκε το 1868 στο Λονδίνο και σπούδασε μηχανικός (Ricardo, 1948). Δημιούργησε αεροσκάφη, πετρελαιοκινητήρες, δισκόφρενα, τετρακίνητα οχήματα ενώ συνολικά έλαβε 236 διπλώματα ευρεσιτεχνίας (Ricardo, 1948). Το 1916, επινόησε την επιχειρησιακή στρατηγική για τη βασιλική αεροπορία της Αγγλίας, διατυπώνοντας βασιζόμενος στις διαφορικές εξισώσεις, τα δύο μοντέλα του που υπολογίζουν τις δυνάμεις που απαιτούνται για τη νίκη σε μια στρατιωτική μάχη (Bracken, 1995). Τα μοντέλα αυτά, ήταν ιδιαίτερα χρήσιμα στο στρατό των Η.Π.Α. στην εκστρατεία του Ειρηνικού έναντι του ιαπωνικού στόλου, ενώ μέχρι τα τέλη του 20ου αιώνα είχαν χρησιμοποιηθεί για να προβλέψουν την έκβαση και άλλων πολεμικών μαχών (Fehlmann, 2008).

Στο πρώτο μοντέλο μάχης του Lanchester, θεωρείται ότι δύο δυνάμεις με ίδια πολεμική ικανότητα, η $R(t)$ και η $G(t)$, ξεκινούν μία πολεμική σύρραξη μεταξύ τους κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ και η $R(t)$ εξουδετερώνει g αριθμό στρατιωτών, ενώ αντίστοιχα η $G(t)$ εξουδετερώνει r αριθμό στρατιωτών (MacKay, 2006). Οι αριθμοί g και r , καλούνται συντελεστές αποτελεσματικότητας των δυνάμεων R και G αντίστοιχα (Δάρας, 2001). Έχουμε δηλαδή μία αρχική κατάσταση όπου ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt} = -gG \\ \frac{dR}{dt} = -rR \end{cases} \quad (4.1)$$

Εάν αντί το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων επιλυθεί, απαλειφθεί η μεταβλητή t που αφορά το χρόνο μέσω της διαίρεσης της δεύτερης εξίσωσης με την πρώτη και στη συνέχεια διαχωριστούν οι μεταβλητές, τότε ισχύει ότι $\int rRdR = \int gGdG$ από όπου στη συνέχεια προκύπτει ότι $rR^2 - gG^2 = A$ με A σταθερό αριθμό (MacKay, 2006). Από τη στιγμή που αριθμός των στρατιωτών δεν αλλάζει πρόσημο κατά τη διάρκεια της μάχης, η παραπάνω κατάσταση σημαίνει ότι μόνο ένα

εκ των G και R μπορεί να γίνει μηδέν κάθε φορά, δηλαδή σε κάθε μάχη υπάρχει υποχρεωτικά μόνο ένας νικητής (MacKay, 2006). Σε άλλες εκδοχές του παραπάνω μοντέλου, είναι δυνατόν να προστεθούν επιπλέον μεταβλητές οι οποίες για παράδειγμα θα περιγράφουν το ρυθμό αύξησης ή μείωσης του αριθμού των στρατιωτών των εμπλεκόμενων δυνάμεων κατά τη διάρκεια της μάχης (Lanchester, 1956). Η μείωση του αριθμού των δύο δυνάμεων με βάση την εξίσωση (4.1) μπορεί να αναπαρασταθεί και γραφικά. Η υποθετική περίπτωση όπου η δύναμη R που αρχικά απαριθμεί 1000 στρατιώτες πολεμά με τη δύναμη G που αρχικά απαριθμεί 500 στρατιώτες και τη μάχη την κερδίζει η R την ημέρα 55 περιγράφεται από το Διάγραμμα 4.1.



Διάγραμμα 4.1: Διαγραμματική απεικόνιση της μεταβολής του αριθμού των στρατιωτών με βάση το πρώτο μοντέλο του Lanchester στην περίπτωση μάχης μεταξύ στρατιωτικής δύναμης 1000 ατόμων και στρατιωτικής δύναμης 500 ατόμων, όπου η πρώτη κερδίζει κατά την ημέρα 55.

Εκτός από την πρώτη περίπτωση, υπάρχει και η πιο σύνθετη μαθηματικά περίπτωση, αυτή του δεύτερου μοντέλου του Lanchester, όπου στην πολεμική σύρραξη συμμετέχουν δύο δυνάμεις από τις οποίες η μία έχει μεγαλύτερη πολεμική ικανότητα από την άλλη και δημιουργείται η λεγόμενη ασύμμετρη πολεμική σύρραξη (Lanchester, 1956). Σε αυτή την περίπτωση, η σχέση (4.1) μπορεί να μεταβληθεί με διάφορους τρόπους, αναλόγως του τρόπου με τον οποίο η μία εκ των δύο αντιμαχόμενων υπερέχει της άλλης. Για παράδειγμα, το πλεονέκτημα της μίας εκ των δύο δυνάμεων μπορεί να προέρχεται από το γεγονός ότι είναι αντάρτικη (Δάρας, 2001), από το γεγονός ότι υπερέχει κατά πολύ αριθμητικά ή και από το γεγονός ότι υπερέχει τεχνολογικά (MacKay, 2006; Taylor & Parry, 1974).

Τα μοντέλα μάχης του Lanchester έχουν εφαρμοστεί σε πραγματικές περιπτώσεις μαχών κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου όπως η μάχη στο νησί Ίβο Τζίμα μεταξύ Αμερικάνων και Ιαπώνων το 1945 (Δάρας, 2001; Engel, 1954), η μάχη στις Αρδέννες μεταξύ Αμερικανών και Γερμανών από τα τέλη του 1944 ως τις αρχές του 1945 (Fricker, 1998; Lucas & Turkes, 2004) και η μάχη στο Κουρσκ μεταξύ Σοβιετικών και Γερμανών το 1943 (Lucas & Turkes, 2004).

Σε ό,τι έχει να κάνει με την επιστήμη της διοικητικής των επιχειρήσεων, τα μοντέλα μάχης του Lanchester έχουν εφαρμοστεί σε διάφορες περιπτώσεις.

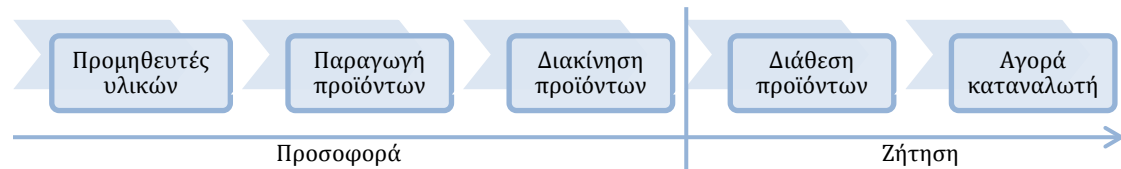
Μία νέα προσέγγιση στα μοντέλα μάχης του Lanchester, εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στην Ιαπωνία από τους Taoka και Yano στη στρατηγική του μάρκετινγκ (Oudhri, 2005). Στην Ιαπωνία άλλωστε, ο τρόπος με τον οποίο το μάρκετινγκ γίνεται αντιληπτό είναι ριζικά διαφορετικός σε σχέση με το Δυτικό τρόπο (Κυριαζόπουλος, 2001; Κυριαζόπουλος & Βρυζίδης, 2008). Ο ανταγωνισμός στις αγορές θεωρήθηκε ως μια πολεμική σύρραξη σε ένα πεδίο μάχης, από τη στιγμή που μια επιχείρηση μπορεί να είναι νικήτρια μόνο στην περίπτωση κατά την οποία καταφέρει να πείσει τους καταναλωτές να αγοράσουν τα δικά της προϊόντα (Taoka, 1997). Έτσι, σε αυτή την περίπτωση δεν μετρώνται οι μάχες που κερδίζονται, αλλά τα μερίδια αγοράς (Taoka, 1997). Σύμφωνα με τον Taoka (1997), η νέα αυτή προσέγγιση στα μοντέλα του Lanchester συνίσταται στην εξεύρεση εκείνων των αναγκών των καταναλωτών που δεν ικανοποιούνται αρκετά. Εάν ένας ανταγωνιστής θέλει να παραμείνει στην αγορά ή να αυξήσει το μερίδιό του, θα πρέπει να βελτιώσει τα χαρακτηριστικά των προϊόντων του (Fehlmann, 2008).

4.2. Εφαρμογή των μοντέλων μάχης του Frederick William Lanchester στην εφοδιαστική αλυσίδα δύο σε oligopolίο δύο επιχειρήσεων

4.2.1. Η λειτουργία της εφοδιαστικής αλυσίδας στο oligopolίο

Μία αλυσίδα εφοδιασμού ως σύνολο καλύπτει από τα βασικά αγαθά μέχρι την πώληση του τελικού προϊόντος στον πελάτη και πέρα από αυτή, μέχρι την ανακύκλωση του χρησιμοποιημένου προϊόντος (Harrison & van Hoek, 2013).

Σύμφωνα με τους Harrison & van Hoek (2013) η αλυσίδα εφοδιασμού είναι «ένα δίκτυο εταιριών που συλλογικά μετασχηματίζουν ένα βασικό αγαθό σε ένα τελικό προϊόν στο οποίο δίδεται αξία από τους τελικούς πελάτες και οι οποίοι διαχειρίζονται τις επιστροφές σε κάθε στάδιο». Στο Διάγραμμα 4.2 απεικονίζεται η μορφή της εφοδιαστικής αλυσίδας.



Διάγραμμα 4.2: Σχηματική απεικόνιση μίας τυπικής εφοδιαστικής αλυσίδας. Πηγή: Καζάζης, 2006.

Η παραγωγή και η διάθεση των προϊόντων και των υπηρεσιών των επιχειρήσεων προϋποθέτουν ταχύτατη και αποτελεσματική λήψη αποφάσεων ένα μέρος των οποίων σχετίζεται και με την εφοδιαστική αλυσίδα (Δημητριάδης & Μηχιώτης, 2007). Η σωστή διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας και η στον κατάλληλο χρόνο ανταπόκριση στη ζήτηση αποτελούν ανταγωνιστικό πλεονέκτημα και κρίσιμο παράγοντα επιτυχίας για μία επιχείρηση (Li et al., 2006). Η σημασία της αποτελεσματικής διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι ακόμα μεγαλύτερη σε αγορές με έντονο ανταγωνισμό. Τέτοιες αγορές με έντονο ανταγωνισμό είναι τα ολιγοπώλια (Tirole, 1988).

Ένας από τους κυριότερους παράγοντες δημιουργίας ανταγωνιστικού πλεονεκτήματος είναι ο σωστός προγραμματισμός και η εκτέλεση μικρών παραγγελιών ώστε τα προϊόντα να μην εξαντλούνται προκειμένου να έχουν συνεχή πρόσβαση σε αυτά οι καταναλωτές, αλλά ταυτόχρονα να μη χρειάζεται η αποθήκευσή τους ώστε τελικά να ελαχιστοποιείται το κόστος αποθήκευσης (Lai & Cheng, 2009).

Η παραπάνω φιλοσοφία αναπτύχθηκε για στην Ιαπωνία και ονομάζεται Just in Time (Κυριαζόπουλος, 1999) και η σύγχρονη τεχνολογία μπορεί να συντελέσει στην εφαρμογή της. Αποτελεί την επέκταση του συστήματος παραγωγής που εφάρμοσε τη Toyota το 1960, γνωστό ως Toyota Production System ή Kanban System, που είχε ως στόχο την προμήθεια των υλικών που είναι απαραίτητα για την παραγωγή με τρόπο που να χρησιμοποιούνται αμέσως ώστε να απαλείφεται το κόστος αποθήκευσης (Sugimori et al., 1977). Η μέθοδος Just in Time αφορά μικρού μεγέθους παραγγελίες που διεκπεραιώνονται ανά τακτά χρονικά διαστήματα με στόχο την προμήθεια των

ελάχιστων δυνατών ποσοτήτων και το αμελητέο κόστος αποθήκευσης (Jones & Hung, 2008). Η φιλοσοφία αυτή επιτυγχάνει οικονομίες στη διαχείριση των αποθεμάτων λόγω της συχνότητας των παραγγελιών και του μικρού μεγέθους τους όπως αναφέρθηκε και παραπάνω (Κυριαζόπουλος, 1999). Αυτό φυσικά έχει σαν αποτέλεσμα τη δυνατότητα μία επιχείρηση να πουλά είτε σε χαμηλότερες τιμές από τους ανταγωνιστές της, είτε να έχει υψηλότερα περιθώρια κέρδους.

Μια πρωτοποριακή μέθοδος που τα επόμενα χρόνια θα χρησιμοποιείται στην εφοδιαστική αλυσίδα είναι η μέθοδος R.F.ID. που συνίσταται στην καταγραφή των αναγκών για παραγγελίες με τη χρήση συσκευών εντοπισμού με ραδιοσυχνότητες (Harrison & van Hoek, 2013). Η μέθοδος R.F.ID. μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτελεσματικότερη εφαρμογή της φιλοσοφίας Just in Time.

Σε ένα ολιγοπώλιο με δύο επιχειρήσεις όπου ο ανταγωνισμός είναι ιδιαίτερα έντονος η εφαρμογή της φιλοσοφίας Just in Time με χρήση της μεθόδου R.F.ID. με αποτέλεσμα τη δυνατότητα πώλησης σε χαμηλότερη τιμή μπορεί να προσδώσει ανταγωνιστικό πλεονέκτημα δεδομένου και του ότι σε αυτή την αγορά σύμφωνα με τους Bester & Petrakis (1995) η τιμή πώλησης είναι ο κυριότερος παράγοντας προτίμησης για ένα προϊόν.

4.2.2. Κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου

Θεωρούμε δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις A και B οι οποίες συνυπάρχουν σε κοινή αγορά και πωλούν και πωλούν το προϊόν P. Η αγορά αυτή χαρακτηρίζεται ως ολιγοπώλιο, δεδομένου ότι θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν άλλες παρόμοιες επιχειρήσεις, ενώ η είσοδος τέτοιων επιχειρήσεων είναι πολύ δύσκολη. Επειδή στο ολιγοπώλιο αυτό θεωρούμε την ύπαρξη μόνο των δύο αυτών επιχειρήσεων, οδηγούμαστε τελικά σε και εδώ στην ειδική μορφή ολιγοπωλίου με δύο επιχειρήσεις όπως ακριβώς στην περίπτωση της εφαρμογής της θεωρίας των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson. Γίνεται, σε πρώτη φάση, δεκτό ότι η τεχνολογία της που χρησιμοποιείται από τις δύο επιχειρήσεις είναι ίδια και δεν μεταβάλλεται. Οι επιχειρήσεις γνωρίζουν η μία τις κινήσεις της άλλης. Θεωρούμε τέλος, ότι οι πωλήσεις επηρεάζονται μόνο από τις διατιθέμενες προς πώληση μονάδες προϊόντος.

Έστω $x(t)$ ο αριθμός των διατιθέμενων προς πώληση μονάδων προϊόντος της επιχείρησης A και $y(t)$, ο αριθμός των διατιθέμενων προς πώληση μονάδων προϊόντος

της επιχείρησης B κατά τη χρονική στιγμή t . Κατά τη διάρκεια της λειτουργίας των επιχειρήσεων A και B οι οποίες ανταγωνίζονται η μία την άλλη, ο ρυθμός μεταβολής των ποσοτήτων $x(t)$ και $y(t)$ ισούται με το ρυθμό της αύξησης των ανεφοδιασμών στα σημεία διανομής, μείον το ρυθμό της μείωσής τους.

Ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνονται και μειώνονται οι διατιθέμενες προς πώληση μονάδες προϊόντος συμβολίζεται με $f(t)$ και $g(t)$ για τις επιχειρήσεις A και B αντίστοιχα.

Ο ρυθμός των διατιθέμενων προς πώληση μονάδων προϊόντος για την επιχείρηση A ισούται $ay(t)$ και για την επιχείρηση B με $bx(t)$, όπου a και b κατάλληλες θετικές σταθερές.

Όπως στην περίπτωση των δύο εμπόλεμων συμβατικών δυνάμεων που αναλύεται από το Δάρα (2001), το μαθηματικό μοντέλο με βάση τα μοντέλα μάχης του Lanchester που περιγράφει την παραπάνω κατάσταση είναι το ακόλουθο:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = -bx + g(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

Κάθε λύση για το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (4.2) για $x_0 = 0$ και $y_0 = 0$ θα δίνεται από τους τύπους:

$$x(t) = -\sqrt{\frac{a}{b}}y_0 \frac{e^x + e^{-x}}{2}(\sqrt{abt}) + \int_0^t \frac{e^x + e^{-x}}{2}(\sqrt{ab}(t-s))f(s)ds \quad (4.3)$$

$$y(t) = -\sqrt{\frac{b}{a}}x_0 \frac{e^x + e^{-x}}{2}(\sqrt{abt}) - \int_0^t \frac{e^x + e^{-x}}{2}(\sqrt{ab}(t-s))g(s)ds \quad (4.4)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία $f(t) = 0$ και $g(t) = 0$, δηλαδή όταν οι πωλήσεις των επιχειρήσεων A και B δεν μεταβάλλονται, το σύστημα (4.2) γράφεται:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay \\ \frac{dy}{dt} = -bx \end{cases} \quad (4.5)$$

Το σύστημα (4.4) καλείται μοντέλο τετραγωνικού τύπου του Lanchester (Lanchester, 1956), κάτι που θεωρείται ανορθόδοξο δεδομένου ότι πρόκειται για ένα μοντέλο

γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (Δάρας, 2001). Κάθε λύση για το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (4.5) θα δίνεται από τους τύπους:

$$x(t) = \frac{1}{2}c_1 e^{-\sqrt{a}\sqrt{b}t} (e^{2\sqrt{a}\sqrt{b}t} + 1) + \frac{\sqrt{a}c_2 e^{-\sqrt{a}\sqrt{b}t} (e^{2\sqrt{a}\sqrt{b}t} - 1)}{2\sqrt{\lambda}} \quad (4.6)$$

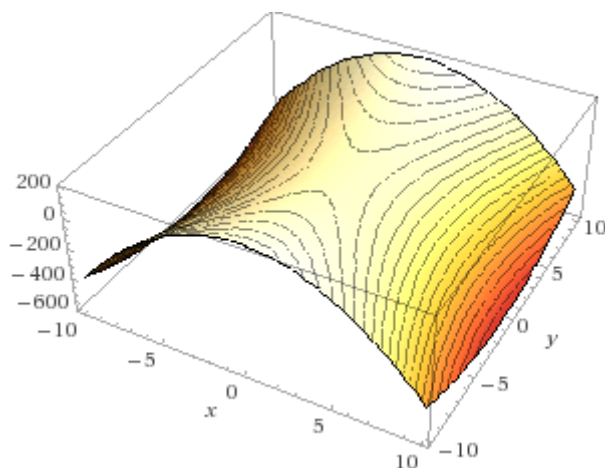
$$y(t) = \frac{1}{2}c_2 e^{-\sqrt{a}\sqrt{b}t} (e^{2\sqrt{a}\sqrt{b}t} + 1) - \frac{\sqrt{b}c_1 e^{-\sqrt{a}\sqrt{b}t} (e^{2\sqrt{a}\sqrt{b}t} - 1)}{2\sqrt{a}} \quad (4.7)$$

Η λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (4.5) εξαγάγει στους τύπους (4.6) και (4.7) τους συντελεστές c_1 και c_2 . Οι συντελεστές αυτοί ισούνται με $x(t)$ και $y(t)$ αντιστοίχως για $t = 0$. Κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ισχύει $c_1 = x(t)$ και $c_2 = y(t)$.

Οι τροχιές του συστήματος (4.5) είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ax}$ από την οποία προκύπτει η ακόλουθη σχέση που ονομάζεται τετραγωνικός τύπος του Lanchester, λόγω των τετραγώνων που εμφανίζονται σε αυτή (Δάρας, 2001):

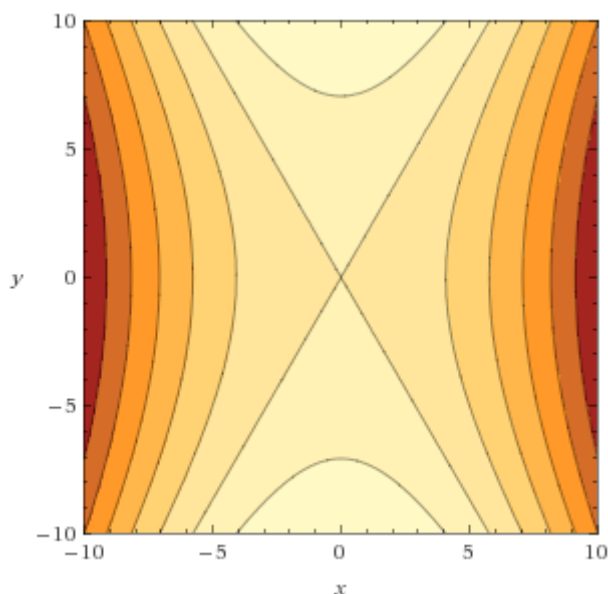
$$ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 = k \quad (4.8)$$

Για κάθε τιμή του k η σχέση (4.8) ορίζει μια ομάδα υπερβολών για όλες τις αρχικές συνθήκες. Το k είναι μια τιμή που επηρεάζεται από την εξίσωση των καμπυλών και τις αρχικές συνθήκες. Για όλες τις τιμές του k και θεωρώντας τιμές για $a = 2$ και $b = 6$ με πεδίο τιμών $[-10, 10]$ για x και y προκύπτει στο χώρο η ομάδα υπερβολών του Διαγράμματος 4.3 θεωρώντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $k > 0$.



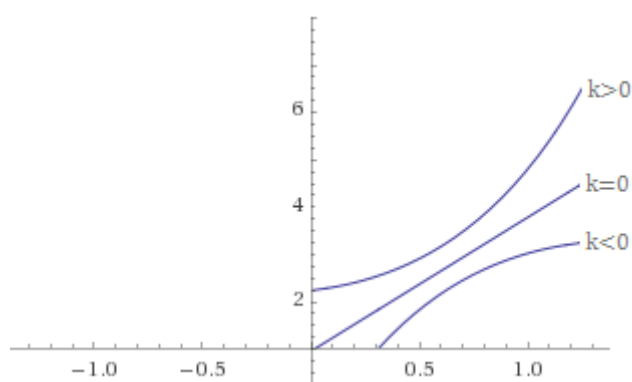
Διάγραμμα 4.3: Οι υπερβολές που προκύπτουν στο χώρο από την εξίσωση $ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 = k$, θεωρώντας $a = 2$ και $b = 6$ και ορίζοντας πεδίο τιμών $[-10, 10]$ για x και y .

Στο επίπεδο των δύο διαστάσεων, οι υπερβολές του Διαγράμματος 4.3, απεικονίζονται στο Διάγραμμα 4.4.



Διάγραμμα 4.4: Οι υπερβολές που προκύπτουν στο επίπεδο από την εξίσωση $ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 = k$, θεωρώντας $a=2$ και $b=6$ και ορίζοντας πεδίο τιμών $[-10, 10]$ για x και y .

Η παραπάνω σχηματική απεικόνιση αφορά την απλή εκδοχή του μοντέλου για τιμές a και b που έχουν οριστεί εξαρχής. Οι υπερβολές που προκύπτουν από τη σχέση (4.8) για κάθε τιμή του a και του b στο πεδίο τιμών που αφορά τη συγκεκριμένη διερεύνηση, δηλαδή για θετικές τιμές, απεικονίζονται στο Διάγραμμα 4.5.



Διάγραμμα 4.5: Τα τμήματα των υπερβολών που προκύπτουν από την εξίσωση $ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 = k$ στο πεδίο των θετικών τιμών.

Στο Διάγραμμα 4.5, απεικονίζεται η ομάδα των υπερβολών που ορίζεται από τις καμπύλες της εξίσωσης (4.8). Γίνεται δεκτό ότι στο ανταγωνιστικό περιβάλλον που

εξετάζεται η παύση λειτουργίας της μίας επιχείρησης θα σημαίνει την επικράτηση της άλλης. Η ήττα στο ανταγωνιστικό περιβάλλον μεταξύ των δύο επιχειρήσεων επέρχεται στα σημεία που τέμνουν τους άξονες. Δηλαδή όταν $x = 0$ ισχύει ότι $k < 0$ και επομένως, η επιχείρηση A θα επικρατεί της B στην περίπτωση. Αντίστοιχα όταν $y = 0$ ισχύει ότι $k > 0$ και επομένως, η επιχείρηση B επικρατεί της A. Τέλος, κατά την περίπτωση όπου το k ισούται με το μηδέν, δηλαδή όταν ισχύει $k = 0$, τότε καμία από τις δύο επιχειρήσεις δεν επικρατεί της άλλης από μαθηματικής άποψης. Ωστόσο, η τελευταία αυτή περίπτωση δεν γίνεται να ισχύει αφού σύμφωνα με τον (MacKay, 2006) στο αρχικό μοντέλο του Lanchester, σε κάθε μάχη υπάρχει υποχρεωτικά μόνο ένας νικητής.

Έτσι, καθεμία από τις δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις που θεωρούνται στο μαθηματικό μοντέλο, θα επιδιώκει τη δημιουργία εκείνης της κατάστασης όπου οι τιμές του k θα σημαίνουν την επικράτησή της έναντι της άλλης. Αυτό σημαίνει ότι η επιχείρηση A επιδιώκει μια κατάσταση όπου θα ισχύει ότι $k < 0$ κάτι που συμβαίνει όταν $b x_0^2 > a y_0^2$. Αντίστοιχα, η επιχείρηση B επιδιώκει μια κατάσταση όπου θα ισχύει ότι $k > 0$ κάτι που συμβαίνει όταν $a y_0^2 > b x_0^2$. Από τη μορφή των ανισώσεων γίνεται αντιληπτό ότι οι επιχειρήσεις θα πρέπει να αυξήσουν τις τιμές των b , x_0 και a , y_0 , αντίστοιχα, προκειμένου να καταφέρουν να επικρατήσουν η μία της άλλης στο περιβάλλον του μεταξύ τους ανταγωνισμού.

Η παραπάνω ανάλυση αφορά την κατάσταση κατά την οποία οι επιχειρήσεις A και B ανταγωνίζονται η μία την άλλη σε ένα περιβάλλον όπου χρησιμοποιούν παρόμοιες μεθόδους παραγωγής και πώλησης των προϊόντων τους, ενώ καθεμία από τις επιχειρήσεις αυτές έχει σαφή εικόνα για τις κινήσεις της άλλης.

Η θεωρία των μοντέλων μάχης του Lanchester εκτός από την περίπτωση των δύο εμπόλεμων συμβατικών δυνάμεων, αφορά και την περίπτωση της μάχης μεταξύ μίας συμβατικής και μίας αντάρτικης δύναμης. Το μοντέλο αυτό, όπως αναλύεται και από το Δάρα (2001), είναι δυνατό να εφαρμοστεί και στην περίπτωση των δύο ανταγωνιστικών επιχειρήσεων.

Στην περίπτωση των δύο αντιμαχόμενων δυνάμεων, όταν η μία από αυτές είναι αντάρτικη και η άλλη είναι συμβατική, είναι ουσιαστικά αδύνατο για τη συμβατική να προβλέψει πότε τα πυρά της επιφέρουν απώλειες στην αντάρτικη (Δάρας, 2001).

Παρόμοια μπορεί να είναι και η κατάσταση όταν η μία από τις δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις δεν δύναται να έχει εικόνα για τις κινήσεις της άλλης. Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται είτε στην υιοθέτηση από την πλευρά της μίας επιχείρησης καινοτόμων μεθόδων τα αποτελέσματα των οποίων θα είναι αδύνατο να προβλεφθούν για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα από την ανταγωνίστριά της και θα της προσφέρουν έτσι ανταγωνιστικό πλεονέκτημα.

Στην περίπτωση της εφοδιαστικής αλυσίδας ένα τέτοιο παράδειγμα θα μπορούσε να αφορά την εφαρμογή της θεωρίας Just in Time με τη χρήση της μεθόδου R.F.ID. όπως αυτές αναπτύχθηκαν παραπάνω. Έστω ότι στον ανταγωνισμό μεταξύ των δύο επιχειρήσεων, η επιχείρηση B καινοτομεί εντάσσοντας στην παραγωγική της διαδικασία τη μέθοδο R.F.ID. Η χρήση της μεθόδου R.F.ID. από την επιχείρηση που καινοτομεί θα είχε ως αποτέλεσμα να μπορεί να διαχειριστεί αποδοτικότερα τα αποθέματά της και μέσω της ελαχιστοποίησης του κόστους να είναι σε θέση να πουλά τα προϊόντα της σε τιμές χαμηλότερες σε σχέση με την ανταγωνίστριά της. Έτσι, θα έχουμε μια κατάσταση την οποία για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα η ανταγωνίστρια της επιχείρησης που καινοτομεί δεν θα μπορεί να αντιμετωπίσει αφού η ίδια δεν θα έχει κάποιο άμεσο τρόπο να μειώσει τα κόστη παραγωγής της και τελικά τις τιμές που πουλά τα προϊόντα της.

Σε αυτή την περίπτωση γίνεται δεκτό ότι για όσο χρονικό διάστημα η επιχείρηση A δεν μπορεί να αντιμετωπίσει την επιχείρηση B αποτελεσματικά. Επομένως, ο ρυθμός των απωλειών διατιθέμενων προς πώληση μονάδων προϊόντος της επιχείρησης B είναι ανάλογος του $x(t)$ ενώ, όσο μεγαλύτερο είναι το $x(t)$ τόσο μεγαλύτερη είναι και η πιθανότητα οι κινήσεις της επιχείρησης A να μειώσουν τις πωλήσεις της B. Αντίστοιχα για την επιχείρηση A, ο ρυθμός απωλειών διατιθέμενων προς πώληση μονάδων του προϊόντος της είναι ανάλογος του $y(t)$ ενώ, όσο μεγαλύτερο είναι το $y(t)$ τόσο αυξάνεται αυτός ο ρυθμός. Επομένως ο ρυθμός των απωλειών των πωλήσεων για την επιχείρηση B θα ισούται με $gx(t)y(t)$.

Όπως στην περίπτωση της ασύμμετρης πολεμικής σύρραξης για την περίπτωση μεταξύ μιας συμβατικής και μιας αντάρτικης δύναμης που αναλύεται από το Δάρα (2001), το μαθηματικό μοντέλο με βάση τα μοντέλα μάχης του Lanchester που περιγράφει την παραπάνω κατάσταση είναι ένα σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και είναι το ακόλουθο:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -gxy + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = -hx + g(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

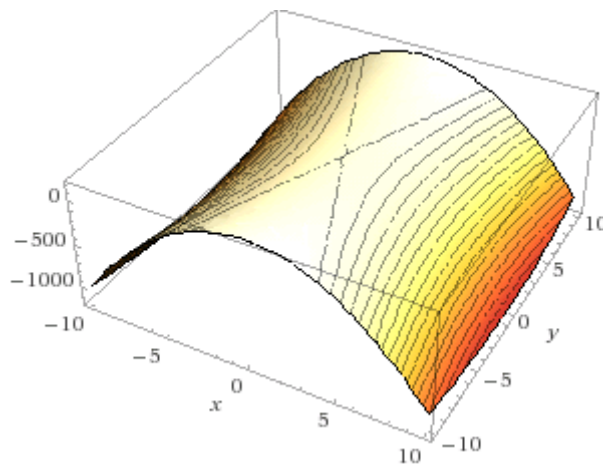
Στην περίπτωση κατά την οποία $f(t) = 0$ και $g(t) = 0$, δηλαδή όταν οι πωλήσεις των επιχειρήσεων A και B δεν μεταβάλλονται, το σύστημα (4.2) γράφεται:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -gxy \\ \frac{dy}{dt} = -hx \end{cases} \quad (4.10)$$

Οι τροχιές του συστήματος (4.10) είναι οι καμπύλες των λύσεων της εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = \frac{hx}{gxy} = \frac{h}{gy}$ από την οποία προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών:

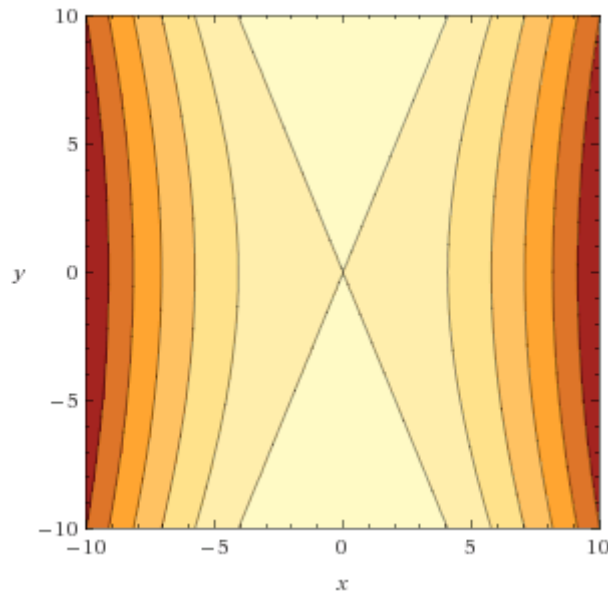
$$gy^2 - 2hx^2 = gy_0^2 - 2hx_0^2 = l \quad (4.11)$$

Για κάθε τιμή του k η σχέση (4.11) ορίζει μια ομάδα υπερβολών για όλες τις αρχικές συνθήκες. Το k είναι μια τιμή που επηρεάζεται από την εξίσωση των καμπυλών και τις αρχικές συνθήκες. Για όλες τις τιμές του k και θεωρώντας τιμές για $g = 2$ και $h = 6$ με πεδίο τιμών $[-10, 10]$ για x και y προκύπτει στο χώρο η ομάδα υπερβολών του Διαγράμματος 4.6 θεωρώντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $k > 0$.



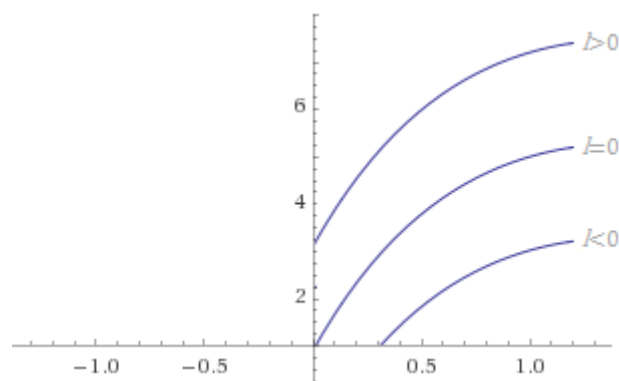
Διάγραμμα 4.6: Οι υπερβολές που προκύπτουν στο χώρο από την εξίσωση $gy^2 - 2hx^2 = gy_0^2 - 2hx_0^2 = l$, θεωρώντας $g = 2$ και $h = 6$ και ορίζοντας πεδίο τιμών $[-10, 10]$ για x και y .

Στο επίπεδο των δύο διαστάσεων, οι υπερβολές του Διαγράμματος 4.6, απεικονίζονται στο Διάγραμμα 4.7.



Διάγραμμα 4.7: Οι υπερβολές που προκύπτουν στο επίπεδο από την εξίσωση $gy^2 - 2hx^2 = gy_0^2 - 2hx_0^2 = l$, θεωρώντας $g=2$ και $h=6$ και ορίζοντας πεδίο τιμών $[-10, 10]$ για x και y .

Η παραπάνω σχηματική απεικόνιση αφορά την απλή εκδοχή του μοντέλου για τιμές g και h που έχουν οριστεί εξαρχής. Οι υπερβολές που προκύπτουν από τη σχέση (4.11) για κάθε τιμή του g και του h στο πεδίο τιμών που αφορά τη συγκεκριμένη διερεύνηση, δηλαδή για θετικές τιμές, απεικονίζονται στο Διάγραμμα 4.8.



Διάγραμμα 4.8: Τα τμήματα των υπερβολών που προκύπτουν από την εξίσωση $gy^2 - 2hx^2 = gy_0^2 - 2hx_0^2 = l$ στο πεδίο των θετικών τιμών.

Στο Διάγραμμα 4.8, απεικονίζεται η ομάδα των υπερβολών που ορίζεται από τις καμπύλες της εξίσωσης (4.8). Γίνεται δεκτό, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση,

ότι στο ανταγωνιστικό περιβάλλον που εξετάζεται, η παύση λειτουργίας της μίας επιχείρησης θα σημαίνει την επικράτηση της άλλης. Όταν ισχύει ότι $l < 0$ η επιχείρηση A θα επικρατεί της B. Αντίστοιχα όταν ισχύει ότι $l > 0$ η επιχείρηση B επικρατεί της A. Τέλος, κατά την περίπτωση όπου το l ισούται με το μηδέν, δηλαδή όταν ισχύει $l = 0$, τότε καμία από τις δύο επιχειρήσεις δεν επικρατεί της άλλης από μαθηματικής άποψης. Ωστόσο, και εδώ αυτή περίπτωση όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως δεν γίνεται να ισχύει αφού σύμφωνα με τον (MacKay, 2006) στο αρχικό μοντέλο του Lanchester, σε κάθε μάχη υπάρχει υποχρεωτικά μόνο ένας νικητής.

4.2.3. Εφαρμογή του μαθηματικού μοντέλου

Προκειμένου να ελεγχθεί το μαθηματικό μοντέλο που προέκυψε από την παραπάνω ανάλυση, θα γίνει εφαρμογή του με χρήση πραγματικών δεδομένων, υπό τις προϋποθέσεις που τέθηκαν στην αρχή της κατασκευής του. Η εφαρμογή αφορά την περίπτωση όπου οι υπό εξέταση επιχειρήσεις ανταγωνίζονται η μία την άλλη σε ένα περιβάλλον όπου χρησιμοποιούν παρόμοιες μεθόδους παραγωγής και πώλησης των προϊόντων τους, ενώ καθεμία από τις επιχειρήσεις αυτές έχει σαφή εικόνα για τις κινήσεις της άλλης και όχι την περίπτωση όπου μία εκ των δύο επιχειρήσεων καινοτομεί.

Η εφαρμογή του μαθηματικού μοντέλου θα γίνει στην αγορά του αναψυκτικού τύπου cola στην Ελλάδα. Η συγκεκριμένη αγορά αποτελείται από αρκετές επιχειρήσεις και εντάσσεται στα πλαίσια μιας ευρύτερης αγοράς, της αγοράς χυμών και αναψυκτικών (ICAP, 2008). Στη συγκεκριμένη περίπτωση το μοντέλο θα εφαρμοστεί αποκλειστικά για την περίπτωση των αναψυκτικών τύπου cola που πωλείται από τις δύο επιχειρήσεις με το μεγαλύτερο μερίδιο στην αγορά, την Coca-Cola 3E Ελληνική Εταιρία Εμφιαλώσεως Α.Ε. και την Pepsico-HBH Α.Β.Ε., δηλαδή τις επιχειρήσεις που πωλούν στην Ελλάδα τα αναψυκτικά Coca-Cola και Pepsi. Ο ανταγωνισμός μεταξύ της Coca-Cola και της Pepsi έχει σε διεθνές επίπεδο παρακινήσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών οι οποίοι έχουν εφαρμόσει και μελετήσει μοντέλα ανάλογα του συγκεκριμένου σε αυτόν. Οι Chintagunta & Vilcassim (1992), χρησιμοποίησαν τα μοντέλα μάχης του Lanchester προκειμένου να εξετάσουν τα αποτελέσματα της διαφημιστικής δαπάνης στην καταναλωτική ζήτηση για την Coca-Cola και την Pepsi στο επίπεδο του ανταγωνισμού μεταξύ των δύο αυτών

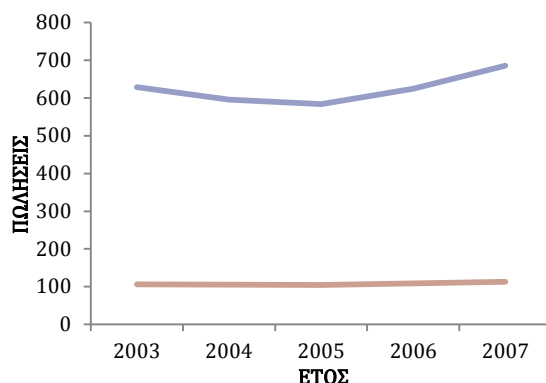
επιχειρήσεων. Ένα αντίστοιχο μοντέλο με τη χρήση στατιστικών δεδομένων για τις διαφημιστικές δαπάνες της Coca-Cola και της Pepsi με στόχο την ανάλυση των στρατηγικών διαφήμισης που χρησιμοποιούνται από αυτές εφάρμοσε και ο Erickson (1992). Στις δύο προηγούμενες μελέτες χρησιμοποιήθηκαν τα μερίδια αγοράς και τα στοιχεία διαφημιστών δαπανών των δύο υπό εξέταση επιχειρήσεων προκειμένου να συγκριθούν ανοικτού βρόχου και οι λύσεις ισορροπίας ανοικτού και κλειστού βρόγχου του Nash για τα μοντέλα του Lanchester. Στα ίδια πλαίσια, οι Wang & Wu (2001) κατέληξαν στο γεγονός ότι οι καταναλωτές ανταποκρίνονται στις διαφημίσεις της Coca-Cola και της Pepsi κατά τον ίδιο τρόπο. Τέλος, χρησιμοποιώντας τα μοντέλα μάχης του Lanchester οι Fruchter & Calish (1997) περιέγραψαν του ανταγωνισμού μεταξύ Coca-Cola και Pepsi και έλυσαν το πρόβλημα του προσδιορισμού της βέλτιστης στρατηγικής διαφήμισης για μέγιστα κέρδη. Στο σύνολό τους όλες οι συγκεκριμένες έρευνες δεν έχουν λάβει υπόψη την πιθανή επίδραση άλλων επιχειρήσεων που πωλούν προϊόντα τύπου cola.

Ο Πίνακας 4.1 παραθέτει τις πωλήσεις Coca-Cola και Pepsi στην Ελλάδα κατά την περίοδο από το 2003 έως και το 2007.

	2003	2004	2005	2006	2007
Coca-Cola	629,046	596,000	584,200	625,000	686,000
Pepsi	106,189	105,045	104,166	108,864	112,858

Πίνακας 4.1: Πωλήσεις Coca-Cola και Pepsi (σε εκ. €) στην Ελλάδα κατά την περίοδο 2003-2007. Πηγή: ICAP, 2008.

Στο Διάγραμμα 4.9 απεικονίζονται οι πωλήσεις των δύο ανταγωνιστικών επιχειρήσεων κατά την εξεταζόμενη περίοδο.



Διάγραμμα 4.9: Πωλήσεις Coca-Cola και Pepsi (σε εκ. €) στην Ελλάδα κατά την περίοδο 2003-2007.

Όπως προκύπτει τόσο από τα δεδομένα του Πίνακα 4.1, όσο και από το Διάγραμμα 4.9, οι πωλήσεις της Coca-Cola ξεπερνούν τις πωλήσεις της Pepsi.

Οι υπό εξέταση επιχειρήσεις διαθέτουν αναπτυγμένα δίκτυα διανομής που καλύπτουν όλη την Ελλάδα και στηρίζονται τόσο σε τοπικούς αντιπροσώπους και χονδρεμπόρους όσο και σε αλυσίδες σούπερ μάρκετ όπου η διανομή πραγματοποιείται συνήθως απευθείας από τις επιχειρήσεις (ICAP, 2008). Η ροή των παραγγελιών είναι συνεχής προκειμένου να καλυφθούν ικανοποιητικά οι ζητούμενες ποσότητες (ICAP, 2008). Για λόγους απλούστευσης του μοντέλου, στη συγκεκριμένη περίπτωση θα θεωρηθεί ότι ο ανεφοδιασμός των καταστημάτων εκτελείται μία φορά, στην αρχή κάθε οικονομικού έτους, ενώ δεν υπάρχει απόθεμα από την προηγούμενη χρήση. Έτσι, το μαθηματικό μοντέλο με βάση τα μοντέλα μάχης του Lanchester που περιγράφει την παραπάνω κατάσταση του ανταγωνισμού μεταξύ Coca-Cola και Pepsi

στην αγορά της Ελλάδας είναι το ίδιο με το (4.2) δηλαδή, όπου,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = -bx + g(t) \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 629,046 \text{ όταν } t < 2003 \\ 596,000 \text{ όταν } 2003 \leq t < 2004 \\ 584,200 \text{ όταν } 2004 \leq t < 2005 \\ 625,000 \text{ όταν } 2005 \leq t < 2006 \\ 686,000 \text{ όταν } 2006 \leq t < 2007 \end{cases} \text{ και, } g(t) = \begin{cases} 106,189 \text{ όταν } t < 2003 \\ 105,045 \text{ όταν } 2003 \leq t < 2004 \\ 104,166 \text{ όταν } 2004 \leq t < 2005 \\ 108,864 \text{ όταν } 2005 \leq t < 2006 \\ 112,858 \text{ όταν } 2006 \leq t < 2007 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος δίνεται από τους τύπους (4.3) και (4.4) αντίστοιχα, αφού λόγω της υπόθεσης για μηδενικό απόθεμα στην αρχή κάθε οικονομικού έτους, ισχύει και εδώ όπως και την κατασκευή του μοντέλου ότι $x_0 = 0$ και $y_0 = 0$. Προκειμένου να επαληθευτεί η δυνατότητα εφαρμογής του μοντέλου, θα πρέπει τα a και b να είναι τέτοια, ώστε οι προβλέψεις του να ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα.

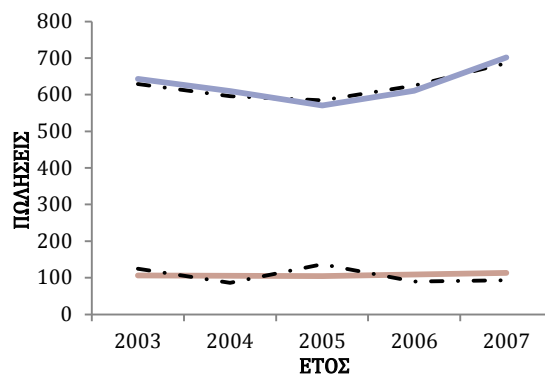
Για τον υπολογισμό του a ολοκληρώνεται το δεξιό μέλος της πρώτης εξίσωσης του συστήματος για t μεταξύ 0 και 5. Έτσι προκύπτει ότι $x(5) = -a \int_0^5 y(t)dt + \int_0^5 f(t)dt =$
 $= -a \int_0^5 y(t)dt + 3120$ αφού η $f(t)$ περιγράφει το σύνολο των ανεφοδιασμών για την Coca-Cola που στην προκειμένη περίπτωση είναι περίπου 3120 εκατομμύρια ευρώ.

Από εδώ προκύπτει ότι $a = \frac{3120}{\int_0^5 y(t)dt} \approx 0,23$. Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του b το

δεξιό μέλος της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος για t μεταξύ 0 και 5. Έτσι προκύπτει ότι $y(5) = -b \int_0^5 x(t)dt + \int_0^5 g(t)dt = -b \int_0^5 x(t)dt + 537$ αφού η $g(t)$ περιγράφει το

σύνολο των ανεφοδιασμών για την Pepsi που στην προκειμένη περίπτωση είναι περίπου 537 εκατομμύρια ευρώ. Από εδώ προκύπτει ότι $b = \frac{537}{\int_0^5 x(t)dt} \approx 0,07$.

Μετά τον υπολογισμό των συντελεστών a και b και την αντικατάστασή τους στις εξισώσεις (4.3) και (4.4) που αποτελούν τις λύσεις του συστήματος 4.2, κατασκευάζεται το διάγραμμα που συγκρίνει τις προβλέψεις του μοντέλου σε σχέση με τις πραγματικές τιμές που έχουν καταγραφεί.



Διάγραμμα 4.10: Σύγκριση πωλήσεων και προβλέψεων πωλήσεων με βάση το μοντέλο για τις Coca-Cola και Pepsi (σε εκ. €) στην Ελλάδα κατά την περίοδο 2003-2007.

Από το Διάγραμμα 4.10 στο οποίο απεικονίζονται οι προβλέψεις των πωλήσεων με βάση το μοντέλο σε σχέση με τις πραγματικές τιμές που έχουν καταγραφεί, προκύπτει το συμπέρασμα ότι το μοντέλο είναι αξιόπιστο δεδομένου ότι το θεωρητικό μοντέλο σχεδόν ταυτίζεται με την πραγματικότητα. Έτσι, τα μοντέλα μάχης του Lanchester είναι δυνατό να εφαρμοστούν υπό τις προϋποθέσεις που τέθηκαν, σε περιπτώσεις επιχειρήσεων όπως η συγκεκριμένη.

Στο συγκεκριμένο μοντέλο λήφθηκε υπόψη αποκλειστικά ο ανεφοδιασμός ως παράγοντας που επηρεάζει το ρυθμό αύξησης ή μείωσης των πωλήσεων, κάτι που ενδεχομένως αρχικά να οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι προβλέψεις θα απέχουν από

την πραγματικότητα με τα αποτελέσματα να μην είναι έγκυρα. Εντούτοις, όπως φάνηκε παραπάνω οι προβλέψεις είναι έγκυρες, κάτι που οφείλεται στο γεγονός ότι τα μοντέλα μάχης του Lanchester είναι από τη φύση τους πολύ απλούστερα από άλλα αντίστοιχα με αυτά μοντέλα, με αποτέλεσμα να καθιστούν ισχυρή την οποιαδήποτε παραδοχή και μέσα την κατάλληλη επεξεργασία να δίνουν σαφή συμπεράσματα (MacKay, 2006).

Κεφάλαιο 5:

Συμπεράσματα

Από την παραπάνω έρευνα, προέκυψε το συμπέρασμα ότι τα μαθηματικά μοντέλα που κατασκευάστηκαν με βάση τη θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson και τα μοντέλα μάχης του Lanchester είναι δυνατό να εφαρμοστούν στις περιπτώσεις των ολιγοπωλίων με δύο επιχειρήσεις που εξετάστηκαν.

Η θεωρία των ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson εφαρμόστηκε σε δευτερογενή δεδομένα της διαφημιστικής δαπάνης των εταιριών κινητής τηλεφωνίας στην Ελλάδα για την περίοδο από το 2000 έως και το 2006. Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαίωσαν τη δυνατότητα εφαρμογής του μοντέλου που κατασκευάστηκε σε αυτή την περίπτωση δεδομένης της καλής προσαρμογής των προβλέψεων στα πραγματικά δεδομένα.

Η θεωρία των μοντέλων μάχης του Lanchester εφαρμόστηκε σε δευτερογενή δεδομένα των πωλήσεων και των ανεφοδιασμών των σημείων διανομής για τα αναψυκτικά Coca-Cola και Pepsi στη ελληνική αγορά για την περίοδο μεταξύ 2003 και 2007. Από την εξέταση του διαγράμματος στο οποίο απεικονίζονται τα πραγματικά δεδομένα των πωλήσεων και οι προβλέψεις αυτών με βάση το μαθηματικό μοντέλο που κατασκευάστηκε, προέκυψε η μεταξύ τους ταύτιση σε αρκετά υψηλό βαθμό κάτι που πιστοποιεί την ορθότητα των προβλέψεων του μοντέλου και τη δυνατότητα εφαρμογής του στη συγκεκριμένη περίπτωση. Στο μοντέλο που κατασκευάστηκε λήφθηκε υπόψη αποκλειστικά ο ανεφοδιασμός ως παράγοντας που επηρεάζει το ρυθμό αύξησης ή μείωσης των πωλήσεων, χωρίς ωστόσο αυτό να επηρεάζει την εγκυρότητα των προβλέψεων.

Η καλή προσαρμογή των μαθηματικών μοντέλων που κατασκευάστηκαν βασισμένα σε δύο μαθηματικές θεωρίες πολέμου, αποδεικνύει το γεγονός ότι όπως υποστηρίζει ο Taoka (1997) οι σύγχρονες αγορές όπου οι επιχειρήσεις ανταγωνίζονται η μία την άλλη μπορούν να θεωρηθούν και ως μια πολεμική σύρραξη σε ένα πεδίο μάχης. Αυτό συμβαίνει από τη στιγμή που μία επιχείρηση μπορεί να είναι νικήτρια μόνο στην περίπτωση κατά την οποία καταφέρει να πείσει τους καταναλωτές να αγοράσουν τα δικά της προϊόντα (Taoka, 1997). Σε αυτή την περίπτωση που αφορά τις επιχειρήσεις

δεν μετρώνται οι μάχες που κερδίζονται όπως στον πόλεμο, αλλά μετρώνται τα μερίδια αγοράς (Taoka, 1997).

Ειδικότερα στο σημερινό έντονα ανταγωνιστικό και μεταβαλλόμενο περιβάλλον των επιχειρήσεων, η λήψη των σωστών αποφάσεων είναι σημαντικότερη από ποτέ αφού η επικράτηση μίας επιχείρησης έναντι του ανταγωνισμού είναι δυνατό να κριθεί από μικρές λεπτομερείς. Η σωστή χρήση των μοντέλων της επιχειρησιακής έρευνας τα οποία υποστηρίζουν τη λήψη των κατάλληλων αποφάσεων είναι επομένως ιδιαίτερα κρίσιμη και σημαντική.

Τα παραπάνω τονίζουν τη σημασία της επιστήμης της επιχειρησιακής έρευνας για τις επιχειρήσεις, αφού με τη χρήση των μαθηματικών μοντέλων της είναι δυνατή η βελτιστοποίηση σε διάφορες λειτουργίες όπως η διαφήμιση και η εφοδιαστική αλυσίδα, κάτι που μπορεί να τους προσδώσει ανταγωνιστικό πλεονέκτημα έναντι των ανταγωνιστών τους.

Από τη συγκεκριμένη έρευνα και τις αντίστοιχες που έχουν διενεργηθεί κατά το παρελθόν κρίνεται δυνατό μοντέλα μαθηματικών θεωριών πολέμου να εφαρμοστούν σε περιπτώσεις που να αφορούν τις σύγχρονες επιχειρήσεις ύστερα πάντοτε από τις κατάλληλες τροποποιήσεις και τη θέσπιση των κατάλληλων θεωρητικών προϋποθέσεων.

Στη συγκεκριμένη έρευνα τα μοντέλα που κατασκευάστηκαν βασίστηκαν στις αρχικές θεωρίες και έγιναν αρκετές παραδοχές προκειμένου να γίνουν απλούστερα χωρίς ωστόσο αυτές να επηρεάζουν την εγκυρότητά τους.

Σε ένα επόμενο βήμα, προτείνεται η κατασκευή παρόμοιων μοντέλων τα οποία θα λαμβάνουν υπόψη τους περισσότερους παράγοντες όπως είναι η τιμή πώλησης και η ποιότητα των προϊόντων που είναι δυνατό να επηρεάσουν τις προτιμήσεις των καταναλωτών και τελικά τις πωλήσεις των επιχειρήσεων.

Προτείνεται τέλος, η περαιτέρω διερεύνηση της εφαρμογής παρόμοιων μοντέλων όπως η ομοιόμορφη τακτική των πυρών στόχευσης ή τα αιτιοκρατικά μοντέλα μάχης που διεξάγεται μεταξύ ετερογενώς οπλισμένων τακτικών στρατιωτικών δυνάμεων με στοχευμένα πυρά (Δάρας, 2013).

Βιβλιογραφία

- Γεωργούδης, Ι., Παλιατσός, Α. & Πρεζεράκος, Ν. (1995). *Διαφορικές εξισώσεις*. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.
- Δάρας, Ν. (2001). *Διαφορικές εξισώσεις και μαθηματικές θεωρίες πολέμου*. Τόμος Β'. Αθήνα: Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων.
- Δάρας, Ν. (2013). *Επιχειρησιακή έρευνα και στρατιωτικές εφαρμογές αυτής*. Τόμος Β'. Βιβλίο 2ο. Αθήνα: Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων.
- Δημητριάδης, Σ. & Μηχιώτης, Α. (2007). *Διοίκηση παραγωγικών συστημάτων. Βασικές θεωρητικές αρχές και εφαρμογές στη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων*. Αθήνα: Εκδόσεις Κριτική.
- Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών. Διαθέσιμο σε: <http://www.eeee.org.gr/PublicPages/BusinessResearch.aspx> (Ανακτήθηκε: 10 Απριλίου, 2014).
- Ζώης, Κ. & Γαρουφάλης, Κ. (2008). *Οικονομικός προγραμματισμός επιχειρήσεων*. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.
- Καζάζης, Ν. (2006). *Αποτελεσματικό μάρκετινγκ για κερδοφόρες πωλήσεις*. 2η έκδοση. Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλη.
- Κλειούσης, Ε. (2012). *Η αγορά των κινητών τηλεπικοινωνιών στην Ελλάδα: μια ολοκληρωμένη διερεύνηση της δομής της αγοράς*. Διατριβή, (Ph.D.). Χίος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- Κυριαζόπουλος, Π. (1999). *Διοίκηση Logistics*. 2η έκδοση. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.
- Κυριαζόπουλος, Π. (2001). *Εφαρμοσμένο Marketing*. 3η έκδοση. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.
- Κυριαζόπουλος, Π. & Βρυζίδης, Λ. (2008). *Εισαγωγή στην Επιχειρηματικότητα*. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.
- Ναυτεμπορική. Διαθέσιμο σε: <http://www.naftemporiki.gr/finance/story/770103/vodafone-wind-oloklirothike-i-sustasi-koinis-etaireias> (Ανακτήθηκε: 28 Φεβρουαρίου, 2014).
- Παπαδάκης, Β. (2012). *Στρατηγική των επιχειρήσεων: ελληνική και διεθνής εμπειρία*. Τόμος Α'. 6η έκδοση. Αθήνα: Εκδόσεις Μπένου.
- Φούντας, Ε. (2013). *Μαθηματικά οικονομικών και διοικητικών επιστημών*. 2η έκδοση. Πειραιάς: Varmar Publications.
- Φράγκος, Χ. (1999). *Ανώτερα μαθηματικά*. Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλη.

- Χατζηβασιλειάδου, Σ. (2008). *Ποσοτική διερεύνηση της αποτελεσματικότητας της διαφήμισης στις πωλήσεις εταιριών κινητής τηλεφωνίας*. Διατριβή, (M.Sc.). Πειραιάς: Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- Bass, F.M., Krishnamoorthy, A., Prasad, A. & Sethi, S.P. (2005). Generic and brand advertising strategies in a dynamic duopoly. *Marketing Science*. 24(4): 556-568.
- Bester, H. & Petrakis, E. (1995). Price competition and advertising in oligopoly. *European Economic Review*. 39 (1): 1075-1088.
- Bosker, B. & Grandoni, D. (August 24, 2012). *Apple - Samsung lawsuit: what you need to know about the verdict*. Available at: http://www.huffingtonpost.com/2012/08/24/apple-samsung-lawsuit-verdict_n_1829268.html (Retrieved: December 16, 2013).
- Boyd, H. Walker, O. & Larese, Z.C. (2002). *Το μάρκετινγκ και εισαγωγή στη διοίκηση μάρκετινγκ. Μια στρατηγική προσέγγιση με διεθνή προσανατολισμό θεωρητικής και πρακτικής προσέγγισης*. Επιστημονική επιμέλεια: Πατσίκας, Σ. Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1998).
- Bracken, J. (1995). Lanchester models of the Ardennes campaign. *Naval Research Logistics*. 42(4): 559-577.
- Cheema, C. (2005). *Operations research*. New Delhi: Laxmi Firewall Media Publications.
- Chintagunta, P. & Vilcassim, N. (1992). An empirical investigation of advertising strategies in a dynamic duopoly. *Management Science*. 38(9): 1230-1244.
- Chou, E. (2013). *A strategy for American innovation: applying Immanuel Kant's theory of knowledge to tech patent law*. Master of Science Dissertation. Washington: Georgetown University.
- Dayal, R., Zachariah, P. & Rajpal, K. (1996). *Advertising and promotion management*. New Delhi: Mittal Publications.
- Deal, K. (1979). Optimizing advertising expenditures in a dynamic duopoly. *Operations Research*. 27(4): 682-692.
- Drosos, D., Tsotsolas N., & Manolintzas, P. (2011). The relationship between customer satisfaction and market share: The case of mobile sector in Greece. *International Journal of Engineering and Management*. 3(2): 87-105.
- Dunne, J.P., Nikolaidou, E. & Smith, P.R. (1999). *Arms race models and econometric applications*. In: Proceedings of the Conference on The Arms Trade, Security and Conflict. London, June 2009. London: Middlesex University.

- Eiselt, H. & Sandblom, C. (2010). *Operations research. A model-based approach*. Heidelberg: Springer Science and Business Media.
- Engel, J. (1954). A verification of Lanchester's law. *Journal of Operations Research Society of America*. 2(2): 163-171.
- Erickson, G. (1992). Empirical analysis of closed-loop duopoly advertising strategies. *Management Science*. 38(12): 1732-1749.
- Erlenkotter, D. (1990). Ford Whitman Harris and the economic order quantity model. *Operations Research*. 38(6): 937-946.
- Fehlmann, T. (2008). *New Lanchester theory for requirements prioritization*. In: Proceedings of the Second International Workshop on Software Product Management. Barcelona, September 2008. Barcelona: I.E.E.E, pp. 35-40.
- Fricker, R. (1998). Attrition models of the Ardennes campaign. *Naval Research Logistics*. 45(1): 1-22.
- Fruchter, G. & Kalish, S. (1997). Closed-loop advertising strategies in a duopoly. *Management Science*. 43(1): 54-63.
- Jones, E. & Hung, C. (2008). *R.F.I.D. in Logistics: a practical introduction*. Boca Raton: Taylor & Francis Group.
- Harrison, A & van Hoek, R. (2013). *Logistics μάνατζμεντ και στρατηγική: ανταγωνιστικό πλεονέκτημα μέσω της αλυσίδας εφοδιασμού*. Επιστημονική επιμέλεια: Γιαννακόπουλος, Δ. & Μοσχούρης, Σ. Αθήνα: Εκδόσεις Rosili (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 2011).
- ICAP. (2008). *Κλαδική μελέτη: χυμοί-αναψυκτικά*. Αθήνα: ICAP.
- Kivotos, D. & Frangos, C. (2009). *The life and scientific discoveries of George Bernard Dantzig "father of linear programming and founder of operational research*. In: Proceedings of the 2nd International Conference: Quantitative and Qualitative Methodologies in the Economic and Administrative Sciences. Athens, May 2009. Athens: Technological Education Institute of Athens, pp. 251-259.
- Krarpup, J. (2004). IFORS' operational research hall of fame Agner Krarpup Erlang. *International Transactions in Operational Research*. 11(1): 117-119.
- Kurtz, D. (2012). *Contemporary marketing*. 15th edition. Ohio: South-Western Cengage Learning.
- Kyriazopoulos, P. (2011). The effect of service quality on customer retention: the case of Wind, a mobile provider. *Working Papers Series*. 8(7): 5-22.

- Lanchester, F.W. (1956). Mathematics in warfare. *The World of Mathematics*. 4: 2138-2157.
- Li, S., Ragu-Nathan, B., Ragu-Nathan, T.S., Rao, S.S. (2006). The impact of supply chain management practices on competitive advantage and organizational performance. *Omega*. 34(2): 107-124.
- Lichbach, M.I. (1989). Stability in Richardson's arms races and cooperation in prisoners' dilemma arms rivalries. *American Journal of Political Science*. 33(4): 1016-1047.
- Little, J. (1979). Aggregate advertising models: the state of the art. *Operations Research*. 27(4): 629-667.
- Lucas, T. & Turkes, T. (2004). Fitting Lanchester models to the battles of Kursk and Ardennes. *Naval Research Logistics*. 51(1): 95-116.
- Lynch, P. (2008). The origins of computer weather prediction and climate modeling. *Journal of Computational Physics*. 227: 34-36.
- McGinnis, M. (1991). Richardson, rationality, and restrictive models of arms races. *Journal of Conflict Resolution*. 35(3): 443-473.
- McKay, N. (2006). Lanchester combat models. *Math Today*. 42: 170-178.
- Michalakelis, C., Varoutas, D. & Sphicopoulos, T. (2008). Diffusion models of mobile telephony in Greece. *Telecommunications Policy*. 32: 234-245.
- Naidu, N., Badu, K. & Rajendra, G. (2007). *Operations research: question bank*. New Delhi: I.K. International Publishing House.
- Nguyen, D. & Shi, L. (2006). Competitive advertising strategies and market-size dynamics: a research note on theory and evidence. *Management Science*. 52(6): 965-973.
- Oudrhiri, R. (2005). Six Sigma and DFSS for IT and Software Engineering. *The Quarterly Journal of the TickIT Software Quality Certification Scheme*. 4: 7-9.
- Rapoport, A. (1957). Lewis F. Richardson's mathematical theory of war. *Journal of Conflict Resolution*. 1(3): 249-299.
- Ricardo, H. (1948). Frederick William Lanchester. *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*. 5(16): 756-766.
- Santouridis, I & Trivellas, P. (2010). Investigating the impact of service quality and customer satisfaction on customer loyalty in mobile telephony in Greece. *The Total Quality Management Journal*. 22(3): 330-343.

- Skordoulis, M. & Chalikias, M. (2014). *Staff attraction and selection methods implemented in the mobile telecommunications industry in Greece*. Poster presentation at: 8th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation (WSMC-8). March 12-15, 2014. Praia Santiago, Cape Verde.
- Sugimori, Y., Kusunoki, K., Cho, F. & Uchikawa, S. (1977). Toyota production system and Kanban system Materialization of just-in-time and respect-for-human system. *International Journal of Production Research*. 15(6): 553-564.
- Sznajd-Weron, K. & Weron R. (2003). How effective is advertising in duopoly markets? *Physica A: statistical mechanics and its applications*. 324(1-2): 437-444.
- Taoka, N. (1997). *Lanchester strategy: an introduction*. London: Lanchester Press.
- Taylor, J. & Parry, S. (1975). Force-ratio considerations for some Lanchester-type models of warfare. *Operations Research*. 23(3): 522-533.
- Tirole, J. (1988). *The theory of industrial organization*. Boston: M.I.T. Press.
- Tiwary, N. & Shandilya, S. (2006). *Operations research*. New Delhi: Prentice-Hall of India.
- Wang, Q. & Wu, Z. (2001). A duopolistic model of dynamic competitive advertising. *European Journal of Operational Research*. 128(1): 213-226.